Μάνος Λυδάκης Προβλήματα—Εργαστήριο 7

Σε αυτό το εργαστήριο, όλες οι αποδείξεις πρέπει να γίνουν με επαγωγή.

1: Δείξτε ότι, για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, $2^n < 3^n$.

2: Δείξτε ότι, για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, το 3 διαιρεί τον ακέραιο $n^3 - n$.

Υποδείξεις: Α. Το 3 διαιρεί τον ακέραιο m ακριβώς όταν το m γράφεται ως $m = 3k$ με k ακέραιο. **Β.** $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

3: Στο Πριγκηπάτο της Τριτοπεντολανδίας, το νόμισμα είναι το Τριτοπέντιο (ΤΠ), που κυκλοφορούσε σε κέρματα του ενός, τρία, και πέντε ΤΠ, μέχρι που ο Πρίγκηπας της Τριτοπεντολανδίας κατάργησε το κέρμα του 1 ΤΠ, επειδή δεν του άρεσε το προφίλ του σε αυτό το κέρμα.

Δείξτε ότι οι Τριτοπεντολανδοί μπορούν να πληρώσουν ακριβώς, μόνο με κέρματα, κάθε ακέραιο ποσό που είναι τουλάχιστον 8 ΤΠ.

Υπόδειξη: Επαγωγικά, θεωρούμε γνωστή την ανάλυση του n σε m κέρματα των 3 και k κέρματα των 5. Θα τροποποιήσουμε αυτή την ανάλυση για να αναλύσουμε το $n+1$. Δεδομένου $n = 3m + 5k$, διακρίνουμε περιπτώσεις ως εξής: Η πρώτη περίπτωση είναι $k \geq 1$, και η δεύτερη είναι $k = 0$. Στην πρώτη περίπτωση, αντικαταστήστε ένα κέρμα των 5 με δύο κέρματα των 3. Στην δεύτερη περίπτωση, θυμηθείτε ότι $n \geq 8$.

4: Δείξτε ότι κάθε ακέραιος $n \geq 1$ γράφεται ως άθροισμα διαφορετικών (ακεραίων)δυνάμεων του 2. (Παραδείγματα: $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $3 = 2^1 + 2^0$, $4 = 2^2$, $5 = 2^2 + 2^0$, $6 = 2^2 + 2^1$, $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$.)

Υποδείξεις: Α. Πλήρης επαγωγή. **Β.** Σημασία έχει το αν ο n είναι άρτιος ή όχι. **Γ.** Αρκεί να γράψετε τη λύση «με λόγια» (δεν είναι απαταίτητο να γράψετε «με σύμβολα» τι σημαίνει «άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2»).

5: Βρείτε το λάθος στην παρακάτω απόδειξη, όπου θα αποδείξω ότι όλα τα άλογα έχουν το ίδιο χρώμα:

Αρκεί να δείξω ότι, για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, οποιοδήποτε σύνολο αλόγων $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ και αν διαλέξω, όλα τα άλογα στο A έχουν το ίδιο χρώμα. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n.

Βάση της επαγωγής: Πρέπει να αποδείξω ότι όλα τα άλογα στο $\{a_1\}$ έχουν το ίδιο χρώμα. Αυτό είναι προφανές.

Επαγωγική Υπόθεση: Για κάποιο ακέραιο $n \geq 1$, υποθέτω ότι, οποιοδήποτε σύνολο αλόγων $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ και αν διαλέξω, όλα τα άλογα στο A έχουν το ίδιο χρώμα.

Επαγωγικό Βήμα: Έστω $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ ένα σύνολο αλόγων. Αρκεί να δείξω ότι όλα τα άλογα στο A' έχουν το ίδιο χρώμα.

Έστω $A'' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, και $A''' = \{a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}\}$. Από την επαγωγική υπόθεση, η πρώτη ομάδα αλόγων (τα άλογα στο A'') έχουν το ίδιο χρώμα. Παρομοίως, εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στο A''', η δεύτερη ομάδα αλόγων αποτελείται και αυτή από άλογα ιδίου χρώματος. Αφού υπάρχουν άλογα που ανήκουν και στις δυο ομάδες, το χρώμα των αλόγων στην πρώτη ομάδα είναι το ίδιο με το χρώμα των αλόγων στην δεύτερη ομάδα, δηλαδή τα $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ έχουν ίδιο χρώμα, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Σχόλιο: Αυτό το πρόβλημα είναι ακόμα πιο διασκεδαστικό στα αγγλικά, όπου η φράση «αυτό είναι άλογο με διαφορετικό χρώμα» (that is a horse of a different color) σημαίνει «αυτή είναι εντελώς διαφορετική περίπτωση».