Μάνος Λυδάκης Προβλήματα—Εργαστήριο 8

1: Έστω $a = 2^9 3^8 5^7$ και $b = 7^9 3^5 5^9$. Γράψτε το μέγιστο κοινό διαιρέτη d και το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο c των a και b ως γινόμενο πρώτων αριθμών. Επαληθεύστε ότι $ab = cd$.

2: Εφαρμόστε τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο για να γράψετε τον ΜΚΔ των $a = 165$ και $b = 48$ ως γραμμικό συνδυασμό των a και b.

3: Έστω $n = 63, m = 65$.

Α: Διαιρείται το n^2 με το m; Το m^2 με το n;

Β: Γενικότερα, ποιοί από τους n^k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ διαιρούνται με το m;

Υποδείξη: Αν το m διαιρεί το M, τότε κάθε πρώτος παράγοντας του m είναι αναγκαστικά πρώτος παράγοντας του M. Ποιοί είναι οι πρώτοι παράγοντες του n^k;

4: **Α:** Έστω $n = 24$. Πόσους διαιρέτες έχει το n;

Β: Γενικότερα, ποιούς διαιρέτες έχει το n, αν $n = p^3 q$ όπου p και q είναι δυο διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί; (Υπόδειξη: επαναλαμβάνω την υπόδειξη του **3**, δηλαδή ότι αν το m διαιρεί το n, τότε κάθε πρώτος παράγοντας του m είναι αναγκαστικά πρώτος παράγοντας του n).

5: Έστω a και b θετικοί ακέραιοι που έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη d και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο c. Στο πρόβλημα αυτό θα αποδείξετε ότι $ab = cd$.

Α: Αποδείξτε ότι το $\frac{ab}{d}$ είναι ακέραιος.

Β: Αποδείξτε ότι το $\frac{ab}{d}$ είναι πολλαπλάσιο του a.

Γ: Αποδείξτε ότι το $\frac{ab}{d}$ είναι πολλαπλάσιο του b.

Δ: Αποδείξτε ότι $ab \geq cd$ (υπόδειξη: το $\frac{ab}{d} \geq c$ είναι εύκολο από τα **Β** και **Γ**).

Ε: Εξηγήστε γιατί το $\frac{ab}{c}$ είναι ακέραιος. Θεωρήστε γνωστό ότι κάθε κοινό πολλαπλάσιο είναι και αυτό πολλαπλάσιο του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου.

Ζ: Αποδείξτε ότι το $\frac{ab}{c}$ είναι διαιρέτης του a (υπόδειξη: $a = \frac{ab}{c}\frac{c}{b}$).

Η: Αποδείξτε ότι το $\frac{ab}{c}$ είναι διαιρέτης του b.

Θ: Αποδείξτε ότι $ab \leq cd$ (υπόδειξη: το $\frac{ab}{c} \leq d$ είναι εύκολο από τα **Ζ** και **Η**).

Ι: Παρατηρήστε τι αποδείξατε στα **Δ** και **Θ**.

6: Να αποδείξετε ότι, αν p είναι ένας πρώτος αριθμός που διαιρεί το $(p + 2)^3$, τότε $p = 2$ (δυο υποδείξεις: πρώτη, αν $p|a_1 a_2$ τότε ο p διαιρεί κάποιο a_i, και δεύτερη, αν $p|a$ και $p|b$ τότε $p|a - b$).