Μάνος Λυδάκης Προβλήματα—Εργαστήριο 10

Σε αυτό το εργαστήριο κ, λ, μ συμβολίζουν πληθικούς αριθμούς. Τα παρακάτω μπορείτε να τα θεωρείτε γνωστά:

Κάθε σύνολο A έχει ένα πληθικό αριθμό κ (συμβολισμός: $|A| = \kappa$). Αντιστρόφως, κάθε πληθικός αριθμός κ είναι ο πληθικός αριθμός κάποιου συνόλου A. Δεδομένων δυο πληθικών αριθμών, ισχύει πάντα ότι κάποιος από τους δυο είναι μικρότερος ή ίσος από τον άλλο. Υπάρχει μια ένα-προς-ένα συνάρτηση από το A στο B ακριβώς όταν $|A| \leq |B|$, το οποίο ισχύει ακριβώς όταν υπάρχει μια επί συνάρτηση από το B στο A. Η ισότητα $\kappa = \lambda$ ισχύει ακριβώς όταν ισχύουν και οι δυο ανισότητες $\kappa \leq \lambda$ και $\lambda \leq \kappa$. Η μεταβατική ιδιότητα ισχύει, δηλαδή αν $\kappa \leq \lambda$ και $\lambda \leq \mu$ τότε $\kappa \leq \mu$ (αυτό είναι μια καλή άσκηση για το σπίτι, μάλιστα λύστε την με δυο τρόπους, πρώτα με ένα-προς-ένα συναρτήσεις και μετά με επί συναρτήσεις). Τέλος, για κάθε θετικό ακέραιο n, το σύνολο $A_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ έχει πληθικό αριθμό n, και το $A_0 := \varnothing$ έχει πληθικό αριθμό $n = 0$.

1: Αποδείξτε ότι, αν A είναι το ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$ και B είναι το ανοιχτό διάστημα $(3, 7)$, τότε $|A| = |B|$.

2: Αποδείξτε ότι, αν A είναι το ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$ και $B = [1, \infty)$ τότε $|A| = |B|$.

Υπόδειξη: Λύστε το πρόβλημα αυτό συγχρόνως με το πρόβλημα 3 παρακάτω.

3: Αποδείξτε ότι, αν A είναι το ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$ και C είναι το διάστημα $(0, 1] = A \cup \{1\}$, τότε $|A| = |C|$.

Υπόδειξη: Με B όπως στο πρόβλημα 2, τα $|A| \leq |C| \leq |B|$ είναι εύκολα. Για το $|B| \leq |A|$, θεωρήστε την $f : B \to A$ με $f(x) = \frac{1}{2x}$.

4: Πρόσθεση πληθικών αριθμών: Υπάρχει πάντα το $\kappa + \lambda$ και ισούται με $|A \cup B|$, όπου $\kappa = |A|$, $\lambda = |B|$, και τα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία.

Θεωρώντας γνωστά τα παραπάνω, αποδείξτε ότι $2 + 3 = 5$.

Υπόδειξη: Δυστυχώς $|A_2 \cup A_3|$ δεν ισούται με 5, πράγμα που εξηγείται από το ότι τα $A = A_2$ και $B = A_3$ έχουν κοινά στοιχεία. Το διορθώνουμε αλλάζοντας λίγο το B. Πάρτε $B = \{3, 4, 5\}$. Αποδείξτε πρώτα ότι $|B| = 3$ με το να αποδείξετε ότι $|B| = |A_3|$.

5: Πολλαπλασιασμός πληθικών αριθμών: Υπάρχει πάντα το $\kappa \cdot \lambda$ και ισούται με $|A \times B|$, όπου $\kappa = |A|$ και $\lambda = |B|$.

Θεωρώντας γνωστά τα παραπάνω, αποδείξτε ότι $2 \cdot 3 = 6$.

Υπόδειξη: Αρκεί να δείξετε ότι $|A_2 \times A_3| = |A_6|$.

6: Ύψωση σε δύναμη: Υπάρχει πάντα το κ^λ και ισούται με μ, όπου, αν $\kappa = |A|$ και $\lambda = |B|$, τότε το $\mu = \kappa^\lambda$ ορίζεται ως $\mu = |C|$, με C να είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το B στο A.

Θεωρώντας γνωστά τα παραπάνω, αποδείξτε ότι $\kappa^2 = \kappa \cdot \kappa$.

Υπόδειξη: Έστω $\kappa = |A|$ και C το σύνολο των συναρτήσεων από το $\{1, 2\}$ στο A. Ζητείται ότι $|C| = |A \times A|$. Υπάρχει μια «προφανής» συνάρτηση ϕ από το C στο $A \times A$: Αν f είναι συνάρτηση από το $\{1, 2\}$ στο A, ποιό είναι το «προφανές» διατεταγμένο ζεύγος $\phi(f)$;

7: Δέν υπάρχει μέγιστος πληθικός αριθμός: Στο πρόβλημα αυτό θα γενικεύσετε τη διαγώνια μέθοδο του Cantor για να αποδείξετε ότι για κάθε πληθικό αριθμό κ υπάρχει πάντα κάποιος πληθικός αριθμός λ που είναι γνησίως μεγαλύτερος.

Έστω $\kappa = |A|$. Πάρτε $\lambda = 2^\kappa$. Αποδείξτε ότι $\lambda > \kappa$.

Υπόδειξη: Αρκεί να καταλήξουμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι $\lambda \leq \kappa$. Έστω λοιπόν ϕ μια επί συνάρτηση από το A στο B, όπου B το σύνολο των συναρτήσεων από το A στο $\{1, 2\}$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο με το να δείξουμε ότι η ϕ δεν είναι επί.

Θεωρούμε την εξής $f \in B$: Δεδομένου $a \in A$, έστω $g = \phi(a)$. Άρα $g(a) \in \{1, 2\}$. Θέτουμε το $f(a)$ να είναι το άλλο στοιχείο του $\{1, 2\}$ (δηλαδή $f(a) := 1$ αν $g(a) = 2$, ενώ αν $g(a) = 1$ τότε ορίζουμε $f(a) := 2$).

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αρκεί να δείξετε ότι (όποιο $a \in A$ και αν διαλέξω) η f δεν γράφεται ως $\phi(a)$.