Μάνος Λυδάκης 20 Μαρτίου 2012

Παράδειγμα ενός λυμένου προβλήματος πολλαπλής επιλογής.

Δίνονται $n, a \in \mathbb{Z}$ με $n \geq 2$. Για οποιοδήποτε ακέραιο k, έστω $\overline{k}$ η κλάση του $k \bmod n$. Αν $\overline{a-2} = \overline{a+2}$, τότε

Α. $\overline{a} = \overline{0}$. **Β.** $\overline{a} = \overline{1}$. **Γ.** $\overline{a} = \overline{-a}$. **Δ.** $n = 4$. **Ε.** $\overline{x-2} = \overline{x+2}\ \forall x \in \mathbb{Z}$.

Λύση: Θα δείξουμε εδώ ποιές σκέψεις «στο πρόχειρο» θα μας οδηγούσαν στη λύση. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στις εξετάσεις του μαθήματος μόνο μια επιλογή θα είναι «σωστή», δηλαδή «αληθής», δηλαδή, για να ακριβολογούμε, **πάντα αληθής, ανεξαρτήτως των πληροφοριών που δεν δίνονται** (εδώ, για παράδειγμα, δεν δίνονται οι τιμές των a και n).

Αφου $\overline{a-2} = \overline{a+2}$, φαίνεται ότι $\overline{-2} = \overline{2}$ δηλ. $\overline{4} = \overline{0}$, που ισχύει $\bmod 4$, δηλ. ισχύει αν $n = 4$. Εκ πρώτης όψεως λοιπόν, το Δ μοιάζει σωστό. Ένα ακόμη πιο σημαντικό πράγμα που ξέρουμε τώρα, είναι ότι αν $n = 4$ το $\overline{a-2} = \overline{a+2}$ ισχύει για κάθε a. Αυτό σημαίνει ότι είναι λάθος να ισχυριστούμε ότι το a είναι απαραίτητα ίσο με 0, δηλαδή η επιλογή Α είναι λάθος. Για τον ίδιο λόγο είναι λάθος και οι Β, Γ (οι λεπτομέρειες για την επιλογή Γ είναι: αν $n = 4$ και $a = 1$, που είναι πιθανόν να ισχύει αφού το $\overline{-1} = \overline{3}$ ισχύει $\bmod 4$, τότε $\overline{-a} = \overline{3} \neq \overline{1}$, άρα είναι λάθος να ισχυριστούμε ότι $\overline{a} = \overline{-a}$).

Μια ματιά όμως στα παραπάνω δείχνει ότι χρησιμοποιήσαμε ότι $\overline{a-2} = \overline{a+2}$ για τυχαίο a. Άρα και η Ε μοιάζει σωστή. (είτε πούμε «$a-2 = a+2$ για τυχαίο a» είτε «$x-2 = x+2$ για τυχαίο x», λέμε το ίδιο πράγμα).

Το δύσκολο τώρα είναι να βρούμε ότι η Δ είναι λάθος. Στο «πρόχειρο» πρέπει να αντιληφθούμε ότι το «$4 = 0$» δεν ισχύει μόνο $\bmod 4$ αλλά και $\bmod 2$. Δηλαδή υποψιαζόμαστε ότι το συμπέρασμα $n = 4$ είναι λάθος, και το επαληθεύουμε ως εξής:

Θα μπορούσε $n = 2$ και $a = 0$, αφού το μόνο που ξέρουμε είναι το $\overline{a-2} = \overline{a+2}$, που ισχύει (αν $n = 2$ τότε $\overline{-2} = \overline{0} = \overline{2}$). Άρα το συμπέρασμα «$n = 4$» είναι λάθος.

Βρήκαμε ότι οι Α, Β, Γ, Δ είναι λάθος. Άρα η Ε πρέπει να είναι η σωστή.