Μάνος Λυδάκης 23 Μαΐου 2012

Κεφάλαιο 1. Σύνολα.

Ορολογία και συμβολισμός, υποσύνολα, πως χρησιμοποιούμε προτάσεις της μορφής (I)⇒(II) σε μια απόδειξη, πως αποδεικνύουμε προτάσεις της μορφής (I)⇒(II), ισότητα συνόλων, πότε δεν ισχύει μια πρόταση της μορφής (I)⇒(II), πότε δεν ισχύει μια πρόταση της μορφής $(\forall x)$(I), το κενό σύνολο, ενώσεις και τομές, συμπλήρωμα, κανόνες De Morgan.

Κεφάλαιο 2. Σχέσεις.

Καρτεσιανά γινόμενα, παραδείγματα σχέσεων στο $S = \mathbb{R}$, ανακλαστικές, συμμετρικές, και μεταβατικές σχέσεις στο S, σχέσεις ισοδυναμίας στο S. Αν S είναι τυχαία σύνολο, και $\sim$ τυχαία σχέση ισοδυναμίας στο S, ορίσαμε την αντίστοιχη *κλάση* (ισοδυναμίας) $\overline{x}$ με αντιπρόσωπο το $x \in S$. Αποδείξαμε τις παρακάτω σημαντικές ιδιότητες των κλάσεων: Ότι δυό στοιχεία είναι ισοδύναμα ακριβώς όταν ισούνται οι κλάσεις τους, και ότι τα στοιχεία μιας κλάσης είναι ακριβώς οι αντιπρόσωποί της. Αριθμητική $\bmod n$, με έμφαση στα $n = 3, 9, 10, 100$.

Κεφάλαιο 3. Συναρτήσεις.

Τι σημαίνει η φράση «η f είναι συνάρτηση από το A στο B», παραδείγματα και αντιπαραδείγματα. Τι σημαίνουν οι φράσεις «η συνάρτηση f είναι επί», και «η συνάρτηση f είναι ένα-προς-ένα». Παραδείγματα και αντιπαραδείγματα με άπειρα και πεπερασμένα σύνολα. Η αντίστροφη συνάρτηση $g = f^{-1}$ της f, γιατί αυτή υπάρχει ακριβώς όταν η f είναι επί και ένα-προς-ένα, και γιατί τότε $f = g^{-1}$. Σύνθεση συναρτήσεων, ταυτοτικές συναρτήσεις, και οι σχέσεις τους με αντίστροφες συναρτήσεις. Η εικόνα ενός υποσυνόλου του πεδίου ορισμού και η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου του πεδίου τιμών.

Κεφάλαιο 4. Μαθηματική Λογική.

Η λογική τιμή μιας πρότασης P, πίνακες αληθείας για τις «όχι P», «P ή Q», «P και Q», «P ⇒ Q», «P ⇔ Q». Υπολογισμός πιο σύνθετων πινάκων αληθείας και η σχέση τους με ισοδύναμες εκφράσεις. Ταυτολογίες και η σχέση τους με «μεθόδους απόδειξης».

Κεφάλαια 5 και 6. Αποδείξεις, Επαγωγή, Διαιρετότητα.

Η διαισθητική ιδέα πίσω από τη μαθηματική επαγωγή, η επαγωγική ιδιότητα των φυσικών αριθμών, η συνήθης μαθηματική επαγωγή και η πλήρης μαθηματική επαγωγή. Πρώτοι αριθμοί, το κόσκινο του Ερατοσθένη, διατύπωση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Αριθμητικής (ΘΘΑ), εφαρμογές του ΘΘΑ, διατύπωση του Λήμματος του Ευκλείδη, απόδειξη του ΘΘΑ, ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος, σχετικά πρώτοι αριθμοί, απόδειξη του Λήμματος του Ευκλείδη.

Κεφάλαιο 7. Συνδυαστική.

Ο κανόνας του αθροίσματος, η περίπτωση που υπάρχουν κοινά στοιχεία, ο κανόνας του γινομένου, διατάξεις με επανάληψη, διατάξεις χωρίς επανάληψη, συνδυασμοί χωρίς επανάληψη, συνδυασμοί με επανάληψη.

Κεφάλαιο 8. Το άπειρο.

Τα ενδιαφέροντα φαινόμενα που ανακάλυψε ο Cantor για το άπειρο, συμπεριλαμβανομένης και της διαγώνιας μεθόδου του Cantor, παρουσιασμένα με τη διασθητική μορφή του Ξενοδοχείου του Hilbert. Η μαθηματική διατύπωση των παραπάνω: Πληθάριθμοι, ανισότητες και ισότητες μεταξύ πληθαρίθμων, και η σχέση με ένα-προς-ένα και επί συναρτήσεις. Ο πληθάριθμος $\aleph_0$, αριθμήσιμα, πεπερασμένα, και υπεραριθμήσιμα σύνολα, ενώσεις και γινόμενα αριθμήσιμων συνόλων, τα σύνολα των ακεραίων και των ρητών είναι αριθμήσιμα ενώ το σύνολο των πραγματικών είναι υπεραριθμήσιμο.