M1212 **Σύνολο Ασκήσεων 1**

Στις ασκήσεις 1–5, ο V είναι κάποιος διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

1. Να χρησιμοποιήσετε το νόμο της διαγραφής για να αποδείξετε ότι το προσθετικό αντίστροφο κάθε διανύσματος του V είναι μοναδικό.

2. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ και $\alpha x = 0$ τότε είτε $\alpha = 0$ είτε $x = 0$.

3. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ τότε $(-\alpha)x = -(\alpha x)$ και $\alpha(-x) = -(\alpha x)$.

4. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $x \in V$ και $\alpha x = \beta x$ και $x \neq 0$ τότε $\alpha = \beta$.

5. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και $x, y \in V$ και $\alpha x = \alpha y$ και $\alpha \neq 0$ τότε $x = y$.

6. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{R}$, όπου $V = \mathbb{R}^2$. Να εξετάσετε ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του V είναι κλειστά ως προς την πρόσθεση, ποια είναι κλειστά ως προς τον πολλαπλασιασμό με βαθμωτό, και ποιά είναι υπόχωροι του V.

$W_1 = \{x \in V : x_1 + x_2 = 0\}$

$W_2 = \{x \in V : x_1 + x_2 = 2\}$

$W_3 = \{x \in V : x_1 \in \mathbb{Q}\}$

$W_4 = \{x \in V : x_1 x_2 = 0\}$

7. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{R}$, όπου V το σύνολο όλων των συναρτήσεων της μορφής $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (με τις συνήθεις πράξεις). Να εξετάσετε ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του V είναι υπόχωροι του V.

Το W_1 που αποτελείται από όλα τα $x \in V$ για τα οποία υπάρχει $u \in V$ τέτοιο ώστε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = (u(t))^2$.

Το W_2 που αποτελείται από όλα τα $x \in V$ για τα οποία υπάρχει $u \in V$ τέτοιο ώστε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = t^2 u(t)$.

Το W_3 που αποτελείται από όλα τα $x \in V$ για τα οποία υπάρχει $u \in V$ τέτοιο ώστε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = u(t^2)$.