1. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε διανυσματικό χώρο, οποιαδήποτε διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$, όπου $n \geq 1$, είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν κάποιο από αυτά τα διανύσματα είναι μηδενικό.

2. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ του V, όπου $n \geq 2$, είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

3. Δίνεται ο υπόχωρος W του $\mathbb{R}^2$, όπου

$$W = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 7x_2 = 0\}.$$

Να βρείτε $y \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $W =< y >$.

4. Δίνεται ο υπόχωρος W του $\mathbb{R}^3$, όπου

$$W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 0\}.$$

Να βρείτε $y, z \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $W =< y, z >$.

5. Δίνεται ο υπόχωρος W του $\mathbb{R}^4$, όπου

$$W = \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Να βρείτε $y, z \in \mathbb{R}^4$ τέτοια ώστε $W =< y, z >$.

Στις ασκήσεις 6–12, ο V είναι ο διανυσματικός χώρος με διανύσματα όλες τις συναρτήσεις της μορφής $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6. Δίνεται ο υπόχωρος W του V, όπου

$$W = \{x \in V : \text{ το } x \text{ είναι τριώνυμο της μορφής } x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2, \text{ και } 3c_0 + 7c_1 + 9c_2 = 0\}.$$

Να βρείτε $y, z \in V$ τέτοια ώστε $W =< y, z >$.

7. Δίνονται τα διανύσματα x, y, z του V, όπου $x(t) = \cos^2 t, y(t) = \sin^2 t, z(t) = 1$. Να εξετάσετε αν τα x, y, z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

8. Να επαναλάβετε την άσκηση 7 αν $x(t) = 2\cos^2 t, y(t) = 3\sin^2 t, z(t) = 5$.

9. Να επαναλάβετε την άσκηση 7 αν $x(t) = 2\cos^2 t + \sin^2 t, y(t) = 3\sin^2 t, z(t) = 5$.

10. Να επαναλάβετε την άσκηση 7 αν $x(t) = t, y(t) = \sin t, z(t) = e^t$.

11. Να επαναλάβετε την άσκηση 7 αν $x(t) = \cos t, y(t) = 1$, και z είναι κάποια παραγωγήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $z'(0) = 13$.

12. Να επαναλάβετε την άσκηση 7 αν $x(t) = t + 1, y(t) = (t + 1)^2, z(t) = t^2 + c$, όπου c είναι κάποιος πραγματικός αριθμός. Η απάντησή σας θα εξαρτάται από την τιμή του c.