

1. Δίνονται τέσσερα διαφορετικά διανύσματα  $x_1, x_2, x_3, x_4$  του  $\mathbb{R}^3$ . Από τις έξι διαφορετικές προτάσεις παρακάτω, μόνο μία είναι πάντα αληθής. Να δικαιολογήσετε γιατί οι υπόλοιπες δεν είναι πάντα αληθείς. Μετά να βρείτε ποιές από αυτές δεν είναι **ποτέ** αληθείς.

**A.** Το  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

**B.** Το  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένο, αλλά ένα υποσύνολό του με τρία διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

**Γ.** Το  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένο, αλλά ένα υποσύνολό του με δύο διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

**Δ.** Το  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  παράγει τον  $\mathbb{R}^3$ , αλλά κανένα υποσύνολό του με δύο διανύσματα δεν παράγει τον  $\mathbb{R}^3$ .

**E.** Το  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  δεν παράγει τον  $\mathbb{R}^3$ , αλλά κάποιο υποσύνολό του με τρία διανύσματα παράγει τον  $\mathbb{R}^3$ .

**Z.** Το  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

2. Έστω  $V$  ο διανυσματικός χώρος όλων των τριωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, και  $x, y$  διανύσματα του  $V$ . Από τις έξι διαφορετικές προτάσεις παρακάτω, μόνο μία είναι πάντα αληθής. Να δικαιολογήσετε γιατί οι υπόλοιπες δεν είναι πάντα αληθείς. Μετά να βρείτε ποιές από αυτές δεν είναι **ποτέ** αληθείς.

**A.** Το  $\{x, y\}$  παράγει τον  $V$ .

**B.** Το  $\{x, y\}$  δεν παράγει τον  $V$ , αλλά για οποιοδήποτε τριώνυμο  $z \in V$  το σύνολο  $\{x, y, z\}$  παράγει τον  $V$ , αρκεί το  $z$  να είναι διάφορο των  $x, y, 0$ .

**Γ.** Το  $\{x, y\}$  δεν παράγει τον  $V$ , αλλά για οποιοδήποτε τριώνυμο  $z, w \in V$  το σύνολο  $\{x, y, z, w\}$  παράγει τον  $V$ , αρκεί τα  $z, w$  να είναι διάφορα μεταξύ τους και των  $x, y, 0$ .

**Δ.** Το  $\{x, y\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αλλά για οποιοδήποτε τριώνυμο  $z, w \in V$  το σύνολο  $\{x, y, z, w\}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

**E.** Το  $\{x, y\}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένο, αλλά για κάποιο  $z \in V$  το σύνολο  $\{x, y, z\}$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

**Z.** Το  $\{x, y\}$  δεν παράγει τον  $V$ .

Στις ασκήσεις 3–8, να βρείτε ένα σύνολο διανυσμάτων όπως ζητείται στην άσκηση, ή να εξηγήσετε γιατί ένα τέτοιο σύνολο δεν υπάρχει.

3. Ένα σύνολο τεσσάρων διανυσμάτων στον  $\mathbb{R}^3$  που κάθε τρία από αυτά παράγουν τον  $\mathbb{R}^3$ .

4. Ένα σύνολο δύο διανυσμάτων στον  $\mathbb{R}^3$  που δεν παράγουν τον  $\mathbb{R}^3$  αλλά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

5. Ένα σύνολο τριών διανυσμάτων στον  $\mathbb{R}^3$  που δεν παράγουν τον  $\mathbb{R}^3$  αλλά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

6. Ένα σύνολο τεσσάρων διανυσμάτων στον  $\mathbb{R}^3$  που παράγουν τον  $\mathbb{R}^3$  αλλά είναι γραμμικώς εξάρτημένα.

7. Ένα σύνολο τριών διανυσμάτων στον  $\mathbb{R}^3$  που παράγουν τον  $\mathbb{R}^3$  αλλά είναι γραμμικώς εξάρτημένα.

8. Ένα σύνολο τριών διανυσμάτων στον  $\mathbb{R}^3$  που παράγουν τον  $\mathbb{R}^3$  και δύο από αυτά παράγουν το επίπεδο κάθετο στο  $(1, 1, 1)$ .