

Στις ασκήσεις 1–5, δίνεται ο διανυσματικός χώρος V όλων των συναρτήσεων x από το \mathbb{R} στο \mathbb{R} για τις οποίες υπάρχουν σταθερές $A, B, C \in \mathbb{R}$ με $x(t) = A \cos^2 t + B \sin^2 t + C$. (Εννοείται η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο V είναι οι συνήθεις πράξεις.)

1. Βρείτε μια βάση του V .

2. Δείξτε ότι το y με $y(t) = \cos 2t$ είναι διάνυσμα του V .

3. Να επεκτείνετε το σύνολο $\{y\}$ (όπου το y είναι όπως στην άσκηση 2) σε μια βάση του V .

4. Στον διανυσματικό χώρο **όλων** των συναρτήσεων x από το \mathbb{R} στο \mathbb{R} , είναι το $\{1, \cos 2t, \sin 2t\}$ γραμμικώς ανεξάρτητα;

5. Υπάρχουν σταθερές $A, B, C \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\sin 2t = A \cos^2 t + B \sin^2 t + C$;

6. Δίνονται τα διανύσματα $x = (1, 2, 0, 0), y = (2, 3, 3, 0), z = (3, 3, 10, 7)$ του \mathbb{R}^4 .

A. Είναι τα x, y, z γραμμικώς ανεξάρτητα;

B. Είναι τα x, y γραμμικώς ανεξάρτητα;

7. Δίνονται τα διανύσματα $x = (1, 2, 0), y = (2, 3, 3), z = (5, 9, 3), w = (5, 8, 6)$ του \mathbb{R}^3 .

A. Παράγουν τα x, y, z, w τον \mathbb{R}^3 ;

B. Παράγουν τα x, y, z τον \mathbb{R}^3 ;

8. Δίνονται τα διανύσματα $x = (1, 2, 3, 4), y = (0, 1, 5, 6), z = (0, 0, 7, 8), w = (0, 0, 9, 10), v = (1, 1, 1, 1)$ του \mathbb{R}^4 .

A. Είναι το $\{x, y, z\}$ βάση του \mathbb{R}^4 ;

B. Είναι το $\{x, y, z, w\}$ βάση του \mathbb{R}^4 ;

Γ. Είναι το $\{x, y, z, w, v\}$ βάση του \mathbb{R}^4 ;