M1212 **Σύνολο Ασκήσεων 5**

---

1. Ορίζουμε την $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $L(x) = (5x + 6, x)$ (για τυχαίο $x \in \mathbb{R}$). Είναι η L γραμμική;

---

2. Ορίζουμε την $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $L(x) = \cos x_1$ (για τυχαίο $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$). Διατηρεί η L την πρόσθεση; Τον πολλαπλασιασμό; Είναι η L γραμμική;

---

3. Ορίζουμε την $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $L(x) = \sqrt[3]{(x_1)^3 + (x_2)^3}$ (για τυχαίο $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$). Διατηρεί η L τον πολλαπλασιασμό; Είναι η L γραμμική;

---

4. Έστω V ο διανυσματικός χώρος όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Ορίζουμε την $L : V \to V$ με $L(x) = \widetilde{x}$ όπου $\widetilde{x}(t) = (x(t))^2$ (για τυχαίο $x \in V$). Είναι η L γραμμική;

---

5. Έστω V ο διανυσματικός χώρος όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Ορίζουμε την $L : V \to V$ με $L(x) = \widetilde{x}$ όπου $\widetilde{x}(t) = x(t^2)$ (για τυχαίο $x \in V$). Είναι η L γραμμική;

---

6. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε την $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $L_A(x) = Ax$ (για τυχαίο $x \in \mathbb{R}^n$). Να αποδείξετε ότι η L_A είναι γραμμική.

---

7. Θα δούμε αργότερα ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι κάποια L_A όπως στην προηγούμενη άσκηση. Προς το παρόν, αποδείξτε το για $m = n = 1$.