---

1. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ με

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4, 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4, -x_1 - 3x_2 + 3x_3).$$

Να βρείτε βάσεις για τους διανυσματικούς χώρους $\operatorname{Im} L, \ker L$. (Υπόδειξη: Γράψτε την L ως L_A, όπου A ένας 3×4 πίνακας.)

---

2. Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

A. Αν $L(x) = 0$ τότε $x_1 = x_2 = x_3$ και $x_4 = x_5$;

B. Αν $x_1 = x_2 = x_3$ και $x_4 = x_5$ τότε $L(x) = 0$;

---

3. Έστω $V = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$. Υπάρχει επί γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \to V$ τέτοια ώστε $L(1, 2, 3, 4, 5) = L(2, 3, 4, 5, 6) = 0$;

---

4. Έστω V, W διανυσματικοί χώροι. Να ελέγξετε ότι το $\mathcal{L}(V, W)$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό.

---

5. Έστω n θετικός ακέραιος και α, β πραγματικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$. Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του n γράφεται ως $\alpha x' + \beta x$, όπου και το x είναι πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου του n, και x' είναι η παράγωγος του x.

Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό ότι οι μόνες μη-μηδενικές συναρτήσεις $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $x'(t) = cx(t)$ είναι τα πολλαπλάσια της $x(t) = e^{ct}$, που δεν είναι πολυώνυμα αν $c \neq 0$.