
1. Δίνεται $x \in V$. Να ελέγξετε ότι η απεικόνιση $L : \mathbb{R} \rightarrow V$ με $L(\alpha) = \alpha x$ είναι γραμμική.

2. Δίνεται γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R} \rightarrow V$. Να βρείτε $x \in V$ τέτοιο ώστε η L είναι όπως στο πρόβλημα 1.

3. Χρησιμοποιείστε το πρόβλημα 2 για να αποδείξετε ότι $\mathcal{L}(\mathbb{R}, V) \cong V$.

Στις ασκήσεις 4–6, ο n είναι κάποιος θετικός ακέραιος, ο V είναι κάποιος διανυσματικός χώρος, και τα x_1, x_2, \dots, x_n είναι διανύσματα του V .

4. Να ελέγξετε ότι η απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ με $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ είναι γραμμική.

5. Να ελέγξετε ότι η παραπάνω L είναι επί αν και μόνο αν το $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ παράγει τον V .

6. Να ελέγξετε ότι η παραπάνω L είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν το $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

7. Έστω V ο υπόχωρος του \mathbb{R}^3 που αποτελείται από όλα τα διανύσματα του \mathbb{R}^3 που είναι κάθετα στο $(1, 1, 1)$. Έστω $x_1 = (-1, 1, 0)$ και $x_2 = (-1, 0, 1)$. Έχουμε δει ότι τα x_1, x_2 αποτελούν (διατεταγμένη) βάση του V .

Αν $x = (2, 3, -5)$, ανήκει το x στο V ; Αν ναι, βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του x ως προς την παραπάνω βάση.

8. Να επαναλάβετε την άσκηση 7 με $x = (4, 5, 6)$.

9. Να επαναλάβετε την άσκηση 7 με V τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του ένα, $x_1 = 2t + 1$, $x_2 = 3t - 4$, και $x = t$.

Στις ασκήσεις 10–12, $x_1 = (1, 2, 3, 4)$, $x_2 = (0, 2, 4, 7)$, $x_3 = (1, 1, 1, 1)$, και $V = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$.

10. Να ελέγξετε ότι τα x_1, x_2, x_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

11. Να ελέγξετε ότι τα x_1, x_2, x_3 αποτελούν (διατεταγμένη) βάση του V .

12. Αν το διάνυσμα συντεταγμένων του x ως προς την παραπάνω βάση είναι $x_B = (2, 3, -5)$, να βρείτε το x .