---

1. Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που είναι κάθετα στο $(1,1,1)$. Έστω $x_1 = (-1,1,0)$ και $x_2 = (-1,0,1)$. Έχουμε δει ότι τα x_1, x_2 αποτελούν (διατεταγμένη) βάση του V.

Αν $x = (2,3,-5)$, ανήκει το x στο V; Αν ναι, βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του x ως προς την παραπάνω βάση.

---

2. Να επαναλάβετε την άσκηση 1 με $x = (4,5,6)$.

---

3. Να επαναλάβετε την άσκηση 1 με V τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του ένα, $x_1 = 2t+1$, $x_2 = 3t-4$, και $x = t$.

Στις ασκήσεις 4–6, $x_1 = (1,2,3,4)$, $x_2 = (0,2,4,7)$, $x_3 = (1,1,1,1)$, και $V =< x_1, x_2, x_3 >$.

---

4. Να ελέγξετε ότι τα x_1, x_2, x_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

---

5. Να ελέγξετε ότι τα x_1, x_2, x_3 αποτελούν (διατεταγμένη) βάση του V.

---

6. Έστω X η παραπάνω βάση. Αν το διάνυσμα συντεταγμένων του x ως προς την παραπάνω βάση είναι $[x]_X = (2,3,-5)$, να βρείτε το x.

---

7. Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμου μικρότερου ή ίσου του 3 και έστω $L : V \to V$ η γραμμική απεικόνιση με $L(x) = x'$ όπου x' είναι η παράγωγος του x. Να βρείτε τον πίνακα της L ως προς την βάση X που αποτελείται από τα $x_1 = 1, x_2 = t, x_3 = t^2, x_4 = t^3$ (δηλαδή να βρείτε τον ${}_X[L]_X$).

---

8. Έστω V ο διανυσματικός χώρος των τριωνύμων και $L : V \to \mathbb{R}^5$ η γραμμική απεικόνιση με $L(t+1) = (1,2,-1,-2,1)$, $L(t) = (0,1,1,1,1)$, και $L(t^2+1) = (2,6,0,-2,4)$. Να βρείτε βάσεις για την εικόνα και τον πυρήνα της L.