

1. Έστω $A = \begin{bmatrix} 9 & -8 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

A. Υπολογίστε όλες τις ιδιοτιμές, καθώς και τις αλγεβρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής.

B. Υπολογίστε τις γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής.

Γ. Είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος;

Δ. Υπολογίστε το ελάχιστο πολυώνυμο του A

2. Αν $A = \begin{bmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, δείξτε ότι $A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - 7I)$.

3. Δίνεται ένας αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας B . Αν

$$A = B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

υπολογίστε το $-2A^4 + 7A^3 - 5A^2 - A + 2I$.

Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό ότι $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -18 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Υπολογίστε το ελάχιστο πολυώνυμο του A στην άσκηση 3. Μετά γράψτε τα A^2 , A^3 και A^4 στη μορφή $cA + dI$. Παρατηρήστε ότι σε κάθε περίπτωση $c + d = 1$. Εξηγήστε αυτό το φαινόμενο.