Το Θεώρημα Βαθμίδας και Μηδενικότητας

Θεώρημα: Έστω $L : V \to \widetilde{V}$ μια γραμμική απεικόνιση βαθμίδας r και μηδενικότητας k. Τότε

$$\dim V = r + k.$$

Απόδειξη: Η βαθμίδα r είναι η διάσταση του $\operatorname{Im} L$, άρα το $\operatorname{Im} L$ έχει βάση με r στοιχεία, έστω τα $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_r$. Ειδικότερα, τα $\widetilde{x}_j$ ανήκουν στην εικόνα της L, δηλαδή γράφονται $\widetilde{x}_j = L(x_j)$ με $x_j \in V$. Στην τάξη έχουμε αποδείξει ότι, επειδή τα $L(x_j)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, το ίδιο ισχύει και για τα x_j.

Η μηδενικότητα k είναι η διάσταση του $\ker L$, άρα το $\ker L$ έχει βάση με k στοιχεία, έστω τα $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

Ισχυρισμός 1: Το $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1: Ας υποθέσουμε ότι

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k.$$

Εφαρμόζουμε την L:

$$L(0) = L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k).$$

Ας θυμηθούμε πως η L είναι γραμμική:

$$0 = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) + \ldots + \alpha_r L(x_r) + \beta_1 L(y_1) + \beta_2 L(y_2) + \ldots + \beta_k L(y_k).$$

Ας θυμηθούμε πως τα y_j ανήκουν στον πυρήνα της L:

$$0 = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) + \ldots + \alpha_r L(x_r) + \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 0 + \ldots + \beta_k \cdot 0.$$

Ας θυμηθούμε πως τα $L(x_j)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

$$0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r.$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη ισότητα:

$$0 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_r + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k.$$

Τέλος, ας θυμηθούμε πως και τα y_j είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

$$0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k.$$

Αφού όλοι οι συντελεστές του αρχικού μας γραμμικού συνδυασμού είναι μηδέν (δηλαδή και τα α_j και τα β_j είναι μηδέν), η απόδειξη του Ισχυρισμού 1 ολοκληρώθηκε.

Ισχυρισμός 2: Το $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ παράγει τον V.

Όταν δώσουμε την απόδειξη του Ισχυρισμού 2 θα έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του θεωρήματος. Πράγματι, οι δύο ισχυρισμοί μαζί λένε ότι το σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_k\}$

είναι βάση του V, άρα μπορούμε να βρούμε την διάσταση του V απλώς μετρώντας τα στοιχεία αυτού του συνόλου (που το πλήθος τους είναι $r+k$).

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2: Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο x του V.

Ας θυμηθούμε πως το $L(x)$ ανήκει στην εικόνα του L, η οποία παράγεται από τα $L(x_j)$, άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$L(x) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) + \ldots + \alpha_r L(x_r).$$

Δεν είναι παράλογο να ελπίσουμε ότι

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r,$$

δυστυχώς όμως αυτό δεν ισχύει. Ας δούμε προσεκτικά τον λόγο: Θέτοντας

$$x' = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r,$$

και επειδή η L είναι γραμμική,

$$L(x') = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) + \ldots + \alpha_r L(x_r) = L(x).$$

Όμως η L δεν είναι εν γένει ένα-προς-ένα, έτσι το ότι $L(x') = L(x)$ δεν σημαίνει ότι $x' = x$.

Η έξυπνη ιδέα που μας βγάζει από αυτή τη δύσκολη θέση είναι ότι

$$L(x - x') = L(x) - L(x') = 0,$$

άρα το $x - x'$ είναι στον πυρήνα, άρα γράφεται

$$x - x' = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k.$$

Τέλος,

$$x = x' + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_k y_k.$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε αφού έγραψα ένα τυχαίο στοιχείο του V ως γραμμικό συνδυασμό των $x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_k$.