Μάνος Λυδάκης 21 Δεκεμβρίου 2012

Πότε ένα σύνολο V λέγεται διανυσματικός χώρος (πάνω από το $\mathbb{R}$), παραδείγματα, στοιχειώδεις ιδιότητες που έχουν όλοι οι διανυσματικοί χώροι. Πότε ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου V λέγεται κλειστό ως προς την πρόσθεση, κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό, και πότε υπόχωρος του V, παραδείγματα. Πότε, για σταθερά $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$, ένα διάνυσμα λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ιδιότητες του

$$W := \{\, x : \text{το } x \text{ είναι γραμμικός συνδυασμός των } x_1, x_2, \ldots, x_n \}$$

(αυτό το W συμβολίζεται με $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$ και λέγεται **ο χώρος που παράγουν τα** $x_1, x_2, \ldots, x_n$) ειδικότερα ότι αυτό το W είναι ο μικρότερος υπόχωρος του V που περιέχει τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Αν τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ παράγουν τον V τότε και τα $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_m$ παράγουν τον V. Πότε τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα και πότε γραμμικώς εξαρτημένα. Τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα ακριβώς όταν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ακριβώς όταν κάθε διάνυσμα γράφεται με το-πολύ-ένα τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Αν τα $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Βάση και διάσταση του V, γεωμετρική και διαισθητική σημασία για $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}$, παραδείγματα με $V = \mathbb{R}^n$ και V να αποτελείται από πολυώνυμα, σημαντικές ιδιότητες της διάστασης, το Θεώρημα Επέκτασης σε Βάση, το Θεώρημα Περιορισμού σε Βάση, χώροι πεπερασμένης διάστασης, οι συνεπαγωγές (για υπόχωρους W_1, W_2 ενός χώρου πεπερασμένης διάστασης V)

$$W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow \dim W_1 \leq \dim W_2 \quad \text{και} \quad W_1 \subset W_2 \Rightarrow \dim W_1 < \dim W_2.$$

Γραμμικές απεικονίσεις: ορισμός, παραδείγματα, και στοιχειώδεις ιδιότητες. Υπόχωροι και γραμμικές απεικονίσεις, πυρήνας και εικόνα, η σχέση με τον μηδενόχωρο και τον χώρο στηλών. Αν η L είναι γραμμική, τότε είναι ένα-προς-ένα ακριβώς όταν $\ker L = \{0\}$. Η ανισότητα $\dim L(W) \leq \dim W$ που ισχύει για κάθε υπόχωρο W του πεδίου ορισμού μιας γραμμικής απεικόνισης L. Το Θεώρημα Βαθμίδας και Μηδενικότητας και εφαρμογές στην ύπαρξη ένα-προς-ένα και επί γραμμικών απεικονίσεων. Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V, W)$, ισομορφισμοί, το Θεώρημα Κατάταξης των Διανυσματικών Χώρων Πεπερασμένης Διάστασης. Το διάνυσμα συντεταγμένων $[x]_X$ του διανύσματος x ως προς την (διατεταγμένη) βάση X, η σχέση μεταξύ γραμμικών $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $m \times n$ πινάκων A, ο πίνακας ${}_Y[L]_X$ της γραμμικής απεικόνισης $L : V \to W$ από τη βάση X του V στη βάση Y του W, η ισοδυναμία των $L(x) = y$ και $[L] \cdot [x] = [y]$ (όπου $[L] = {}_Y[L]_X$, $[x] = [x]_X$, και $[y] = [y]_Y$), οι ισότητες ${}_Z[M \circ L]_X = {}_Z[M]_Y \cdot {}_Y[L]_X$ («ο πίνακας της σύνθεσης είναι το γινόμενο των πινάκων»), ${}_X[i]_X = I$ («ο πίνακας της ταυτοτικής είναι ο ταυτοτικός»), και ${}_X[L^{-1}]_Y = ({}_Y[L]_X)^{-1}$ («ο πίνακας της αντίστροφης συνάρτησης είναι ο αντίστροφος του πίνακα της συνάρτησης»). Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση X στη βάση Y, που είναι η ειδική περίπτωση του ${}_Y[L]_X$ με $L = i =$ ταυτοτική, οι ισότητες ${}_Z[i]_X = {}_Z[i]_Y \cdot {}_Y[i]_X$ και ${}_X[i]_Y = ({}_Y[i]_X)^{-1}$. Διανυσματικοί χώροι πινάκων και εφαρμογές στις Γραμμικές Απεικονίσεις. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα (γραμμικών) τελεστών, ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων, και η σχέση μεταξύ τους. Η χαρακτηριστική εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0$ του $n \times n$ πίνακα A, που είναι πολυωνυμική βαθμού n ως προς τον άγνωστο λ, και έχει λύσεις ακριβώς τις ιδιοτιμές του A. Πότε οι $n \times n$ πίνακες A και $\widetilde{A}$ λέγονται όμοιοι, και γιατί αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν είναι πίνακες του ίδιου τελεστή $L : V \to V$, δηλαδή ακριβώς όταν ο A γράφεται ως $A = [L]_X := {}_X[L]_X$ και ο $\widetilde{A}$ ως $\widetilde{A} = [L]_Y$ (εννοείται X και Y είναι βάσεις του V). Τι σημαίνει η ειδική περίπτωση όπου $V = \mathbb{R}^n$ και X είναι η κανονική βάση, δηλαδή ότι, ταυτίζοντας τη βάση $Y = B$ που αποτελείται από τα $b_1, \ldots, b_n$ με τον $n \times n$ πίνακα B που έχει i-στήλη το b_i, τότε ο πίνακας της $L(u) = Au$ ως προς την B είναι ο $\widetilde{A}$ όπου $A = B\widetilde{A}B^{-1}$. Ισοδυναμία των $A = B\widetilde{A}B^{-1}$ και $\widetilde{A} = B^{-1}AB$, και η σχέση των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων των A και $\widetilde{A}$, ειδικότερα οι A και $\widetilde{A}$ έχουν ίδιες ιδιοτιμές. Διαγώνιοι πίνακες, και γιατί αυτοί είναι ακριβώς οι $n \times n$ πίνακες που έχουν όλα τα $e_1, \ldots, e_n$ ως ιδιοδιανύσματα, και μάλιστα η ιδιοτιμή λ_i που αντιστοιχεί στο e_i είναι το i-οστό στοιχείο της διαγωνίου. Διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες, και γιατί αυτοί είναι ακριβώς οι $n \times n$ πίνακες που έχουν όλα τα διανύσματα $b_1, \ldots, b_n$ μιας βάσης ως ιδιοδιανύσματα, και μάλιστα $A = B\widetilde{A}B^{-1}$ όπου $\widetilde{A}$ είναι ο $n \times n$ διαγώνιος πίνακας με i-οστό στοιχείο της διαγωνίου την ιδιοτιμή λ_i που αντιστοιχεί στο b_i και B είναι ο $n \times n$ πίνακας που έχει i-στήλη το b_i. Ένας $n \times n$ πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος ακριβώς όταν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή οι διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες είναι ακριβώς αυτοί με πλήθος γραμμικώς ανεξαρτήτων ιδιοδιανυσμάτων που είναι όσο πιο μεγάλο γίνεται. Αν ένας $n \times n$ πίνακας έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος. Για δεδομένο πολυώνυμο, τι είναι η πολλαπλότητα που έχει κάθε ρίζα του. Για δεδομένο πίνακα A, τι είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα α_j που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_j του A, και τι είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα γ_j της λ_j. Η ισότητα $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$ που ισχύει για κάθε διαγωνιοποιήσιμο $n \times n$ πίνακα που έχει ακριβώς k διαφορετικές ιδιοτιμές. Οι ανισότητες $\alpha_1 \leq \gamma_1, \ldots, \alpha_k \leq \gamma_k$ που ισχύουν για κάθε $n \times n$ πίνακα που έχει ακριβώς k διαφορετικές ιδιοτιμές, μάλιστα αυτές οι ανισότητες είναι **όλες** ισότητες ακριβώς όταν ο αντίστοιχος πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος. Ίχνος, ορίζουσα, και ιδιοτιμές. Τριγωνικοί πίνακες και ιδιοτιμές, το Θεώρημα Cayley-Hamilton, το ελάχιστο πολυώνυμο ενός $n \times n$ πίνακα, το ελάχιστο πολυώνυμο ενός διαγωνιοποιήσιμου πίνακα. Εσωτερικά γινόμενα, διγραμμικότητα, νόρμα, η Ανισότητα Cauchy-Scwarz, η τριγωνική ανισότητα, ορθοκανονικά διανύσματα και η σχέση τους με γραμμικούς συνδυασμούς και γραμμική αναξαρτησία. Ο δυικός χώρος, η δυική βάση, ο διπλός δυικός και ο κανονικός ισομορφισμός.