

---

**1:** Έστω  $a$  και  $b$  θετικοί ακέραιοι που έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη  $d$  και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο  $c$ . Στο πρόβλημα αυτό θα αποδείξετε ότι  $ab = cd$ .

**A:** Αποδείξτε ότι το  $\frac{ab}{d}$  είναι ακέραιος.

**B:** Αποδείξτε ότι το  $\frac{ab}{d}$  είναι πολλαπλάσιο του  $a$ .

**Γ:** Αποδείξτε ότι το  $\frac{ab}{d}$  είναι πολλαπλάσιο του  $b$ .

**Δ:** Αποδείξτε ότι  $ab \geq cd$  (υπόδειξη: το  $\frac{ab}{d} \geq c$  είναι εύκολο από τα **B** και **Γ**).

**E:** Εξηγήστε γιατί το  $\frac{ab}{c}$  είναι ακέραιος. (Υπόδειξη: Θυμηθείτε ότι κάθε κοινό πολλαπλάσιο είναι και αυτό πολλαπλάσιο του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου.)

**Z:** Αποδείξτε ότι το  $\frac{ab}{c}$  είναι διαιρέτης του  $a$  (υπόδειξη:  $a = \frac{ab}{c} \frac{c}{b}$ ).

**H:** Αποδείξτε ότι το  $\frac{ab}{c}$  είναι διαιρέτης του  $b$ .

**Θ:** Αποδείξτε ότι  $ab \leq cd$  (υπόδειξη: το  $\frac{ab}{c} \leq d$  είναι εύκολο από τα **Z** και **H**).

**I:** Παρατηρήστε τι αποδείξατε στα **Δ** και **Θ**.

---

**2:** Από τις σημειώσεις του κ. Τζανάκη, τις ασκήσεις 4–6 και 22–25 στη σελίδα 19 και τις 4 και 7–12 στη σελίδα 37.

---

**3: A:** Δείξτε ότι, αν ο  $p > 3$  είναι πρώτος, τότε ή  $p \equiv 1 \pmod{6}$  ή  $p \equiv 5 \pmod{6}$ .

**B:** Δεδομένου θετικού ακεραίου  $a$  τέτοιου ώστε ο  $a + 333^{31415926535897932384626433832795}$  είναι πρώτος, βρείτε τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης του  $a$  δια του 6.

---

**4:** Για να μεγιστοποιήσετε το κέρδος σας από το πρόβλημα αυτό, μην χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανές ή μεθόδους του τύπου «δοκιμάζω κάθε πιθανή απάντηση», αλλά λύστε το χρησιμοποιώντας «εξισώσεις mod  $n$ » και «πολλαπλάσια mod  $n$ ».

**A:** Στον πλανήτη Κάλαβροξ αντί εβδομάδες χρησιμοποιούν «δεκαεβδομάδες»: όπως εμείς λέμε «Κυριακή, Δευτέρα, ..., Σάββατο» αυτοί λένε «Πρώτη, Δευτέρα, ..., Δεκάτη-εβδόμη».

Στο Πανεπιστήμιο του Κάλαβροξ, μαθήματα γίνονται κάθε μέρα εκτός της Δεκάτης που είναι αργία. Ο καθηγητής Βροξ αρχίζει σήμερα Εβδόμη το μάθημα του, που γίνεται κάθε 7 μέρες, εκτός αν πέσει ημέρα Δεκάτη, οπότε απλώς ακυρώνεται. Πόσες διαλέξεις θα δώσει ο καθηγητής Βροξ μέχρι να χάσει επιτέλους ένα μάθημα;

**B:** Στον πλανήτη Κάλαβροξ όλοι οι χρόνοι έχουν 333 μέρες και δεν έχουν μήνες. Έτσι οι «ημερομηνίες» τους είναι της μορφής «η 1», «η 2», ..., «η 333». Πέρασαν πολλά χρόνια από το πρόβλημα A, και, μετά από πολλούς αγώνες, οι φοιτητές του Πανεπιστημίου του Κάλαβροξ καθιέρωσαν άλλη μια αργία, την λεγόμενη «ημέρα του 30», που είναι κάθε 30 μέρες, αρχίζοντας από σήμερα, που στο ημερολόγιο του Κάλαβροξ είναι η 30.

Ποιά είναι η ελάχιστη ημερομηνία που πέφτει «ημέρα του 30»; Πόσες «ημέρες του 30» θα εορταστούν μέχρι να πέσει η «ημέρα του 30» αυτή την ημερομηνία;

**Γ:** Πέρασαν πολλά χρόνια από το πρόβλημα B και σήμερα, που η ημερομηνία στο ημερολόγιο του Κάλαβροξ είναι η 30 και η ημέρα είναι Εβδόμη, ο καθηγητής Βροξ Υιός κάνει το πρώτο του μάθημα. Ο καθηγητής Βροξ Υιός κληρονόμησε τη θέση του πατέρα του, και αποφασίζει ότι πρέπει να δουλέψει ιδιαίτερα σκληρά για να

αποδείξει την αξία του, και θέλει να κάνει μάθημα και τις αργίες. Οι φοιτητές όμως καταφέρνουν να τον πείσουν να εξαιρέσει τις «διπλές αργίες», δηλαδή να χάνονται τα μαθήματα που πέφτουν και ημέρα Δεκάτη και «ημέρα του 30».

Αν το μάθημά του γίνεται κάθε 7 μέρες, πόσες διαλέξεις θα δώσει ο καθηγητής Βροξ Υιός μέχρι να χάσει ένα μάθημα;

Υπόδειξη: Ακολουθήστε τη μέθοδο της αΐθουσας για το πως βρίσκουμε τη λύση στα προβλήματα όπως στο Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων. Σας θυμίζω παρακάτω αυτή τη μέθοδο: Έχετε να λύσετε τις  $cx \equiv d \pmod m$  και  $c'x \equiv d' \pmod n$ . Στο μέρος Α λύσατε την πρώτη, έστω ότι βρήκατε  $x = a$ , να θέσετε τώρα  $x = a + my$ , να αντικαταστήσετε στη δεύτερη, και να λύσετε ως προς  $y$ .