Μάνος Λυδάκης Ένα συμπληρωματικό μέρος της διάλεξης 7

Άλλες δυο λυμένες ασκήσεις πάνω στους ακεραίους $\bmod n$.

Άσκηση: Έστω $n = 9$ και $a \in \mathbb{Z}, a \geq 0$. Δείξτε, αν b είναι το άθροισμα των δεκαδικών ψηφίων του a, τότε $a \equiv b \bmod n$.

Λύση: Ζητώ: $\bar{a} = \bar{b}$.

Έστω $a_0 :=$ ψηφίο μονάδων του a
$a_1 :=$ ψηφίο δεκάδων του a
$\vdots$

Έστω $k+1 :=$ πλήθος ψηφίων του a. Άρα $b = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$. Άρα $\bar{b} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \cdots + \bar{a}_k$.

Ερώτηση: Πως τα ψηφία δίνουν τον a;

Απάντηση: $a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10 \cdot 10 + \cdots + a_k \cdot \underbrace{10 \cdot \cdots \cdot 10}_{k}$

Αφού $n = 9$, $\overline{10} = \bar{1}$, άρα $\overline{10} \cdot \overline{10} = \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$, $\overline{10} \cdot \overline{10} \cdot \overline{10} = \bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$, ...

$$\begin{aligned} \text{Τέλος } \bar{a} &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot \overline{10} + \bar{a}_2 \cdot \overline{10} \cdot \overline{10} + \cdots + \bar{a}_k \cdot \overline{10} \cdot \cdots \cdot \overline{10} \\ &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot \bar{1} + \bar{a}_2 \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} + \cdots + \bar{a}_k \cdot \bar{1} \cdot \cdots \cdot \bar{1} \\ &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \cdots + \bar{a}_k = \bar{b}. \end{aligned}$$

Άσκηση: Έστω a ο 222-ψήφιος αριθμός με όλα τα ψηφία 2. Διαιρείται ο a με 9;

Λύση: Εφαρμόζω την προηγούμενη άσκηση: $\bar{a} = \bar{b} = \underbrace{\bar{2} + \bar{2} + \cdots + \bar{2}}_{222} = \overline{444}$.

ξανά: $\overline{444} = \bar{4} + \bar{4} + \bar{4} = \overline{12}$

ξανά: $\overline{12} = \bar{1} + \bar{2} = \bar{3}$

Άρα η απάντηση στην άσκηση είναι «όχι» ($\bar{a} = \bar{3}$ ειδικότερα $\bar{a} \neq \bar{0}$). (Με άλλα λόγια, βρήκαμε κάτι περισσότερο από ότι ζητά η άσκηση, δηλαδή βρήκαμε ότι όχι μόνο το υπόλοιπο της διαίρεσης του a δια 9 δεν είναι 0 αλλά βρήκαμε και πόσο είναι, είναι 3.)