Πανεπιστημιο Κρητησ — Τμημα Μαθηματικων
Τοπολογια — Προοδος Χειμερινου Εξαμηνου 2010-11

---

1. [Μονάδες 3] Δίνεται το σύνολο $X = \mathbb{R}$ και τα παρακάτω σύνολα $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, και $\mathcal{T}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 &= \{A \subseteq \mathbb{R} : A = \mathbb{R} \text{ ή για κάποια } a, b \in \mathbb{R} \text{ το } A \text{ περιέχεται στο ανοιχτό διάστημα } (a, b)\} \\
\mathcal{T}_2 &= \{A \subseteq \mathbb{R} : A = \varnothing \text{ ή το } A \text{ είναι άπειρο } \} \\
\mathcal{T}_3 &= \{A \subseteq \mathbb{R} : A = \mathbb{R} \text{ ή το } A^c \text{ είναι άπειρο } \}
\end{aligned}$$

Για $n = 1, 2, 3$ να απαντήσετε την ερώτηση: Είναι το $\mathcal{T}_n$ τοπολογία; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

---

2. [Μονάδες 2] Δίνεται ο (συνήθης) χώρος $X = \mathbb{R}$, ένα υποσύνολο A του X, και ένα σημείο b του $\overline{A}$. Να δείξετε ότι αν $b \geq a$ για κάθε $a \in A$ τότε $b = \sup A$.

---

3. [Μονάδες 2] Δίνονται χώροι X και Y και ένα σημείο b του Y. Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f : X \to X \times Y \quad \text{με } f(a) = (a, b)$$

A. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

B. Να δείξετε ότι για κάθε A που είναι ανοιχτό στο X το $f(A)$ είναι ανοιχτό στον υπόχωρο $f(X)$ του $X \times Y$.

---

4. [Μονάδες 3] Δίνεται ένας χώρος Hausdorff X, ένα υποσύνολο A του X, και ένα σημείο a του συμπληρωματικού του A στο X. Να δείξετε ότι $a \in \overline{A}$ αν και μόνο αν για κάθε περιοχή B του a το $A \cap B$ είναι άπειρο.