Πανεπιστημιο Κρητης — Τμημα Μαθηματικων
Τοπολογια — Τελικη Εξεταση Χειμερινου Εξαμηνου 2010-11

---

1. Έστω $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ με τη συμπεπερασμένη τοπολογία. Για $n \in X$, έστω

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \ldots \\ n, & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

Να βρείτε όλα τα $b \in X$ τέτοια ώστε η a_n συγκλίνει στο b (άρα βρήκατε και όλα τα $c \in X$ τέτοια ώστε η a_n δεν συγκλίνει στο c). Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας (και για τα b και για τα c!).

---

2. Αν τα A, B είναι κλειστά υποσύνολα του τοπολογικού χώρου X να δείξετε ότι το $A \times B$ είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου $X \times X$.

---

3. Έστω X ένας χώρος Hausdorff, A ένα συμπαγές υποσύνολο του X, και b ένα σημείο του A^c.

Να δείξετε ότι υπάρχουν ανοιχτά υποσύνολα U, V του X τέτοια ώστε $A \subseteq U$, $b \in V$, και $U \cap V = \varnothing$.

---

4. Έστω X τοπολογικός χώρος, $a \in X$, και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια τοπικά σταθερή συνάρτηση (δηλ. κάθε $b \in X$ έχει περιοχή U στο X τέτοια ώστε ο περιορισμός $f|U$ είναι σταθερή συνάρτηση) με $f(a) = 0$. Αν ο X είναι συνεκτικός, δείξτε ότι η f είναι σταθερή (δηλαδή $f(b) = 0$ $\forall b \in X$).

---

5. Έστω X ο υπόχωρος $[-1, 1]$ του $\mathbb{R}$ και Y ο υπόχωρος $\{-1, 1\}$ του X. Θεωρούμε την παρακάτω σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $Y \times X$:

$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$ αν και μόνο αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις παρακάτω συνθήκες (1) και (2):
(1) $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$
(2) $a_2, b_2 \in Y$ και $\exists c \in Y (b_1, b_2) = (ca_1, ca_2)$.

Να αποδείξετε ότι ο χώρος πηλίκο $Y \times X / \sim$ είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο.