Πανεπιστημιο Κρητησ — Τμημα Μαθηματικων
Τοπολογια — Εξεταστικη Σεπτεμβριου 2011

Μάνος Λυδάκης　　　　Παρασκευή, 26 Αυγούστου 2011

---

1. Δίνεται ένας υπόχωρος X του $\mathbb{R}$.
Α. Αν $X = \mathbb{Z}$, είναι όλα τα υποσύνολα του X ανοικτά στον X; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
Β. Αν $X = \mathbb{Q}$, είναι όλα τα υποσύνολα του X ανοικτά στον X; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

---

2. Δίνεται ένας τοπολογικός χώρος X, ένα υποσύνολο A του X, και μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\forall a \in A \quad f(a) = 0$. Δείξτε ότι αν $b \in \overline{A}$ τότε $f(b) = 0$.

---

3. Δίνεται ο τοπολογικός χώρος $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ με την συμπεπερασμένη τοπολογία.
Α. Είναι ο X Hausdorff; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
Β. Να υπολογίσετε την κλειστή θήκη $\overline{A}$ του $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ στον X. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

---

4. Δίνεται ένας τοπολογικός χώρος X. Ορίζουμε μια σχέση $\sim$ στο X ως εξής:

Δεδομένων $a, b \in X$, ορίζουμε το «$a \sim b$» να σημαίνει
« δεν υπάρχουν ξένα ανοικτά υποσύνολα A, B του X τέτοια ώστε $a \in A$, $b \in B$ και $A \cup B = X$».

Να αποδείξετε ότι αυτή η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.

---

5. Έστω X ο υπόχωρος $[-1, 1]$ του $\mathbb{R}$ και Y ο υπόχωρος $\{-1, 1\}$ του X. Θεωρούμε την παρακάτω σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $X \times Y$:
$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$ αν και μόνο αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις παρακάτω συνθήκες (1) και (2):
(1) $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$
(2) $a_1 = b_1 = -1$.
Α. Ο χώρος πηλίκο $X \times Y/\sim$ είναι ομοιομορφικός με καποιο γνωστό μας τοπολογικό χώρο. Με ποιόν;
Β Να αποδείξετε την απάντησή σας στο μέρος Α παραπάνω.