

Ακόμη και αν δεν μπορείτε να λύσετε κάποιο θέμα, ίσως αξίζει να γράψετε κάποιο ορισμό ή θεώρημα ή σκέψη που σας φαίνονται σχετικά.

---

1. Για κάθε μία δεδομένη τιμή των  $W$  και  $X$ , να απαντήσετε τις παρακάτω δυο ερωτήσεις: Είναι το  $W$  ανοιχτό στο  $X$ ; Είναι το  $W$  κλειστό στο  $X$ ;

- A.  $X = \mathbb{R}$        $W = [0, 3) \cup [5, 7)$   
B.  $X = \mathbb{R}$        $W = (0, 3] \cup [1, 11)$   
Γ.  $X = \mathbb{R}$        $W = (0, 2] \cap [1, 3)$   
Δ.  $X = \mathbb{R}^2$       $W = \{a \in \mathbb{R}^2 : a_1 > 0, a_2 \geq 0\}$

Πρέπει να απαντήσετε συνολικά οκτώ ερωτήσεις. Δεν χρειάζεται να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

---

2. Να δώσετε ένα παράδειγμα ενός υποχώρου  $X$  του χώρου  $\tilde{X} = \mathbb{R}$  και ενός υποσυνόλου  $W$  του  $X$ , τέτοιων ώστε το  $W$  να είναι ανοιχτό στον  $X$  αλλά όχι στον  $\tilde{X}$ .

Για να πάρετε όλες τις μονάδες στο πρόβλημα, θα πρέπει να δικαιολογήσετε γιατί το  $W$  είναι ανοιχτό στο  $X$ .

---

3. Δίνεται ένας χώρος  $X$  του οποίου τα σημεία είναι ακριβώς τα  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Δίνεται και η συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(a_n) = n$ . Τέλος, δίνεται ότι τα σύνολα  $V_1, V_2, V_3, \dots$  σχηματίζουν βάση του  $X$ , όπου  $V_1 = X$  και, για  $n > 1$ ,  $V_n = \{a_n\}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν είναι συνεχής.

---

4. Δίνεται ένας μετρικός χώρος  $X$  και ένα ανοιχτό υποσύνολο  $W$  του  $X$ . Αν το  $W$  αποτελείται από ακριβώς δύο σημεία, τα  $a$  και  $b$ , να αποδείξετε ότι το  $V = \{a\}$  είναι και αυτό ανοιχτό υποσύνολο του  $X$ .

---

5. Δίνεται ο χώρος  $X$  και η συνάρτηση  $f : X \times X \times X \rightarrow X \times X$ . Δίνεται επίσης ότι, για  $a, b, c \in X$ ,  $f(a, b, c) = (c, a)$ . Είναι η  $f$  συνεχής; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.