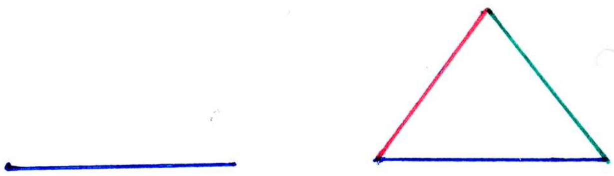
Τοπολογική ισοδυναμία

Παράδειγμα



A B

Απλοϊκός τρόπος να αντιστοιχήσω αριθμούς στα A, B.
Μετρώ τις ακμές τους.

Τότε $A \mapsto 1$

$B \mapsto 3$

Μπορώ όμως να θεωρήσω π.χ. το A ως ένωση δυο ευθυγράμμων τμημάτων

A

Τότε $A \mapsto 2$. Εδώ το σχήμα δεν άλλαξε αλλά ο αριθμός άλλαξε. Συμπέρασμα: Ο αριθμός αυτός δεν λέει πολλά για το σχήμα.

Θεωρώ τώρα και τις κορυφές του σχήματος, δηλαδή τα άκρα των ακμών του.

Αντιστοιχίζω στο σχήμα τον εξής αριθμό:

"Πλήθος κορυφών" − "Πλήθος ακμών"

Για παράδειγμα, έστω  $\longmapsto 2-1=1$

a A b

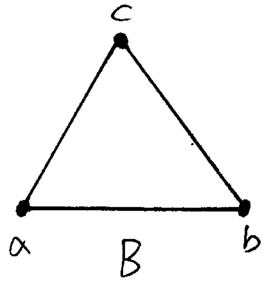
και  $\longmapsto 3-2=1$

a c b

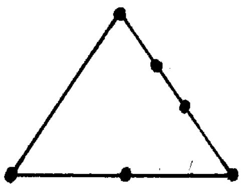
A

Επίσης, π.χ.  $\longmapsto 5-4=1$

A

Όμοια,  $\longmapsto 3-3=0$

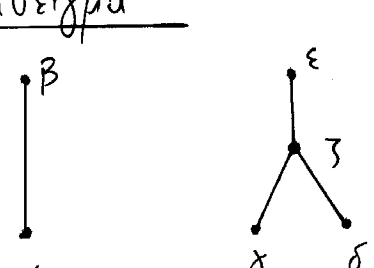
B

και  $\longmapsto 6-6=0$

B

Δεν είναι δύσκολο να πεισθούμε ότι αυτός ο αριθμός είναι πράγματι αναλλοίωτη του σχήματος (δεν αλλάζει, αρκεί να μην αλλάζει το σχήμα).
Ο αριθμός αυτός λέγεται χαρακτηριστική του Euler και συμβολίζεται με χ.
Είδαμε ότι $\chi(A)=1$, $\chi(B)=0$.

<u>Παράδειγμα</u>

C_1 :  $\longmapsto 6-4=2$

Σκέφτομαι ότι οι κορυφές είναι πόλεις και ότι οι ακμές είναι γραμμές τρένου.

Συμπεράσματα : (Σ_1) Οι πόλεις π.χ. α και γ, δεν συνδέονται με τρένο

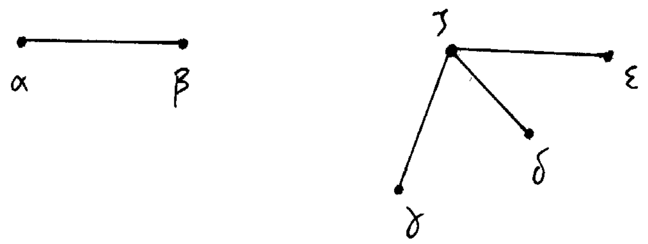
(Σ_2) Αν πάω με τρένο απο την γ σε οποιαδήποτε άλλη πόλη, πρέπει να περάσω απο την ζ.

"Κωδικοποιώ" το σχήμα C_1 ως εξής :

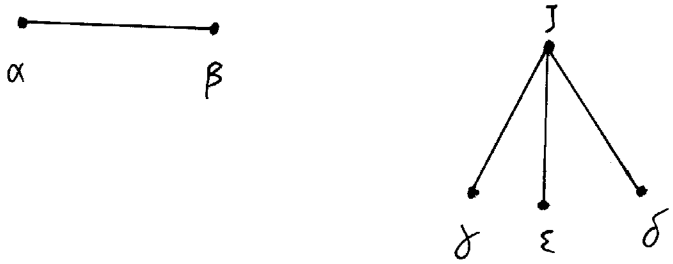
$$\left.\begin{array}{ll} \text{Κορυφές} : & \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \\ \text{Ακμές} : & \{\alpha,\beta\}, \{\gamma,\zeta\}, \{\delta,\zeta\}, \{\varepsilon,\zeta\} \end{array}\right\} : C$$

Το σχήμα C_1 αντιστοιχεί στην περιγραφή C.

Έστω C_2 :



Και C_3 :



Τα σχήματα C_2, C_3 αντιστοιχούν και αυτά στην περιγραφή C.

Παρατηρώ ότι τα (Σ_1), (Σ_2) ισχύουν και για τα C_2, C_3 και γενικότερα τα C_1, C_2, C_3 έχουν πολλές κοινές γεωμετρικές ιδιότητες. Όμως π.χ. οι αντίστοιχες αποστάσεις των κορυφών αλλάζουν.

Λέμε ότι το C_1 είναι τοπολογικά ισοδύναμο με τα C_2, C_3.

Παρατηρώ επίσης ότι $\chi(C_1) = \chi(C_2) = \chi(C_3) = 2$,

γιατί η "χ" εξαρτάται μόνο απο την περιγραφή C.

Λέμε ότι το $\chi(A)$ είναι τοπολογική αναλλοίωτη του A.

Δηλαδή αν A, A' είναι τοπολογικά ισοδύναμα $\Rightarrow \chi(A) = \chi(A')$

Ορισμός

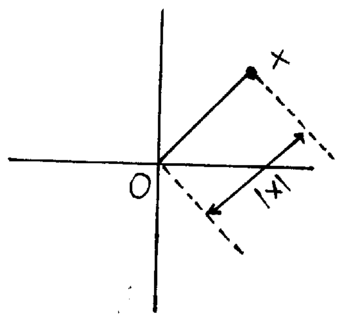
Θα λέμε <u>χώρο</u>, οποιοδήποτε υποσύνολο κάποιου $\mathbb{R}^n$

Σχόλιο

Τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ τα γράφω ως $x, y, \ldots$

Αν $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = (x_1, \ldots, x_n)$ όπου $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$

Γράφω $|x| = \sqrt{(x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2}$



Ορισμός

Έστω X, Y χώροι και $f: X \to Y$

Η f είναι <u>συνεχής</u> $\Leftrightarrow$ Για κάθε ακολουθία $a_n \in X$,

με $\lim a_n = \alpha \in X$ ισχύει ότι $\lim f(a_n) = f(\alpha)$

Θεώρημα

(I) Αν X, Y, Z χώροι και αν $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ και f, g συνεχεις τότε και η $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής

(II) Αν X χώρος και $I_X : X \to X$ ταυτοτική, δηλαδή $I_X(\alpha) = \alpha$, $\forall \alpha \in X$ τότε η I_X είναι συνεχής.

Απόδειξη

(Άσκηση)

Ορισμός

Έστω X, Y χώροι. Μια συνεχή $f : X \to Y$ θα την λέμε και τοπολογικό μορφισμό (ή μορφισμό χώρων).

Μια συνεχής $f : X \to Y$ λέγεται ομοιομορφισμός (ή τοπολογικός ισομορφισμός ή ισομορφισμός χώρων) αν υπάρχει η $f^{-1} : Y \to X$ και είναι συνεχής.

Τότε γράφουμε $f : X \xrightarrow{\cong} Y$.

Δυο χώροι X, Y λέγονται ομοιόμορφικοί (ή τοπολογικά ισόμορφοι ή τοπολογικά ισοδύναμοι ή ισόμορφοι ως χώροι) αν υπάρχει $f : X \xrightarrow{\cong} Y$

Θεώρημα

Η σχέση $X \cong Y$ είναι σχέση ισοδυναμίας

Απόδειξη

(Άσκηση)

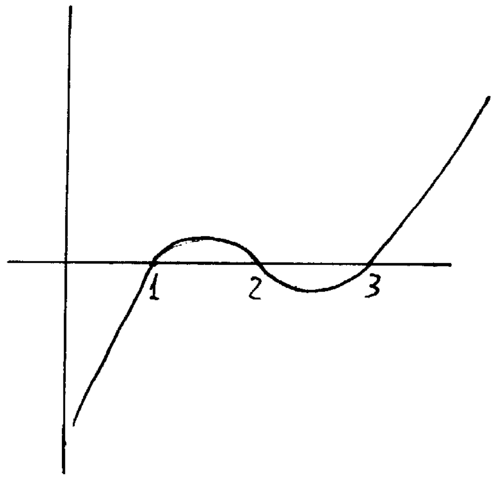
Παραδείγματα

(I) Έστω $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ και $f : X \to Y$ με $f(x) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

Αν $a = 1$, $b = 2$ $\Rightarrow$ $a \neq b$ αλλά $f(a) = f(b)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f όχι 1-1 $\Rightarrow$ Δεν υπάρχει η $f^{-1} : Y \to X$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ f δεν είναι ισομορφισμός χώρων



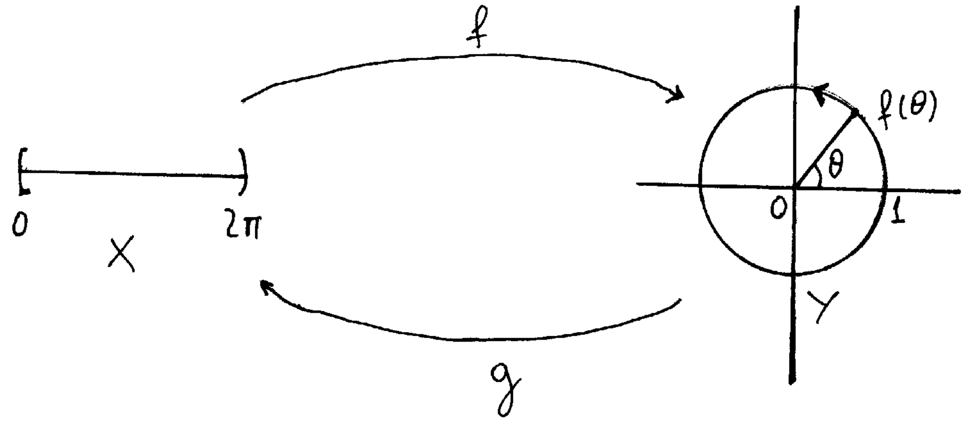
(II) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$

Εδώ $f(a) \neq -1$, $\forall a \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f όχι επί $\Rightarrow$ f όχι ισομορφισμός χώρων.

(III) $X = [0, 2\pi) = \{\theta \in \mathbb{R} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$

$Y = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$

Έστω $f: X \to Y$ με $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$



Η f είναι 1-1 και επί $\Rightarrow$ Υπάρχει η $g = f^{-1}: Y \to X \Rightarrow$

$\Rightarrow g: S^1 \to [0, 2\pi)$

Όμως η g δεν είναι συνεχής. Πράγματι έστω $b = (1,0)$

και $b_n = f\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)$. Τότε $b_n \to b$

Όμως $g(b) = 0$ και $g(b_n) = gf\left(2\pi - \frac{1}{n}\right) = 2\pi - \frac{1}{n}$

Επομένως $\lim g(b_n) \neq g(b) \Rightarrow g$ όχι συνεχής.

Άρα η f δεν είναι ισομορφισμός χώρων.

<u>Παράδειγμα</u>

$X = [0,1]$, $Y = [0,2]$

Έστω $h: X \to Y$ με $h(a) = 2a$

Έστω $\kappa: Y \to X$ με $\kappa(b) = \frac{b}{2}$

Αφού $h(\kappa(b)) = h\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{2b}{2} = b$ και $\kappa(h(a)) = \kappa(2a) = \frac{2a}{2} = a \Rightarrow$

$\Rightarrow \kappa = h^{-1} \Rightarrow$ Υπάρχει η $h^{-1}: Y \to X$.

Επίσης οι h, h^{-1} συνεχείς (διότι δίνονται με κάποιο τύπο).

Άρα η h ισομορφισμός χώρων.

Επομένως $[0,1] \cong [0,2]$

Γενικότερα : Κάθε $[a,b] \cong [c,d]$, $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ με $a<b$, $c<d$.

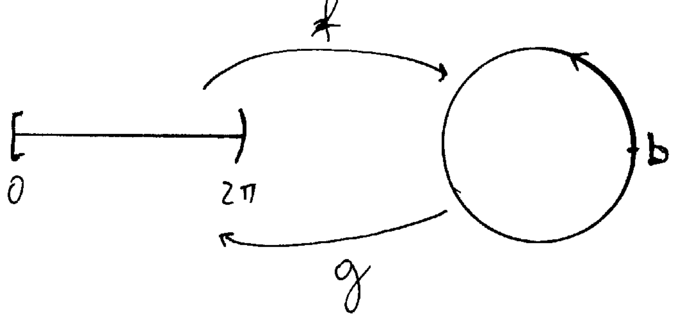
Διαισθητικά

Σκέφτομαι τους χώρους φτιαγμένους απο "λάστιχο".

Σκέφτομαι μια $f: X \to Y$ σαν "τοποθέτηση" του X στο Y.

f συνεχής $\rightsquigarrow$ Δεν "σχίζεται" ο χώρος X.

π.χ.



Εδώ η f "τυλίγει" και δεν "σχίζει" $\Rightarrow$ f συνεχής

Όμως η g "ξετυλίγει" και "σχίζει" στο b $\Rightarrow$ $g = f^{-1}$ όχι συνεχής.

Το γεγονός οτι η f^{-1} "σχίζει" τον χώρο $\rightsquigarrow$ η f "κολλά" σημεία μεταξύ τους.

Άρα f τοπολογικός ισομορφισμός $\rightsquigarrow$ (α) Δεν "σχίζει"

και

(b) Δεν "κολλά"

Άσκηση

Έστω $X=[0,1]\subset\mathbb{R}$ και $\varphi: X\to\mathbb{R}$, συνεχής.

Έστω $Y=\{(\alpha,\varphi(\alpha)) : \alpha\in X\}$ (το γράφημα της φ)

Να δείξετε ότι $X\cong Y$

(Υπόδειξη: $\lim (b_n,c_n)=(b,c) \iff \lim b_n=b,\ \lim c_n=c$)

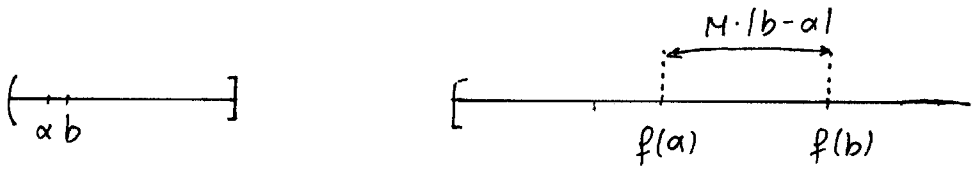
Παράδειγμα

$X=(0,1]$, $Y=[1,\infty) \Rightarrow X\cong Y$

Έστω $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$, $g(b)=\frac{1}{b}$, με $f: X\to Y$, $g: Y\to X$.

Τότε προφανώς $g=f^{-1}$ και f, f^{-1} συνεχείς (διότι δίνονται με κάποιον τύπο)

Σχόλιο



Υπάρχουν σημεία α,b που η απόσταση των εικόνων τους, είναι $M\cdot|b-\alpha|$, $\forall M>1$

(Δηλαδή, τα τοπολογικά "λάστιχα" έχουν άπειρη "ελαστικότητα")

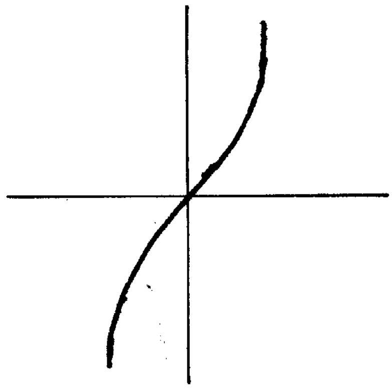
Παραδείγματα

(I) $(0, \infty) \cong (-\infty, \infty)$

Για $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^x$ έχουμε το ζητούμενο

(II) $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$

Για $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ έχουμε το ζητούμενο.



Άσκηση

(I) Να δείξετε ότι $[0,1] \not\cong \mathbb{R}$

(II) Να δείξετε ότι $[0,1] \not\cong (-1,1)$

Λύση

(I) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Το $[0,1]$ είναι συμπαγές $\Rightarrow$ f φραγμένη $\Rightarrow \exists M : f(x) \leq M , \forall x \in [0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \neq M+1 , \forall x \in [0,1] \Rightarrow f$ όχι επί $\Rightarrow$ Δεν υπάρχει η f^{-1} $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ όχι ισομορφισμός χώρων

όμως f τυχαία , άρα $[0,1] \not\cong \mathbb{R}$.

(Παρατηρώ ότι , κατά κανόνα, το να δείξουμε ότι $X \not\cong Y$ είναι πιο δύσκολο από το ότι $X \cong Y$)

(II) Έστω ότι $[0,1] \cong (-1,1) \Rightarrow [0,1] \cong (-1,1) \cong \mathbb{R} \Rightarrow [0,1] \cong \mathbb{R}$.

Άτοπο (από το (I))

Ισχυρισμός.

Έστω A, B χώροι τέτοιοι ώστε να ορίζονται οι $\chi(A), \chi(B)$.
Τότε αν $A \cong B \Rightarrow \chi(A) = \chi(B)$ (δηλαδή το "χ" είναι τοπολογική αναλλοίωτη).

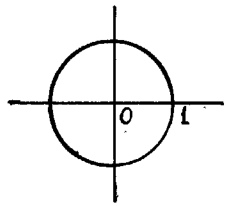
Εφαρμογή

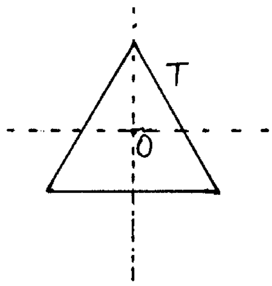
Να δείξετε ότι $[0,1] \ncong S^1$

Λύση

Κατ' αρχάς, $\chi([0,1]) = \chi\big(\underset{0}{[}\text{—}\underset{1}{]}\big) = 2-1 = 1$

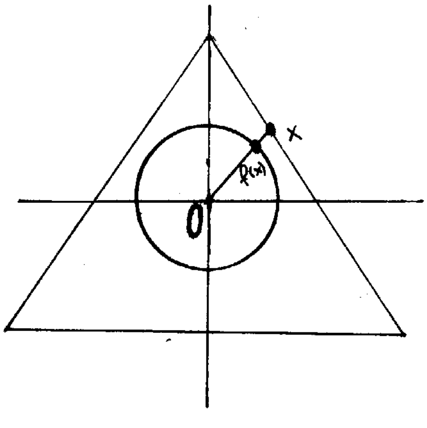
Ισχυριζόμαστε ότι:

$S^1 =$ 

$\cong$ 

Για $x \in T$ έστω $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Παρατηρώ ότι $\left|\dfrac{x}{|x|}\right| = 1 \Rightarrow f(x) \in S^1$



Έχουμε $f: T \to S^1$.

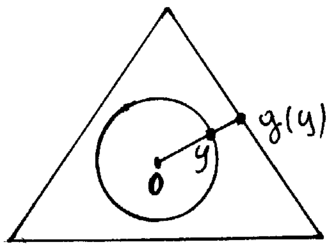
Η f συνεχής (δίνεται με τύπο).

Η $g: S^1 \to T$ δίνεται με παρόμοιο τρόπο.

Εδώ (διαισθητικά), $g(y)$ είναι το μοναδικό σημείο τομής του T και της ημιευθείας.

Η g συνεχής (διότι δίνεται με τύπο, ως τομή ευθειών και συγκεκριμένα της ημιευθείας και των ακμών του T).

Επομένως πράγματι $S^1 \cong T$.



Αν $[0,1] \cong S^1$ καθώς $S^1 \cong T \Rightarrow$

$\Rightarrow [0,1] \cong T \Rightarrow \chi([0,1]) = \chi(T) \Rightarrow$

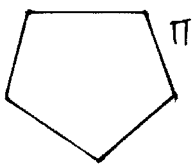
$\Rightarrow 2-1 = 3-3 \Rightarrow 1 = 0$. Άτοπο.

Επομένως $[0,1] \not\cong S^1$.

Σχόλιο

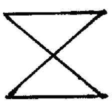
Παρόμοια δείχνω ότι $S^1 \cong \Pi$ για κάθε Π, που είναι περιφέρεια, κυρτού πολυγώνου.

π.χ.



$\chi(\Pi) = 0$

Άρα. $T \cong S^1 \cong \Pi \Rightarrow T \cong \Pi \Rightarrow \chi(T) = \chi(\Pi) \Rightarrow \chi(\Pi) = 0$

Αν Π όχι κυρτό, π.χ.  $\Rightarrow \chi \neq 0$ (Εδώ π.χ. $\chi = -1$)

Ορισμός

Ένας χώρος X με $X \cong S^1$ λέγεται <u>απλή κλειστή καμπύλη</u>

Αν $X \cong S^1$ και $X \subset \mathbb{R}^2$ ο X λέγεται <u>καμπύλη του Jordan</u>

Παραδείγματα

(I) Είδαμε ότι κάθε περιφέρεια κυρτού πολυγώνου είναι καμπύλη του Jordan.

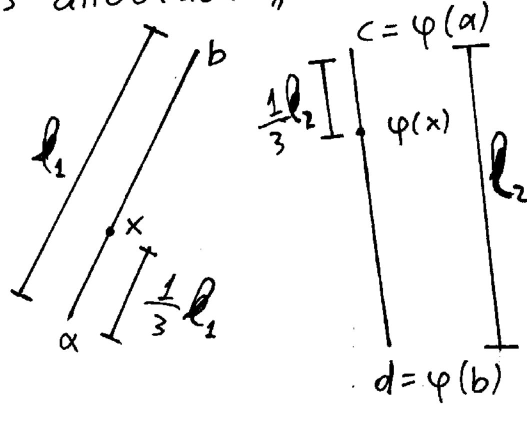
(II) Έστω $a,b \in \mathbb{R}^n$ και έστω $[a,b]$ το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ τους.

Σαν σύνολο $[a,b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\}$, αλλά θεωρώ δεδομένη και την σειρά των a,b, (a αρχή, b πέρας).

Έτσι $[a,b] \neq [b,a]$ ενώ τα αντίστοιχα σύνολα ισούνται.

Αν $a,b,c,d \in \mathbb{R}^n$ και $a \neq b$ τότε ορίζεται ο <u>κανονικός μορφισμός</u> $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ με $\varphi(ta + (1-t)b) = tc + (1-t)d$.

Παρατηρούμε ότι ο φ διατηρεί τις "σχετικές αποστάσεις".



Θεωρώ τα $a_1 = (1,0)$, $a_2 = (0,1)$, $a_3 = (2,0)$

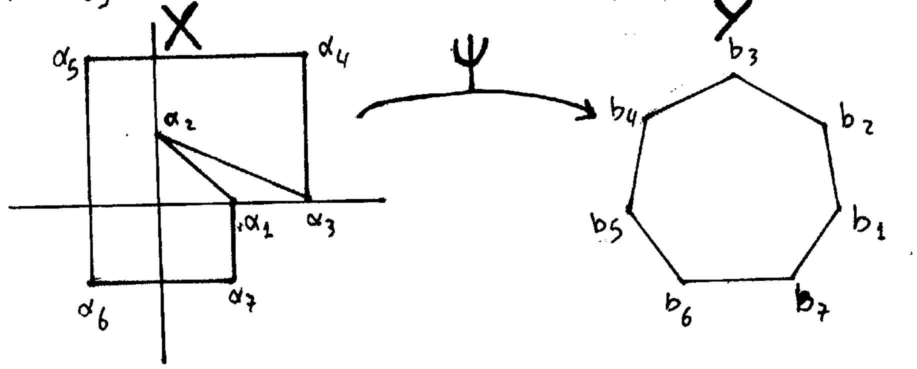
$a_4 = (2,2)$, $a_5 = (-1,2)$, $a_6 = (-1,-1)$

$a_7 = (1,-1)$

Έστω $X = [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_6, a_7] \cup [a_7, a_1]$

Τότε ο X είναι καμπύλη του Jordan

Πράγματι, έστω $\psi : X \to Y$ και ο περιορισμός του ψ σε κάθε τμήμα $[a_n, a_{n+1}]$ είναι ο κανονικός μορφισμός $[a_n, a_{n+1}] \to [b_n, b_{n+1}]$



Η Ψ είναι συνεχής, διότι είναι τμηματικά συνεχής σε κλειστά υποσύνολα.

Η αντίστροφη ψ^{-1} δίνεται με παρόμοιο τρόπο και είναι επίσης συνεχής. Επομένως ο Ψ είναι ισομορφισμός.

Δηλαδή $\psi : X \xrightarrow{\cong} Y$

Όμως ήδη ξέρω ότι $Y \cong S^1$

Επομένως $X \cong S^1$

Άσκηση (Bonus)

Δεδομένων $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ διακεκριμένων, έστω

$$X = [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{m-1}, a_m] \cup [a_m, a_1]$$

(i) Τι συνθήκη απαιτείται ώστε το $X \cong S^1$

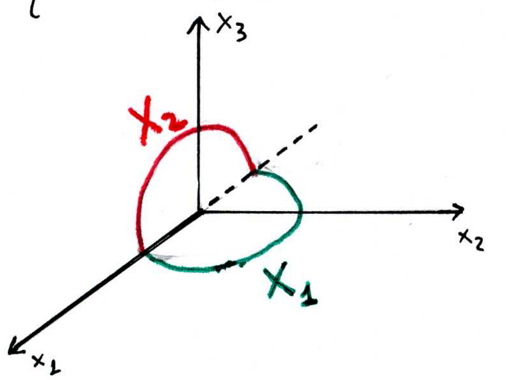
(ii) Περιγράψτε (σύντομα) που χρησιμοποιήται η παραπάνω συνθήκη στην απόδειξη.

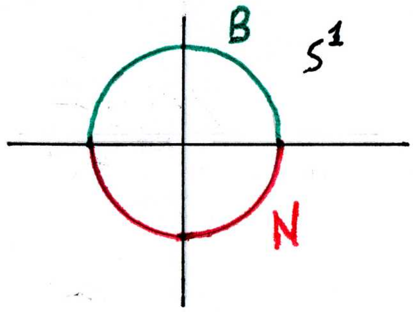
Παράδειγμα

Έστω $X = X_1 \cup X_2$ όπου τα $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^3$ ορίζονται ως εξής:

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_2 \geq 0\}$$

$$X_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_3)^2 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 \geq 0\}$$





Υπάρχει προφανής $\psi : X_0 \to S^1$ η οποία δίνεται τμηματικά με τις προφανείς $\varphi_1 : X_1 \xrightarrow{\cong} B$

$\varphi_2 : X_2 \xrightarrow{\cong} N$

Για παράδειγμα $\varphi_1(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2)$

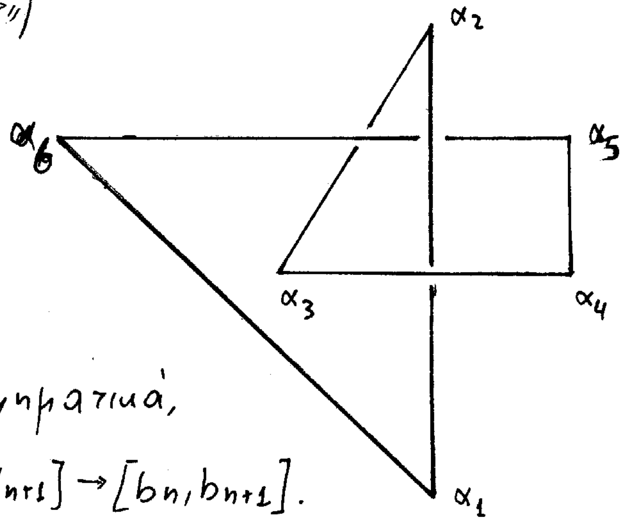
και $\varphi_2(x_1, 0, x_3) = (x_1, -x_3)$

Επομένως $X \cong S^1$

Παράδειγμα

Έστω $X = [a_1, a_2] \cup \ldots \cup [a_5, a_6] \cup [a_6, a_1] \subset \mathbb{R}^3$ όπως στο σχήμα ("κόμπος")

Τότε $X \cong S^1$



Πράγματι έστω Y ένα εξάγωνο. Τότε υπάρχει $\psi : X \to Y$ η οποία είναι τμηματικά, ο κανονικός μορφισμός $[a_n, a_{n+1}] \to [b_n, b_{n+1}]$.

Συμπέρασμα

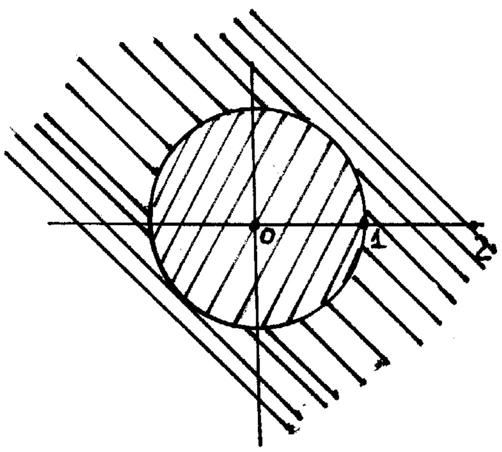
Είναι λάθος να σκεφτόμαστε ότι όλες οι τοπολογικές ισοδυναμίες είναι αποτέλεσμα κίνησης λαστίχου στον $\mathbb{R}^n$. Διαισθητικά μιλώντας, επιτρέπεται να "κόψουμε", αρκεί "στο τέλος της κίνησης", να "κολληθούν" όλα όπως πριν.

Στο προηγούμενο παράδειγμα ο X δεν παραμορφώνεται στον Y μέσω "κίνησης λαστίχου στον χώρο". (Αυτό ακριβώς σημαίνει, το ότι, ο X είναι "δεμένος κόμπος"). Όμως $X \cong S^1 \cong Y$

Τόξα σε χώρους

Παράδειγμα

Έστω $X = \mathbb{R}^2 \setminus S^1$



Είναι διαισθητικά προφανές, ότι ο X αποτελείται από δυο τμήματα (το πράσινο και το κόκκινο).

Το $\alpha = (0,0)$ και το $b = (2,0)$ ανήκουν σε διαφορετικά τμήματα. Τι σημαίνει όμως αυτό αυστηρά;

Ορισμός

Έστω X χώρος και $\alpha, b \in X$. Ενα <u>τόξο στον X από το α στο b</u> είναι ένας μορφισμός (δηλαδή συνεχής απεικόνιση)

$$\gamma : [0,1] \to X \quad \text{με} \quad \gamma(0) = \alpha, \ \gamma(1) = b$$

Αν υπάρχει τέτοιο γ, λέμε ότι <u>τα α, b συνδέονται (με τόξο) στον X.</u>

Αν $X \neq \emptyset$ και όλα τα $\alpha, b \in X$ συνδέονται, τότε ο X λέγεται <u>κατά τόξα συνεκτικός (Κ.Τ.Σ.)</u>

Σχόλιο

Στο προηγούμενο παράδειγμα τα α, b δεν συνδέονται στον X.

Πράγματι έστω για άτοπο ότι υπάρχει $\gamma : [0,1] \to X$, συνεχής με $\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(1) = b$.

Θεωρούμε την $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (x_1)^2 + (x_2)^2 - 1$

Παρατηρούμε ότι : (i) $f(x) \neq 0$, $\forall x \in X$

(ii) f συνεχής (δίνεται με τύπο)

(iii) $f(\alpha) = 0^2 + 0^2 - 1 = -1 < 0$

$f(b) = 2^2 + 0^2 - 1 = 3 > 0$

Θεωρούμε την σύνθεση $\delta : [0,1] \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

Όμως $\delta(0) = f(\gamma(0)) = f(\alpha) < 0$

και $\delta(1) = f(\gamma(1)) = f(b) > 0$

Επομένως από το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, $\exists\, t \in [0,1]$ με $\delta(t) = 0$

Αν $x = \gamma(t) \Rightarrow 0 = \delta(t) = f(\gamma(t)) = f(x) \Rightarrow f(x) = 0$. Άτοπο.

Άσκηση

Έστω $Y \subset \mathbb{R}^2$ το τρίγωνο με τις κορυφές $(0,0), (1,0), (0,1)$.

Έστω $X = \mathbb{R}^2 - Y$, $\alpha = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $b = (1,1)$

Να δείξετε ότι τα α, b δεν συνδέονται (με τόξο) στον X.

Άσκηση (Bonus)

Δίνονται τρείς ευθείες $\delta, \varepsilon, \zeta$ στον $\mathbb{R}^2$ που τέμνονται ανά δύο σε τρία διαφορετικά σημεία.

Έστω $Y = \delta \cup \varepsilon \cup \zeta$, $X = \mathbb{R}^2 - Y$

Να βρείτε $\alpha_1, \dots, \alpha_7 \in X$ τέτοια ώστε $\forall x \in X$, το x να συνδέεται (με τόξο στον X) με κάποιο α_n, $n = 1, \dots, 7$.

(Σημείωση: Ένα σχήμα δεν αρκεί)

Θεώρημα

Έστω X χώρος. Για $\alpha, b \in X$ γράφω $\alpha \sim b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Τα α, b συνδέονται (με τόξο) στον X.

Τότε η "$\sim$" είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη

(i) Αν $\alpha \in X$ έχουμε την σταθερή $\gamma : [0,1] \to X$ με $\gamma(t) = \alpha$.
Είναι συνεχής και αφού $\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(1) = \alpha \Rightarrow \alpha \sim \alpha$
(ανακλαστικότητα)

(ii) Έστω ότι $\alpha \sim b \Rightarrow \exists \gamma : [0,1] \to X$ με $\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(1) = b$, συνεχής. Έστω $\delta : [0,1] \to [0,1]$ με $\delta(t) = 1 - t$, συνεχής.
Τότε η σύνθεση $\bar{\gamma} : [0,1] \xrightarrow{\delta} [0,1] \xrightarrow{\gamma} X$ είναι συνεχής, δηλαδή τόξο και

$$\left.\begin{aligned} \bar{\gamma}(0) &= \gamma(\delta(0)) = \gamma(1) = b \\ \bar{\gamma}(1) &= \gamma(\delta(1)) = \gamma(0) = \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow b \sim \alpha$$

(συμμετρικότητα)

(iii) Έστω ότι $\alpha \sim b$ και $b \sim c$

Δηλαδή $\exists\, \gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ τόξα με
$$\gamma_1(0) = \alpha$$
$$\gamma_1(1) = b$$
$$\gamma_2(0) = b$$
$$\gamma_2(1) = c$$

Κάνουμε "επικόλληση" των γ_1, γ_2.

Έστω $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

Έχουμε $\gamma : [0,1] \to X$ καλώς ορισμένη.

Πράγματι για $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma_1(2t) = \gamma_1\left(2\frac{1}{2}\right) = \gamma_1(1) = b = \gamma_2(0) =$

$= \gamma_2\left(2\frac{1}{2} - 1\right) = \gamma_2(2t-1)$

Επίσης η γ είναι συνεχής, διότι είναι τμηματικά συνεχής στα κλειστά υποσύνολα $[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]$ που καλύπτουν τον $[0,1]$. Επομένως η γ συνεχής στον $[0,1]$.

Ακόμα $\gamma(0) = \gamma_1(0) = \alpha$ και $\gamma(1) = \gamma_2(1) = c$.

Άρα $\alpha \sim c$. (μεταβατικότητα)

<u>Παράδειγμα</u>

Ο $\mathbb{R}^2$ είναι Κ.Τ.Σ..

Πράγματι για $a, b \in \mathbb{R}^2$ έχουμε την συνήθη παραμέτρηση του ευθύγραμμου τμήματος $[a,b]$, δηλαδή $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (1-t)\alpha + tb$. Τότε $\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(1) = b$, επομένως $a \sim b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^2$

Θεώρημα

(I) Ο $\mathbb{R}^n$ είναι Κ.Τ.Σ. $(n \geq 1)$

(II) Αν $X \subset \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό $\Rightarrow$ ο X είναι Κ.Τ.Σ.

Απόδειξη

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Θεώρημα

Για $n \geq 2$ ο $\mathbb{R}^n - \{0\}$ είναι Κ.Τ.Σ.

Απόδειξη

Έστω $a, b \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Θα δείξουμε ότι τα a, b συνδέονται με τόξο στον $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Περίπτωση I: Έστω ότι το 0 δεν ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $[a, b]$. Τότε η απόδειξη είναι παρόμοια με το προηγούμενο παράδειγμα. Επομένως $a \sim b$.

Περίπτωση II: Έστω ότι το $0 \in [a, b]$. Ειδικότερα, τα $0, a, b$ είναι συνευθειακά. Αφού $n \geq 2$ ο $\mathbb{R}^n$ δεν είναι ευθεία, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}^n$ το οποίο δεν κείται στην ευθεία των $0, a, b$. Ισχυριζόμαστε ότι $0 \notin [a, c]$ και ότι $0 \notin [b, c]$. Πράγματι έστω για άτοπο ότι $0 \in [a, c]$. Τότε τα $0, a, c$ είναι συνευθειακά, δηλαδή και τα a, b, c είναι συνευθειακά. Άτοπο. Παρόμοια δείχνουμε ότι $0 \notin [b, c]$.

Επομένως από την περίπτωση 1, έχουμε ότι $a \sim c$ και $b \sim c \Rightarrow$
$\Rightarrow a \sim b$ (από την μεταβατικότητα της "$\sim$")

Ορισμός

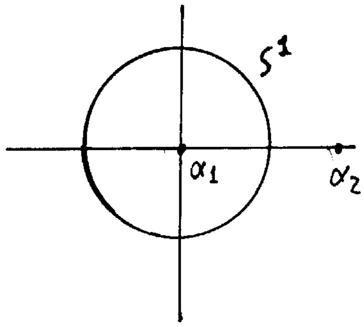
(I) Η κλάση ισοδυναμίας $[\alpha] = \{b \in X : b \sim \alpha\}$ λέγεται **κατά τόξα συνιστώσα** (Κ.Τ.Σα), του α στον X.

(II) Το σύνολο όλων των κατά τόξα συνιστωσών συμβολίζεται με $\pi_0(X) = \{[\alpha] : \alpha \in X\}$

Παράδειγμα

$X = \mathbb{R}^2 - S^1$, $\alpha_1 = (0,0)$, $\alpha_2 = (2,0)$.

Εξ' ορισμού το $[\alpha_1]$ αποτελείται απο τα α που συνδέονται με το α_1. Επομένως $[\alpha_1]$ = Εσωτερικό του S^1 (Άσκηση - Κυρτότητα).



Παρόμοια $[\alpha_2]$ = Εξωτερικό του S^1 (βλ: Επόμενη άσκηση)

Επομένως $\pi_0(X) = \{[\alpha_1], [\alpha_2]\}$

Αφού $[\alpha_1] \neq [\alpha_2] \Rightarrow |\pi_0(X)| = 2$.

Προσοχή!

Είναι λάθος να ταυτίζουμε το $\{A, B\}$ με το $A \cup B$

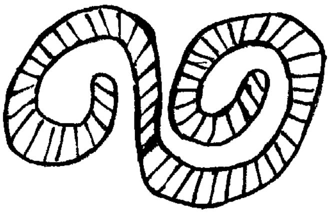
Αν $A = [\alpha_1]$, $B = [\alpha_2]$ όπως παραπάνω, τότε $A \cup B = \mathbb{R}^2 - S^1$ ενώ το $\{A, B\}$ έχει μόνο δύο στοιχεία.

Επομένως, σαν αφηρημένο σύνολο, το $\pi_0(X)$ είναι πιο απλό απο το X.

Θεώρημα (της καμπύλης του Jordan)

Αν $Y \subset \mathbb{R}^2$ και $Y \cong S^1 \Rightarrow \left|\pi_0(\mathbb{R} \setminus Y)\right| = 2$

Παράδειγμα



Άσκηση

Έστω $Y \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο από το $M \in \mathbb{R}^+$, δηλαδή $\alpha \in Y \Rightarrow |\alpha| \leq M$. Έστω $X = \mathbb{R}^2 \setminus Y$ και $\alpha_0 \in X$ με $|\alpha_0| > M$.

Για $\alpha \in X$ με $|\alpha| > M$ να δείξετε ότι $\alpha \sim \alpha_0$ στον X.

Σχόλια

Ⓘ Η παραπάνω άσκηση λέει:

Αφαιρώντας φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ προκύπτει μόνο μια μη-φραγμένη συνιστώσα.

Ⓘⓘ Ισχύει για κάθε $\mathbb{R}^n$ με την ίδια απόδειξη.

Ορισμός

Έστω f μορφισμός χώρων $f: X \to Y$.
Ορίζουμε τον <u>επαγόμενο μορφισμό</u> $f_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$, με $f_*([\alpha]) = [f(\alpha)]$ ①

Εδώ, $[f(\alpha)]$ σημαίνει Κ.Τ.Σα του $f(\alpha)$ στον Y.

Άρα ο τύπος ① δεν είναι "παράλογος".

Όμως δεν είναι προφανές ότι είναι καλώς ορισμένος.

Ζητάμε $[\alpha]=[b] \Rightarrow f_*[\alpha] = f_*[b]$.

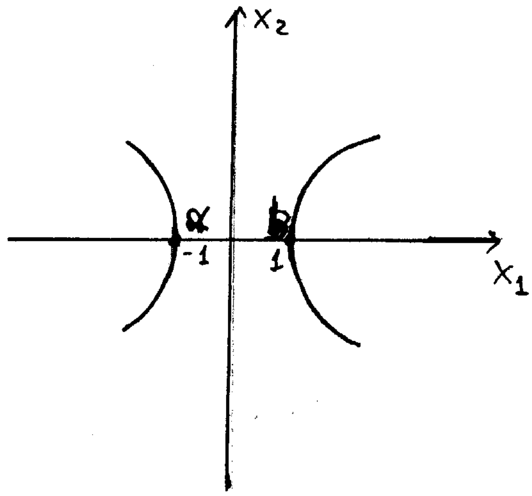
Πράγματι, αν $[a]=[b] \Rightarrow \exists$ τόξο $\gamma:[0,1]\to X$ με $\gamma(0)=\alpha$, $\gamma(1)=b$. (γιατί $[a]=[b] \Rightarrow \alpha \sim b$)

Άρα το $\delta:[0,1] \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{f} Y$ είναι τόξο στον Y,

με $\delta(0) = f(\gamma(0)) = f(\alpha)$ και $\delta(1) = f(\gamma(1)) = f(b)$

Επομένως $f(a) \sim f(b) \Rightarrow [f(a)] = [f(b)] \Rightarrow f_*[\alpha] = f_*[b]$

Παράδειγμα



$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 - (x_2)^2 = 1\}$

Εδώ $A = [a] =$ "αριστερός κλάδος"

και $B = [b] =$ "δεξιός κλάδος"

οπότε $\pi_0(X) = \{A, B\}$

Αν έχουμε $f: X \to X$ με $f(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$,

Τότε $f(a) = b \Rightarrow f_*[\alpha] = [f(a)] = [b] \Rightarrow f_*(A) = B$.

Δηλαδή η f_* είναι η αντιμετάθεση $\{A,B\} \longrightarrow \{A,B\}$.

Διαισθητικά

Οι κατά τόξα συνιστώσες του X είναι τα "κομμάτια" του X.
Για $a \in X$, το $[a]$ είναι το κομμάτι που θα κινηθεί, αν "πιάσω το X απο το a".
Η ύπαρξη του f_* σημαίνει: Συνεχείς συναρτήσεις, μετακινούν ενα "κομμάτι" του X στο ίδιο "κομμάτι" του Y.

Σχόλιο

Ισχύει ότι $f_*(A) = B \Leftrightarrow f(A) \subset B$ (βλ. προηγούμενο παράδειγμα)

Ορισμός

Θεωρήστε δεδομένο εναν κανόνα K που έχει τις παρακάτω τέσσερις ιδιότητες:

(1) Σε κάθε χώρο X αντιστοιχεί ένα σύνολο $K(X)$.

(2) Σε κάθε μορφισμό χώρων $f: X \to Y$ αντιστοιχεί ενας μορφισμός συνόλων $K(f): K(X) \to K(Y)$.

(3) $K(g \circ f) = K(g) \circ K(f)$, για όλες τις συνθέσιμες συνεχείς f, g (δηλαδή, για κάθε $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ με f, g μορφισμούς χώρων)

(4) Αν η f είναι η ταυτοτική συνάρτηση του X, τότε η $K(f)$ είναι η ταυτότικη συνάρτηση του $K(X)$.

Τότε ο K λέγεται <u>συναρτητής απο χώρους σε σύνολα</u>.

Θεώρημα

Ο π_0 είναι συναρτητής από χώρους σε σύνολα.

Απόδειξη

Ελέγχουμε τις τέσσερεις ιδιότητες του ορισμού.

1^{η} : $X \mapsto \pi_0(X)$

2^{η} : $f \mapsto f_* = \pi_0(f)$

3^{η} : Δεδομένων $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ εφαρμόζουμε τον $\pi_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_0(X) \xrightarrow{f_*} \pi_0(Y) \xrightarrow{g_*} \pi_0(Z)$. Άρα ορίζεται η $g_* \circ f_*$.

Από την άλλη ορίζεται η $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ επομένως ορίζεται και η $(g \circ f)_*$

Θέλουμε $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$

Αφού έχουν τα ίδια πεδία ορισμού (το $\pi_0(X)$) και ίδια πεδία τιμών (το $\pi_0(Z)$) απομένει ο έλεγχος του ότι έχουν και τις ίδιες τιμές.

Έστω $[a] \in \pi_0(X)$. Τότε $g_* \circ f_*[a] = g_*\left(f_*[a]\right) =$

$= g_*\left[f(a)\right] = \left[g(f(a))\right]$.

Από την άλλη $(g \circ f)_*[a] = \left[g \circ f(a)\right] = \left[g(f(a))\right]$.

Επομένως $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$.

4^{η} : Αν $f = I_X : X \to X$ με $f(a) = a$, $\forall a \in X$, τότε

$f_*[a] = [f(a)] = [a]$, δηλαδή η f_* είναι η ταυτοτική

του $\pi_0(X)$.

Ορολογία

Αν S, T σύνολα, μια αντιστρέψιμη συνάρτηση $a : S \to T$

θα την λέμε ισομορφισμό συνόλων.

Γράφω $a : S \xrightarrow{\cong} T$

Αν υπάρχει τέτοιο a, λέμε $S \cong T$ (τα σύνολα είναι ισόμορφα)

Για πεπερασμένα σύνολα S και T, ισχύει ότι

$S \cong T \Leftrightarrow$ Τα S, T είναι ισοπληθικά.

Θεώρημα

Αν $f : X \to Y$ είναι ισομορφισμός χώρων, τότε ο

$f_* : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ είναι ισομορφισμός συνόλων.

Απόδειξη

Αν f ισομορφισμός τότε $\exists\, g = f^{-1}$.

Δηλαδή $g \circ f = I_X$, $f \circ g = I_Y$.

Εφαρμόζουμε τον $\pi_0 \Rightarrow \pi_0(g \circ f) = \pi_0(I_X) \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_0(g) \circ \pi_0(f) = id$ (ταυτοτική συνάρτηση του $\pi_0(X)$)

Παρομοίως, $\pi_0(f) \circ \pi_0(g) = id$ (ταυτοτική συνάρτηση του $\pi_0(Y)$)

Δηλαδή οι $f_* = \pi_0(f)$ και $g_* = \pi_0(g)$ είναι αντίστροφες.

Επομένως η $\pi_0(f)$ αντιστρέψιμη.

Σχόλιο

Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει, για κάθε συναρτητή K, με την ίδια απόδειξη.

Πόρισμα

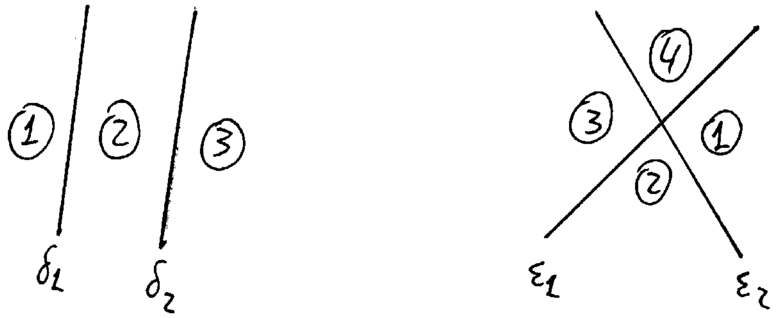
Έστω X, Y χώροι με $X \cong Y$.
Τότε $|\pi_0(X)| = |\pi_0(Y)|$, δηλαδή το πλήθος των κατά τόξα συνιστωσών, είναι τοπολογική αναλλοίωτη.

Απόδειξη

Αν $X \cong Y$ έστω $f: X \xrightarrow{\cong} Y$
Άρα $f_* : \pi_0(X) \xrightarrow{\cong} \pi_0(Y)$. Δηλαδή τα $\pi_0(X)$ και $\pi_0(Y)$ είναι ισόμορφα άρα και ισοπληθικά.

Παράδειγμα

Έστω $\delta_1 \parallel \delta_2$ ευθείες στον $\mathbb{R}^2$ και $\varepsilon_1 \# \varepsilon_2$ (με $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$) στον $\mathbb{R}^2$.
Τότε αν $X = \mathbb{R}^2 - (\delta_1 \cup \delta_2)$, $Y = \mathbb{R}^2 - (\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2)$ ισχύει ότι $X \ncong Y$, αφού $|\pi_0(X)| = 3$ και $|\pi_0(Y)| = 4$.



Επανάληψη

Για τυχαία σχέση ισοδυναμίας "$\sim$" ισχύουν τα εξής:

① $[\alpha]=[b] \Leftrightarrow \alpha \in [b] \Leftrightarrow \alpha \sim b$.

② $[\alpha] \neq [b] \Rightarrow [\alpha] \cap [b] = \emptyset$.

Απόδειξη (του ②)

Έστω $c \in [\alpha] \cap [b] \Rightarrow c \in [\alpha]$ και $c \in [b] \Rightarrow [c]=[\alpha]$ και $[c]=[b] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\alpha]=[b]$.

Θεώρημα

X κ.τ.σ. $\Leftrightarrow |\pi_0(X)|=1$

Απόδειξη

Αν X κ.τ.σ. $\Rightarrow X \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, \alpha \in X$

Άρα ορίζεται η $[\alpha] \in \pi_0(X)$

Αν έχουμε ένα άλλο στοιχείο του $\pi_0(X)$, έστω το $[b]$,

με $b \in X$, τότε αφού X κ.τ.σ. $\Rightarrow \alpha \sim b \Rightarrow [\alpha]=[b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_0(X)=\{[\alpha]\} \Rightarrow |\pi_0(X)|=1$

Αντιστρόφως, αν $|\pi_0(X)|=1$ έστω $[\alpha]$ το στοιχείο του $\pi_0(X)$.

Εξ' ορισμού $\alpha \in X \Rightarrow X \neq \emptyset$.

Επίσης $\forall b \in X$ πρέπει $[b] \in \pi_0(X) \Rightarrow [b] = [\alpha] \Rightarrow b \sim \alpha$

Αν τώρα $b_1, b_2 \in X$ έχουμε ότι $\left.\begin{array}{l} b_1 \sim \alpha \\ b_2 \sim \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 \sim b_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow X$ Κ.Τ.Σ.

Λήμμα

Ισχύει ότι $|\pi_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})| = 2$

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι $\pi_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-\}$

Έστω $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$

Αν $c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ Το $0 \notin$ "ευθύγραμμο τμήμα των c, α_2"

Άρα τα c, α_2 συνδέονται (με ευθύγραμμο τμήμα), δηλαδή

$c \sim \alpha_2 \Rightarrow [c] = [\alpha_2]$

Παρομοίως, αν $c \in \mathbb{R}^- \Rightarrow [c] = [\alpha_1]$

Όμως $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow c \in \mathbb{R}^+$ ή $c \in \mathbb{R}^-$, δηλαδή $[c] = [\alpha_1]$ ή $[c] = [\alpha_2]$.

Μέχρι στιγμής $\pi_0(X) = \{[\alpha_1], [\alpha_2]\}$.

Επόμενο βήμα 1: $[\alpha_1] \neq [\alpha_2]$.

Με άτοπο. Αν $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ δηλαδή αν $\alpha_1 \sim \alpha_2$, έστω

γ ένα τόξο απο το α_1 στο α_2, δηλαδή $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Επεκτείνω το πεδίο τιμών, δηλαδή ορίζω $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$, με $\delta(t) = \gamma(t)$.

Η δ παραμένει (προφανώς) συνεχής.

Επομένως από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, αφού

$\delta(0) < 0$, $\delta(1) > 0$ δίνει $t \in [0,1]$ με $\delta(t) = 0$

Δηλαδή $\underset{\delta(t)}{\overset{\shortparallel}{\gamma(t)}} = 0$. Άτοπο αφού $\gamma(t) \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ήδη δείξαμε ότι $|\pi_0(\mathbb{R} - \{0\})| = 2$.

Για να δείξουμε ότι $[\alpha_1] = \mathbb{R}^-$ και ότι $[\alpha_2] = \mathbb{R}^+$

έχουμε τα εξής:

Ήδη δείξαμε ότι $\mathbb{R}^+ \subset [\alpha_1]$ και ότι $\mathbb{R}^- \subset [\alpha_2]$

Αν τώρα $c \in [\alpha_1] \Rightarrow c \notin [\alpha_2]$ (αφού $[\alpha_1], [\alpha_2]$ ξένες),

άρα $c \notin \mathbb{R}^-$. Δηλαδή $[\alpha_1] \subset \mathbb{R}^+$.

Άρα $[\alpha_1] = \mathbb{R}^+$ και παρόμοια για το $[\alpha_2] = \mathbb{R}^-$.

<u>Εφαρμογή.</u>

Πολύ δύσκολο πρόβλημα γύρω στο 1900 αποτέλεσε το

"Τοπολογικό αναλλοίωτο της Διάστασης - (Τ.Α.Δ.)"

Δηλαδή "το n είναι τοπολογική αναλλοίωτη του $\mathbb{R}^n$"

δηλαδή αν $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ (ως χώροι) τότε $n = m$.

Ισοδύναμα: $n \neq m \Rightarrow \mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$.

Το οτι αυτή η διαισθητικά "προφανής" πρόταση χρειαζόταν απόδειξη, έγινε αντιληπτό όταν ο Peano έδωσε παράδειγμα καμπύλης που "γεμίζει" το επίπεδο, δηλαδή $\gamma : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ συνεχής και επί.

Η εφαρμογή μας αποτελεί το πρώτο βήμα του Τ.Α.Δ., δηλαδή αν $n \gneq 1 \Rightarrow \mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^1$

<u>Απόδειξη</u>

Με άτοπο. Έστω $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^1$, με $n > 1$ $(n \neq 1)$

Έστω $\alpha = f(0)$. Έχω την παράλληλη μεταφορά κατά "$-\alpha$", δηλαδή $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x - \alpha$.

Είναι ισομορφισμός, με αντίστροφη παράλληλη μεταφορά, κατά "$+\alpha$".

Άρα και η σύνθεση $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^1 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^1$ είναι ισομορφισμός (επειδή εύκολα ελέγχω ότι $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, δηλαδή η $g \circ f$ είναι αντιστρέψιμη).

Όμως η h είναι "καλύτερη" απο την f, διότι διατηρεί το 0.

Πράγματι, $h(0) = g(f(0)) = f(0) - \alpha = \alpha - \alpha = 0$.

Αφού $h(0) = 0 \Rightarrow h^{-1} h(0) = h^{-1}(0) \Rightarrow 0 = h^{-1}(0)$

Επομένως και η h^{-1} διατηρεί το 0.

Άρα έχουμε καλώς ορισμένες την $h : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ και την αντίστροφη της.

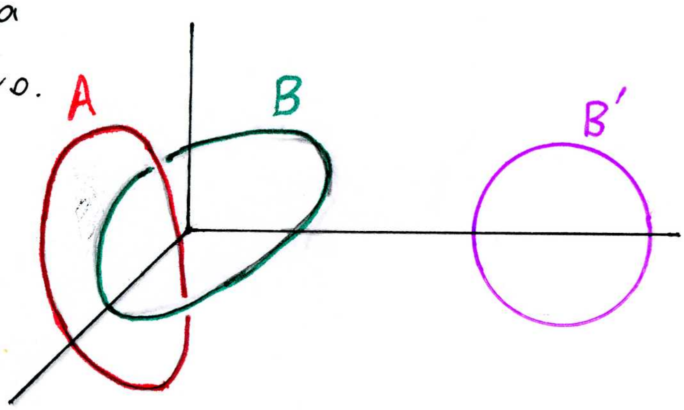
Δηλαδή, $h: \mathbb{R}^n - \{0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\pi_0(\mathbb{R}^n - \{0\})| = |\pi_0(\mathbb{R} - \{0\})| \Rightarrow 1 = 2$. Άτοπο.

$\boxed{\text{Ομοτοπία Τόξων}}$

Οι κύκλοι A, B είναι "πεπλεγμένοι" (linked).

Σκέφτομαι: A φτιαγμένο από σύρμα
B ——— " ——— λάστιχο.



Όπως και αν παραμορφώσω το B, αν δεν το κόψω, δεν μπορώ να το κινήσω στο B'.

Παραμόρφωση ⟶ "Κίνηση" B_t, $0 \leq t \leq 1$

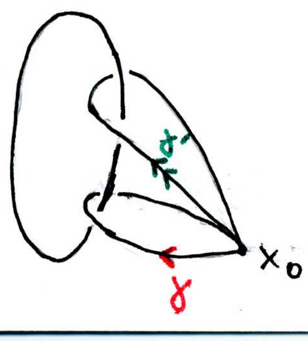
$B_0 = B$ (στον χρόνο 0 έχω το αρχικό σχήμα)

Δεν υπάρχει "συνεχής" B_t, με $B_0 = B$, $B_1 = B'$.

Η έννοια που αντιστοιχεί αυστηρά στο B_t είναι η ομοτοπία (βλ. παρακάτω).

Έχουμε και "διπλά πεπλεγμένα λάστιχα".

Παραμορφώνεται σε
με γ, γ' = κυκλικές κινήσεις,
δηλαδή $\gamma(t)$ συνεχής,
με $0 \leq t \leq 1$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$
Παρομοίως για το γ'.



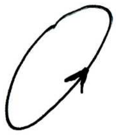
Παρατηρούμε ότι το γ παραμορφώνεται στο γ'

Διαισθητικά μιλώντας τα ταυτίζουμε.

"Διπλά πεπλεγμένο" $\rightsquigarrow 2\gamma \rightsquigarrow \gamma+\gamma \rightsquigarrow \gamma+\gamma'$

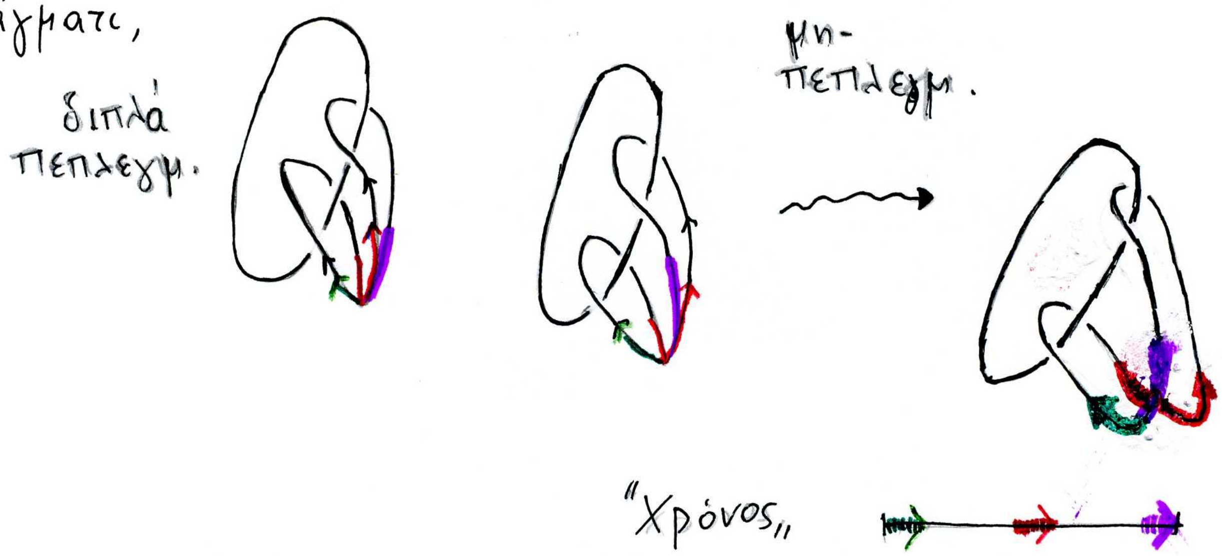
Οδηγούμαστε σε πράξη στις κυκλικές κινήσεις.

Αποτέλεσμα της πράξης $\gamma+\gamma'$: κίνηση πρώτα κατά γ και μετά κατά γ'.

Διαισθητικά: Αν $\gamma =$  θα περιμέναμε $-\gamma =$ 

Θα έπρεπε $\gamma+(-\gamma)=0$, δηλαδή $(+1)$-πεπλεγμένο και (-1)-πεπλεγμένο $=$ 0-πεπλεγμένο, δηλαδή μη-πεπλεγμένο.

Πράγματι,



Ορισμοί

Έστω A, X χώροι και $\gamma, \delta : A \to X$ συνεχείς

(α) Μια ομοτοπία από την γ στην δ, είναι μια συνεχής

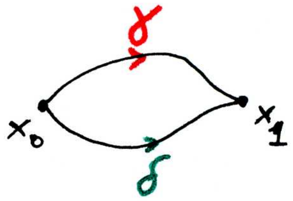
$$h : A\times[0,1] \to X \quad \text{με} \quad h(s,0)=\gamma(s) \ \text{και} \ h(s,1)=\delta(s), \ \forall s\in A. \quad ✪$$

Αν υπάρχει τέτοια h, λέω οτι οι γ, δ είναι <u>ομοτοπικές</u>

Γράφω $\gamma \simeq \delta$

(b) Στην ειδική περίπτωση όπου $A = [0,1]$ (οπότε οι γ, δ είναι τόξα στον X) έστω ότι $\gamma(0) = \delta(0) = x_0$
και $\gamma(1) = \delta(1) = x_1$

(δηλαδή υποθέτω ότι τα τόξα που έχουν κοινά άκρα),



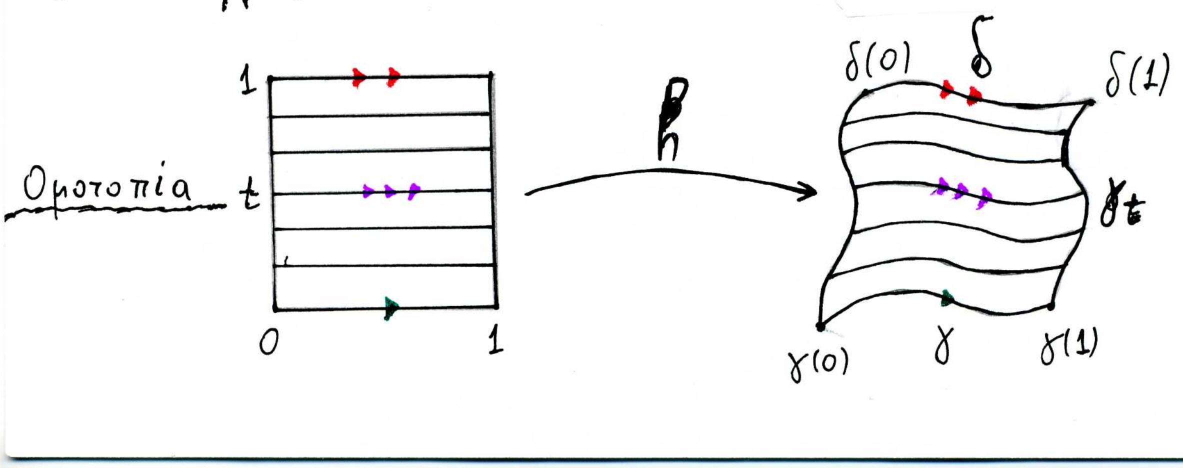
τότε μια ομοτοπία h, απο το γ στο δ, θα λέγεται <u>ομοτοπία τόξων</u>, αν εκτός απο την ⊛, ικανοποιεί και την :

$$\left.\begin{aligned} h(0,t) &= x_0 \\ h(1,t) &= x_1 \end{aligned}\right\} , \ \forall t \in [0,1] \quad (\star\star)$$

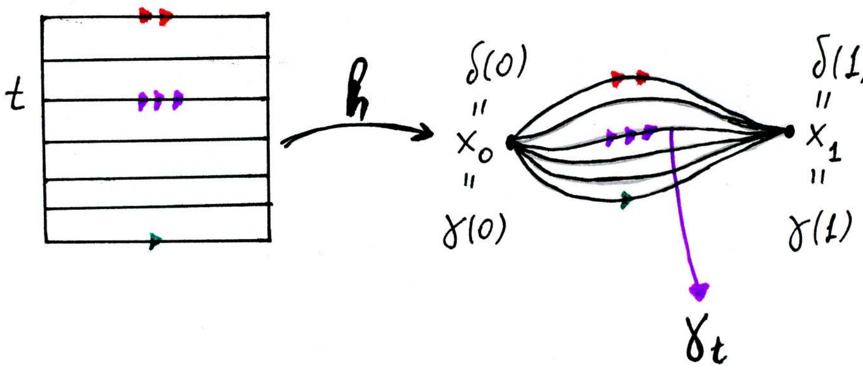
Αν υπάρχει τέτοια ομοτοπία τόξων γράφω $\gamma \simeq_T \delta$ και λέω τα γ, δ είναι <u>τοξοομοτοπικά</u>.

<u>Σκίτσα</u>

Έστω $A = [0,1]$, $X = \mathbb{R}^2$



Ομοτοπία τόξων



Για t σταθερό θέτω $\gamma_t(s) = h(s,t)$

Παίρνω συνεχή $\gamma_t : A \to X$.

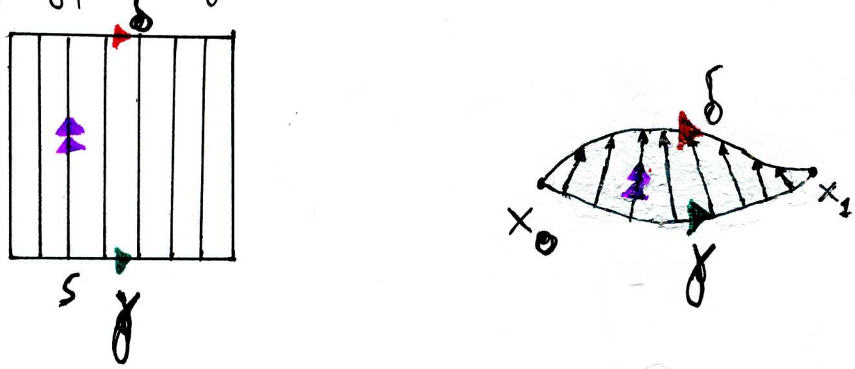
Τότε, (*) $\Leftrightarrow$ $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_1 = \delta$

και (**) $\Leftrightarrow$ Κάθε γ_t είναι τόξο απο το x_0 στο x_1

Παράδειγμα

Αν $X \subset \mathbb{R}^n$ τότε οποιαδήποτε τόξα με κοινά άκρα, είναι τοξοομοτοπικά.

Πράγματι για $h(s,t) = (1-t)\cdot\gamma(s) + t\cdot\delta(s)$ έχουμε το ζητούμενο



Θεώρημα

Έστω X χώρος και $x_0, x_1 \in X$.

Η σχέση $\gamma \simeq_T \delta$ είναι σχέση ισοδυναμίας (στο σύνολο, των τόξων στο X, απο το x_0 στο x_1)

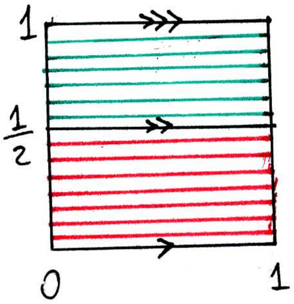
Απόδειξη

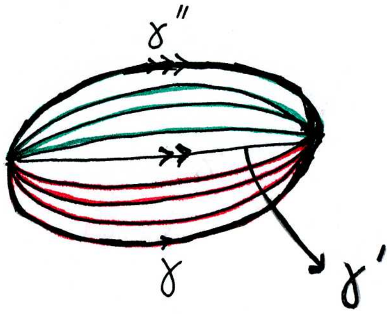
Παρόμοια με το αντίστοιχο θεώρημα για την "σύνδεση με τόξα".

$\gamma \simeq_T \gamma$: Για $h(s,t) = \gamma(s)$

$\gamma \simeq_T \delta \Rightarrow \delta \simeq_T \gamma$: Για $h(s,t) = h(s, 1-t)$

$\gamma \overset{h}{\simeq}_T \gamma'$ και $\gamma' \overset{h'}{\simeq}_T \gamma''$: θέτω $h''(s,t) = \begin{cases} h(s,2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ h'(s,2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$





$(h \rightsquigarrow$, $h' \rightsquigarrow$ $)$

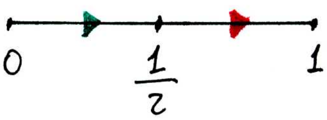
Παρόμοια δείχνω (για A, X σταθερούς χώρους) ότι η σχέση "$\simeq$" είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων απο το A στο X.

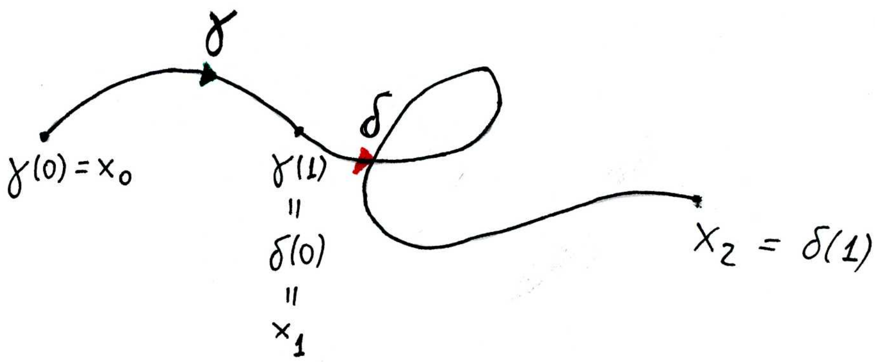
$\boxed{\text{Η Θεμελιώδης ομάδα}}$

Ορισμός

Αν γ, δ είναι τόξα στον X, με $\gamma(1) = \delta(0)$ ορίζω το γινόμενο τόξων $\gamma \cdot \delta$ ως εξής:

$$\gamma \cdot \delta(s) = \begin{cases} \gamma(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \delta(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$





$\gamma : [0,1] \to X$ με ταχύτητα 1

$\delta : [0,1] \to X$ —— " ——

$\gamma \cdot \delta : [0,1] \to X$ με ταχύτητα 2

Λήμμα

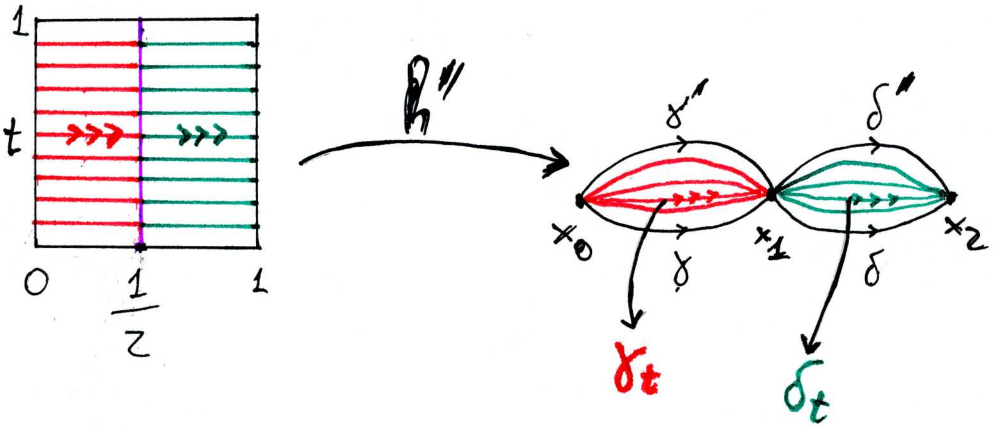
Αν $\left.\begin{array}{l} \gamma \simeq_T \gamma' \\ \text{και } \delta \simeq_T \delta' \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma \cdot \delta \simeq_T \gamma' \cdot \delta'$, όπου $x_0, x_1, x_2 \in X$,

και γ, γ' τόξα από το x_0 στο x_1

και δ, δ' —— " —— x_1 στο x_2

Απόδειξη

Έστω ότι η h συνδέει τα γ, γ' και η h' τα δ, δ'.



Αν $\gamma_t(s) = h(s,t)$ με $\gamma_0 = \gamma, \gamma_1 = \gamma'$

και $\delta_t(s) = h'(s,t)$ με $\delta_0 = \delta, \delta_1 = \delta'$

έστω $h''(s,t) = \gamma_t(s) \cdot \delta_t(s)$

Εύκολα ελέγχουμε τις ζητούμενες ιδιότητες.

Ορολογία

Για σταθερό $x_0 \in X$:

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση τόξων, με το ίδιο αρχικό και τελικό σημείο x_0 $(\gamma(0) = \gamma(1) = x_0)$.

Θα τα λέμε κλειστά τόξα στο x_0

Το x_0 θα το λέμε σημείο βάσης του X.

Την κλάση ισοδυναμίας του τόξου γ ως πρός την σχέση "$\simeq_T$" την λέμε κλάση ομοτοπίας τόξων του γ και την συμβολίζουμε με $[\gamma]$.

Το σύνολο όλων των $[\gamma]$, όπου γ κλειστό τόξο στο x_0, συμβολίζεται με $\pi_1(X, x_0)$

Το προηγούμενο λήμμα μου επιτρέπει να ορίσω πολλ/μο στο $\pi_1(X, x_0)$ με $[\gamma]\cdot[\delta] = [\gamma\cdot\delta]$

(Λήμμα $\Rightarrow$ Καλώς ορισμένος)

Θεώρημα/ορισμός

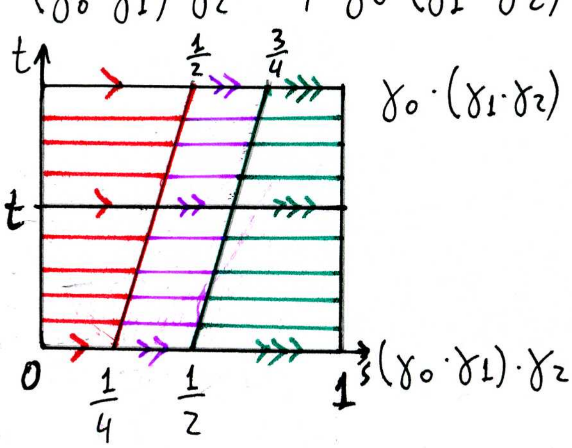
Με τον παραπάνω πολλ/μό, το $\pi_1(X, x_0)$ είναι ομάδα και λέγεται Θεμελιώδης ομάδα (του χώρου X στο σημείο x_0).

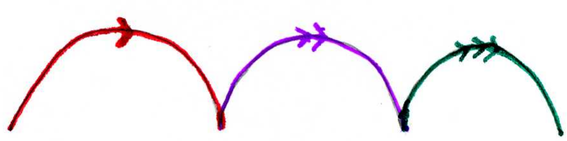
Απόδειξη

Ζητάμε: (I) προσεταιριστικότητα
(II) Ύπαρξη ταυτοτικού
(III) Ύπαρξη αντιστρόφων.

(I) Γενικότερα δείχνω ότι δεδομένων τόξων $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ όπου το γ_i πάει από το x_i στο x_{i+1}, ισχύει:

$$(\gamma_0\cdot\gamma_1)\cdot\gamma_2 \simeq_T \gamma_0\cdot(\gamma_1\cdot\gamma_2)$$





Αυστηρά : Θέτουμε $h(s,t) = \delta_t(s)$ όπου

$$\delta_t(s) = \begin{cases} \gamma_0\left(\frac{4s}{t+1}\right) & , 0 \le s \le \frac{t+1}{4} \\ \gamma_1(4s-t-1) & , \frac{t+1}{4} \le s \le \frac{t+2}{4} \\ \gamma_2\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & , \frac{t+2}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

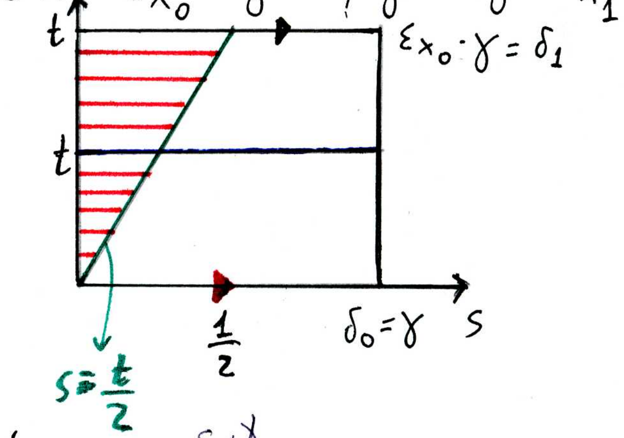
(II) Θέτω ε_{x_0} = το σταθερό τόξο στο x_0,

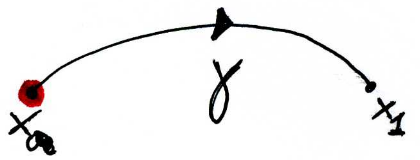
(δηλαδή $\varepsilon_{x_0}(s) = x_0$, $0 \le s \le 1$)

Δείχνω : η $[\varepsilon_{x_0}]$ είναι το ταυτοτικό της $\pi_1(X, x_0)$

Γενικότερα, δείχνω για κάθε τόξο γ, από το x_0 στο x_1,

ότι $\varepsilon_{x_0} \cdot \gamma \simeq_T \gamma \simeq \gamma \cdot \varepsilon_{x_1}$





(Το τόξο $\varepsilon_{x_0} \cdot \gamma$ παραμένει σταθερό (ακίνητο) μέχρι το 1/2 και με διπλάσια ταχύτητα μέχρι το 1)

Θέτω $h(s,t) = \gamma_t(s)$, όπου $\gamma_t(s) = \begin{cases} x_0 & , s \le \frac{t}{2} \\ \gamma\left(\frac{2s-t}{2-t}\right) & , s \geq \frac{t}{2} \end{cases}$

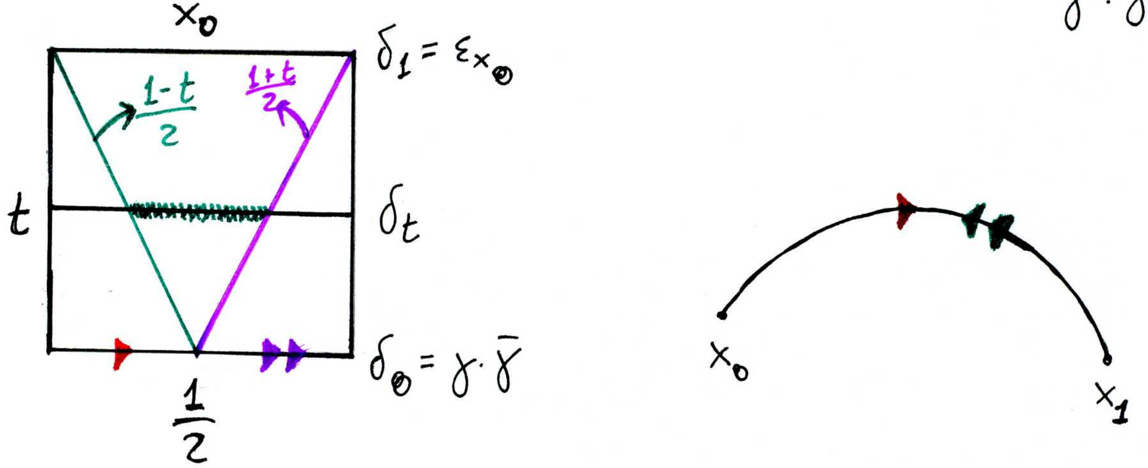
Δείχνω ότι $\gamma \simeq_T \gamma \cdot \varepsilon_{x_1}$, παρόμοια.

(III) Αν γ από το x_0 στο x_1, έστω $\bar{\gamma}(s) = \gamma(1-s)$.

Δείχνω : Αν $x_0 = x_1$ τότε $[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}]$ στο $\pi_1(X, x_0)$

Γενικότερα δείχνω, ακόμα κι αν $x_0 \neq x_1$: $\gamma \cdot \bar{\gamma} \simeq_T \varepsilon_{x_0}$

$\bar{\gamma} \cdot \gamma \simeq_T \varepsilon_{x_1}$



Θέτω $h(s,t) = \delta_t(s)$, όπου $\delta_t(s) = \begin{cases} \gamma(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \gamma(1-t), & \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ \gamma(2-2s), & \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$

Παράδειγμα

Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό. Είδαμε ότι τυχαία τόξα με κοινά άκρα είναι τοξοομοτοπικά. Ειδικότερα, αν γ είναι κλειστό τόξο στο $x_0 \Rightarrow \gamma \simeq_T \varepsilon_{x_0}$.

Δηλαδή $\forall [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, $[\gamma] = [\varepsilon_{x_0}] = e$ (ταυτοτικό)

Δηλαδή η $\pi_1(X, x_0)$ είναι τετριμμένη.

Ορολογία

Αν G ομάδα, αντί $G=\{e\}$ λέω $G=0$

π.χ.

$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = 0 \quad , \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Ερώτημα: Πως εξαρτάται το $\pi_1(X, x_0)$ απο το x_0;

Ορισμός / Θεώρημα

Έστω X χώρος, $x_0, x_1 \in X$ και β τόξο στον X, απο το x_0 στο x_1 και $[\gamma] \in \pi_1(X, x_1)$.

Ορίζω $\hat{\beta}([\gamma])$ ως $[\beta \cdot \gamma \cdot \bar{\beta}]$.

Τότε ο $\hat{\beta}$ είναι ισομορφισμός ομάδων,

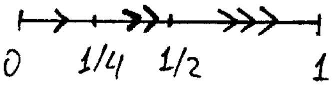
$$\hat{\beta} : \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$$

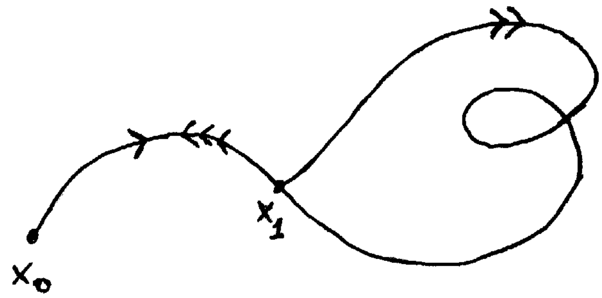
Σχόλια

① Αντί $\hat{\beta}([\gamma])$ γράφω απλώς $\hat{\beta}[\gamma]$

② Δεν ορίσαμε ποιό γινόμενο εννοούμε, το $\beta(\gamma\bar{\beta})$ ή το $(\beta\gamma)\bar{\beta}$. Όμως ξέρω ότι τα δύο γινόμενα είναι τοξοομοτοπικά. Δηλαδή, το $\hat{\beta}[\gamma]$ είναι καλώς ορισμένο.

③ Σκίτσο του $(\beta\gamma)\bar{\beta}$:





$\beta : \rightarrow$

$\gamma : \twoheadrightarrow$

Απόδειξη (του Θεωρήματος)

(α) Είναι ο $\hat{\beta}$ καλώς ορισμένος;

Εάν $[\gamma] = [\gamma'] \Rightarrow \gamma \simeq_T \gamma' \Rightarrow \beta\gamma\bar{\beta} \simeq_T \beta\gamma'\bar{\beta} \Rightarrow \hat{\beta}[\gamma] = \hat{\beta}[\gamma']$

(b) Είναι ο $\hat{\beta}$ ομομορφισμός;

Έστω $[\gamma], [\delta] \in \pi_1(X, x_1)$.

Τότε, $\hat{\beta}\left([\gamma]\cdot[\delta]\right) = \hat{\beta}[\gamma\cdot\delta] = [\beta\gamma\delta\bar{\beta}]$

Απο την άλλη, $\left(\hat{\beta}[\gamma]\right)\cdot\left(\hat{\beta}[\delta]\right) = [\beta\gamma\bar{\beta}]\cdot[\beta\delta\bar{\beta}] = [\beta\gamma\bar{\beta}\beta\delta\bar{\beta}]$

Όμως είδαμε ότι $\bar{\beta}\cdot\beta \simeq_T \varepsilon_{x_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta\gamma\bar{\beta}\beta\delta\bar{\beta} \simeq_T \beta\gamma\varepsilon_{x_1}\delta\bar{\beta}$

Όμως είδαμε επίσης ότι $\varepsilon_{x_1}\cdot\delta \simeq_T \delta \Rightarrow \beta\gamma\varepsilon_{x_1}\delta\bar{\beta} \simeq_T \beta\gamma\delta\bar{\beta}$

Επομένως, $[\beta\gamma\varepsilon_{x_1}\delta\bar{\beta}] = [\beta\gamma\delta\bar{\beta}]$.

Δηλαδή, $\hat{\beta}\left([\gamma]\cdot[\delta]\right) = \left(\hat{\beta}[\gamma]\right)\cdot\left(\hat{\beta}[\delta]\right) \Rightarrow$ ο $\hat{\beta}$ διατηρεί την πράξη της ομάδας $\Rightarrow$ ο $\hat{\beta}$ είναι ομομορφισμός

(c) Είναι ο $\hat{\beta}$ ισομορφισμός;

Έστω $\alpha = \bar{\beta}$ (άρα $\bar{\alpha} = \beta$)

Θεωρώ τον $\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$

Υπολογίζω το $\hat{\alpha}\left(\hat{\beta}[\gamma]\right) = \hat{\alpha}[\beta\gamma\bar{\beta}] = [\alpha\beta\gamma\bar{\beta}\bar{\alpha}] =$

$= [\bar{\beta}\beta\gamma\bar{\beta}\beta] = [\varepsilon_{x_1}\gamma\varepsilon_{x_1}] = [\gamma]$ (αφού $\bar{\beta}\beta \simeq_T \varepsilon_{x_1}$ και $\varepsilon_{x_1}\gamma\varepsilon_{x_1} \simeq_T \gamma$)

Παρομοίως $\hat{\beta}\left(\hat{\alpha}[\delta]\right) = [\delta]$, $\forall \delta \in \pi_1(X, x_0)$

Δηλαδή, $\hat{\alpha} = (\hat{\beta})^{-1}$

Συμπέρασμα

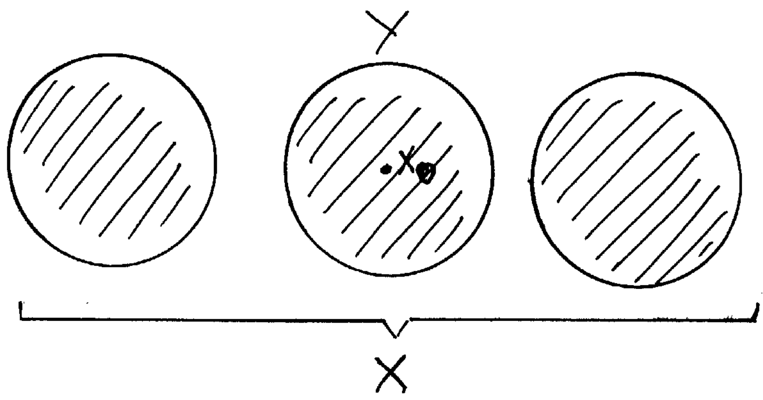
Αν αλλάξω το σημείο βάσης από x_0 σε x_1, η θεμελιώδης ομάδα δεν αλλάζει (έως ισομορφισμού), αρκεί να υπάρχει τόξο που να συνδέει τα x_0, x_1 στον X.
Δηλαδή, αρκεί τα x_0, x_1 να βρίσκονται στην ίδια κατά τόξα συνιστώσα του X.

(Διαισθητικά: Το $\pi_1(X, x_0)$ "δεν εξαρτάται" από το x_0, παρά μόνον από την κατά τόξα συνιστώσα του x_0)

Επόμενο Θεώρημα: Το $\pi_1(X, x_0)$ "δεν εξαρτάται" από το X, παρά μόνον από την κατά τόξα συνιστώσα του x_0.

Θεώρημα

Έστω X χώρος και $x_0 \in X$. Έστω $Y \subset X$ η κατά τόξα συνιστώσα του x_0. Τότε κάθε κλειστό τόξο στο x_0, του Y, μπορεί να ταυτιστεί με τόξο του X (αφού $Y \subset X$)



Τότε, αυτή η ταύτιση είναι ισομορφισμός,

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, x_0)$$

Απόδειξη

Έστω $\gamma : [0,1] \to X$ τόξο στον X, με $\gamma(0) = x_0$.

Αφού ο $[0,1]$ είναι Κ.Τ.Σ. το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του $\gamma([0,1])$ (Άσκηση).

Δηλαδή, κάθε δύο σημεία της εικόνας συνδέονται, ειδικότερα $\underset{x_0}{\underset{\parallel}{\gamma(0)}} \sim \gamma(t)$, $\forall t$.

Δηλαδή, κάθε $\gamma(t)$ ανήκει στην κατά τόξα συνιστώσα του x_0, δηλαδή στον Y.

Επομένως, αν θυμηθώ την παραπάνω ταύτιση, όλα τα τόξα του X που ξεκινούν από το x_0, είναι τόξα του Y.

Παρομοίως, αφού το $[0,1]\times[0,1]$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ (είναι και Κ.Τ.Σ.), για τυχαία ομοτοπία τόξων, $h:[0,1]\times[0,1]\to X$ με $h(0,0)=x_0$, έχουμε $h(s,t)\in Y$, $\forall s,t$.

Δηλαδή, οι ομοτοπίες κλειστών τόξων στο x_0, στον X, ταυτίζονται με τις ομοτοπίες κλειστών τόξων στο x_0, στον Y.

Επομένως, οι κλάσεις στο $\pi_1(X,x_0)$ ταυτίζονται με τις κλάσεις στο $\pi_1(Y,x_0)$. Μέσω αυτής της ταύτισης, οι πολλ/μοί τόξων αντιστοιχούν. Δηλαδή, αυτή η ταύτιση είναι ισομορφισμός.

Σχόλιο

Επειδή το $\pi_1(X,x_0)$ περιέχει πληροφορίες μόνον για την κατά τόξα συνιστώσα του x_0 στο X, αρκεί να μελετήσουμε μόνον θεμελιώδεις ομάδες κατά τόξα συνεκτικών χώρων.

"Συμφωνία"

Αν ο X είναι Κ.Τ.Σ. χώρος, το σύμβολο "$\pi_1(X)$", συμβολίζει το $\pi_1(X,x_0)$, όπου x_0 τυχαίο σημείο του X.

Π.Χ.

Έστω X Κ.Τ.Σ. χώρος. Έστω ότι $\exists x_1 \in X$ με $\pi_1(X, x_1) \cong \mathbb{Z}$.

Ισχυρίζομαι ότι $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$.

Πράγματι, έστω $x_0 \in X$ τυχαίο.

Αφού X Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow \exists\ \beta$ τόξο απο το x_0 στο x_1.

Το προηγούμενο Θεώρημα λέει ότι μέσω του $\hat{\beta}$, έχω ότι $\pi_1(X, x_1) \cong \pi_1(X, x_0)$. Άρα $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$, για τυχαίο $x_0 \in X$.

Ασκήσεις

Έστω X, Y δύο Κ.Τ.Σ. χώροι.

(1) Έστω ότι $\exists x_1 \in X, \exists y_1 \in Y$ με $\pi_1(X, x_1) \cong \pi_1(Y, y_1)$.

Να δείξετε ότι $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

(2) Έστω ότι $\exists x_1 \in X$: $\pi_1(X, x_1)$ αβελιανή.

Να δείξετε ότι η $\pi_1(X)$ αβελιανή.

Ορισμός

Ένας χώρος X λέγεται <u>απλά συνεκτικός</u> αν :

(i) Ο X είναι Κ.Τ.Σ. και

(ii) $\pi_1(X) = 0$

Θεώρημα

Έστω X χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο X είναι απλά συνεκτικός

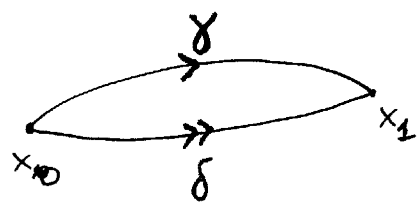
(ii) Υπάρχει μοναδική κλάση ομοτοπίας τόξων, απο το x_0 στο x_1, $\forall x_0, x_1 \in X$.

Απόδειξη

(i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $x_0 \in X$, $x_1 \in X$.

Αφού X απλά συνεκτικός $\Rightarrow X$ Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow$ Αποδείξαμε την ύπαρξη.

Μοναδικότητα: Έστω γ, δ τόξα απο το x_0 στο x_1



Θεωρώ το $[\gamma\bar{\delta}] \in \pi_1(X, x_0) = 0$.

Δηλαδή, $[\gamma\bar{\delta}] = [\varepsilon_{x_0}]$

Επομένως, $\gamma\bar{\delta} \simeq_T \varepsilon_{x_0} \Rightarrow \gamma\bar{\delta}\delta \simeq_T \varepsilon_{x_0}\delta \Rightarrow \gamma \simeq_T \delta \Rightarrow [\gamma] = [\delta]$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Παίρνω $x_0 = x_1$. Άρα, $\forall [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, $[\gamma] = [\varepsilon_{x_0}]$.

Δηλαδή, $\pi_1(X, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$.

Παράδειγμα

Κάθε κυρτό $X \subset \mathbb{R}^n$ είναι απλά συνεκτικό.

Πράγματι, έχουμε δει ότι : (α) ο X είναι Κ.Τ.Σ.

και (b) $\pi_1(X) = 0$.

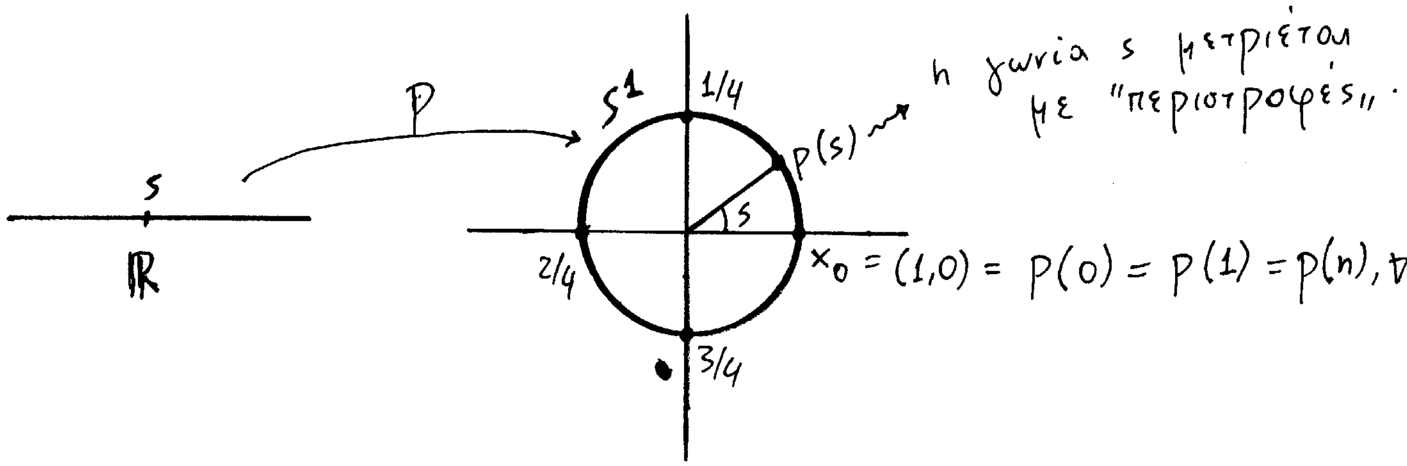
Η Θεμελιώδης ομάδα του κύκλου

Σκοπός : $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ και εφαρμογές.

Εισαγωγή στην απόδειξη

Μέσω του ισομορφισμού $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, ο ακέραιος n, αντιστοιχεί σε τόξο που "γυρίζει n-φορές τον S^1".

Ουσιώδη ρόλο στην απόδειξη έχει η $p : \mathbb{R} \to S^1$, με $p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$.



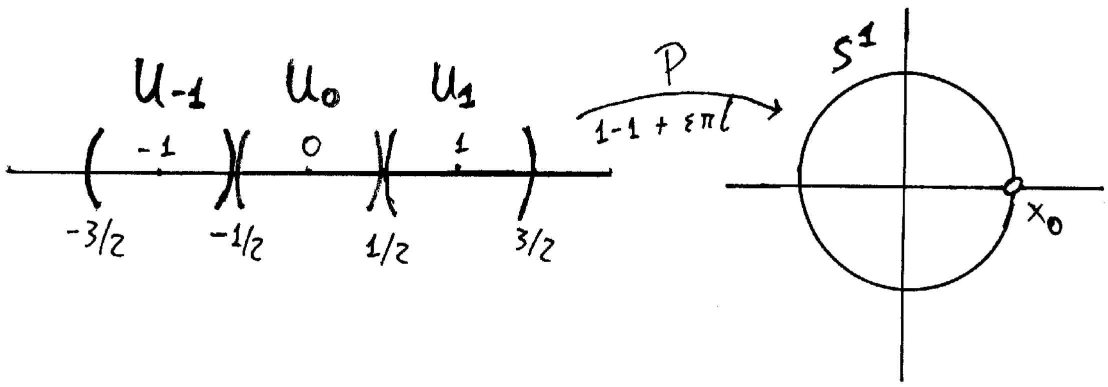
$x_0 = (1,0) = p(0) = p(1) = p(n), \forall n \in \mathbb{Z}.$

- Χρησιμοποιούμε μια βασική ιδιότητα των γωνιών:

Η p είναι 1-1, σε κάθε διάστημα $U_n := \left(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)$.

Μάλιστα, σε κάθε U_n, ο p είναι αντιστρέψιμος ως συνάρτηση

$p: U_n \to U := S^1 - \{x_0\}$

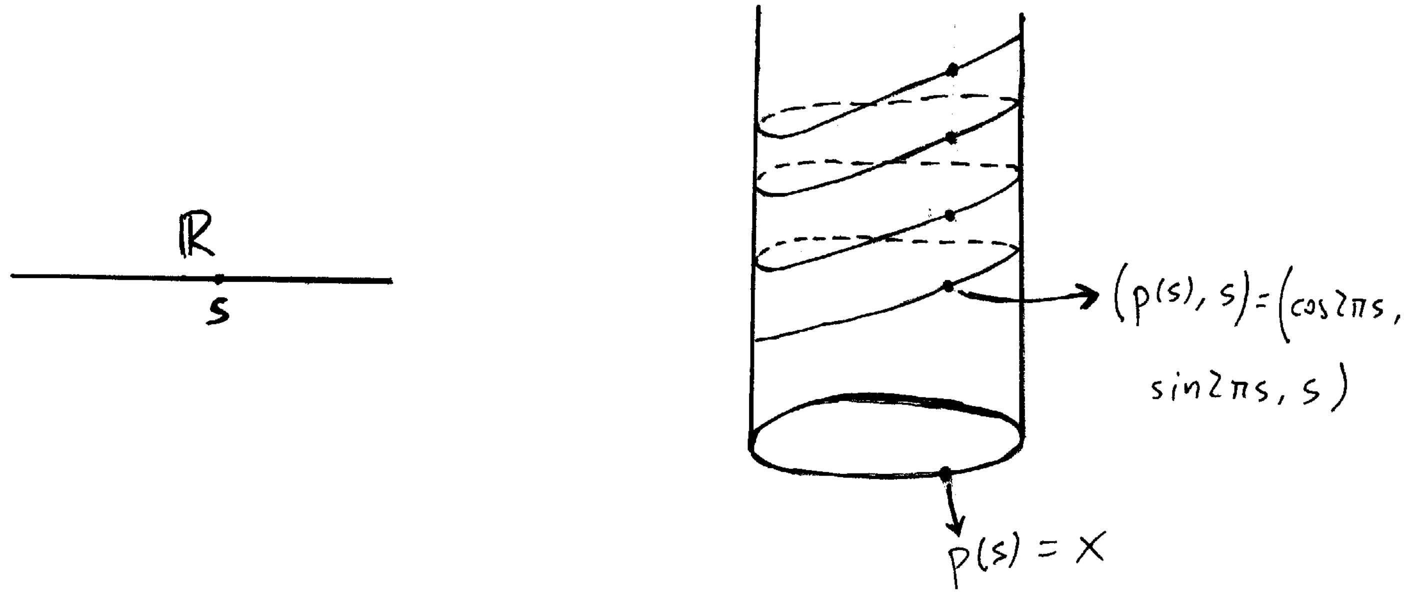


Παρατηρώ: $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_n U_n$ (ξένη ένωση), ανοιχτών διαστημάτων.

Άρα, αν $a, b \in p^{-1}(U)$ και συνδέονται με τόξο στον $p^{-1}(U)$, τότε ανήκουν στο ίδιο U_n.

Ανάλογες ιδιότητες ισχύουν για $V := S^1 - \{(-1,0)\}$, και $V_n := (n, n+1)$.

Έστω $x \in S^1$. Βοηθά στην κατανόηση της απόδειξης, να σκεφτόμαστε τα $s \in \mathbb{R}$ με $p(s) = x$, σαν να "κείτονται" πάνω από το x,



Διαισθητικά, ταυτίζω τα $s \in \mathbb{R}$, με το $(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, s)$.

Η ευθεία του $\mathbb{R}$ ταυτίζεται με τον έλικα.

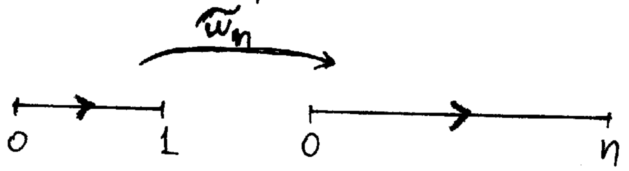
Τα s, με $p(s) = x$ ταυτίζονται με τα σημεία του έλικα που είναι πάνω από το x (με την συνήθη έννοια).

Λέμε: Μια $\tilde{\gamma} : A \to \mathbb{R}$ είναι <u>ανύψωση</u> μιας $\gamma : H \to S^1$, όταν $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

π.χ.: $A = [0,1]$.

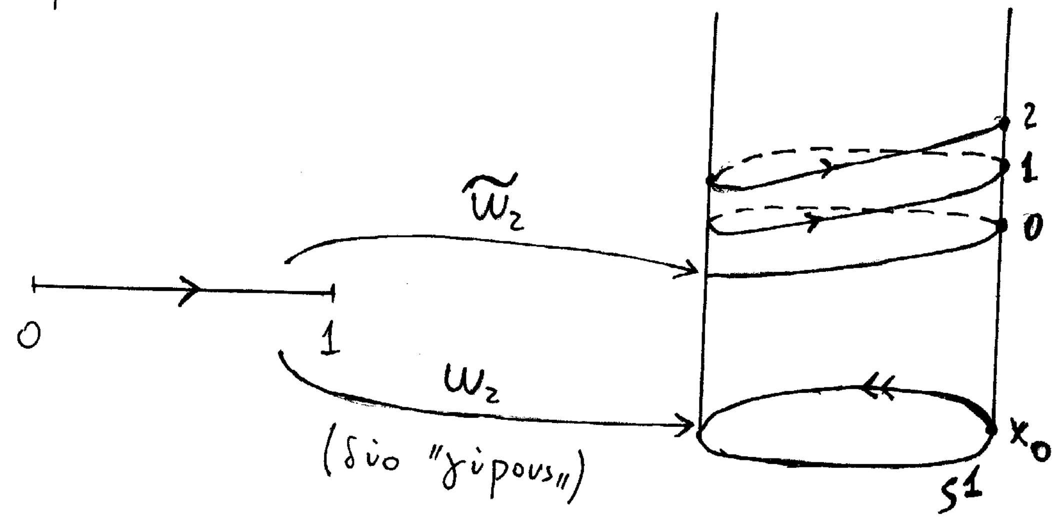
Ορίζω το $\tilde{\omega}_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\tilde{\omega}_n(s) = n \cdot s$.

Ορίζω $\omega_n = p \circ \tilde{\omega}_n$, δηλαδή το $\tilde{\omega}_n$ είναι ανύψωση του ω_n.



Δηλαδή, $\omega_n(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$.

Για παράδειγμα, όταν $n=2$:



Γενικότερα, το w_n "γυρίζει" n-φορές γύρω από τον S^1 και είναι κλειστό τόξο στο x_0.

Θεώρημα

Έστω $\varphi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0)$ με $\varphi(n) = [w_n]$.

Τότε ο φ είναι ισομορφισμός ομάδων.

(Δηλαδή, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (ως πόρισμα)).

Λήμμα I

Κάθε τόξο γ στον S^1 με $\gamma(0) = x_0$, νψώνεται σε μοναδικό $\tilde{\gamma}$ τόξο στον $\mathbb{R}$, με $\tilde{\gamma}(0) = 0$.

Λήμμα II

Έστω γ_1, γ_2 τόξα στον S^1 από το x_0 σε τυχαίο $x_1 \in S^1$.

Κάθε ομοτοπία τόξων h, από το γ_1 στο γ_2, ανυψώνεται σε μοναδική ομοτοπία τόξων, από το $\tilde{\gamma}_1$ στο $\tilde{\gamma}_2$, όπου τα $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ είναι οι ανυψώσεις του λήμματος I.

Απόδειξη (του Θεωρήματος)

Δείχνουμε : (α) Ο φ ομομορφισμός

(b) Ο φ 1-1

(c) Ο φ επί.

(α) Έστω $n, m \in \mathbb{Z}$. Θυμηθείτε τα τόξα $0 \xrightarrow{\tilde{\omega}_n} n$, $0 \xrightarrow{\tilde{\omega}_m} m$.

Θεωρώ το $\tilde{\omega}_m'$ ως $\tilde{\omega}_m'(s) := \tilde{\omega}_m(s) + n$ $\quad n \xrightarrow{\tilde{\omega}_m'} n+m$

Παρατηρώ : $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow p(u) = p(u+n)$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

Ειδικότερα, $p \circ \tilde{\omega}_m' = p \circ \tilde{\omega}_m$

Παρατηρώ επίσης ότι το $\tilde{\omega}_n \bullet \tilde{\omega}_m'$ ορίζεται. $\quad 0 \xrightarrow{\tilde{\omega}_n} n \xrightarrow{\tilde{\omega}_m'} n+m$

Άσκηση

Για τυχαία συνεχή $p : X \to Y$, τυχαία $x_0, x_1, x_2 \in X$ και τυχαία τόξα του X, έστω το γ από το x_0 στο x_1 και το δ από το x_1 στο x_2, να δείξετε ότι $p \circ (\gamma \bullet \delta) = (p \circ \gamma) \bullet (p \circ \delta)$

Εφαρμόζοντας αυτή την άσκηση παίρνουμε ότι:

$$p \circ (\tilde{\omega}_n \cdot \tilde{\omega}_m') = (p \circ \tilde{\omega}_n) \cdot (p \circ \tilde{\omega}_m') = \omega_n \cdot (p \circ \omega_m) = \omega_n \cdot \omega_m$$

Το $\mathbb{R}$ (ως κυρτός) είναι απλά συνεκτικός ⇒ Τόξα με κοινά άκρα είναι τοξοομοτοπικά ⇒ $\tilde{\omega}_n \cdot \tilde{\omega}_m' \simeq_T \tilde{\omega}_{n+m}$

(Άσκηση: $p \circ (\tilde{\omega}_n \cdot \omega_m') \simeq_T p \circ \tilde{\omega}_{n+m}$)

Άρα, $\varphi(n+m) = [\omega_{n+m}] = [p \circ \tilde{\omega}_{n+m}] = [p \circ (\tilde{\omega}_n \cdot \tilde{\omega}_m')] = [\omega_n \cdot \omega_m] =$

$= [\omega_n] \cdot [\omega_m] = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$

(b) Έστω $\varphi(n) = \varphi(m)$, δηλαδή $[\omega_n] = [\omega_m] \Rightarrow \omega_n \simeq_T \omega_m$.

Έστω h μια ομοτοπία τόξων, από το ω_n στο ω_m.

Από το λήμμα II ⇒ Η h ανυψώνεται σε $\tilde{h}$, που παραμένει μια ομοτοπία τόξων, από το $\tilde{\omega}_n$ στο $\tilde{\omega}_m$.

Ειδικότερα, τα $\tilde{\omega}_n, \tilde{\omega}_m$ είναι τοξοομοτοπικά, άρα έχουν κοινά άκρα, επομένως $n = m$.

(c) Έστω $[\gamma] \in \pi_1(S^1, x_0)$. Από το λήμμα I ⇒

⇒ $\exists\, \tilde{\gamma}$ που ανυψώνει την γ και $\gamma(0) = 0$.

Αφού ανυψώνει ⇒ $p\tilde{\gamma}(1) = \gamma(1) = x_0$

Δηλαδή, το $\tilde{\gamma}(1)$ είναι πάνω από το x_0.

Δηλαδή, το $\tilde{\gamma}(1)$ είναι ακέραιος. Το ονομάζω n.

Άρα το $\tilde{\gamma}$, όπως και το $\tilde{\omega}_n$ είναι τόξο στον $\mathbb{R}^n$, από το 0 στο n.

Απο "Απλή συνεκτικότητα του $\mathbb{R}$" $\Rightarrow \tilde{\gamma} \simeq_T \tilde{\omega}_n \xrightarrow[\text{άσκηση}]{\text{προηγούμενη}}$

$$\Rightarrow p \circ \tilde{\gamma} \simeq_T p \circ \tilde{\omega}_n \Rightarrow \gamma \simeq_T \omega_n \Rightarrow [\gamma] = [\omega_n] = \varphi(n).$$

Παρατήρηση

Τα λήμματα I και II είναι εύκολες συνέπειες του λήμματος III

Λήμμα III

Έστω Y τυχαίος χώρος και $F : Y \times [0,1] \to S^1$, συνεχής και έστω $\tilde{F}_0 : Y \times \{0\} \to \mathbb{R}$ συνεχής, που ανυψώνει την $F|_{Y\times\{0\}}$. Τότε, υπάρχει μοναδική ανύψωση $\tilde{F} : Y \times [0,1] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\tilde{F}|_{Y\times\{0\}} = \tilde{F}_0$

Απόδειξη (του λήμματος I)

Αν $Y = * := \{0\}$, τότε έχουμε δυο προφανείς ταυτίσεις:

(α) Συνεχείς συναρτήσεις $Y \xrightarrow{f} Z$, ταυτίζονται με τα σημεία $\alpha \in Z$ (μέσω του $f(0) = \alpha$)

(b) $Y \times W \cong W$ $\left((0,\alpha) \mapsto \alpha, \ \forall \alpha \in W \right)$.

Βλέπουμε ότι το λήμμα I, είναι ειδική περίπτωση του λήμματος III, με $Y = *$.

Απόδειξη (του λήμματος II)

Εφαρμόζω το λήμμα III, με $Y = [0,1]$ και

$F = h : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ και $\tilde{F}_0(s,0) := \tilde{\gamma}_0(s)$.

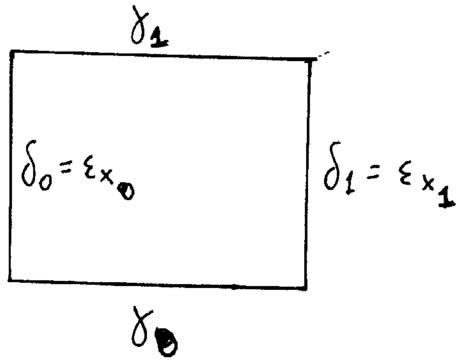
Ονομάζουμε $\tilde{h}$ την προκύπτουσα $\tilde{F}$.

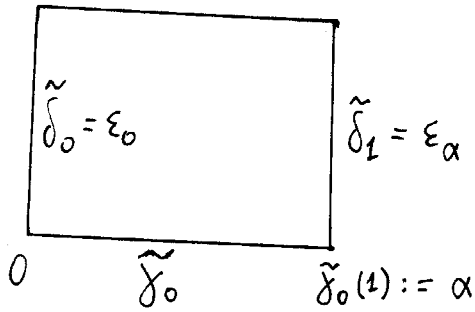
- Επομένως, τα $\tilde{\delta}_0 := \tilde{h}\big|_{[0,1]\times\{0\}}$ και $\tilde{\delta}_1 := \tilde{h}\big|_{[0,1]\times\{1\}}$, ανυψώνουν τα:

$$\delta_0 := h\big|_{[0,1]\times\{0\}} \quad \text{και} \quad \delta_1 := h\big|_{[0,1]\times\{1\}}.$$

Όμως, η h είναι ομοτοπία τόξων, δηλαδή $\delta_0 = \varepsilon_{x_0}$, $\delta_1 = \varepsilon_{x_1}$.

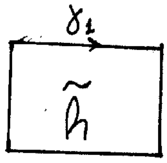
Μοναδικότητα (απο το λήμμα III) $\Rightarrow$ $\tilde{\delta}_0 = \varepsilon_0$ και $\tilde{\delta}_1 = \varepsilon_{\tilde{\gamma}_0(1)}$

h : 

, $\tilde{h}$: 

Αφού $\tilde{h}$ ανύψωση της h, ειδικότερα $\tilde{h}\big|_{\{1\}\times[0,1]}$, ανυψώνει την $h\big|_{\{1\}\times[0,1]}$.

Επίσης, $\tilde{h}(1,0)=0$ δηλαδή το $\tilde{\gamma}_1$ "είναι" το πάνω μέρος, από μοναδικότητα (σχηματικά) Λήμμα 1



Απόδειξη (του Λήμματος III)

Βήμα 1| Δεδομένου $y_0 \in Y$, κατασκευάζω "τοπικά", την $\tilde{F}: N\times[0,1]\to\mathbb{R}$ (για κάποιο ανοιχτό $N\ni y_0$)

Δεδομένου $t\in[0,1]$, $F(y_0,t) = S^1 = U\cup V$.

Δηλαδή $F(y_0,t)\in W$, όπου $W=U$ ή $W=V$.

Επειδή η F είναι συνεχής, υπάρχει ανοιχτό $N_t \ni y_0$ και διάστημα $\Delta(a_t,b_t)$, ανοιχτό στο $[0,1]$.

(Εδώ χρησιμοποιούμε ότι σε έναν χώρο-γινόμενο $C\times D$, κάθε ανοιχτό που περιέχει κάποιο (c,d) θα περιέχει και ένα γινόμενο $O_c\times O_d$, με $C\supset O_c\ni c$ και $D\supset O_d \ni d$ ανοιχτά)

Έχουμε ανοιχτή κάλυψη του συμπαγούς $[0,1]$, που σχηματίζεται από τα $\Delta(a_t,b_t)$. Άρα, μόνο πεπερασμένο πλήθος από αυτά τα διαστήματα αρκεί να καλύψει το $[0,1]$.

Έστω αυτά, τα $\Delta(\alpha_1, b_1), \dots, \Delta(\alpha_k, b_k)$.

Βάζουμε σε σειρά τα $\alpha_1, b_1, \alpha_2, b_2, \dots, \alpha_k, b_k$ και έχουμε

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1$.

Έστω $N_1, N_2, \dots, N_k$ τα ανοιχτά του Y, που αντιστοιχούν στα διαστήματα $\Delta(\alpha_1, b_1), \dots, \Delta(\alpha_k, b_k)$.

Θέτουμε $N = N_1 \cap \dots \cap N_k$.

Άρα, $y_0 \in N$ και το N ανοικτό (τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών) στον Y. Έχουμε επιτύχει $F\left(N \times [t_i, t_{i+1}]\right) \subset W$, όπου $W = U$ ή $W = V$.

Θα δείξουμε με επαγωγή στο $i = 0, 1, \dots, m$, ότι η $\tilde{F}$ ορίζεται στο $N \times [0, t_m]$.

Βάση της Επαγωγής $(i=0)$: Απαιτείται $\tilde{F}\big|_{N \times \{0\}} = \tilde{F_0}\big|_{N \times \{0\}}$. Όμως αυτή η συνθήκη ορίζει την $\tilde{F}$, στο $N \times \{0\}$.

Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η $\tilde{F}\big|_{N \times [0, t_i]}$ έχει οριστεί, ώστε να ανυψώνει την $F\big|_{N \times [0, t_i]}$ και να επεκτείνει την $\tilde{F}_{N \times \{0\}}$.

Επαγωγικό Βήμα $(i \rightsquigarrow i+1)$: Εκ κατασκευής, $F(y_0, t_i) \in W$, με $W=U$ ή $W=V$.

Ορίζουμε $\tilde{w}_j := \begin{cases} \tilde{u}_j & , W=U \\ \tilde{v}_j & , W=V \end{cases}$.

Αφού $\tilde{F}(y_0,t_i) \in p^{-1}(W) = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} \tilde{W}_j$ (ξένη ένωση),

συμπεραίνω ότι το $\tilde{F}(y_0,t_i)$ ανήκει σε κάποιο (μοναδικό) από τα $\ldots, \tilde{W}_{-1}, \tilde{W}_0, \tilde{W}_1, \ldots$.

Έστω αυτό το $\tilde{W}_j$.

Έστω $N' \times \{t_i\} := (N \times \{t_i\}) \cap \left(\tilde{F}|_{N\times\{t_i\}}\right)^{-1} (\tilde{W}_j)$.

Το N' ανοιχτό ($\tilde{F}$ συνεχής).

Η N' είναι μια μικρότερη (από την N) περιοχή του y_0, "καλύτερη" από την N, επειδή $\tilde{F}(N\times t_i) \subset \tilde{W}_j$.

Δεν χρειάζομαι πια την N (την ξεχνώ). Θα ονομάζουμε N την N'.

Τώρα ορίζω την $\tilde{F}_i : N \times [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \tilde{W}_j$,

ως $\tilde{F}_i = (p_{\tilde{w}_j})^{-1} \cdot \left(F|_{N\times[t_i,t_{i+1}]}\right)$, όπου $p_{\tilde{w}_j} : \tilde{W}_j \xrightarrow{\cong} W$

Επειδή $\tilde{F}|_{N\times t_i}$, $\tilde{F}_i|_{N\times t_i}$ ανυψώνουν και οι δύο, την

$F|_{N\times t_i}$, έχουμε ότι $p\circ \tilde{F}|_{N\times t_i} = p\circ \tilde{F}_i|_{N\times t_i}$.

Επειδή όμως προσέξαμε ούτως ώστε να ισχύει I:

$\tilde{F}(N\times t_i) \subset \tilde{W}_J$, $\tilde{F}_i|_{N\times t_i} \subset \tilde{W}_J$ και επειδή ο $P|_{\tilde{W}_J}$

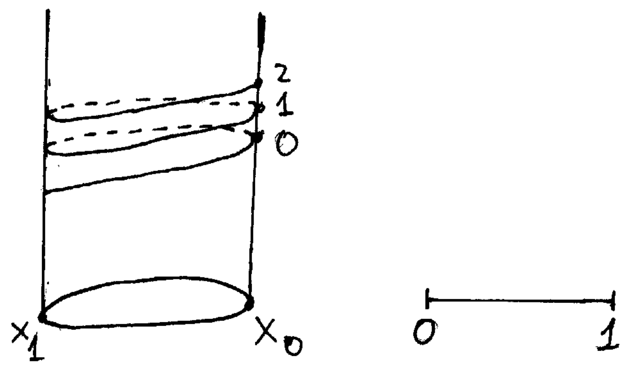
είναι 1-1 (αντιστρέψιμος), έχουμε ότι $\tilde{F}|_{N\times t_i} = F_i|_{N\times t_i}$.

Δηλαδή, με επικόλληση, έχουμε καλώς ορισμένη

$\tilde{F} : N\times[0,t_{i+1}] \to \mathbb{R}$, που είναι συνεχής ως τμηματικά

συνεχής σε δύο κλειστά υποσύνολα.

(Για παράδειγμα (διαισθητικά), αν $Y = *$ και $F = [0,1] \to S^1$, γυρίζει δύο φορές)
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{* \times [0,1]}$



Βήμα 2 | Μοναδικότητα, αν $Y = *$.

Κάνοντας τις ίδιες ταυτίσεις όπως στην απόδειξη του λήμματος]

έχουμε $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ δύο ανυψώσεις του $\gamma : [0,1] \to S^1$, τέτοιος ώστε

$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}'(0) = \alpha$. Θα δείξουμε ότι $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$.

Όπως πριν, κατασκευάζω $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$, έτσι ώστε

$\gamma[t_i, t_{i+1}] \subset W$, με $W = U$ ή $W = V$.

Δείχνουμε με επαγωγή (στο $i = 0, 1, \dots, m$) ότι $\tilde{\gamma}|_{[0,t_i]} = \tilde{\gamma}'|_{[0,t_i]}$

Βάση της Επαγωγής : $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}'(0) \quad (= \alpha)$

Επαγωγική Υπόθεση : Έστω ότι $\tilde{\gamma}|_{[0,t_i]} = \tilde{\gamma}'|_{[0,t_i]}$

Επαγωγικό Βήμα : Με $\tilde{W}_J$ ορισμένα όπως πρίν, απο την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\tilde{\gamma}(t_i) = \tilde{\gamma}'(t_i)$. Το ονομάζω έστω b. Ξέρουμε ότι $b \in \bigcup \tilde{W}_J$.

Επομένως, $b \in$ σε κάποιο μοναδικό $\tilde{W}_J$.

Αφού $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$, τα t, t_i συνδέονται με τόξο, το ίδιο ισχύει και για τις εικόνες τους $\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}(t_i)$, δηλαδή αυτές οι εικόνες ανήκουν και οι δύο στο $\tilde{W}_J$.

Δηλαδή, $\tilde{\gamma}[t_i, t_{i+1}] \subset \tilde{W}_J$.

Παρόμοια για την $\tilde{\gamma}'$.

Όμως ο $p|_{\tilde{W}_J}$ είναι 1-1. Έτσι, αφού $p \circ \tilde{\gamma} = p \circ \tilde{\gamma}' = \gamma$, συμπεραίνουμε ότι $\tilde{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]} = \tilde{\gamma}'|_{[t_i, t_{i+1}]}$

Βήμα 3 | Ύπαρξη της $\tilde{F} : Y \times [0,1] \to \mathbb{R}$.

Απο το Βήμα 1 έχουμε την τοπική ύπαρξη.

Έστω $\tilde{F}_K : N_K \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $K = 1, 2$.

Έχω δύο τοπικές ανυψώσεις. Έστω $y \in N_1 \cap N_2$.

Ορίζω $\tilde{\gamma}_K(t) = \tilde{F}_K(y,t)$, $K=1,2$.

Παρατηρώ : (α) Οι $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$ ανυψώνουν το γ, όπου $\gamma(t) = F(y,t)$

και (b) $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{F}_1(y,0) = \tilde{F}_0(y,0) = \tilde{F}_2(y,0) = \tilde{\gamma}_2(0)$.

Από το βήμα 2, έχουμε ότι $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)$, $\forall t$.

Δηλαδή, οι τοπικές ανυψώσεις είναι επικολλήσιμες, δηλαδή δίνουν καλώς ορισμένη $\tilde{F}$, όπου η $\tilde{F}$ ορίζεται ως εξής:

$\tilde{F}(y,t) = \tilde{F}_1(y,t)$, όπου $\tilde{F}_1(y,t)$ τυχαία τοπική ανύψωση στο y. Τέλος, η $\tilde{F}$ είναι συνεχής, ως τμηματικά συνεχής σε ανοιχτά υποσύνολα.

Βήμα 4 | Μοναδικότητα. Έστω $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ ανυψώσεις.

Έστω $y \in Y$. Όπως πριν, $\tilde{\gamma}_K(t) := \tilde{F}_K(y,t)$, $K=1,2$.

Όπως πριν, $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$, δηλαδή $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)$, $\forall t$.

Δηλαδή, $\tilde{F}_1(y,t) = \tilde{F}_2(y,t)$, $\forall t, \forall y$, δηλαδή $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$. ∎

Άσκηση

Δίνεται Κ.Τ.Σ. χώρος X, συνεχείς $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $p \cdot f_1 = p \cdot f_2$, όπου $p : \mathbb{R} \to S^1$ όπως στο Θεώρημα. Να δείξετε ότι $f_1 \neq f_2 \Rightarrow f_1(a) \neq f_2(a)$, $\forall a \in X$.

Εφαρμογή:

Ο Δίσκος D^2 δεν αποσύρεται στον S^1:

Θεώρημα:

Η ταυτοτική συνάρτηση $I: S^1 \longrightarrow S^1$ δεν επεκτείνεται στον D^2.

Διαισθητικά:

Αν η $I(x)=x$ έχει συνεχή επέκταση, $r: D^2 \longrightarrow S^1$ θα ίσχυε:

① $r(x)$ συνεχής

② για $x \in S^1$, $r(x)=x$

③ για $x \in D^2$, $r(x) \in S^1$

Δηλ. έχω μία "παραμόρφωση" που ① δε σχίζει το "~~άσπρο~~ μαύρο" λάστιχο (το εσωτερικό) ② δεν κινεί τα "κόκκινα σημεία" (της περιφέρειας) (τα σκέφτομαι "απο σύρμα")

③ κινεί όλα τα ~~άσπρα~~ μαύρα σημεία στα κόκκινα

Αδύνατο: Για να παραμορφώσω το λάστιχο στο σύρμα πρέπει να το σχίσω κάπου.

Απόδειξη: Άσκηση pi1d.pdf λέει: τυχαία συνεχής $h: S^1 \longrightarrow S^1$ ~~επεκτείνεται~~ με $\boxed{h(x_0)=x_0}$ επεκτείνεται στον $D^2 \Longleftrightarrow [h \circ w_1] = [w_0]$

Παίρνω $h = I$ άρα $h \circ w_1 = w_1$

$0 \neq 1$ στο $\mathbb{Z}$, Φ 1-1 $\longrightarrow \Phi(0) \neq \Phi(1) \longrightarrow [w_0] \neq [w_1]$ ∎

Εφαρμογή: Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brower στο επίπεδο

Έστω $f: D^2 \longrightarrow D^2$ συνεχής. Τότε $\exists\, x \in D^2$ με $f(x) = x$.

Σχόλια: (1) Αν A, B σύνολα και $f: A \longrightarrow B$ συνάρτηση κάθε λύση της $x = f(x)$ στο A λέγεται σταθερό σημείο της f

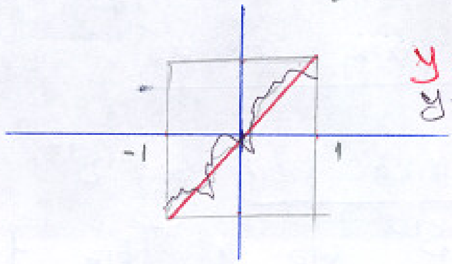
(2) Το Θεώρημα ισχύει για κάθε $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$

Απόδειξη για $n = 3, 4, 5, \ldots$ χρειάζεται τις $\pi_2, \pi_3, \pi_4, \ldots$ "ανώτερες ομάδες ομοτοπίας"

(3) Αν $n = 1$

$D^1 = [-1, 1]$

/ Δεν πρέπει να βγει απ' το $[-1,1]$

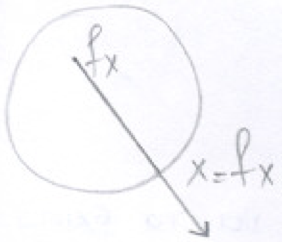


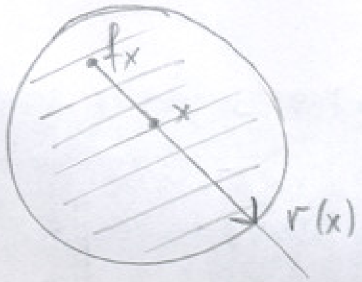
σημεία τομής:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = f(x) \end{array}\right\} x = f(x)$$

Προαιρετική Άσκηση: Αποδείξτε το. (Υπόδειξη: Ενδιάμεση τιμή)

Απόδειξη του Θεωρήματος:





Με άτοπο: Έστω $f: D^2 \longrightarrow D^2$ με $fx \neq x$ $\forall x \in D^2$

Έχω μοναδική ημιευθεία από το fx στο x, που τέμνει τον S^1 σε ένα μοναδικό $r(x)$.

Προφανώς, $x \in S^1 \longrightarrow r(x) = x$

Επίσης η $r(x)$ είναι συνεχής

Αυστηρά: Δίνεται με τύπο (τομή ευθείας - κύκλου)

Διαισθητικά: "Σπρώχνω απαλά" το x, f συνεχής $\longrightarrow f(x)$ μετακινείται ελάχιστα $\longrightarrow$ ευθεία το ίδιο $\longrightarrow r(x)$ επίσης

Άρα κατασκευάσαμε συνεχή επέκταση $r(x)$ του $I(x) = x$, άτοπο (βλ. προηγούμενη εφαρμογή)

Εφαρμογές - Χωρίς Απόδειξη

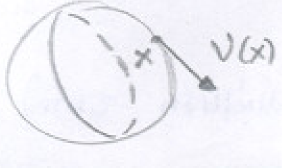
Π.χ. "Algebraic Topology" του Hatcher

www.math.cornell.edu/~hatcher

Κεφάλαιο 1

"Θεώρημα της Δασύτριχης Σφαίρας"

Έστω v ένα διανυσματικό πεδίο στο S^2 δηλ. $v: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ συνεχής με $v(x)$ εφάπτεται στο S^2 στο x. Τότε $\exists$ $x \in S^2$ με $v(x) = 0$

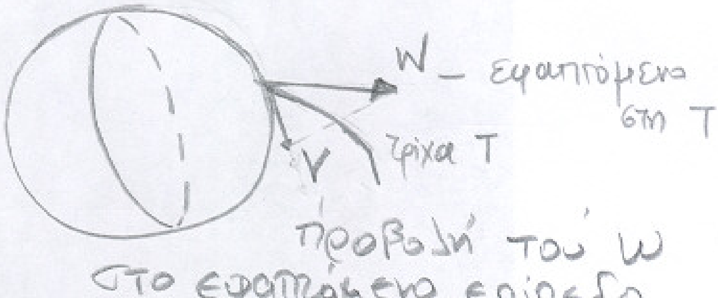


Διαισθητικά

Φαντάζομαι: S^2 να έχει "παντού τρίχες"

Το Θ/μα λέει: "όπως κι αν χτενιστεί το S^2, αν το χτένισμα είναι συνεχές (όχι χωρίστρα) τότε κάποια τρίχα μένει όρθια".

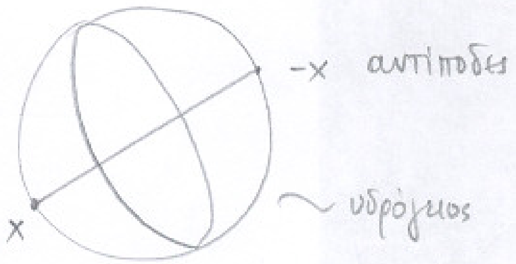
τρίχα όρθια $\iff$ $w \perp S^2$
$V = 0$



Άλλη διαισθητική ερμηνεία: Πάντα, σε κάποιο σημείο της υδρογείου, η ταχύτητα του ανέμου είναι μηδέν.

Θεώρημα των Borsuk-Ulam

$\forall$ συνεχή $f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\exists\, x \in S^2$ με $f(x) = f(-x)$



$f(x) \in \mathbb{R}^2$

$f(x) = (\underbrace{f_1(x)}_{\text{πίεση}}, \overbrace{f_2(x)}^{\text{θερμοκρασία}})$

Πάντα υπάρχει σημείο στην υδρόγειο με την ίδια πίεση & θερμοκρασία με τους αντίποδες.

Θεώρημα "Ζαμπόν - Τυρί - Ψωμί"

Δεδομένων συμπαγών $Z, T, \Psi \subset \mathbb{R}^3$ υπάρχει επίπεδο που χωρίζει τα Z, T, Ψ σε τμήματα με ίσους όγκους

Διαισθητικά: Z - φέτα ζαμπόν
T - -"- τυρί
Ψ - δύο φέτες ψωμί (το Ψ επιτρέπεται να μην είναι συνεκτικό)

Υπάρχει "μαχαιριά" που "κόβει το σάντουιτς" σε δύο μέρη, με ίσες ποσότητες Z, T, Ψ, | γενικότερα: ισχύει για η συμπαγή στον $\mathbb{R}^n$.

$n=2$ (ανάγεται στο Θ.Ε.Τ, Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής)

Χώροι με σημεία βάσης και συναρτητές

Ορισμός

Ένας χώρος με σημείο βάσης (Χ.Σ.Β.) είναι ένα ζεύγος (X, x_0), όπου X είναι χώρος και $x_0 \in X$.

Έστω (X,x_0), (Y,y_0) δύο Χ.Σ.Β. και έστω $f: X \to Y$ συνεχής, με $f(x_0) = y_0$. Τότε, λέμε ότι η f είναι μορφισμός χώρων με σημείο βάσης (μορφισμός Χ.Σ.Β.) και γράφουμε:

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

Δεδομένων $f: (X,x_0) \to (Y,y_0)$ και $g: (Y,y_0) \to (Z, z_0)$, η σύνθεση $g \circ f : (X,x_0) \to (Z,z_0)$ δίνεται από την συνήθη σύνθεση.

Δεδομένου (X,x_0), ο ταυτοτικός μορφισμός $I: (X,x_0) \to (X,x_0)$, δίνεται από την ταυτοτική συνάρτηση του X.

Ορισμός

Θεωρήστε δεδομένο έναν κανόνα K, που έχει τις παρακάτω τέσσερις ιδιότητες:

(1) Σε κάθε Χ.Σ.Β. (X,x_0) αντιστοιχεί μια ομάδα $K(X,x_0)$.

(2) Σε κάθε μορφισμό Χ.Σ.Β., $f: (X,x_0) \to (Y,y_0)$, αντιστοιχεί

ένας μορφισμός ομάδων $K(f): K(X,x_0) \to K(Y,y_0)$.

(3) $K(g \circ f) = K(g) \circ K(f)$, για όλους τους συνθέσιμους μορφισμούς f, g (δηλαδή, για κάθε $(X,x_0) \xrightarrow{f} (Y,y_0) \xrightarrow{g} (Z,z_0)$, με f, g μορφισμούς Χ.Σ.Β.)

(4) Αν η f είναι η ταυτοτική συνάρτηση του (X,x_0), τότε η $K(f)$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση του $K(X,x_0)$.

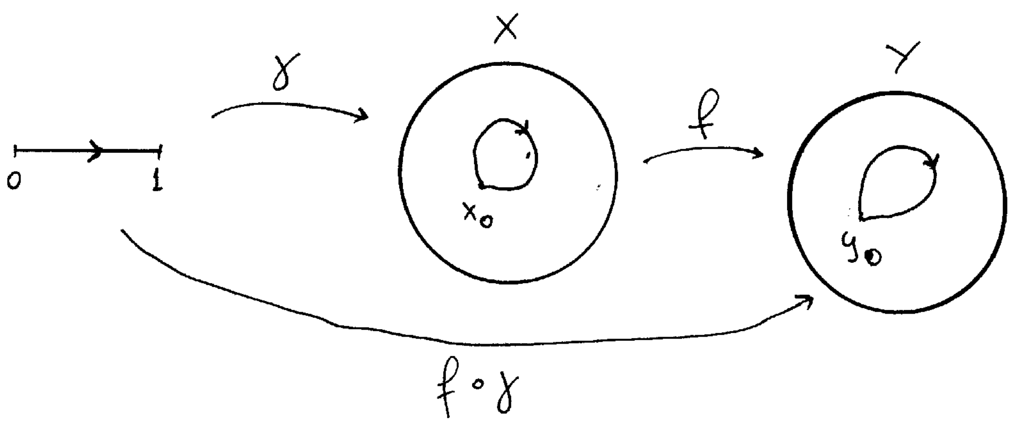
Τότε, ο K λέγεται <u>συναρτητής απο Χ.Σ.Β. σε ομάδες.</u>

<u>Ορισμός</u>

Έστω $f: (X,x_0) \to (Y,y_0)$ μορφισμός Χ.Σ.Β.

Ορίζω τον <u>επαγόμενο μορφισμό</u> $f_*: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$,

με $f_*[\gamma] = [f \circ \gamma]$



Σύμβαση: γράφουμε και $\pi_1(f)$ αντί για f_*

Λήμμα 1

Ο f_* είναι καλώς ορισμένη συνάρτηση.

Απόδειξη

Έστω $[\gamma]=[\delta]$. Ζητώ $f_*[\gamma]=f_*[\delta]$.

Αφού $[\gamma]=[\delta] \Rightarrow \gamma \simeq_T \delta$. Θυμηθείτε: $f\circ\gamma \simeq_T f\circ\delta$,

δηλαδή $[f\circ\gamma]=[f\circ\delta] \Rightarrow f_*[\gamma]=f_*[\delta]$.

Λήμμα 2

Ο f_* είναι ομομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη

Έστω $[\gamma],[\delta]\in\pi_1(X,x_0)$.

Τότε, $f_*([\gamma]\cdot[\delta]) = f_*([\gamma\cdot\delta]) = [f\circ(\gamma\cdot\delta)] \xrightarrow[\text{σελ. 53}]{\text{Άσκηση}}$

$= [(f\circ\gamma)\cdot(f\circ\delta)] = [f\circ\gamma]\cdot[f\circ\delta] = (f_*[\gamma])\cdot(f_*[\delta])$.

Δηλαδή, η f_* είναι ομομορφισμός.

Θεώρημα 1

Ο π_1 είναι συναρτητής από Χ.Σ.Β. σε ομάδες.

Απόδειξη

Ελέγχουμε αν οι 4 ιδιότητες του ορισμού ισχύουν.

1^{η} - προφανής

2^{η} - βλ. λήμματα 1, 2.

3^{η} - Έστω $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$.

Άρα έχω $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(Z, z_0)$.

Επίσης έχω $(X, x_0) \xrightarrow{g \circ f} (Z, z_0)$

Άρα έχω $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{(g \circ f)_*} \pi_1(Z, z_0)$.

Ζητώ $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$.

Έστω $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, τυχαίο.

Τότε, $(g_* \circ f_*)[\gamma] = g_*(f_*[\gamma]) = g_*([f \circ \gamma]) = [g \circ (f \circ \gamma)] =$

$= [(g \circ f) \circ \gamma] = (g \circ f)_*[\gamma]$.

Επομένως, αφού $[\gamma]$ τυχαίο $\Rightarrow g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$

4^{η} - Εύκολη άσκηση.

<u>Πόρισμα 1</u>

Έστω $f: X \to Y$ ισομορφισμός χώρων.

Έστω $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$. Άρα έχω Χ.Σ.Β., $(X, x_0), (Y, y_0)$.

Επίσης, έχω $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$.

Τότε, ο $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ είναι ισομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη

Είδαμε ήδη (από το λήμμα 2) ότι ο f_* είναι ομομορφισμός ομάδων. Έστω $g = f^{-1}$. Άρα, $g(y_0) = x_0$.

Επομένως, έχω $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$.

Επίσης, $g \circ f = I : (X, x_0) \to (X, x_0)$

και $f \circ g = I : (Y, y_0) \to (Y, y_0)$

Εφαρμόζουμε τον συναρτητή π_1.

Τότε, $\pi_1(g \circ f) = \pi_1\left(I_{(X, x_0)}\right) \Rightarrow \pi_1(g) \circ \pi_1(f) = I_{\pi_1(X, x_0)} \Rightarrow$

$\Rightarrow g_* \circ f_* = I_{\pi_1(X, x_0)}$.

όμοια, $\pi_1(f \circ g) = \pi_1\left(I_{(Y, y_0)}\right) \Rightarrow \pi_1(f) \circ \pi_1(g) = I_{\pi_1(Y, y_0)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_* \circ g_* = I_{\pi_1(Y, y_0)}$.

Επομένως, οι f_*, g_* είναι αντίστροφες.

Δηλαδή, η f_* είναι αντιστρέψιμη.

Άρα, ο f_* είναι ισομορφισμός ομάδων.

Πόρισμα 2

Έστω X Κ.Τ.Σ. και G ομάδα.

Τότε, η ιδιότητα "$\pi_1(X) \cong G$" είναι τοπολογική

Απόδειξη

Έστω $\pi_1(X) \cong G$ και $Y \cong X$. Ζητώ, $\pi_1(Y) \cong G$.

Όμως, $\pi_1(X) \cong G \Rightarrow \exists x_0 \in X : \pi_1(X, x_0) \cong G$.

Έστω $f : X \xrightarrow{\cong} Y$, και $y_0 = f(x_0)$.

Απο το πόρισμα 1 $\Rightarrow$ $f_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$.

Δηλαδή, βρήκα $y_0 \in Y$ με $\pi_1(Y, y_0) \cong G \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_1(Y) \cong G$.

Πόρισμα 3

Η απλή συνεκτικότητα, είναι τοπολογική ιδιότητα

Απόδειξη.

Έστω X, απλά συνεκτικός, και $Y \cong X$.

Ζητώ : Ο Y είναι απλά συνεκτικός.

Όμως X απλά συνεκτικός $\Rightarrow$ (α) X Κ.Τ.Σ.

και (b) $\pi_1(X) \cong 0$.

Όμως γνωρίζουμε ότι η κατά τόξα συνεκτικότητα, είναι τοπολογική ιδιότητα. Επομένως ο Y κ.τ.σ.

Απομένει $\pi_1(Y) \cong 0$.

Απο το πόρισμα 2 (για $G=0$) έπεται και αυτό.

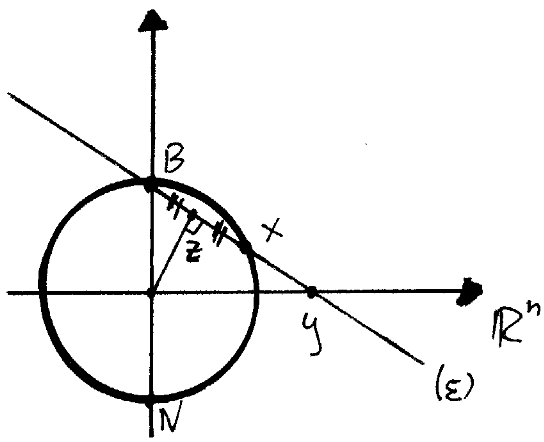
Η στερεογραφική προβολή

Έστω $S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1 \}$

Έχουμε $B = (0,0,\dots,1)$ (Βορειος πόλος)

και $N = (0,0,\dots,-1)$ (Νότιος πόλος)

Δεδομένου $x \in S^n \setminus \{B\}$, έχω μοναδική ευθεία (ε), που περνά απο τα B, x. Άρα έχω μοναδικό $y := \sigma(x)$ με $\{y\} = (\varepsilon) \cap \mathbb{R}^n$ και σ συνεχής.



Συγκεκριμένα, $y = B + t\cdot(x-B)$ (1)

$$B\cdot y = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{(x-B)\cdot B} \quad (2)$$

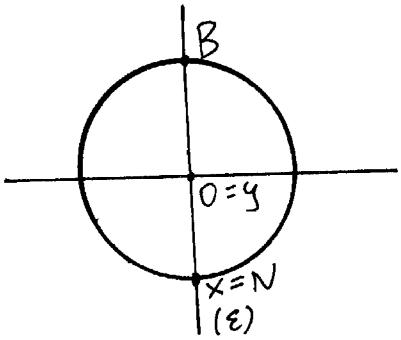
δίνεται με τύπο.

$x = B + 2s(y-B)$. (3)

$$\left.\begin{aligned} z &= B + s(y-B) \\ z &\perp (\varepsilon) \Rightarrow (y-B)\cdot z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow s = \frac{1}{(y-B)\cdot(y-B)} \quad (4)$$

Απο $(3)+(4) \Rightarrow x=\sigma^{-1}(y) =$ τύπος ως πρός $y \Rightarrow \sigma^{-1}$ συνεχής.

Παρατηρείστε ότι $\sigma(N)=0$.



Συμπέρασμα: $\sigma : (S^n \setminus \{B\}, N) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^n, 0)$

π_1 και γινόμενα

Έστω G_1, G_2 ομάδες και $G_1 \times G_2 = \{(\alpha_1,\alpha_2) : \alpha_1 \in G_1, \alpha_2 \in G_2\}$

με $(\alpha_1,\alpha_2)\cdot(b_1,b_2) := (\alpha_1 \cdot b_1, \alpha_2 \cdot b_2)$

Με αυτήν την πράξη, το $G_1 \times G_2$ καθίσταται ομάδα (εύκολη άσκηση)

Έστω τώρα $(X_1,x_1), (X_2,x_2)$ δύο Χ.Σ.Β.

Έστω ακόμα $Y = X_1 \times X_2$ και $y=(x_1,x_2)$.

Έχω (Y,y) Χ.Σ.Β.

Δεδομένου $\gamma : [0,1] \to Y$, τόξου στον Y, έχουμε ότι,

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \in X_1 \times X_2$$

Θεμελιώδης ιδιότητα του γινομένου: Τα γ_1, γ_2 συνεχείς, άρα τόξα (γ_k τόξο του X_k στο x_k).

Αντιστρόφως, δεδομένων γ_1, γ_2 (όπου γ_k τόξα του X_k στο x_k), θέτω $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ και παίρνω τόξο γ του Y στο y.

Συμπέρασμα: Τα τόξα γ, του $X_1 \times X_2$ στο (x_1, x_2), αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα με ζεύγη (γ_1, γ_2), όπου το γ_κ είναι τόξο του X_κ στο x_κ $(\kappa = 1, 2)$.

Παρατηρώ ότι αυτή η αντιστοίχηση διατηρεί τις πράξεις.
Δηλαδή, $(\gamma \cdot \delta)_\kappa = \gamma_\kappa \cdot \delta_\kappa$ $(\kappa = 1, 2)$
Παρομοίως, δεδομένης ομοτοπίας $h : [0,1] \times [0,1] \to Y$, από το γ στο δ, έστω $h(s,t) = (h_1(s,t), h_2(s,t))$.
Τότε, η h_κ είναι ομοτοπία στο X_κ, από το γ_κ στο δ_κ $(\kappa = 1, 2)$.

Συμπέρασμα: Μέσω της απεικόνισης $\Psi[\gamma] := ([\gamma_1], [\gamma_2])$, αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα, τα $[\gamma] \in \pi_1(Y, y)$, με τα $([\gamma_1], [\gamma_2]) \in \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$.

Είδαμε ότι οι πράξεις αντιστοιχούν, δηλαδή η Ψ είναι ισομορφισμός ομάδων, $\Psi : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$.
Δηλαδή αποδείξαμε κατ' ουσίαν, το επόμενο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 2</u>

$$\pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2)) \cong \pi_1(X_1, x_1) \times \pi_1(X_2, x_2)$$

Θεώρημα 3

$\pi_0(X_1 \times X_2) \cong \pi_0(X_1) \times \pi_0(X_2)$

Απόδειξη

Παρόμοια (ευκολότερα) επιχειρήματα με την απόδειξη του Θεωρήματος 2 (Άσκηση)

Πόρισμα 1

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(1) $X_1 \times X_2$ Κ.Τ.Σ.

(2) και ο X_1 και ο X_2 είναι Κ.Τ.Σ.

Απόδειξη

Άμεση, επειδή για σύνολα A_1, A_2 τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(α) Το $A_1 \times A_2$ μονοσύνολο

(b) και το A_1 και το A_2 είναι μονοσύνολα.

Πόρισμα 2

Ο S^n είναι Κ.Τ.Σ. $(\forall n \geq 1)$

Απόδειξη

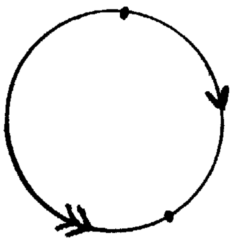
Με "πολικές συντ/μένες" $\Rightarrow S^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

Όμως $n \geq 1 \Rightarrow$ ο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ είναι Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow S^n \times \mathbb{R}$ Κ.Τ.Σ.

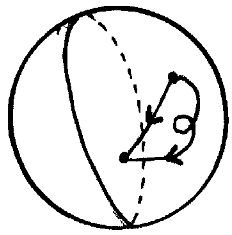
Άρα απο το πόρισμα 1 $\Rightarrow S^n$ Κ.Τ.Σ.

π.χ.

$\boxed{n=1}$



$\boxed{n=2}$



Πόρισμα 3

$$\pi_1(S^n) \cong \pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \quad , \forall n \geq 1.$$

Απόδειξη.

Απο την "συμφωνία" μας για Κ.Τ.Σ. χώρους, οι εκφράσεις $\pi_1(S^n)$, $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ έχουν νόημα.

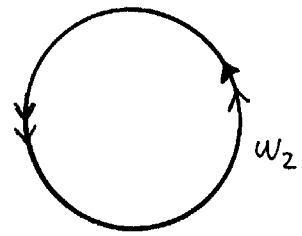
Αφού, $S^n \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \Rightarrow \pi_1(S^n \times \mathbb{R}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$.

Επίσης, $\pi_1(S^n \times \mathbb{R}) \cong \pi_1(S^n) \times \pi_1(\mathbb{R}) \cong \pi_1(S^n) \times 0 \cong \pi_1(S^n)$

Επομένως τελικά, $\pi_1(S^n) \cong \pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$.

Π.χ.

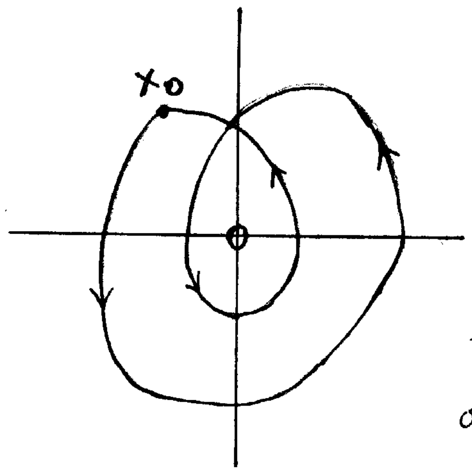
$n=1 \quad : \quad \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$.



$\pi_1(S^1)$

$\updownarrow$

$\mathbb{Z} \quad (m=2)$



$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$

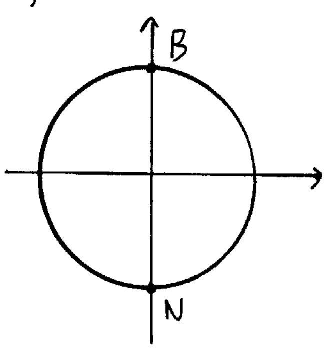
Το $m \in \mathbb{Z}$ που αντιστοιχεί στο γ, είναι ο "αριθμός περιέλιξης" του γ γύρω από το O (Εδώ, $m=2$).

Θεώρημα

$\pi_1(S^n) \cong 0 \quad , \forall n \geq 2$.

Απόδειξη

Έχουμε



, $U := S^n - \{N\}$

$V := S^n - \{B\}$

και την στερεογραφική προβολή $\sigma : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$, άρα το V είναι απλά συνεκτικό.

Στρατηγική: Παίρνω σημείο βάσης το N.
Δεδομένου τόξου γ στο N, δείχνω ότι παραμορφώνεται σε δ, που δεν περνά από το B.

Αυτό πράγματι αρκεί για την απόδειξη.

Διότι, έστω $\gamma \simeq_T \delta \Rightarrow [\gamma] = [\delta]$. Περιορίζω το πεδίο τιμών του δ και παίρνω $\bar{\delta} : [0,1] \to V$

Δηλαδή,

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\bar{\delta}"'] & S^n \\ & V \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

, όπου $f : V \to S^n$ με $f(x) = x$ και $f \circ \bar{\delta} = \delta$ (προφανώς, $\delta(x) = \bar{\delta}(x)$)

Άρα, $[\delta] = [f \circ \bar{\delta}] = f_* [\bar{\delta}]$.

Όμως $[\bar{\delta}] \in \pi_1(V) \cong 0 = \{e\}$

Άρα $[\bar{\delta}] =$ ταυτοτικό, δηλαδή $[\delta] = f_*(\text{ταυτοτικό}) =$ ταυτοτικό, (γιατί f_* ομομορφισμός).

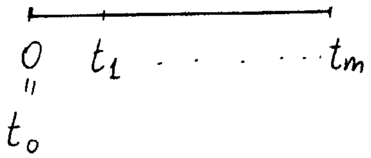
Επομένως, $[\gamma] =$ ταυτοτικό.

Όμως $[\gamma]$ τυχαίο $\Rightarrow \pi_1(S^n, N) \cong 0 = \{\text{ταυτοτικό}\}$.

Επομένως, απομένει το ότι πράγματι μπορώ να παραμορφώσω το γ, στο δ.

Έστω $m \in \mathbb{Z}^+$, τέτοιος ώστε το $\frac{1}{m}$ αριθμός Lebesgue, για το $\{\gamma^{-1} U, \gamma^{-1} V\}$ (ανοιχτό κάλυμμα του $[0,1]$).

Έστω $t_k := \frac{k}{m}$, $k=0,1,\dots,m$.

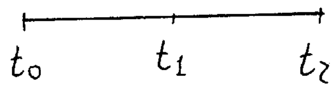


Άρα, το $\gamma[t_{k-1},t_k]$ περιέχεται ή στο U ή στο V. (*)

Φτιάχνω νέα υποδιαίρεση, διαγράφοντας όσα t_k είναι αχρείαστα, για να ισχύει η (*)

π.χ.: Ξέρω ότι $\gamma[t_0,t_1] \subset V$, επειδή $\gamma(t_0) = N \notin U$.

Αν το $\gamma[t_1,t_2] \subset V$ επίσης, τότε ολόκληρο το $\gamma[t_0,t_2] \subset V$.



Συνεχίζοντας έτσι, έχω $\{s_0, s_1, \dots, s_N\} \subset \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ και

$\gamma[s_{k-1}, s_k] \subset$ ή στο U ή στο V.

Επίσης, $\gamma[s_{k-1}, s_k] \subset U$, τότε $\gamma[s_k, s_{k+1}] \subset V$

και, $\gamma[s_{k-1}, s_k] \subset V$, τότε $\gamma[s_k, s_{k+1}] \subset U$.

Ειδικότερα, $\gamma(s_k) \in U \cap V$, $k = 1,2,\dots,n-1$

Ειδικότερα, $\gamma(s_k) \neq B$, $k=0,1,\dots,n$

Παραμορφώνω κάθε γ_k τμηματικά.

Δηλαδή, βρίσκω $h_k : [s_{k-1}, s_k] \times [0,1] \to S^n$,

με
$$\left.\begin{cases} h_k(s,0) = \gamma_k(s) \\ h_k(s_{k-1}, t) = \gamma_k(s_{k-1}) \\ h_k(s_k, t) = \gamma_k(s_k) \end{cases}\right\} ⊛⊛$$

(Τα άκρα προήλθαν από επικολλημένες γ. Αφού δεν κινούνται από τα h_k (βλ. ⊛⊛), συμπεραίνω ότι τα h_k είναι επικολλήσιμα).

$$\underbrace{\gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \gamma_n}_{\gamma}$$

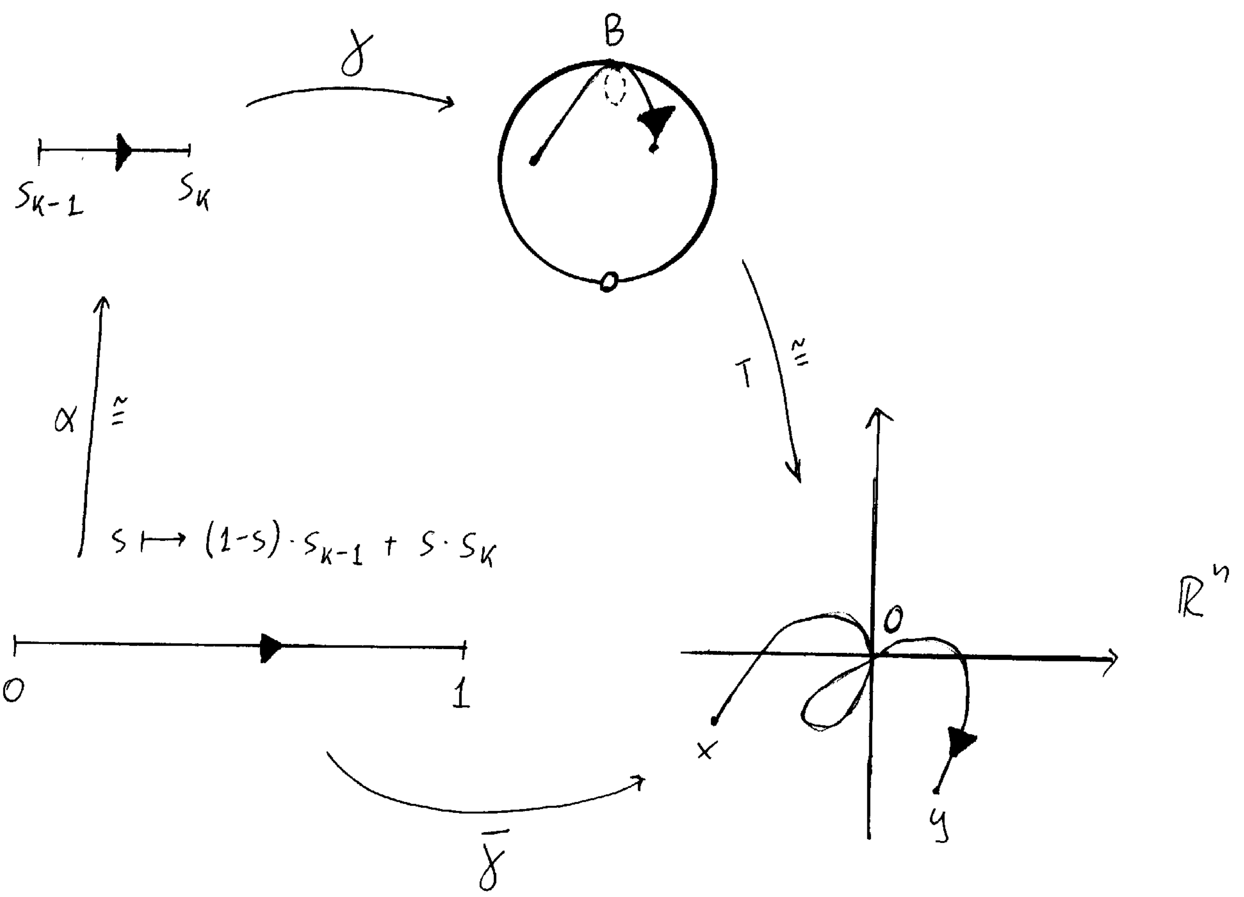
Από ⊛⊛ $\Rightarrow$ "Τα άκρα δεν κινούνται" $\Rightarrow$ Μπορώ να επικολλήσω τις h_k, σε $h : [0,1] \times [0,1] \to S^n$.

Αν $\gamma_k(s) \neq B$, $\forall s \in [s_{k-1}, s_k]$, τότε "δεν χρειάζεται παραμόρφωση",

$h_k(s,t) := \gamma_k(s)$.

Αν το γ_k περνά από το B, αφού $B \notin V$, $\gamma_k[s_{k-1}, s_k] \subset U$.

Με παρόμοια στερεο-προβολή, εναλλάσσοντας τους ρόλους των $B \leftrightarrow N$, παίρνουμε $\tau : U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$, με $\tau(B) = 0$.



Με "αλλαγή συντεταγμένων", $\bar{\gamma} = T \circ \gamma \circ \alpha$

Αλλαγή συντ/μένων είναι αντιστρέψιμη ∴ $\gamma = T^{-1} \circ \bar{\gamma} \circ \alpha^{-1}$.

Παρατηρώ ότι, $x = T\left(\gamma(s_{k-1})\right) \neq 0$, αφού $\gamma(s_{k-1}) \neq B$.

Παρόμοια, $y = T\left(\gamma(s_k)\right) \neq 0$.

Άρα, $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ με $n \geq 2$, ο οποίος είναι Κ.Τ.Σ.

Άρα, $\exists\ \bar{\delta}$ τόξο στον $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, με $\bar{\delta}(0) = x$, $\bar{\delta}(1) = y$

Όμως, ο $\mathbb{R}^n$ απλά συνεκτικός και $\bar{\gamma}_k, \bar{\delta}$ έχουν κοινά άκρα,

άρα, $\bar{\gamma}_k \simeq_T \bar{\delta}$. Δηλαδή, υπάρχει $\bar{h}_k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, με : $\bar{h}_K(s,0) = \bar{\gamma}_K(s)$

$\bar{h}_K(s,1) = \bar{\delta}(s)$

$\bar{h}_K(0,t) = \bar{\gamma}_K(0) \quad (=x)$

$\bar{h}_K(1,t) = \bar{\gamma}_K(1) \quad (=y)$

"Αντιστρέφοντας την αλλαγή συντεταγμένων", παίρνω την ζητούμενη h_K (άκρα ακίνητα, ξεκινά από το γ_K, καταλήγει σε τόξο, που δεν περνά από το B).

Πόρισμα 1

$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong 0 \quad , \forall n \geq 3.$

Απόδειξη

$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^{n-1}) \cong 0 \quad$ (αφού $n \geq 3$)

Πόρισμα 2 (Το δεύτερο βήμα του T.A.Δ.)

Έστω $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.
Αν $n \neq 2$, τότε οι $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2$ δεν είναι ομοιομορφικοί.

Απόδειξη

Πρώτο βήμα 1: $n \neq 1$. Άρα $n \geq 2$.
Έστω $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ ομοιομορφισμός.

Όπως στο "πρώτο βήμα", βρίσκω $f_4 : \mathbb{R}^n - \{0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Άρα, $\pi_1(\mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{R}^n - \{0\}) & \cong & \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \pi_1(S^{n-1}) & & \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

Άρα πρέπει $\pi_1(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow n = 2$.

Ομοτοπική ισοδυναμία

Ορισμός

Ένας μορφισμός χώρων $f : X \to Y$, λέγεται <u>ισοδυναμία ομοτοπίας</u>, <u>(ή ομοτοπική ισοδυναμία)</u>, αν υπάρχει $g : Y \to X$ μορφισμός χώρων, τέτοιος ώστε $g \circ f \simeq I_X$, $f \circ g \simeq I_Y$.

Τότε, οι f, g λέγονται <u>αντίστροφες ομοτοπίας</u>.

Αν υπάρχει ισοδυναμία ομοτοπίας μεταξύ των X, Y λέμε ότι οι X, Y είναι <u>ομοτοπικά ισοδύναμοι (ή ότι έχουν τον ίδιο τύπο ομοτοπίας)</u>. Συμβολισμός : $X \simeq Y$

Ορισμός

Ένας χώρος X λέγεται <u>συσταλτός</u>, αν η ταυτοτική του συνάρτηση είναι ομοτοπική με κάποια σταθερή συνάρτηση.

Άσκηση

① Να δείξετε ότι ο X συσταλτός $\Leftrightarrow X \simeq * := \{0\}$.

(2) Να δείξετε ότι $X \simeq Y \Rightarrow X \times Z \simeq Y \times Z$

(3) —— " —— αν X συσταλτός $\Rightarrow X \times Z \simeq Z$

<u>Ορισμός</u>

Ένας μορφισμός χώρων $r : X \to Y$, με $Y \subset X$, λέγεται <u>απόσυρση</u>, αν επεκτείνει την I_Y (δηλαδή, αν $r(y) = y$, $\forall y \in Y$).
Λέμε τότε ότι <u>ο X αποσύρεται στον Y.</u>
Δεδομένης τέτοιας r, έστω $i : Y \to X$ <u>η ένθεση</u> ($i(y) = y$, $\forall y \in Y$ ή $i = I_X|_Y$). Παρατηρούμε ότι η r απόσυρση $\Leftrightarrow r \circ i = I_Y$.
Μια ομοτοπία $h : X \times I \to X$, μεταξύ των $i \circ r$ και I_X, λέγεται <u>παραμορφωτική απόσυρση (deformation retraction)</u>, αρκεί:

$h(y, t) = y$, $\forall y \in Y$, $\forall t \in I$.

<u>Άσκηση (εύκολη)</u>

Δεδομένης τέτοιας h, να δείξετε ότι η r είναι ισοδυναμία ομοτοπίας. (Ειδικότερα, $X \simeq Y$).

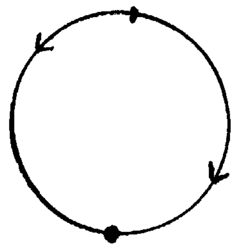
<u>Παραδείγματα</u>

(1) Έστω (X, x_0) ένας Χ.Σ.Β. και $Y = \{y_0\}$. Προφανώς, ο X αποσύρεται στον Y. (Κάθε χώρος αποσύρεται στον $*$).

(2) Όπως στην (1), αν $X = \mathbb{R}^n$ και $x_0 = 0$, τότε μια παραμορφωτική

απόσυρση $\mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, δίνεται από την $h(x,t) = t \cdot x$.

③ Όπως στην ①, αν $(X, x_0) = (S^1, (1,0))$, τότε δεν υπάρχει αντίστοιχη παραμορφωτική απόσυρση, γιατί αλλιώς $S^1 \simeq *$, και θα δούμε στην συνέχεια, ότι αυτό δίνει $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(*) = 0$. Άτοπο.



Άσκηση

Έστω $r: X \to Y$ απόσυρση χώρων και $y_0 \in Y$.
Έστω $i: Y \to X$ η ένθεση. Παρατηρώ ότι έχω μορφισμό Χ.Σ.Β. (χρησιμοποιούμε καταχρηστικά τα ίδια σύμβολα),

$$r: (X, x_0) \to (Y, y_0)$$
$$i: (Y, y_0) \to (X, x_0)$$

Να δείξετε ότι ① $r_* i_* = I_{\pi_1(Y, y_0)}$

και ότι ② i_* είναι 1-1

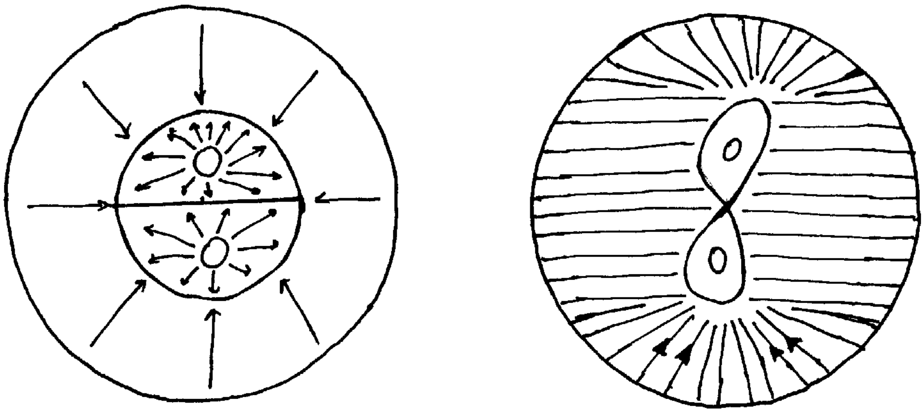
Επίσης, ③ Δώστε 2η απόδειξη, του ότι ο D^2 δεν αποσύρεται στον S^1.

Παράδειγμα

Θεωρώ τα "Θ, 8" σαν χώρους (υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$).

Δείχνω ότι $\Theta \simeq 8$.

Πράγματι, $\Theta \simeq$  $\simeq 8$, επειδή υπάρχουν παραμορφωτικές αποσύρσεις, που εποπτικά μπορούν να περιγραφούν ως "παραμορφώσεις ευθυγράμμων τμημάτων σε σημείο".



(Εδώ χρησιμοποιούμε το ότι η "$\simeq$" είναι σχέση ισοδυναμίας (άσκηση)).

Θεώρημα/Ορισμός

Έστω $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ μορφισμός Χ.Σ.Β., και $h : X \times I \to Y$, μία βασισμένη ομοτοπία, από την f στην g, δηλαδή όχι μόνον

$$h(x,0) = f(x), \quad h(x,1) = g(x), \quad \forall x \in X,$$

αλλά επιπλέον και

$h(x_0,t) = y_0 \quad , \forall t \in I$.

Τότε, $f_* = g_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$

Απόδειξη

(Εύκολη άσκηση)

Θεώρημα

Έστω $f: X \to Y$ μια ισοδυναμία ομοτοπίας και $x_0 \in X$.
Έστω $y_0 = f(x_0)$. Έχω, $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$.
Τότε, η $f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ είναι ισομορφισμός ομάδων.

Πόρισμα

Για Κ.Τ.Σ. χώρους X,Y με $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$

Πόρισμα

Για $n>1$, $S^n \not\simeq S^1$ (άρα $S^n \not\cong S^1$)

Λήμμα

Αν $h: X\times I \to Y$, από την f στην g, και αν $y_0 := f(x_0)$, $y_1 := g(x_0)$, έστω β, το τόξο από το y_0 στο y_1, με

$\beta(t) = h(x_0, t)$. Τότε, το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y, y_0) \\
& \pi_1(Y, y_1) \arrow[u, "\hat{\beta}"']
\end{tikzcd}$$

Δηλαδή, $\hat{\beta} \circ g_* = f_*$, όπου $\hat{\beta}$ είναι ο ισομορφισμός που είδαμε νωρίτερα.

Απόδειξη (Θεωρήματος)

Έστω $\varphi : Y \to X$ μια αντίστροφη ομοτοπίας της f,

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(X, \varphi(y_0)) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X, f\varphi x_0).$$

$$\varphi f \simeq I_X \overset{\text{"Λ"}}{\Longrightarrow} \varphi_* f_* = \text{κάποιο } \hat{\beta} \text{ - ισομορφισμός.}$$

Η φ_* επί. Συμμετρικά, φ_*, 1-1.

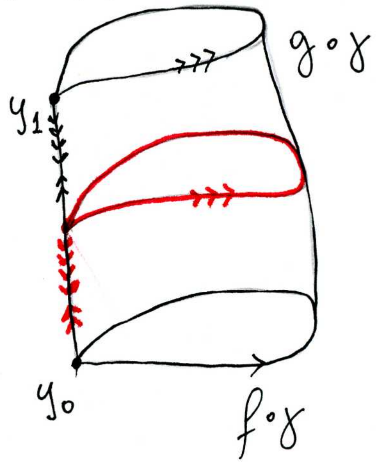
Επομένως, φ_* ισομορφισμός. Άρα, f_* ισομορφισμός.

Απόδειξη (του λήμματος)

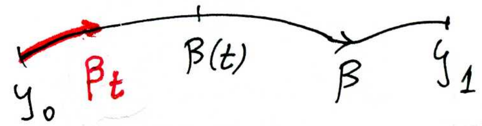
Ζητώ: Αν $\gamma : I \to X$ τόξο στο x_0, τότε $f\circ\gamma \simeq_T \beta \cdot (g\circ\gamma)\cdot\bar{\beta}$

Αν $\delta_0 := f\circ\gamma$ και $\delta_1 := \beta(g\circ\gamma)\bar{\beta}$, ψάχνω $\delta_t =$;

Προφανές στο σχήμα:



Ανστηρά: $\delta_t = \beta_t\,(h_t\circ\gamma)\,\bar{\beta_t}$, όπου $\beta_t(s) = \beta(st)$



Άσκηση (Bonus)

Έστω (X, α) ένας κατά τόξα συνεκτικός Χ.Σ.Β.

Έστω $G = \pi_1(X, \alpha)$ και $[S^1, X]$, το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας, όλων των (συνεχών) $f : S^1 \to X$.

Να δείξετε ότι το σύνολο $[S^1, X]$ είναι ισόμορφο με το σύνολο των κλάσεων συζυγίας της G.

Επικαλυπτικοί Χώροι

Ορισμός.

Ένας μορφισμός χώρων $p : \tilde{X} \to X$, λέγεται επικαλυπτικός χώρος (Ε.Χ.) του X, αν κάθε $a \in X$ περιέχεται σε κάποια ανοιχτή περιοχή U του X, με $p^{-1}(U)$ ξένη ένωση ανοιχτών, $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ και τον περιορισμό του p, ομοιομορφισμό.

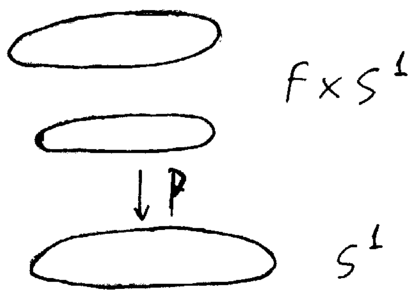
$\tilde{U}_i \xrightarrow{\cong} U$

Ασκήσεις

① Κάθε ομοιομορφισμός είναι Ε.Χ.

② Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ διακριτό και X χώρος.
Η προβολή $p : F \times X \to X$ είναι Ε.Χ.

(Σκίτσο : Αν $F = \{a, b\}$, $X = S^1$,



Παράδειγμα

$\tilde{X} = \mathbb{R}$, $X = S^1$, $p : \mathbb{R} \to S^1$ όπως στις προηγούμενες διαλέξεις.

Παράδειγμα.

Ταυτίζω τα $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{C}$.

Έχω $S^1 \subset \mathbb{C}$ $\quad (z \in S^1 \Leftrightarrow |z| = 1)$

$$\begin{array}{c} S^1 \\ \downarrow p \\ S^1 \end{array}$$

Έχω $p : S^1 \to S^1$ με $p(z) = z^2$.

Ισόμορφος με το σύνορο της "ταινία του Möbi's" πάνω απ' τον "μεσαίο κύκλο" τής ταινίας τού Möbius

Θεώρημα.

$$\begin{tikzcd}
Y \times 0 \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, hook] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\tilde{f}"] & X
\end{tikzcd}$$

Έστω $p : \tilde{X} \to X$ ένας Ε.Χ.

Έστω $f : Y \times I \to X$ ομοτοπία

Έστω $\tilde{f}_0 : Y \times 0 \to \tilde{X}$ συνεχής.

Τότε, υπάρχει μοναδική ανύψωση (της f) - επέκταση (της $\tilde{f}_0$), που είναι της μορφής $\tilde{f} : Y \times I \to \tilde{X}$

Απόδειξη

Όπως στο λήμμα III (του υπολογισμού του $\pi_1(S^1)$).

"Συμφωνία"

$p : \tilde{X} \to X$ θα είναι Ε.Χ.

$\alpha \in X$, $\tilde{\alpha} \in \tilde{X}$, με $p(\tilde{\alpha}) = \alpha$.

$G = \pi_1(X, \alpha)$, $\tilde{G} = \pi_1(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$, $H = p_*(\tilde{G}) < G$.

Πόρισμα 1

Κάθε τόξο $\gamma : I \to X$ με $\gamma(0) = \alpha$, ανυψώνεται σε μοναδικό τόξο $\tilde{\gamma}$ στον $\tilde{X}$, με $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\alpha}$

Πόρισμα 2

Κάθε ομοτοπία τόξων $h : I \times I \to X$ από το γ στο δ, όπου $\gamma(0) = \delta(0) = \alpha$, ανυψώνεται σε μοναδική ομοτοπία τόξων $\tilde{h}$, από το $\tilde{\gamma}$ στο $\tilde{\delta}$.

Αποδείξεις

(Άσκηση - Ακριβώς όπως στα λήμματα I και II , της αποδείξεως του $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$).

Θεώρημα

Ο μορφισμός ομάδων $p_* : \tilde{G} \to G$ είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη

Δείχνω: $Ker(p_*) = 0$.

Έστω $[\delta] \in Ker(p_*) \Rightarrow p_*[\delta] = \text{ταυτοτικό} = [\varepsilon_\alpha] \Rightarrow$

$$p_*[\delta] = [p\circ\delta]$$

$\Rightarrow [p\circ\delta] = [\varepsilon_\alpha]$. Έστω $p\circ\delta := \gamma$. Τότε $[\gamma] = [\varepsilon_\alpha] \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma \simeq_T \varepsilon_\alpha \Rightarrow \delta = \tilde{\gamma}$

Απο πόρισμα 2 $\Rightarrow \tilde{\gamma} \simeq_T \tilde{\varepsilon}_\alpha$

Απο πόρισμα 1 $\Rightarrow \tilde{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_{\tilde{\alpha}}$

Δηλαδή, $[\tilde{\gamma}] = [\delta] = [\varepsilon_{\tilde{\alpha}}] = \text{ταυτοτικό}$

Άσκηση

$[\gamma] \in H \Leftrightarrow \tilde{\gamma}$ κλειστό τόξο

Θεώρημα/ορισμός

Εάν ο X είναι Κ.Τ.Σ., τότε όλα τα <u>νήματα (fibers)</u>, $p^{-1}(b)$ έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Ο πληθάριθμος αυτός, λέγεται <u>πλήθος των πτυχών</u>.

Απόδειξη.

Έστω Π = σύνολο των πληθαρίθμων α, με $\alpha \leq |\tilde{X}|$.

Κάθε σύνολο S, το θεωρώ σαν χώρο (με την διακριτή τοπολογία). Τότε, αν Y χώρος, μια συνάρτηση

$f: Y \to S^1$ (όπου Y διακριτός) είναι συνεχής $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\alpha)$ ανοιχτό, $\forall \alpha \in S \Leftrightarrow f$ τοπικά σταθερή

(δηλαδή, κάθε $c \in Y$ έχει ανοιχτή περιοχή V, με $f|_V$ σταθερή).

Έχω $f: X \to \Pi$, με $f(b) = |p^{-1}(b)|$.

Αν $U \ni b$ είναι όπως στον ορισμό του Ε.Χ. (δηλαδή άρτια καλλυμένο), δηλαδή $U = \bigcup \tilde{U}_i$ ξένη ένωση, και

$p|_{\tilde{U}_i}$, 1-1 και επί. $\Rightarrow |p^{-1}(b) \cap \tilde{U}_i| = 1$, ξένα μονοσύνολα.

$|p^{-1}(b)| = |I|$, ισχύει $\forall b \in U$.

Δηλαδή, η f είναι τοπικά σταθερή $\Rightarrow$ συνεχής.

Επίσης, τοπικά σταθερή σε συνεκτικό χώρο $\Rightarrow$ σταθερή.

(και Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow$ συνεκτικός).

Ορολογία

Στο 1º Θεώρημα, η ύπαρξη (χωρίς μοναδικότητα) της $\tilde{f}$, ισχύει για "γενικευμένους Ε.Χ", τα <u>fibrations</u> (π.χ. τα fiber bundles).
Αυτή η ιδιότητα λέγεται <u>"Covering Homotopy Property"</u>

"Συμφωνία".

Λέω "ο Ε.Χ. $\tilde{X}$" αντί "ο Ε.Χ. p", (που είναι και το πιό ακριβές.)

Θεώρημα.

Αν $\tilde{X}$ Κ.Τ.Σ., τότε το πλήθος των πτυχών, ισούται με $[G:H]$.

Απόδειξη

$G/_H \underset{}{\overset{(\text{προσωρινά})}{=\!=}} \{Hg \,/\, g \in G\}$, (δεξιά σύμπλοκα).

Περιγράφω ισομορφισμό συνόλων, $\varphi : G/_H \longrightarrow \underset{(\text{fiber})}{p^{-1}(a)}$.

Για $g \in G$, έστω $g = [\gamma]$.

Ορίζω, $\varphi(Hg) = \tilde{\gamma}(1)$.

Παρατηρώ: $\tilde{\gamma}(1)$ αννγώνει το $\gamma(1) = \alpha$, δηλαδή ανήκει στο (νήμα) $p^{-1}(\alpha)$. ($1^{\text{ο}}$ μέρος του "καλώς ορισμένου").

Ισχυρισμός 1: Η $\varphi(Hg)$ εξαρτάται μόνον από το Hg.

Βήμα 1: Έστω $g = [\gamma_1] = [\gamma_2] \Rightarrow \gamma_1 \simeq_T \gamma_2 \xrightarrow{\text{Πόρισμα 1}}$

$\Rightarrow \tilde{\gamma}_1 \simeq_T \tilde{\gamma}_2 \Rightarrow$ Έχουν κοινά άκρα, $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$.

Βήμα 2: $\varphi(Hhg) = \varphi(Hg)$, όπου $h \in H$.

$h \in H = p_*(\tilde{G}) \Rightarrow h = p_*(g')$, για κάποιο $g' \Rightarrow$

$\Rightarrow h = p_*(g') = [p \circ \delta_1]$, για κάποιο δ_1 τόξο, στο $\tilde{\alpha}$.

Έστω $\delta := p \circ \delta_1 \Rightarrow \tilde{\delta} = \delta_1$

Επίσης, $p \circ (\tilde{\delta} \cdot \tilde{\gamma}) = (p \circ \tilde{\delta}) \cdot (p \circ \tilde{\gamma}) = \delta \cdot \gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{\delta} \cdot \tilde{\gamma} = \widetilde{\delta \cdot \gamma}$ (Επειδή ξεκινά από το $\tilde{\alpha}$).

Άρα, $\varphi(Hhg) = (\tilde{\delta} \cdot \tilde{\gamma})(1) = \tilde{\gamma}(1) = \varphi(Hg)$.

Ισχυρισμός 2: Η φ είναι επί.

Αν $b \in p^{-1}(\alpha)$, επειδή X Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow \exists\, \delta$, τόξο, απο το $\tilde{\alpha}$ στο b. Άρα, $\gamma := p \circ \delta$, είναι τόξο στο α, δηλαδή, $g := [\gamma] \in G$ και $\varphi(Hg) = \tilde{\gamma}(1) \overset{\circledast}{=} \delta(1) = b$ ($\circledast$: όπως πριν).

Ισχυρισμός 3: Η φ είναι 1-1.

Έστω $\varphi(Hg_1) = \varphi(Hg_2) = b$.

Έστω $g_\kappa = [\gamma_\kappa]$, $\kappa = 1,2$.

$h := [\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\bar{\gamma}}_2] \in \tilde{G}$.

Έχω δει: $\tilde{\gamma}_1 \tilde{\bar{\gamma}}_2 \tilde{\gamma}_2 \simeq_T \tilde{\gamma}_1 \Rightarrow p(\tilde{\gamma}_1 \tilde{\bar{\gamma}}_2 \tilde{\gamma}_2) \simeq_T p(\tilde{\gamma}_1) \Rightarrow$

$$p(\tilde{\gamma}_1 \tilde{\bar{\gamma}}_2 \tilde{\gamma}_2) = (p\tilde{\gamma}_1 \tilde{\bar{\gamma}}_2)\cdot(p\tilde{\gamma}_2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{[p\tilde{\gamma}_1 \tilde{\bar{\gamma}}_2]}_{= p_* h \, = \, h'} \cdot \underbrace{[p\tilde{\gamma}_2]}_{= [\gamma_2] \, = \, g_2} = \underbrace{[p\tilde{\gamma}_1]}_{= [\gamma_1] \, = \, g_1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h' \cdot g_2 = g_1$, όπου $h' = p_* h \in H$.

Δηλαδή, $Hg_2 = Hg_1$.

<u>Ορισμός.</u>

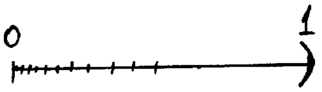
Ο χώρος Y, λέγεται <u>τοπικά Κ.Τ.Σ.</u> αν $\forall c \in Y$, κάθε ανοιχτή περιοχή του C, περιέχει μια Κ.Τ.Σ. περιοχή, του c.

Άσκηση

Αν X είναι τοπικά Κ.Τ.Σ., τότε ο $\tilde{X}$ επίσης.

Π.χ.

$Y = \{\frac{1}{n}\}_{n=1,\dots} \cup \{0\}$



Τότε Y όχι τοπικά συνεκτικός και όχι τοπικά Κ.Τ.Σ.

Θεώρημα ύπαρξης ανυψώσεων (Κριτήριο ανύψωσης)

Έστω $f : (Y, b) \to (X, \alpha)$, μορφισμός Χ.Σ.Β.

Έστω Y Κ.Τ.Σ και Τ.Κ.Τ.Σ. (τοπικά Κ.Τ.Σ.).

Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(α) $\operatorname{Im} f_* < H$

(b) Υπάρχει ανύψωση $\tilde{f} : (Y, b) \to (\tilde{X}, \tilde{\alpha})$.

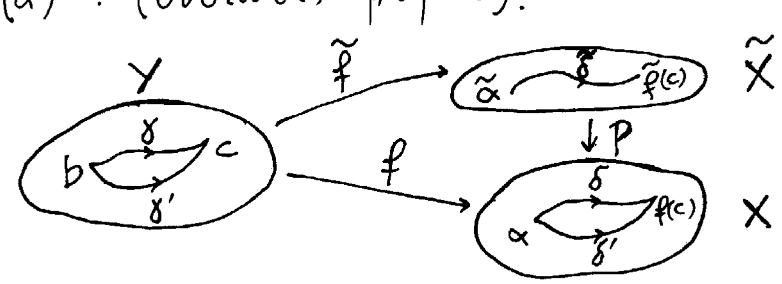
Απόδειξη

(α) ⇒ (b) : (Εύκολο).

Ανύψωση $\Rightarrow p\tilde{f} = f \Rightarrow (p\tilde{f})_* = f_* \Rightarrow p_* \tilde{f}_* = f_* \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f_* < \operatorname{Im} p_* = H$

(b) ⇒ (α) : (ουσιώδες μέρος).



Έστω $c \in Y$. Αφού Y Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow \exists\, \gamma$ (όπως στο σχήμα).

Έστω $\delta := f \circ \gamma$.

Ανυψώνω το δ σε $\tilde{\delta}$ (ξεκινά από το $\tilde{\alpha}$ - μοναδικό).

Ορίζω $\tilde{f}(c) := \tilde{\delta}(1)$

<u>Ισχυρισμός 1</u>: Η $\tilde{f}$ είναι καλώς ορισμένη.

Πράγματι, έστω γ', όπως στο σχήμα. Ορίζω $\delta' := f \circ \gamma'$

και $\zeta := \delta' \cdot \bar{\delta}$, $[\zeta] \in G$.

Τότε, $f \circ (\gamma' \cdot \bar{\gamma}) = (f \circ \gamma') \cdot (\overline{f \circ \gamma}) = \delta' \cdot \bar{\delta} = \zeta \Rightarrow$

$\Rightarrow f_* [\gamma' \cdot \bar{\gamma}] = [\zeta] \Rightarrow [\zeta] \in \operatorname{Im} f_* < H$.

Όμως, από προηγούμενη άσκηση, η ζ ανυψώνεται σε κλειστό τόξο $\tilde{\zeta}$. Άρα το $\tilde{\zeta} \cdot \tilde{\delta}$ ορίζεται.

Έτσι, $p \circ (\tilde{\zeta} \cdot \tilde{\delta}) = p\tilde{\zeta} \cdot p\tilde{\delta} = \zeta \cdot \delta$ (άρα $\tilde{\zeta}\tilde{\delta} = \widetilde{\zeta\delta}$) $=$

$= \delta' \bar{\delta} \delta \simeq_T \delta' \Rightarrow \underset{\tilde{\zeta}\cdot\tilde{\delta}}{\underset{\parallel}{\widetilde{\zeta \cdot \delta}}} \simeq_T \tilde{\delta}' \Rightarrow$ έχουν κοινά άκρα $\Rightarrow$

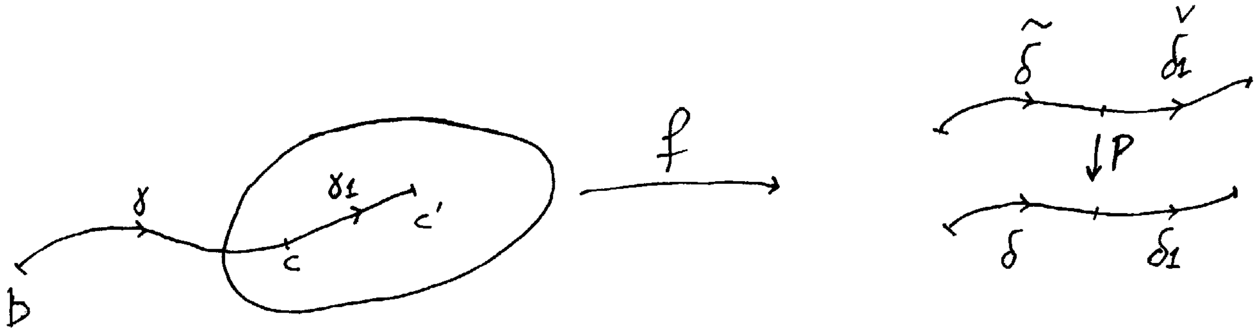
$\Rightarrow$ κοινό πέρας $\Rightarrow$ πέρας του $\tilde{\zeta} \cdot \tilde{\delta}$ = πέρας του $\tilde{\delta}$ = πέρας του $\tilde{\delta}'$.

<u>Ισχυρισμός 2</u>: Η $\tilde{f}$ συνεχής (ολοκληρώνει την απόδειξη).

Δείχνω ότι $\tilde{f}$ συνεχής στο $c \in Y$, $\forall c$.

Έστω V, ανοιχτή περιοχή του c, στο Y.

Χ.β.τ.γ. η V είναι Κ.Τ.Σ. (βλ. Τ.Κ.Τ.Σ.).



Έστω $c' \in V$. Τότε, $\exists\, \gamma_1$ (όπως στο σχήμα) αφού το V, Κ.Τ.Σ.

Έστω $\gamma_2 := \gamma \circ \gamma_1$.

Η f συνεχής $\Rightarrow$ (χ.β.τ.γ.) $f(V) \subset U$, όπου $U \ni f(c)$, άρτια καλυμμένο (από την p). Δηλαδή $U = \bigcup \tilde{U}_i$ (ξένη ένωση).

Διαλέγω i, με $\tilde{f}(c) \in \tilde{U}_i$.

Έστω $\delta := f \circ \gamma$, $\delta_1 := f \circ \gamma_1$, $\delta_2 := f \circ \gamma_2 = \delta \cdot \delta_1$, $\check{\delta}_1 := p_i^{-1} \circ \delta_1$,

όπου $p_i := p|_{\tilde{U}_i} \xrightarrow{\cong} U$.

Τότε, $p \circ (\tilde{\delta} \cdot \check{\delta}_1) = (p \circ \tilde{\delta}) \cdot (p \circ p_i^{-1} \circ \delta_1) = \delta \cdot \delta_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{\delta} \cdot \check{\delta}_1 = \tilde{\delta}_2 \Rightarrow \tilde{f}(c') =$ πέρας του $\tilde{\delta} \cdot \check{\delta}_1 =$ πέρας του $\check{\delta}_1 =$

$= p_i^{-1} \circ f(c')$, $\forall c' \in V$.

Τοπικά συνεχής $\Rightarrow$ συνεχής.

<u>Θεώρημα (Μοναδικότητα της ανύψωσης).</u>

Εαν $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : (Y, b) \to (\tilde{X}, \tilde{\alpha})$, ανυψώνουν, την $f : (Y, b) \to (X, \alpha)$,

τότε $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$, αρκεί ο Y, Κ.Τ.Σ.

Π.Χ.

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{R},0) \arrow[d] \\
(\{0,1\},0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}_n,\ \forall n\in\mathbb{Z}"] \arrow[r, "\text{σταθερή } f"'] & (S^1,(1,0))
\end{tikzcd}$$

Τότε, $\tilde{f}_n(1) = n$. (Έχω μία για κάθε n → όχι μοναδική)

Απόδειξη

Έστω $c \in Y$ και $U \ni f(c)$, άρτια καλυμμένη $\Rightarrow U = \cup \tilde{U}_i$ (ξένη ένωση)

Έστω $\tilde{U}_{i_j} \ni \tilde{f}_j(c)$, $j = 1,2$.

$\tilde{U}_{i_j} =: \tilde{U}_j$

Επειδή $\tilde{f}_j$ συνεχής $\Rightarrow \exists\ V_j \overset{\circ}{\ni} c$, $\tilde{f}_j(V_j) \subset \tilde{U}_j$

Έστω $V := V_1 \cap V_2$

Περίπτωση 1 : $\tilde{f}_1(c) = \tilde{f}_2(c)$ (Προσωρινά λέω $c =$ τύπου I).

Τότε, $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$. Η p είναι 1-1 στο U_i.

Έτσι, $p\tilde{f}_1 = f = p\tilde{f}_2 \Rightarrow \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ στο V

Περίπτωση 2 : $\tilde{f}_1(c) \neq \tilde{f}_2(c)$ (Προσωρινά λέω $c =$ τύπου II).

Τότε, $\tilde{U}_1 \neq \tilde{U}_2 \Rightarrow \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 \neq \emptyset \Rightarrow \tilde{f}_1(c') \neq \tilde{f}_2(c')$, $\forall c' \in V$.

Εν πάσει περιπτώσει, όλα τα $c' \in V$ είναι του ιδίου τύπου.

Άρα, $T_1 := \{c, \text{τύπου } I\}$ ανοιχτό,

και $T_1^c := \{c, \text{τύπου } II\}$ ανοιχτό.

Επομένως, T_1 ανοιχτό-κλειστό.

Επίσης $T_1 \neq \emptyset$ (γιατί $b \in T_1$) $\overset{\circledast}{\Rightarrow} T_1 = Y$ ($\circledast$: Συνεκτικότητα).

<u>Ορισμός</u>

Ένας Ε.Χ. $\tilde{X}$ του X, λέγεται <u>καθολικός (universal)</u>, εαν είναι απλά συνεκτικός.

<u>Ορισμός</u>

Ένας χώρος X, λέγεται <u>ημιτοπικά απλά συνεκτικός (Η.Τ.Α.Σ.)</u>, εάν $\forall \alpha \in X$, $\exists \underset{\alpha}{U} \overset{\circ}{\subseteq} X$, τέτοια ώστε, δύο τόξα, με κοινά άκρα στο U να είναι τοξοομοτοπικά στον X.

(Ισοδύναμα: Αν $[\pi_1(U,\alpha) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X,\alpha)] = 0$, δηλαδή ο μηδενικός μορφισμός, όπου $i: U \subset X$ η ένθεση, $\forall \alpha \in U$).

<u>Θεώρημα (Ύπαρξη του καθολικού Ε.Χ.)</u>

Έστω $\mathbf{X}$, Κ.Τ.Σ. και Τ.Κ.Τ.Σ.

Τότε, τα ακόλουθα, είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X έχει καθολικό Ε.Χ. $p: \tilde{X} \to X$

(b) Ο X είναι Η.Τ.Α.Σ.

Απόδειξη

(α) ⇒ (b) : (Εύκολο).

Έστω $\alpha \in X$. Παίρνω $U \overset{\circ}{\ni} \alpha$, άρτια καλυμμένη.

Έστω γ, δ τόξα με κοινά άκρα, στην U.

Έστω $\tilde{\alpha} \in p^{-1}(\alpha) \subset p^{-1}(U) = \bigcup \tilde{U}_i$ (ξένη ένωση).

Έστω $\tilde{\alpha} \in \tilde{U}_i$. Έστω $p_i = p|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \xrightarrow{\cong} U$

Έχω τις ανυψώσεις $p_i^{-1}\gamma$, $p_i^{-1}\delta$.

Αυτές έχουν πάλι κοινά άκρα στον απλά συνεκτικό $\tilde{X}$

Άρα, $p_i^{-1}\gamma \simeq_T p_i^{-1}\delta \Rightarrow pp_i^{-1}\gamma \simeq_T pp_i^{-1}\delta \Rightarrow \gamma \simeq_T \delta$ (στον X).

(b) ⇒ (α) : (Ουσιώδες μέρος - αφηρημένο - προαιρετικά).

Έστω $\alpha \in X$, τυχαίο.

Έστω $\tilde{X} := \{[\gamma] : \gamma(0) = \alpha,\ \gamma \text{ τόξο στον } X\}$

Ορίζω $p[\gamma] := \gamma(1)$. Είναι καλώς ορισμένο, διότι εαν $[\gamma] = [\gamma'] \Rightarrow$ κοινά άκρα.

Ορίζω $\mathbb{B} := \{U \overset{\circ}{\subset} X : U \text{ Κ.Τ.Σ. και } [\pi_1(U) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X)] = 0\}$

(Καθώς U Κ.Τ.Σ. "δεν χρειάζεται" σημείο βάσης "στον i_*").

Ισχυρισμός 1: Το $\mathbb{B}$ είναι βάση τοπολογίας του X.

(i) Κάλυψη?

Αν $b \in X$, η Η.Τ.Α.Σ. δίνει U, με $[\pi_1(U, c) \longrightarrow \pi_1(X, c)] = 0$,

$\forall c \in U$, σημείο βάσης.

Αφού X Τ.Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow \exists\, V \overset{\circ}{\ni} b,\ V \subset U$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(V) \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_1(U) \arrow[d, "0"] \\
& \pi_1(X)
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \left[\pi_1(V) \to \pi_1(X)\right] = 0$$

Άρα $V \in \mathbb{B}$

(ii) Εαν $U_1, U_2 \in B$ και $U_1 \cap U_2 \ni b \overset{?}{\Rightarrow} \exists\, V \ni b$ με $V \in \mathbb{B}$.

Όπως πρίν. Η Τ.Κ.Τ.Σ. του X, δίνει $V \overset{\circ}{\ni} b$, V Κ.Τ.Σ., $V \subset U_1 \cap U_2$. Το ότι $\left[\pi_1(V) \to \pi_1(X)\right] = 0$, όπως πρίν.

$(V \hookrightarrow U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1 \hookrightarrow X)$.

Για $[\gamma] \in \tilde{X}$, με $\gamma(1) \in U$, ορίζω $\tilde{U}_{[\gamma]} := \{[\gamma \cdot \delta] : \delta$ τόξο στο U, τέτοιο ώστε το $\gamma \cdot \delta$ να ορίζεται, δηλαδή $\delta(0) = \gamma(1) = p[\gamma]\}$.

Απομένει το ότι η $\mathbb{B}$ είναι βάση για την συγκεκριμένη τοπολογία του X (Παραλείπεται). – ουσιαστικά το αποδείξαμε – εύκολη point-set-topology άσκηση)

<u>Ισχυρισμός 2</u>: Το $p|_{\tilde{U}_{[\gamma]}}$ είναι ισομορφισμός $\tilde{U}_{[\gamma]} \to U$.

Επειδή U Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow$ επί

Επίσης $\left[\pi_1(U) \to \pi_1(X)\right] = 0 \Rightarrow 1\text{-}1$

Ισχυρισμός 3: Εαν $[\beta] \in \tilde{U}_{[\gamma]} \Rightarrow \tilde{U}_{[\beta]} = \tilde{U}_{[\gamma]}$

Κατ' αρχάς, εαν $[\beta] \in \tilde{U}_{[\gamma]} \Rightarrow \beta = \gamma \cdot \delta \Rightarrow \beta(1) = \delta(1) \in U \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Το $\tilde{U}_{[\beta]}$ ορίζεται.

Εαν $[\alpha] \in \tilde{U}_{[\beta]} \Rightarrow [\alpha] = [\beta\delta'] = [\gamma(\delta\delta')] \in \tilde{U}_{[\gamma]}$, δηλαδή,

$\tilde{U}_{[\beta]} \subset \tilde{U}_{[\gamma]}$ ⊛.

Επίσης, $[\beta] = [\gamma\delta] \Rightarrow [\beta\bar{\delta}] = [\gamma\delta\bar{\delta}] = [\gamma] \Rightarrow [\gamma] \in \tilde{U}_{[\beta]}$

Απο την ⊛, εναλλάσσοντας τα γ και b, παίρνω την αντίστροφη ανισότητα.

Ισχυρισμός 4: Η $\tilde{\mathbb{B}} := \{\tilde{U}_{[\gamma]} : U \in \mathbb{B}, [\gamma] \in p^{-1}(U)\}$ είναι μια βάση τοπολογίας του $\tilde{X}$.

(i) Κάλυψη ?

Εαν $[\gamma] \in \tilde{X}$, βρίσκω $U \in \mathbb{B}$, με $\gamma(1) \in U$.

Τότε $[\gamma] \in \tilde{U}_{[\gamma]}$ (Άσκηση).

(ii) Έστω $\tilde{U}_{[\gamma]}, \tilde{V}_{[\delta]} \in \tilde{\mathbb{B}}$, με $[\alpha] \in \tilde{U}_{[\gamma]} \cap \tilde{V}_{[\delta]}$.

Ο ισχυρισμός 2 μας δίνει ότι $\tilde{U}_{[\alpha]} = \tilde{U}_{[\gamma]}$, $\tilde{V}_{[\alpha]} = \tilde{V}_{[\delta]}$.

Επίσης $\alpha(1) \in U \cap V$. Βρίσκω $W \in \mathbb{B}$, με, $\alpha(1) \in W \subset U \cap V$.

Άρα, $[\alpha] \in \tilde{W}_{[\alpha]} \subset \tilde{U}_{[\alpha]} \cap \tilde{V}_{[\alpha]}$

<u>Ισχυρισμός 5</u>: Η p είναι συνεχής.

Δείχνω συνέχεια στο $[\gamma]$ $\forall [\gamma] \in \tilde{X}$.

Εαν $p[\gamma] \in U \in \mathbb{B}$, τότε, $p(\tilde{U}_{[\gamma]}) \subset U$ (και μάλιστα ισούνται).

<u>Ισχυρισμός 6</u>: Η p είναι ανοιχτή

Αρκεί p(βασικού) = ανοιχτό.

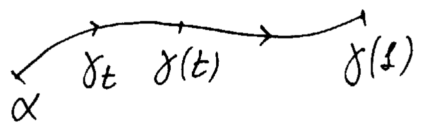
Δείχνω p(βασικό) = βασικό (όπως στον ισχυρισμό 5).

<u>Ισχυρισμός 7</u>: Ο $\tilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός.

(i) Ο $\tilde{X}$ είναι Κ.Τ.Σ.

Έστω $\tilde{\alpha} := [\varepsilon_\alpha]$. Έστω $[\gamma] \in \tilde{X}$ τυχαίο σημείο του.

Ορίζω $\gamma_t(s) := \gamma(st)$



Έστω $\delta: I \to \tilde{X}$, με $\delta(t) = [\gamma_t]$.

Αφού $\delta(0) = \tilde{\alpha}$, $\delta(1) = [\gamma]$, αρκεί ν.δ.ο. δ συνεχής.

Έστω $\tilde{U}_{[\gamma_t]} \overset{\circ}{\ni} [\gamma_t] = \delta(t)$.

Για $t \in I$, βρίσκω $N \overset{\circ}{\ni} t$, (στο I), με $\gamma(N) \subset U$.

Ελέγχω: $\delta(N) \subset \tilde{U}_{[\gamma_t]}$

(ii) $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\alpha}) = 0$ (ολοκληρώνει την απόδειξη).

Έστω $[\delta] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$. Έστω $\gamma = p \circ \delta$.

Αφού $\delta(0) = \tilde{\alpha}$ πρέπει $\delta = \tilde{\gamma}$.

Όπως πριν $\gamma_t(s) := \gamma(ts)$.

Έχω συνεχή $t \mapsto [\gamma_t]$.

Πάλι $0 \mapsto \tilde{\alpha}$ ανυψώνει το γ.

Άρα $[t \mapsto [\gamma_t]] = \tilde{\gamma} = \delta \Rightarrow [\gamma_1] = \delta(1)$.

Δηλαδή
$$\begin{array}{ccc} [\gamma] & = & \tilde{\alpha} \\ \| & & \| \\ p_*[\delta] & & [\varepsilon_\alpha] \\ & & \| \\ & & 0_{\pi_1(X,\alpha)} \end{array}$$

Όμως p_* μονομορφισμός $\Rightarrow [\delta] = 0$ **στο** $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$.

Ορισμός

Έστω χώρος X. Ένας <u>χώρος πάνω από τον X</u> (Συμβ: $/X$), είναι απλώς ένα ζεύγος (Y, p), όπου $p: Y \to X$ συνεχής.

Εάν $(Y_1, p_1), (Y_2, p_2)$ είναι χώροι $/X$, ένας <u>μορφισμός $/X$</u>, $f: (Y_1, p_1) \to (Y_2, p_2)$, είναι μια συνεχής $f: Y_1 \to Y_2$, τέτοια ώστε, $p_2 \circ f = p_1$

Σχόλιο

Αυτό συμβαίνει εάν και μόνον εάν το
$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
, μετατίθεται

Ορισμός

Εάν $f:(Y_1,p_1)\to(Y_2,p_2)$ είναι μορφισμός /X , τον καλούμε <u>ισομορφισμό /X</u>, εάν $\exists\, g:(Y_2,p_2)\to(Y_1,p_1)$, με $g\circ f=I_{Y_1}$ και $f\circ g=I_{Y_2}$. Τότε λέω ότι οι χώροι $(Y_1,p_1),(Y_2,p_2)$ είναι <u>ισόμορφοι /X</u>.

Θεώρημα

(1) Η σύνθεση μορφισμών /X είναι μορφισμός /X .

(2) Η ταυτοτική I_Y είναι μορφισμός /X , $\forall (Y,p)$.

(3) Η σχέση "ισομορφισμός /X" είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη

Εύκολη άσκηση (S.O.S.)

Ασκήσεις

(1) Εαν $(Y_1,p_1),(Y_2,p_2)$ είναι ισόμορφοι /X και αν ο (Y,p_1) είναι E.X. , τότε και ο (Y,p_2), είναι E.X.

(2) Αν (Y_j,p_j) είναι /X $(j=1,2)$ και αν $f:Y_1\to Y_2$ είναι συνεχής, ν.δ.ο. η f είναι /X $\Leftrightarrow$ διατηρεί όλα τα νήματα, δηλαδή $\forall b\in X$, η f απεικονίζει το $p_1^{-1}(b)$ στο $p_2^{-1}(b)$

(3) Έστω $X = [0,1]$, $Y = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$, $p : Y \to X$, με
$p(\alpha,0) = p(\alpha,1) = \alpha$.
Εαν $f : (Y,p) \to (Y,p)$ με $f(0,0) = (0,1)$, ν.δ.ο. $f(1,0) = (1,1)$.

<u>Ορισμός</u>

Ένας <u>βασισμένος χώρος</u> (Y,b) είναι απλώς ενας Χ.Σ.Β.
Ένας <u>βασισμένος μορφισμός</u> $(Y,b_1) \to (Y,b_2)$ είναι ένας μορφισμός Χ.Σ.Β.
Ένας <u>βασισμένος χώρος $/(X,\alpha)$</u> είναι μια τριάδα (Y,p,b), με $(Y,p)/X$ και $p : (Y,b) \to (X,\alpha)$.

<u>Άσκηση</u>

Εαν (Y_j, p_j, b_j), $j = 1,2$ είναι $/(X,\alpha)$, δώστε τον προφανή ορισμό βασισμένου μορφισμού $(Y_1,p_1,b_1) \to (Y_2,p_2,b_2)$, και ισομορφισμού, και αποδείξτε το ανάλογο του προηγούμενου θεωρήματος.

<u>Άσκηση</u>

Έστω $X = \{0,1\}$, $Y = \{0,1,2,3\}$, $p : Y \to X$, με $\begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ x \mapsto 1, x \neq 0 \end{cases}$

Καταμετρήστε τους ισομορφισμούς $(Y,p) \xrightarrow{\cong} (Y,p)$, και τους βασισμένους ισομορφισμούς $(Y,p,1) \xrightarrow{\cong} (Y,p,1)$.

Θεώρημα κατάταξης

Έστω X Κ.Τ.Σ. , Τ.Κ.Τ.Σ. , Η.Τ.Α.Σ. .

Έστω $\alpha \in X$ και $G := \pi_1(X, \alpha)$.

Τότε, (α) Οι υποομάδες H της G, αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα με τις κλάσεις βασισμένων ισομορφισμών $/X$, Κ.Τ.Σ., Ε.Χ., $(\tilde{X}, \tilde{\alpha}) \xrightarrow{p} (X, \alpha)$, μέσω της αντιστοίχησης $p \mapsto p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\alpha}))$.

(b) Οι κλάσεις συζυγίας των υποομάδων H της G, αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα με τις κλάσεις ισομορφισμών $/X$, Κ.Τ.Σ., Ε.Χ. $/X$, μέσω της ίδιας αντιστοίχισης.

Άσκηση

Έστω $X = S^1 = Y$ και $p : Y \to X$ με $p(z) = z^2$ $(S^1 \subset \mathbb{C})$.

Ν.δ.ο κάθε άλλος δίπτυχος Κ.Τ.Σ., Ε.Χ. του X, είναι ισόμορφος με αυτόν.

Λήμμα 1

("Δεδομένου H βρίσκω X_H")

Εάν $H < G \Rightarrow \exists$ Κ.Τ.Σ., Ε.Χ. , $p : (X_H, \alpha_H) \to (X, \alpha)$, με $p_*(\pi_1(X_H, \alpha_H)) = H$.

Απόδειξη (του λήμματος 1)

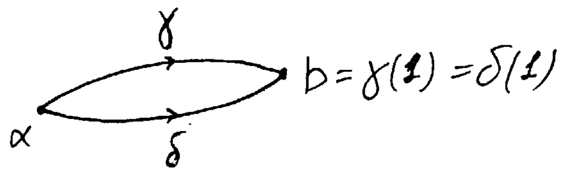
Έστω $(\tilde{X}, \tilde{\alpha})$ ο καθολικός Ε.Χ. του (X, α), όπως πριν.

Ορίζω σχέση ισοδυναμίας "$\sim$" στον $\tilde{X}$, ως εξής:

$$[\gamma]\sim[\delta] \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma(1)=\delta(1)\\ [\gamma\bar{\delta}]\in H\end{cases}$$

(Άσκηση: Ν.δ.ο. είναι όντως σχέση ισοδυναμίας).

Ορίζω $X_H := \tilde{X}/\sim$.



Έστω $\langle\gamma\rangle \in X_H$, η κλάση του $[\gamma]$ $\quad$ ($\gamma\bar{\delta}$ κλειστό στο $\alpha \Rightarrow [\gamma\bar{\delta}]\in G$)

Έχω τον κανονικό μορφισμό $q:\tilde{X}\to X_H$, με $q([\gamma])=\langle\gamma\rangle$.

Δίνω στον X_H την τοπολογία πηλίκου (δηλαδή U ανοιχτό $\Leftrightarrow$ $q^{-1}(U)$ ανοιχτό).

<u>Ισχυρισμός 1</u>: Υπάρχει καλώς ορισμένη συνάρτηση $p_H: X_H\to X$, που επάγεται από την $p:\tilde{X}\to X$.

Πράγματι, το ότι η p_H επάγεται από την p, σημαίνει ότι $p_H(\langle\gamma\rangle)=p([\gamma])$. Καλώς ορισμένη, σημαίνει ότι εαν $\langle\gamma\rangle=\langle\delta\rangle$, τότε, $p_H(\langle\gamma\rangle)=p_H(\langle\delta\rangle)$, δηλαδή $[\gamma]\sim[\delta] \Rightarrow \underset{\gamma(1)}{\underset{\parallel}{p([\gamma])}} = \underset{\delta(1)}{\underset{\parallel}{p([\delta])}}$,

το οποίο, ισχύει, εξ' ορισμού της "$\sim$".

<u>Ισχυρισμός 2</u>: $[\gamma]\sim[\delta] \Leftrightarrow [\gamma h]\sim[\delta h]$, $\forall h$, τόξο που ξεκινά απο το $b=\gamma(1)=\delta(1)$.

Πράγματι: ($\Rightarrow$) Ζητώ: (a) $\gamma h(1)=\delta h(1)$

και (b) $[(\gamma h)\overline{\delta h}]\in H$

(α) $\gamma n(1) = n(1) = \delta n(1)$

(b) Αφού $\overline{\delta n} = \bar{n}\bar{\delta} \Rightarrow [\gamma n \overline{\delta n}] = [\gamma n \bar{n} \bar{\delta}] = [\gamma][n\bar{n}][\bar{\delta}] =$

$= [\gamma]\cdot[\varepsilon_b]\cdot[\bar{\delta}] = [\gamma][\bar{\delta}] = [\gamma\bar{\delta}] \in H$ (αφού $[\gamma]\sim[\delta]$).

($\Leftarrow$) Εαν $[\gamma n]\sim[\delta n]$, με $n(0) = b = \gamma(1) = \delta(1) \Rightarrow \gamma(1) = \delta(1)$.

Απομένει ν.δ.ο. $[\gamma\bar{\delta}] \in H$, δεδομένου ότι $[\gamma n(\overline{\delta n})] \in H$.

Παρόμοια με το ($\Rightarrow$)

Ισχυρισμός 3: Αυτή η $p_H : X_H \to X$ είναι Ε.Χ.

Πράγματι, έστω $\mathbb{B}, \tilde{\mathbb{B}}$ οι βάσεις τοπολογίας των $X, \tilde{X}$ αντίστοιχα.

Ο Ισχυρισμός 1 μας δίνει ότι εαν $U \in \mathbb{B}$ και $p^{-1}(U) = \cup \tilde{U}_i$ (ξένη ένωση, $\tilde{U}_i \in \tilde{\mathbb{B}}$) και εαν $q[\gamma] = q[\delta]$, με $[\gamma] \in \tilde{U}_i$, και $[\delta] \in \tilde{U}_J$, τότε η q, ταυτίζει κάθε $[\gamma n] \in \tilde{U}_i$, με το $[\delta n]$ στην $\tilde{U}_J$. Δηλαδή, $q^{-1}q(\tilde{U}_i) =$ ξένη ένωση ορισμένων $\tilde{U}_J$. Άρα έχουμε τα εξής:

(α) Το $\hat{U}_i := q(\tilde{U}_i)$ είναι ανοιχτό (βλ. τοπολογία πηλίκου).

(b) $p_H^{-1}(U) = \cup \hat{U}_i$, ξένη ένωση (όπου $\hat{U}_i = \hat{U}_J \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q^{-1}(\hat{U}_i) = \cup \ldots \cup \tilde{U}_i \cup \ldots \cup \tilde{U}_J \cup \ldots$)

Ελέγχω ότι $p_H| : \hat{U}_i \to U$ είναι ισομορφισμός χώρων.

Έχω

$$\begin{tikzcd} \tilde{U}_i \arrow[rr, "\cong", "p"'] \arrow[dr, "q"'] & & U \\ & \hat{U}_i \arrow[ur, "p_H"'] & \end{tikzcd}$$

, μετατίθεται, αφού η p_H, επάγεται από την p.

Αρκεί ν.δ.ο. ο q είναι ισομορφισμός χώρων.

Αφού $p_H q$ ισομορφισμός $\Rightarrow q$, 1-1.

Επίσης, το $\hat{U}_i$ ορίστηκε ως $q(\tilde{U}_i)$, άρα q. επί

Επίσης, q συνεχής (Ιδιότητα τοπολογίας πηλίκου).

Εν τέλει, q ανοιχτή, επειδή $q(\tilde{V}_K) = \hat{V}_K$, $\forall$ βασικό ανοιχτό, άρα και $\forall$ βασ. αν υποσύνολο του $\tilde{U}_i$.

<u>Ισχυρισμός 4</u>: $(p_H)_*\left(\pi_1(x_H, a_H)\right) = H$.

Πράγματι: $(\supseteq)$ Έστω $[\gamma] \in H$. Τότε, $[\gamma] \sim [\varepsilon_\alpha] = \tilde{\alpha}$

(Αφού $\gamma(1) = \alpha$, γιατί $[\gamma] \in H < G = \pi_1(X, \alpha)$ και $\varepsilon_\alpha(1) = \alpha$, γιατί $\varepsilon_\alpha(t) = \alpha$, $\forall t$. Επίσης, $[\gamma \bar{\varepsilon}_a] = [\gamma] \cdot [\varepsilon_\alpha]^{-1} = [\gamma] \in H$)

Δηλαδή,

$$\begin{array}{ccc} \langle \gamma \rangle & = & \langle \varepsilon_a \rangle \\ \parallel & & \parallel \\ q([\gamma]) & & q(\tilde{\alpha}) = \alpha_H \end{array}$$

Θεωρώ πάλι την ανύψωση $\tilde{\gamma} : (t \mapsto [\gamma_t])$, με $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma_1] = [\gamma]$.

Άρα, $q \circ \tilde{\gamma}$ είναι κλειστό τόξο στο α_H.

Δηλαδή, $[q \circ \tilde{\gamma}] \in \pi_1(X_H, \alpha_H)$.

Επίσης, $(p_H)_*([q\circ\tilde{\gamma}]) = [p_H q\circ\tilde{\gamma}] = [p\cdot\tilde{\gamma}] = [\gamma]$.

Όμως γ τυχαίο $\Rightarrow H \subset \operatorname{Im}((p_H)_*)$

($\subseteq$) Έστω $[\xi] \in \pi_1(X_H, \alpha_H)$. Ορίζω $\gamma := p_H \circ \xi$.

Θεωρώ πάλι την $\tilde{\gamma}$ (με $t \mapsto [\gamma_t]$).

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X},\tilde{\alpha}) \arrow[d, "q"] \\ (I,0) \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & (X_H, \alpha_H) \arrow[d, "p_H"] \\ & (X,\alpha) \end{tikzcd}$$

Υπολογίζω, $p_H(\alpha\tilde{\gamma}) = (p_H q)\tilde{\gamma} =$

$= p\tilde{\gamma} = \gamma$.

Ο Ισχυρισμός 3 μας δίνει ότι, έχω μοναδική ανύψωση $\hat{\gamma}$ της γ, που ξεκινά από το α_H.

Άρα, $\hat{\gamma} = q\tilde{\gamma}$ (βλ. προηγούμενο υπολογισμό).

Αλλά, και $\hat{\gamma} = \xi$, (εξ' ορισμού του γ).

Δηλαδή, $\xi = q\tilde{\gamma}$. Άρα, $\xi(1) = q\tilde{\gamma}(1)$.

Όμως, ξέρω ότι, $\xi(1) = \alpha_H = q(\tilde{\alpha})$.

Άρα, $\underset{\langle\gamma\rangle}{\underset{\parallel}{q([\gamma])}} = q\tilde{\gamma}(1) = q(\tilde{\alpha}) = \underset{\langle\varepsilon_\alpha\rangle}{\underset{\parallel}{q[\varepsilon_\alpha]}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle\gamma\rangle = \langle\varepsilon_\alpha\rangle \Rightarrow [\gamma] \sim [\varepsilon_\alpha] \Rightarrow [\gamma\bar{\varepsilon}_\alpha] \in H \Rightarrow [\gamma] \in H$.

Όμως, $[\gamma] = (p_H)_*[\xi]$ και ξ τυχαίο.

Περίληψη

Το λήμμα 1, μας λέει ότι ο $(\hat{X},\hat{p}) \longmapsto \operatorname{Im}\hat{p}_* \equiv H$, είναι επί. Το λήμμα 2 (παρακάτω) θα μας πεί ότι αυτή η απεικόνιση είναι 1-1, έως βασισμένου ισομορφισμού $/X$.

Λήμμα 2

Δεδομένων $\hat{p}:(\hat{X},\hat{\alpha}) \to (X,\alpha)$ και $\check{p}:(\check{X},\check{\alpha}) \to (X,\alpha)$, δύο Κ.Τ.Σ., Ε.Χ. του X, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(a) $(\hat{X},\hat{p},\hat{\alpha}) \cong (\check{X},\check{p},\check{\alpha})$ (ως βασισμένοι χώροι $/X$).

(b) Οι υποομάδες, $\operatorname{Im}\hat{p}_*$, $\operatorname{Im}\check{p}_*$ της G, ταυτίζονται.

Απόδειξη (του λήμματος 2)

(a) ⇒ (b) : (Πολύ εύκολο).

Έστω $q:(\hat{X},\hat{p},\hat{\alpha}) \xrightarrow{\cong} (\check{X},\check{p},\check{\alpha})$.

Δηλαδή έχω

$$\begin{tikzcd} (\hat{X},\hat{\alpha}) \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\hat{p}"'] & & (\check{X},\check{\alpha}) \arrow[dl, "\check{p}"] \\ & (X,\alpha) & \end{tikzcd}$$

, μεταθετικό.

Δηλαδή, $\check{p}q = \hat{p} \Rightarrow (\check{p})_* q_* = (\hat{p})_* \Rightarrow \operatorname{Im}\hat{p}_* \subset \operatorname{Im}\check{p}_*$.

Λόγω συμμετρίας, έχουμε, και την άλλη ανισότητα.

(b) ⇒ (a) : (Ουσιώδες μέρος).

Έστω $(Y, f, b) := (\check{X}, \check{p}, \check{\alpha})$.

Έστω $(\tilde{X}, \tilde{p}, \tilde{\alpha}) := (\hat{X}, \hat{p}, \hat{\alpha})$.

Απο το κριτήριο ανύψωσης, υπάρχει $\tilde{f}$, όπως στο παρακάτω διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{\alpha}) \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ (Y, b) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, \alpha) \end{tikzcd}$$

(Επειδή, $f_* \pi_1(X, b) \subset H = \mathrm{Im}\, \tilde{p}_*$, και μάλιστα ισούνται).

Δηλαδή, $\tilde{f} : (\check{X}, \check{p}, \check{\alpha}) \longrightarrow (\hat{X}, \hat{p}, \hat{\alpha})$

Εναλλάσσω τους ρόλους των ν και λ και βρίσκω,

$$\tilde{g} : (\hat{X}, \hat{p}, \hat{\alpha}) \longrightarrow (\check{X}, \check{p}, \check{\alpha}).$$

Λόγω μοναδικότητας ανυψώσεων, θα πρέπει οι $\tilde{g}\tilde{f}$, $\tilde{f}\tilde{g}$ να ισούνται με τις αντίστοιχες ταυτοτικές.

Δηλαδή, $\tilde{g} = (\tilde{f})^{-1} \Rightarrow \tilde{f}$ ισομορφισμός.

Απόδειξη (του Θεωρήματος κατάταξης)

Απομένει μόνον, να θεωρήσουμε, τους ελεύθερους (όχι βασισμένους) μορφισμούς.

Εάν $\tilde{p} : (\tilde{X}, \alpha_0) \to (X, \alpha)$ είναι Κ.Τ.Σ., Ε.Χ. (όχι κατ' ανάγκην ο καθολικός).

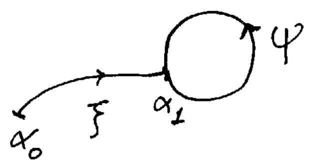
Έστω $\alpha_1 \in \tilde{X}$ με $p(\alpha_1) = \alpha$.

Εάν ξ τόξο, $\xi(0) = \alpha_0$, $\xi(1) = \alpha_1$ (αφού $\tilde{X}$ Κ.Τ.Σ.), τότε, $\gamma := p\xi$ κλειστό. Άρα, $g := [\gamma] \in G = \pi_1(X, \alpha)$.

Εαν $[\psi] \in \pi_1(\tilde{X}, \alpha_1)$, προφανώς $[\xi\psi\bar{\xi}] \in \pi_1(X, \alpha_0)$.

Άρα: $p_*[\xi\psi\bar{\xi}] = [p\circ(\xi\psi\bar{\xi})] = [(p\circ\xi)\cdot(p\circ\psi)\cdot(\overline{p\circ\xi})] =$

$= [\gamma]\, p_*[\psi]\, [\gamma]^{-1} \in g H_1 g^{-1}$,



όπου $H_\kappa := p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \alpha_\kappa)\right)$, $\kappa = 0, 1$.

Όμως, κάθε $[\varphi] \in \pi_1(X, \alpha_0)$ γράφεται ως $[\xi\psi\bar{\xi}]$, (όπου $[\xi\psi\bar{\xi}] = \hat{\xi}[\psi]$), αφού ξέρω, ότι ο $\hat{\xi}$ είναι ισομορφισμός, άρα επί. Δηλαδή, $H_0 \subset g H_1 g^{-1}$.

Με ένα συμμετρικό επιχείρημα, εναλλάσοντας τους ρόλους $0 \leftrightarrow 1$ και $g \leftrightarrow g^{-1}$, δείχνουμε ότι $H_1 \subset g^{-1} H_0 g \Rightarrow$ $\Rightarrow g H_1 g^{-1} \subset H_0$. Άρα, οι H_0, H_1 είναι συζυγείς.

Ισχυρισμός: (ολοκληρώνει την απόδειξη).

Εαν H_0, H_1 συζυγείς $< G$, τότε $\exists$ Ε.Χ. $p: \tilde{X} \to X$, και $\alpha_0, \alpha_1 \in \tilde{X}$, με, $p_*\left(\pi_1(X, \alpha_\kappa)\right) = H_\kappa$, $\kappa = 1, 2$.

Πράγματι, όπως στο λήμμα 1, θέτω $H := H_0$, $\tilde{X} := X_H$, $\alpha_0 := \alpha_H$.

Αφού H_0, H_1 συζυγείς $\Rightarrow \exists\, g \in G$, με. $H_0 = g H_1 g^{-1}$.

$G = \pi_1(X, \alpha) \longrightarrow g = [\gamma]$, με γ κλειστό τόξο στο α.

Αννψώνω το γ σε $\tilde{\gamma}$, με $\tilde{\gamma}(0) = \alpha_0$.

Έστω $\alpha_1 := \tilde{\gamma}(1)$. Άρα $\alpha_1 \in p^{-1}(\alpha)$ και $\xi := \tilde{\gamma}$, τόξο απο το α_0 στο α_1. Όπως πρίν, $p_*(\pi_1(X, \alpha_0)) = g\, p_*(\pi_1(X, \alpha_1))\, g^{-1}$.

Πόρισμα 1

Ο καθολικός Ε.Χ. ενός Κ.Τ.Σ., Τ.Κ.Τ.Σ, Η.Τ.Α.Σ., χώρου X (όχι μόνον υπάρχει, όπως ήδη ξέρω, αλλά και) είναι μοναδικός έως μοναδικού βασισμένου ισομορφισμού. (Εξ' ον και "ο" καθολικός)

Απόδειξη

Η μοναδικότητα, εως βασισμένου ισομορφισμού, έπεται απο το Θεώρημα κατάταξης, αφού $\tilde{X}$ καθολικός $\Leftrightarrow$ $\tilde{X}$ Κ.Τ.Σ. και $\pi_1(\tilde{X}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{X}$ Κ.Τ.Σ. και $H = 0$, η μοναδική υποομάδα.

Το ότι ο ισομορφισμός είναι μοναδικός, ισχύει απο την μοναδικότητα αννψώσεων.

(Καθολικός $\Rightarrow$ Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow$ Συνεκτικός).

Πόρισμα 2

Για κάθε Κ.Τ.Σ., Ε.Χ. $\hat{X} \to X$, υπάρχει καθολικός $\tilde{X} \to X$, που απεικονίζεται $/X$, στον $\hat{X}$. (Δηλαδή, "ο καθολικός τους επικαλύπτει όλους").

<u>Απόδειξη</u>

Απο το κριτήριο ανύψωσης.

Υπάρχει $O < H$, $\forall H$

$$\begin{tikzcd} & \hat{X} \arrow[d, "H"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\longmapsto O"'] & X \end{tikzcd}$$

<u>Σχόλιο</u>

Υπάρχει (μερική) διάταξη των κλάσεων συζυγίας, στις κλάσεις συζυγίας υποομάδων $[H]$, της G.

$$[H_1] \leqslant [H_2] \overset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \exists\, g \in G : g H_1 g^{-1} < H_2$$ (H_1 subconjugate της H_2).

Παρόμοια, δείχνουμε ότι, [δεδομένου Ε.Χ. "τύπου H_2" επικαλύπτεται απο Ε.Χ. "τύπου H_1"] $\Leftrightarrow [H_1] \leqslant [H_2]$.

Δράσεις

<u>Ορισμός</u>

Θεωρώ δεδομένα, μια ομάδα G, ένα σύνολο F και έναν κανόνα, που αντιστοιχεί ενα μοναδικό $\tau * \alpha \in F$, σε κάθε $\tau \in G$, $\alpha \in F$.

Εαν ισχύουν : (α) $e * \alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in F$ $(e = id_G)$

και (b) $(\tau_1 \tau_2) * \alpha = \tau_1 * (\tau_2 * \alpha)$, $\forall \alpha \in F$, $\tau_1, \tau_2 \in G$

τότε λέω ότι, αυτός ο κανόνας είναι <u>δράση της G στο F</u>, η G δρα στο σύνολο F και ότι το F (με την δεδομένη δράση) είναι <u>G-σύνολο.</u>

Εαν X χώρος και η G δρά στο σύνολο X, με τέτοιο τρόπο, που για $\tau \in G$ σταθερό, η συνάρτηση $\begin{array}{l} X \longrightarrow X \\ \alpha \longmapsto \tau * \alpha \end{array}$, είναι συνεχής, τότε λέω ότι, η <u>G δρά στον χώρο X</u>, και ότι ο **X** (με την δεδομένη δράση) είναι <u>G-χώρος.</u>

<u>Σχόλιο</u>

Μια <u>αναπαράσταση</u> p της <u>ομάδας</u> G, στην ομάδα G', είναι απλώς ένας μορφισμός ομάδων $p: G \to G'$.

Μια δράση της G στο σύνολο X, δίνει αναπαράσταση $p: G \to S_X$, όπου S_X η συμμετρική ομάδα του X, δηλαδή η ομάδα των ισομορφισμών συνόλων $X \to X$, με πράξη την σύνθεση. (Εαν $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, τότε, $S_X = S_n$).

Το $p(\tau) = \hat{\tau}$, όπου $\hat{\tau}: \begin{array}{l} X \xrightarrow{\cong} X \\ \alpha \longmapsto \tau * \alpha \end{array}$.

Εάν X χώρος, η δράση, είναι δράση χώρων $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow p(G) \subset \mathrm{Homeo}(X)$, όπου $\mathrm{Homeo}(X)$ = ομάδα των ισομορφισμών χώρων $X \xrightarrow{\cong} X$. (Άρα, $\mathrm{Homeo}(X) < S_X$).

Αντιστρόφως, μια $p: G \to S_X$, δίνει δράση με τον ίδιο τύπο, $\tau * \alpha = \hat{\tau}(\alpha)$, όπου $\hat{\tau} = p(\tau)$.

Αυτές οι αντιστοιχήσεις είναι αντίστροφες.

Για G, X σταθερά, $\exists$ αμφιμονοσήμαντη, (αντιστρέψιμη) απεικόνιση

$$\{G\text{-δράσεις στο } X\} \longleftrightarrow \{p : G \to S_X\}$$

(παρόμοια για χώρους).

Ειδικότερα, παίρνοντας $p =$ ταυτοτική, έχω την κανονική δράση της S_X στο X, με τύπο $\tau * \alpha = \tau(\alpha)$.

(Παρομοίως, υπάρχει, η κανονική δράση του $Homeo(X)$ στον χώρο X).

Ορισμός

Έστω $\tilde{X}$ ένας Ε.Χ. του X. Ένας ισομορφισμός χώρων, $T : \tilde{X} \to \tilde{X}$, λέγεται <u>επικαλυπτικός μετασχηματισμός.</u>

Το σύνολο, όλων αυτών, συμβολίζεται με $G(\tilde{X})$.

Προφανώς, (α) Η $G(\tilde{X})$ ομάδα με πράξη την σύνθεση

και (b) Η $G(\tilde{X})$ δρα στον χώρο X.

Ορισμός

Εαν G ομάδα και F ένα G-σύνολο, τότε η δράση της G στο F λέγεται <u>ελεύθερη δράση</u>, όταν $\alpha \in F$, $\sigma \in G$ και $[\sigma * \alpha = \alpha \Rightarrow \sigma = \text{ταυτοτικό}]$.

Η δράση λέγεται, μεταβατική δράση, όταν $\alpha, b \in F \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \sigma \in G$, με $\sigma * \alpha = b$.

Ασκήσεις

(1) Βρείτε τις υποομάδες της S_3, που δρούν ελεύθερα, στο $\{1,2,3\}$.

(2) Όμοια, για το "δρουν μεταβατικά"
(Εννοείται, ως πρός, την κανονική δράση).

Παρατήρηση

Εαν $T \in G(\tilde{X}) \Rightarrow T$ είναι $/X \Rightarrow T$ διατηρεί τα νήματα $X_\alpha := p^{-1}(\alpha)$, $\forall \alpha \in X$, δηλαδή ο T, περιορίζεται σε απεικόνιση $\tilde{X}_\alpha \to \tilde{X}_\alpha$, δηλαδή η $G(\tilde{X})$ δρά στο $\tilde{X}_\alpha$

Θεώρημα

Αυτή η δράση της $G(\tilde{X})$ στο $\tilde{X}_\alpha$ είναι ελεύθερη, αρκεί ο $\tilde{X}$ να είναι Κ.Τ.Σ.

Πόρισμα

Η δράση της $G(\tilde{X})$, σε όλο το $\tilde{X}$, είναι ελεύθερη

Απόδειξη (του Θεωρήματος)

Εαν $\tilde{\alpha} \in \tilde{X}_\alpha$ και $\tau(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$, τότε $\tau = I_{\tilde{X}}$, λόγω της μοναδικότητας ανυψώσεων και του ότι η τ ανυψώνει την p (Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι τ είναι $/X$).

Ορισμός

Ένας Ε.Χ. X, λέγεται κανονικός, εαν η δράση της $G(\tilde{X})$ σε κάθε νήμα, είναι, μεταβατική.

Παράδειγμα

Έστω $\tilde{X} = \mathbb{R}$, $X = S^1$, p συνήθης. Τότε, κάθε νήμα F, είναι της μορφής $\alpha + \mathbb{Z}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Επίσης, λόγω της ύπαρξης, και μοναδικότητας ανύψωσης, $G(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}$, μέσω της $n \longmapsto \tau_n$, όπου $\tau_n(\alpha) = \alpha + n$. Ειδικότερα, ο $\tilde{X}$, είναι κανονικός.

Άσκηση

Το ότι $G(\tilde{X}) \cong F$, ως σύνολα (βλ. παραπάνω), ισχύει σε κάθε ελεύθερη, μεταβατική δράση.

Θεώρημα

Έστω $p : (\tilde{X}, \alpha_0) \to (X, \alpha)$, Ε.Χ., όπου $\tilde{X}$ Κ.Τ.Σ. και X Κ.Τ.Σ., Τ.Κ.Τ.Σ.

Έστω ακόμα $H := p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \alpha_0)\right) < \pi_1(X, \alpha) := G$

Τότε, (α) Ο $\tilde{X}$ κανονικός Ε.Χ. του $X \Leftrightarrow H \triangleleft G$

και (b) $G(\tilde{X}) \cong N_H/_H$, όπου N_H, η κανονικοποιούσα ομάδα της H στην G.

($N_H := \{g \in G : gHg^{-1} < H\}$, η μεγαλύτερη υποομάδα της G, με $H \triangleleft N_H$ και $H \triangleleft G \Leftrightarrow N_H = G$).

Πόρισμα

Εαν ο $\tilde{X}$ κανονικός $\Rightarrow G(\tilde{X}) \cong G/H$

Πόρισμα (του πορίσματος)

Εαν $\tilde{X}$ καθολικός $\Rightarrow G(\tilde{X}) \cong \pi_1(\tilde{X})$

Απόδειξη (του Θεωρήματος)

(α) (⇒) Όπως είδαμε, εαν $\alpha_1 \in \tilde{X}_\alpha$, τότε $p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \alpha_1)\right) =$

$= [\gamma] H [\gamma]^{-1}$, όπου γ ανυψώνεται σε $\tilde{\gamma}$, απο το α_0 στο α_1. Αφού κάθε $[\gamma] \in \pi_1(X, \alpha_0)$ αντιστοιχεί σε κάποιο $\tilde{\gamma}$ (α_0 σταθερό, α_1 εξαρτάται απο το γ), εαν υποθέσω ότι ο $\tilde{X}$ κανονικός, έχω το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \alpha_0) \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "p_0"'] & & (\tilde{X}, \alpha_1) \arrow[dl, "p_1"] \\
& (X, \alpha) &
\end{tikzcd}$$

(Εδώ, $p_0 = p_1 = p$ ως μορφισμοί χώρων, αλλά $p_0 \neq p_1$, ως μορφισμοί Χ.Σ.Β.).

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή π_1, έχω πάλι, μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[rr, "T_*", "\cong"'] \arrow[dr, "(p_0)_*"'] & & {} \arrow[dl, "(p_1)_*"] \\ & {} & \end{tikzcd}$$

. Άρα, $Im(p_0)_* = Im(p_1)_*$, δηλαδή,

$H = [\gamma] H [\gamma]^{-1}$.

($\Leftarrow$) Εαν η H κανονική, εαν $\alpha_1 \in \tilde{X}_\alpha$, αφού $\tilde{X}$ Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\ \tilde{\gamma}$ τόξο απο το α_0 στο α_1. Όπως προηγουμένως,

$$\underset{\displaystyle H}{\underset{\shortparallel}{Im(p_0)_*}} \subset \underset{\displaystyle [\gamma]H[\gamma]^{-1}}{\underset{\shortparallel}{Im(p_1)_*}}$$

(μάλιστα ισούνται, $\gamma = p\tilde{\gamma}$).

Εφαρμόζω την ύπαρξη ανύψωσης, και παίρνω

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \alpha_1) \arrow[d, "p_1"] \\ (\tilde{X}, \alpha_0) \arrow[ur, dashed, "T"] \arrow[r, "p_0"'] & (X, \alpha) \end{tikzcd}$$

Για τον ίδιο λόγο, υπάρχει $\bar{T} : (\tilde{X}, \alpha_1) \to (\tilde{X}, \alpha_0)$, $/X$.

Απο μοναδικότητα της ανύψωσης $\Rightarrow T\bar{T}, \bar{T}T$ = ταυτοτικές $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{T} = T^{-1} \Rightarrow T$ ισομορφισμός $\Rightarrow T \in G(\tilde{X})$.

Όμως α_0, α_1 τυχαία $\Rightarrow \tilde{X}$ κανονικός.

(b) Όπως στην προηγούμενη παράγραφο, εαν $[\gamma]H[\gamma]^{-1} = H$, τότε ορίζεται $T:(X,\alpha_0) \to (X,\alpha_1)$, με $T \in G(\tilde{X})$, όπου το γ ανυψώνεται σε τόξο, απο το α_0, στο α_1.

Δηλαδή, ορίζεται η $\varphi : N_H \to G(\tilde{X})$, με $\varphi([\gamma]) = T$

Ισχυρισμός 1: Η φ είναι καλώς ορισμένη.

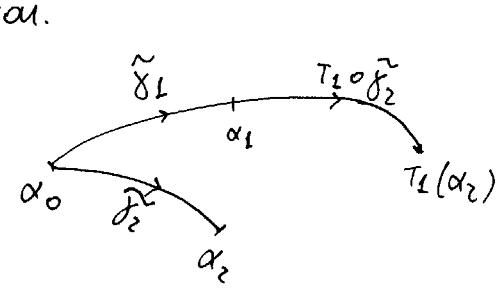
Πράγματι, εαν $[\gamma]=[\delta] \Rightarrow \gamma \simeq_T \delta \Rightarrow \tilde{\gamma} \simeq_T \tilde{\delta} \Rightarrow$ έχουν κοινά άκρα. Άρα, εαν $T=\varphi[\gamma]$, $\sigma = \varphi[\delta]$, τότε $T(\alpha_0) = \sigma(\alpha_0) = \alpha_1$

Τότε $T=\sigma$. (Γιατί, ελεύθερη δράση $\Rightarrow T^{-1}\sigma(\alpha_0) = \alpha_0 \Rightarrow T^{-1}\sigma =$ ταυτοτική $\Rightarrow T = \sigma$)

Ισχυρισμός 2: Ο φ ομομορφισμός ομάδων

Πράγματι, έστω $\varphi[\gamma_1] = T_1$ και $\varphi[\gamma_2] = T_2$.

Παρατηρώ οτι το $\tilde{\gamma}_1 \cdot (T_1 \circ \tilde{\gamma}_2)$ ορίζεται.



Έτσι, $p(\tilde{\gamma}_1 \cdot T_1 \circ \tilde{\gamma}_2) = (p\tilde{\gamma}_1) \cdot (p\,T\,\tilde{\gamma}_2^{-1}) \overset{\circledast}{=}$

$\overset{\circledast}{=} (p\tilde{\gamma}_1)\cdot(p\tilde{\gamma}_2) = \gamma_1\gamma_2$

$(T_1(\alpha_0) = \alpha_1,\ T_2(\alpha_0) = \alpha_2)$

($\circledast$: Επειδή, $T/X \Rightarrow p \circ T = p$)

Δηλαδή, αν $\varphi([\gamma_1][\gamma_2]) =: T$ τότε $T(\alpha_0) = T_1(\alpha_2) = T_1T_2(\alpha_0) \xrightarrow[\text{δράση}]{\text{ελεύθερη}}$

$\Rightarrow \quad T = T_1 \cdot T_2$.

<u>Ισχυρισμός 3:</u> $Ker(\varphi) = H$.

Πράγματι, $T = \varphi[\gamma]$ = ταυτοτική του $\tilde{X}$ (= ταυτοτικό του $G(\tilde{X})$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $T(\alpha_0) = \alpha_0$ (ελευθερία της δράσης) $\Leftrightarrow$ $\tilde{\gamma}$ κλειστό τόξο $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $[\gamma] \in H$.

<u>Ισχυρισμός 4:</u> $Im\varphi = G(\tilde{X})$ (ο φ επιμορφισμός ομάδων).

Πράγματι, έστω $T \in G(\tilde{X})$. Θέτω $\alpha_1 := T(\alpha_0)$.

Βρίσκω $\tilde{\gamma}$, από το α_0, στο α_1.

Θέτω $\gamma = p\tilde{\gamma}$ και υπολογίζω ότι $[\gamma]H[\gamma]^{-1} = H$ (όπως στην απόδειξη του (α)).

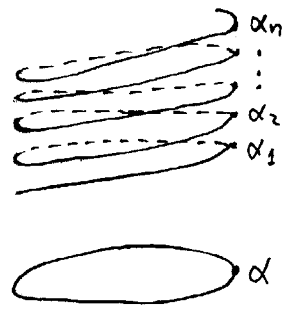
Δηλαδή, $[\gamma] \in N_H$. Εκ κατασκευής, $\varphi[\gamma] = T$.

Έτσι τελικά, από το 1º Θεώρημα ισομορφισμών ομάδων $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Im\varphi \cong N_H / Ker\varphi$$

<u>Παράδειγμα</u>

(Κατάταξη και μελέτη των n-πτυχων Κ.Τ.Σ., Ε.Χ. του S^1)



Κατ' αρχας $X = S^1 = \hat{X}$ και $p(z) = z^n$

(Υπάρχει τουλάχιστον ένας)

Με $H < G := \pi_1(X, a)$, ως συνήθως, ταυτίζω $G \cong \mathbb{Z}$, με την συνήθη ταύτιση (βλ. φ).

Η H = υποομάδα του $\mathbb{Z} \Rightarrow H = \kappa \cdot \mathbb{Z}$

Όμως, $n = [G : H] = [\mathbb{Z} : \kappa \cdot \mathbb{Z}] = \kappa$.

Άρα, η H είναι μοναδική, και από την "αντιστοιχία Galois" (για Ε.Χ.), κάθε άλλος $\hat{X}$ είναι ισόμορφος $/X$, με αυτόν που κατασκεύασα.

Η $\mathbb{Z}$ αβελιανή $\Rightarrow$ Η κανονική $\Rightarrow$ $\hat{X}$ κανονικός $\Rightarrow G(\hat{X}) \cong \mathbb{Z}/_{n \cdot \mathbb{Z}}$.

Ανατρέχοντας στην απόδειξη, βλέπω ότι $G(\hat{X}) \cong \langle (1\,2\,3 \cdots n) \rangle < S_n$ όπου $\tau \in G(\hat{X})$, αντιστοιχεί, σε κάποια κυκλική μετάθεση του $1, 2, \ldots, n \Leftrightarrow$ περιορίζεται στην αντίστοιχη κυκλική μετάθεση, των $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

$\boxed{G\text{-σύνολα}}$

Περίληψη

Εισάγουμε τις κατηγορίες των G-συνόλων, των G-χώρων, και περιγράφουμε τον $\tilde{X}$, έως ισομορφισμού, G-χώρων.

Ομολογιακή Άλγεβρα — Διάλεξη της 15 Μαρτίου 2005

Κατηγορίες, Αντικείμενα, και Μορφισμοί

Για να γίνει πιο εύκολη η πρώτη σας ανάγνωση του παρακάτω ορισμού, να σκέφτεστε ότι 'αντικείμενο' σημαίνει 'σύνολο' και 'μορφισμός' σημαίνει 'συνάρτηση'.

Ορισμός: Μια *κατηγορία* $\mathcal{C}$ αποτελείται από τα παρακάτω τρία μέρη:

- Μια κλάση, τη λεγόμενη *κλάση των αντικειμένων* της $\mathcal{C}$, της οποίας τα στοιχεία θα συμβολίζουμε συχνά με $A, B, C, D, \ldots$
- Για κάθε ζεύγος αντικειμένων A, B της $\mathcal{C}$, ένα σύνολο $\mathcal{C}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, το λεγόμενο *σύνολο των μορφισμών από το A στο B*. Αν α είναι κάποιο στοιχείο του $\mathcal{C}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, γράφουμε '$\alpha : A \to B$ στην $\mathcal{C}$', ή και '$A \xrightarrow{\alpha} B$ στην $\mathcal{C}$'.
- Μια πράξη, την *σύνθεση μορφισμών*, που σε κάθε ζεύγος μορφισμών $A \xrightarrow{\alpha} B, B \xrightarrow{\beta} C$ στην $\mathcal{C}$, αντιστοιχίζει την λεγόμενη *σύνθεση* $\beta \circ \alpha : A \to C$.

Απαιτούμε από την σύνθεση την προσεταιριστικότητα και την ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου, δηλαδή τις παρακάτω δύο ιδιότητες:

- Για κάθε τριάδα μορφισμών $A \xrightarrow{\alpha} B, B \xrightarrow{\beta} C, C \xrightarrow{\gamma} D$ στην $\mathcal{C}$, ισχύει $(\gamma\circ\beta)\circ\alpha = \gamma\circ(\beta\circ\alpha)$.
- Για κάθε αντικείμενο A της $\mathcal{C}$, υπάρχει *ταυτοτικός μορφισμός του A*, δηλαδή κάποιος μορφισμός $I_A : A \to A$ στην $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $\alpha \circ I_A = \alpha$ για κάθε $\alpha : A \to B$ στην $\mathcal{C}$ και $I_A \circ \beta = \beta$ για κάθε $\beta : B \to A$ στην $\mathcal{C}$.

Παραδείγματα:

1. Η κατηγορία των συνόλων.

- Αντικείμενα: τα σύνολα.
- Μορφισμοί από το A στο B: οι συναρτήσεις από το A στο B.
- Σύνθεση: η συνήθης σύνθεση συναρτήσεων.

Για να βεβαιωθούμε ότι περιγράψαμε μια κατηγορία, πρέπει να ελέγξουμε την προσεταιριστικότητα και την ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου. Αυτές είναι γνωστές ιδιότητες της σύνθεσης συναρτήσεων, αναφέρουμε μόνο ότι η ταυτοτική συνάρτηση από το A στο A (που είναι ο ζητούμενος μορφισμός I_A) δίνεται από την ισότητα $I_A(a) = a$ (για κάθε a στο A). Την κατηγορία των συνόλων θα την συμβολίζουμε με $\mathcal{E}$.

2. Η κατηγορία των αβελιανών ομάδων.

- Αντικείμενα: οι αβελιανές ομάδες. Ως συνήθως, αν A είναι μια αβελιανή ομάδα, συμβολίζουμε ξανά με A το σύνολο των στοιχείων της. Συνήθως την πράξη της A θα την συμβολίζουμε 'προσθετικά'. Έτσι, για $a, b \in A$, έχουμε $a + b \in A$, και $a + 0 = a$.

- Μορφισμοί από το A στο B: οι ομομορφισμοί από το A στο B, δηλαδή οι συναρτήσεις $\alpha : A \to B$ που 'διατηρούν αθροίσματα' δηλαδή έχουν την ιδιότητα ότι $\alpha(a_1 + a_2) = \alpha(a_1) + \alpha(a_2)$ για κάθε a_1, a_2 στο A.

- Σύνθεση: η συνήθης σύνθεση συναρτήσεων. Εδώ χρησιμοποιούμε το ότι η συνάρτηση $\beta \circ \alpha$ διατηρεί αθροίσματα αρκεί οι συναρτήσεις β και α να διατηρούν και αυτές αθροίσματα.

Ελέγχουμε την προσεταιριστικότητα και την ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου: Η προσεταιριστικότητα ανάγεται ξανά στην προσεταιριστικότητα της σύνθεσης συναρτήσεων. Για την ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου χρησιμοποιούμε το ότι η ταυτοτική συνάρτηση από του A είναι ομομορφισμός, αν το A είναι αβελιανή ομάδα. Την κατηγορία των αβελιανών ομάδων θα την συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$.

3. Η κατηγορία των 'χώρων πεπερασμένης διάστασης'.

- Αντικείμενα: τα υποσύνολα κάποιου $\mathbb{R}^n$.

- Μορφισμοί από το A στο B: οι συνεχείς συναρτήσεις $\alpha : A \to B$ δηλαδή οι συναρτήσεις $\alpha : A \to B$ που 'διατηρούν όρια' δηλαδή έχουν την ιδιότητα ότι $\alpha(\lim a_n) = \lim \alpha(a_n)$ για κάθε ακολουθία a_n στο A που συγκλίνει σε κάποιο $\lim a_n \in A$.

- Σύνθεση: η συνήθης σύνθεση συναρτήσεων. Εδώ χρησιμοποιούμε το ότι η συνάρτηση $\beta \circ \alpha$ διατηρεί όρια αρκεί οι συναρτήσεις β και α να διατηρούν και αυτές όρια.

Ελέγχουμε την προσεταιριστικότητα και την ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου: Η προσεταιριστικότητα ανάγεται ξανά στην προσεταιριστικότητα της σύνθεσης συναρτήσεων. Για την ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου χρησιμοποιούμε το ότι η ταυτοτική συνάρτηση του A είναι συνεχής, αν το A είναι υποσύνολο κάποιου $\mathbb{R}^n$. Αυτή την κατηγορία θα την συμβολίζουμε με $\mathcal{T}$.

Ορισμός: Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $i : A \to B$, $r : B \to A$ δύο μορφισμοί στην $\mathcal{C}$. Αν $r \circ i = I_A$, τότε λέμε ότι ο μορφισμός i είναι *τομή* (section) για τον r και ο μορφισμός r είναι *απόσυρση* (retraction) για τον i.

Άσκηση 1: (Μοναδικότητα του Ταυτοτικού Μορφισμού) Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $I_A : A \to A$, $J_A : A \to A$ δύο μορφισμοί στην $\mathcal{C}$. Να αποδείξετε ότι αν οι I_A, J_A είναι ταυτοτικοί μορφισμοί του A τότε $I_A = J_A$.

Απόδειξη: Αφού ο I_A είναι ταυτοτικός, $I_A \circ J_A = J_A$. Αφού ο J_A είναι ταυτοτικός, $I_A \circ J_A = I_A$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Ορισμός

Έστω G ομάδα και F_1, F_2 G-σύνολα.

Ένας μορφισμός συνόλων $f: F_1 \to F_2$, λέγεται μορφισμός G-συνόλων (G-equivariant), εαν διατηρεί τις δράσεις, δηλαδή, εαν

$$f(\tau * \alpha) = \tau * f(\alpha), \quad \forall \tau \in G, \forall \alpha \in F_1.$$

Εύκολα δείχνουμε ότι έχουμε κατηγορία $\mathcal{E}_G$, των G-συνόλων και G-μορφισμών.

Εαν f ισομορφισμός συνόλων, και η f^{-1} διατηρεί την δράση τότε η f είναι ισομορφισμός στην $\mathcal{E}_G$.

Λεω ότι f ισομορφισμός G-συνόλων και γράφω $F_1 \cong F_2$ (ως G-σύνολα). Λέω επίσης ότι τα G-σύνολα F_1, F_2 είναι ισόμορφα.

Υπάρχουν προφανείς γενικεύσεις σε G-χώρους (κατηγορία $\mathcal{T}_G$)

Π.Χ.

$G = \mathbb{Z}$, $F_1 = \mathbb{R}$ και $n * \alpha = \alpha$ (τετριμμένη δράση, υπάρχει $\forall G, \forall F$).

$F_2 = \mathbb{R}$ και $n * \alpha = (-1)^n \alpha$.

Τότε F_1, F_2 ισόμορφα (για την ακρίβεια ίσα) ως σύνολα, αλλά δεν είναι ισόμορφα ως G-σύνολα.

Παραδείγματα

(1) Η ένθεση $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}_G$ (όπου $\mathcal{E}$ = κατηγορία των συνόλων),

με $\begin{matrix} F \longmapsto F \\ f \longmapsto f \end{matrix}$ (τετριμμένη δράση), είναι συναρτητής.

(2) Έστω F_1, F_2, G-σύνολα.

Ορίζω G-σύνολο $F_1 \times F_2$, με $\tau * (\alpha, b) := (\tau * \alpha, \tau * b)$.

Έχω τις προβολές $F_1 \times F_2 \to F_\kappa$, $\kappa = 1, 2$, οι οποίες είναι μορφισμοί G-συνόλων.

Εαν ορίσω $p : \mathcal{E}_G \to \mathcal{E}_G$, με $p(F) = F \times F$ και $f_*(\alpha, b) = (f(\alpha), f(b))$

Τότε, οι προβολές, είναι μορφισμοί συναρτητών $p \to I_{\mathcal{E}_G}$.

Δηλαδή, $\forall f : F_1 \to F_2$, έχω το διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd} F_1 \times F_1 \arrow[r, "p(f) = f_*"] \arrow[d, "p_\kappa"] & F_2 \times F_2 \arrow[d, "p_\kappa"] \\ F_1 \arrow[r, "f = I(f)"] & F_2 \end{tikzcd}$$

, $\kappa = 1$ ή 2, σταθερό.

(3) Θεωρώ (καταχρηστικά) G, ως G-σύνολο, με $\tau * \alpha := \tau\alpha$.

Τότε, αν F_2 G-σύνολο και F_1 σύνολο, έχουμε ότι,

$$\begin{matrix} \mathcal{E}(F_1, F_2) \cong \mathcal{E}_G(G \times F_1, F_2) \\ f \longmapsto \hat{f} \end{matrix}$$

, όπου $\hat{f}(\tau, \alpha) := \tau * f(\alpha)$. (Άσκηση).

Παρατηρώ, ότι το παράδειγμα (3), γενικεύεται και σε χώρους.

Δηλαδή, $T(X_1, X_2) \cong T_G(G \times X_1, X_2)$

Ανάγεται στο ότι $\hat{f}$ συνεχής $\Leftrightarrow$ f συνεχής

και στο ότι $\hat{f}$ ανοιχτή $\Leftrightarrow$ f ανοιχτή.

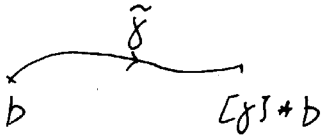
Setup

Έστω X Κ.Τ.Σ., Τ.Κ.Τ.Σ., Η.Τ.Α.Σ. (δηλαδή X "καλός").

Τότε, έχω τον καθολικό Ε.Χ., $p: \tilde{X} \to X$, όπως κατασκευάστηκε προηγουμένως.

Έστω $\alpha \in X$, σταθερό, και $G = \pi_1(X, \alpha)$.

Ταυτίζω, το G με την $G(\tilde{X})$, όπως πριν.

(Δηλαδή, 

)

Λήμμα 1

$[\gamma]*[\delta] = [\gamma \cdot \delta]$, όπου $[\gamma] \in G = \tilde{X}_\alpha$ και $[\delta] \in \tilde{X}$.

Απόδειξη

Θα δοθεί στην συνέχεια

Setup (συνέχεια)

Έστω $\mathbb{B}$ = βάση τοπολογίας του X, όπως στην κατασκευή, του $\tilde{X}$.

Έστω $U \in \mathbb{B}$.

Θέτω $\tilde{U} := p^{-1}(U)$.

Άρα, $\tilde{U} := \bigcup \tilde{U}_{[\delta]}$ (ξένη ένωση).

Έστω $b \in U$ σταθερό, και $\alpha \xrightarrow{\delta} b$ (σταθερό), στον X.

Επίσης, διαλέγω, για κάθε $c \in U$, τόξο $b \xrightarrow{h_c} c$, στην U.

Θυμηθείτε ότι $\tilde{U}_{[\delta]} = \{ [\delta h_c] : c \in U \}$

Επίσης, $p^{-1} : U \xrightarrow{\cong} \tilde{U}_{[\delta]}$

$$c \longmapsto [\delta h_c]$$

Έστω $f : U \xrightarrow{p^{-1}} \tilde{U}_{[\delta]} \hookrightarrow U$

Θυμηθείτε την $\hat{f} : G \times U \to \tilde{U}$

Λήμμα ?

Η $\hat{f}$ είναι ισομορφισμός G-χώρων

Απόδειξη

Θα δοθεί στην συνέχεια.

$$\boxed{\text{Τροχιές (Μέρος I)}}$$

Περίληψη

Εισάγουμε, για Y, G-χώρο, τον τροχιακό χώρο Y/G.

Δείχνουμε ότι $Y \cong \tilde{X} \Rightarrow Y/G \cong X$

(Στο μέρος II, θα βρούμε συνθήκες, για το αντίστροφο).

Ορισμός

Εαν η G δρά στο σύνολο F, και $\alpha \in F$, ορίζεται η τροχιά του α, ως $G\alpha := \{\tau * \alpha : \tau \in G\}$.

Το σύνολο των τροχιών, συμβολίζουμε, με $X/_G$.

(Άσκηση : Ν.δ.ο. η σχέση "τα $\alpha, b \in F$ ανήκουν στην ίδια τροχιά", είναι σχέση ισοδυναμίας, με κλάση του α, την $G\alpha$).

Πόρισμα (της άσκησης).

Το $X/_G$ είναι σύνολο-πηλίκο του X. (δηλαδή, υπάρχει, κανονική, επί, $q : X \to X/_G$, με $q(\alpha) = G\alpha$).

Ορισμός

Εαν X G-χώρος, ο τροχιακός χώρος $X/_G$, είναι το σύνολο $X/_G$, με την τοπολογία πηλίκου (ως πρός το q).

Θεώρημα.

Εαν $p : \hat{X} \to X$ κανονικός Ε.Χ. και $G = G(\tilde{X})$, τότε $\hat{X}/_G \cong X$, αρκεί ο X να είναι Κ.Τ.Σ.

Απόδειξη.

Ορίζουμε $f : \hat{X}/_G \to X$, με $f(G\alpha) = p(\alpha)$.

Ισχυρισμός 1: Η f καλώς ορισμένη.

Πράγματι, έστω $G\alpha = Gb \Rightarrow b \in G\alpha \Rightarrow b = \tau * \alpha$.

Εξ' ορισμού της G, έχω ότι $\tau * \alpha = \tau(\alpha)$, όπου $\tau : \hat{X} \to \hat{X}$, $/X$. Όμως "$/X$" $\Rightarrow p\tau = p \Rightarrow p\tau(\alpha) = p(\alpha) \Rightarrow p(b) = p(\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(Gb) = f(G\alpha)$

Ισχυρισμός 2: Η f είναι 1-1.

Πράγματι, έστω $f(G\alpha) = f(Gb) \Rightarrow p(\alpha) = p(b)$.

Έστω $p(\alpha) = p(b) = c$. Τότε, $\alpha, b \in \hat{X}_c$.

Απο κανονικότητα $\Rightarrow \exists\ \tau \in G(\hat{X})$, με $\tau(\alpha) = b \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \tau * \alpha \Rightarrow b \in G\alpha \Rightarrow Gb = G\alpha$.

Ισχυρισμός 3: Η f είναι επί

Πράγματι, αρκεί ν.δ.ο. η p είναι επί.

Έστω $\tilde{\alpha} \in \hat{X}$. (Επειδή X Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow X \neq \emptyset \Rightarrow \hat{X} \neq \emptyset$, αφού οι $\hat{X}, X$ τοπικά ισόμορφοι).

Έστω, $\alpha = p(\tilde{\alpha})$ και $b \in X$, τυχαίο.

Αφού X Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow \exists\ \gamma$ τόξο, απο το α, στο b.

Ανυψώνω σε $\tilde{\gamma}$, που ξεκινά, απο το $\tilde{\alpha}$.

Άρα, το $\tilde{\gamma}(1)$ είναι / απο το $\gamma(1) = b$.

Δηλαδή, αν $\tilde{b} := \tilde{\gamma}(1) \Rightarrow p(\tilde{b}) = b$.

<u>Ισχυρισμός 4</u>: Η f συνεχής και ανοιχτή.

Πράγματι, αρκεί να θεωρήσω, την $f|\tilde{U}$, όπου $\tilde{U} = p^{-1}(U)$, και U, άρτια καλλυμένη.

Ανάγεται στο $\tilde{U} \cong G \times U$ (Αποδείξτε το. Είδαμε προηγουμένως, την ειδική περίπτωση, όπου $\pi_1(\hat{X}) = 0$).

Τότε, ταυτίζοντας το $\tilde{U}$, με το $G \times U$, η f γίνεται κανονική, στο $G \times U / G \xrightarrow{\cong} U$

$\boxed{\text{Ισοδυναμίες Κατηγοριών}}$

<u>Ορισμός</u>

Εαν $C \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} D$ συναρτητές, με $G \circ F \cong I_C$, $F \circ G \cong I_D$ τότε λέμε ότι οι F, G είναι <u>ισοδυναμίες κατηγοριών</u>, και ότι οι <u>κατηγορίες</u> C, D είναι <u>ισοδύναμες</u> (Συμβ. προσωρινά: $C \sim D$).

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω κατηγορία D: $\begin{cases} \text{Αντικείμενα} \rightsquigarrow \text{σύνολα της μορφής } A = \{a, b\}, \text{ με } a, b \in \mathbb{R}. \\ \text{Μορφισμοί} \rightsquigarrow \text{συναρτήσεις} \end{cases}$

και κατηγορία C: $\begin{cases} \text{Αντικείμενα} \rightsquigarrow 0_+ := \{0\}, \ 1_+ := \{0, 1\} \\ \text{Μορφισμοί} \rightsquigarrow \text{συνήθεις συναρτήσεις} \end{cases}$

Έστω $F : C \hookrightarrow D$ η ένθεση (δηλαδή, $F(A) = A$, $F(f) = f$).

και $G : D \to C$, με $G(A) = \begin{cases} 0_+ , & \text{όταν, } |A| = 1 \\ 1_+ , & \text{όταν, } |A| = 2 \end{cases}$

Ορίζω την $G(f)$, για $f : A \to B$ μορφισμό της D.

Διαλέγω, για κάθε $A \in D$, κάποιο $\tau_A : A \xrightarrow{\cong} G(A)$

Υπάρχει τέτοιο τ_A, επειδή εκ κατασκευής του G, έχουμε ότι

$$|G(A)| = |A| \Rightarrow G(A) \cong A$$

Παρατηρώ ότι υπάρχει μοναδικός ορισμός της $G(f)$, τέτοιος ώστε $\tau : I_D \to F \circ G$.

Πράγματι,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\cong]{\tau_A} & G(A) = FG(A) \\ f \big\downarrow & & \big\downarrow \tau_B f \tau_A^{-1} := G(f) \\ B & \xrightarrow[\tau_B]{\cong} & G(B) = FG(B) \end{array}$$

Παρατηρώ ότι ο τ, περιορίζεται σε ισομορφισμό,

$$I_C \cong G \circ F$$

Άσκηση

Έστω $D = \{$διαν. χώροι $/\mathbb{R}$, πεπερασμένης διάστασης$\}$.

Μορφισμοί $\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}$ - γραμ. συναρτήσεις.

Έστω ακόμα $C = \{\mathbb{R}^0, \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \dots\}$ και μορφισμοί οι $\mathbb{R}$-γραμ. συναρτήσεις.

Ν.δ.ο. $C \sim D$

Ορισμός

Έστω κατηγορία C. (Υποθέτουμε ότι τα αντικείμενα σχηματίζουν σύνολο). Η σχέση ισοδυναμίας στα αντικείμενα "ισομορφισμοί στην C", μας δίνει το σύνολο των κλάσεων ισομορφισμού (συμβ. $i_0(C)$).

Ορισμός

Έστω κατηγορία C, και A, αντικείμενο της C.

Ορίζουμε το $i_1(C,A) := \{f : A \to A$ στην C : f, 1-1$\}$ ως τις ομάδες αυτομορφισμών

Άσκηση

Ν.δ.ο. εαν $C \sim D \Rightarrow i_0(C) \cong i_0(D)$ και $i_1(C,A) \cong i_1(D,B)$,

όπου $\forall A \in ob C$, $\exists B \in ob D$ (ob = object)

Άσκηση

Έστω C = πεπερασμένα σύνολα του $\mathbb{R}$ και συναρτήσεις

και D = διαν. χώροι $/\mathbb{R}$, πεπερασμένης διάστασης και $\mathbb{R}$-γρ. συναρτήσεις

(α) Ν.δ.ο. $i_0(C) \cong i_0(D) \cong \{0,1,2,\dots\}$.

(b) Ν.δ.ο. $C \not\sim D$. (Υπόδειξη : $i_1(C,A) \cong S_n$ και $i_1(D,B) \cong GL_n(\mathbb{R})$).

Παράδειγμα (σκίτσο)

Έστω κατηγορία C και $A \in ob\, C \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Υπάρχουν "αντικείμενα/A" $\Rightarrow$ Νέα κατηγορία

Επίσης, υπάρχουν "αντικείμενα κάτω απο το A".

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & A_1 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_0 \arrow[rr, dotted] & & A_1 \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

($\dashrightarrow$ = μορφισμός).

Εαν C = σώματα με char $= 0$ και $A \in ob\, C \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Υπάρχει κανονική $\mathbb{Q} \hookrightarrow A$

Εαν D = αντικείμενα κάτω απο το $\mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad i_1(D, \mathbb{Q} \hookrightarrow F) = Gal(F/\mathbb{Q})$ (βλ. θεωρία αριθμών).

setup

Έστω X "καλός", $G = \pi_1(X, a)$ και $(\tilde{X}, \tilde{a})$ καθολικός Ε.Χ., όπως κατασκευάστηκε. Άρα, $\tilde{X}_a = G$, και $\tilde{a}$ = ταυτοτικό της G. Έστω $\tilde{G} = G(\tilde{X})$.

Θυμηθείτε ότι $\begin{array}{l} \tilde{G} \to G \\ \tau \mapsto [\gamma] \end{array}$, ακριβώς όταν $\exists\, \gamma$ απο το $\tilde{a}$ στο $\tau(\tilde{a})$

Λήμμα 1

$[\gamma] * [\delta] = [\gamma \cdot \delta]$, $\forall [\gamma] \in G, \forall [\delta] \in \tilde{X}$.

Απόδειξη

Ορίζουμε $T : \tilde{X} \to \tilde{X}$ με $T([\delta]) = [\gamma\delta]$

Αρκεί : (α) $T \in \tilde{G}$

και (b) T αντιστοιχεί με την $[\gamma]$.

Θεωρώ την ανύψωση σ (μοναδική, εαν υπάρχει), ως εξής:

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{\alpha}) \arrow[d, "p"] \\ (\tilde{X}, [\bar{\gamma}]) \arrow[ur, dashed, "\sigma"] \arrow[r, "P"] & (X, \alpha) \end{tikzcd}$$

Αρκεί : (α) Η σ υπάρχει

(b) Η σ αντιστοιχεί με την $[\gamma]$

(c) $\sigma = T$

(α) Το κριτήριο ανύψωσης ικανοποιείται, αφού $0 < H$, $\forall H$.

(b)

$$\begin{tikzcd} & & \tilde{\alpha} \arrow[r, squiggly, "t \mapsto [\gamma_t]"] \arrow[d] & {[\gamma]} \\ {[\bar{\gamma}]} \arrow[r, squiggly, "n"] & \tilde{\alpha} \arrow[r] & \alpha \arrow[r, squiggly, "\delta"] & \alpha \end{tikzcd}$$

Ορίζω $n : t \mapsto [\bar{\gamma}\gamma_t]$, τόξο στον $\tilde{X}$, με

$n(0) = \bar{\gamma}$, $n(1) = \tilde{\alpha}$.

"Σπρώχνω δεξιά" το n, (δηλαδή παίρνω το pn). Έστω δ, το αποτέλεσμα.

Τότε, όμως, $\delta(t) = p(h(t))$ = πέρας του $h(t)$ = πέρας του

$\bar{\gamma}\gamma_t$ = πέρας του $\gamma_t = \gamma(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta = \gamma$.

Τώρα, "ανυψώνω πάνω" το $\delta = \gamma$.

Ξέρω ήδη, πως. Μέσω του $t \mapsto [\gamma_t]$.

Αυτό τερματίζει στο $[\gamma_1] = [\gamma]$ (βλ. ανυψώσεις μέσω τόξων).

$\blacksquare$ (b)

(c) Θεωρώ το $t \mapsto [\bar{\gamma}\delta_t]$. Πέρας $= [\bar{\gamma}\delta]$.

Το "σπρώχνω δεξιά" $\Rightarrow t \mapsto \delta(t) = \delta$

"Ανυψώνω" $\Rightarrow t \mapsto [\delta_t]$. Πέρας $= [\delta]$

Συμπέρασμα: Έχω $\sigma : [\bar{\gamma}\delta] \to [\delta]$, $\forall [\delta]$,

δηλαδή $[\bar{\gamma}\gamma\delta] \xmapsto{\sigma} [\gamma\delta] = \tau[\delta]$

$$\begin{array}{c} [\bar{\gamma}\gamma\delta] \\ \parallel \\ [\delta] \end{array}$$

<u>Άσκηση</u>

Έστω G ομάδα.

(1) Έστω X G-σύνολο, με G να δρά ελεύθερα.

Ν.δ.ο. $\exists$ σύνολο Y και $G \times Y \cong X$, ισομορφισμός G-συνόλων

(2) Αληθεύει, αντικαθιστώντας "σύνολο" $\leftrightarrow$ "χώρο" ?

(Υπόδειξη: Ε.Χ. δίνουν ελεύθερες δράσεις).

Σχόλιο

Για τα επόμενα, θυμηθείτε το "Setup (συνέχεια)".

Απόδειξη (του λήμματος 2).

Δείχνω ότι: (α) $\hat{f}$ συνεχής και ανοιχτή

(b) $\hat{f}$ επί

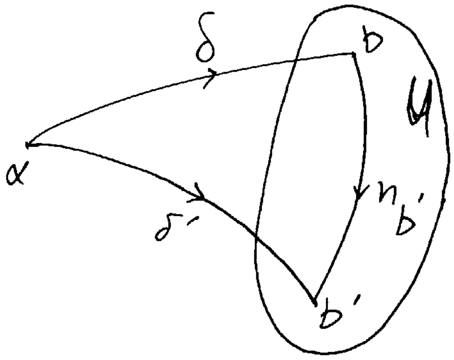
(c) $\hat{f}$ 1-1.

(α) Άμεσο από τις αντίστοιχες ιδιότητες της f.

(b) Έστω $a \overset{\delta'}{\rightsquigarrow} b'$, τόξο στον X, με $b' \in U$

(Δηλαδή, $[\delta']$, είναι το τυπικό σημείο της U).

$\gamma := \delta \bar{n}_{b'} \delta$, $[\gamma] \in G$.



$$([\gamma], b') \overset{\hat{f}}{\longmapsto} [\gamma] * f(b') = [\gamma] * p^{-1}(b') = [\gamma] * [\delta n_{b'}] \overset{1.1}{=\!=} [\gamma \delta n_{b'}] =$$

$$= [\delta' n_{b'} \bar{\delta} n_{b'}] = [\bar{\delta}]$$

(c) Έστω ότι $([\gamma_1], c_1) \overset{\hat{f}}{\longmapsto} [\gamma_1 \delta n_{c_1}] = [\gamma_2 \delta n_{c_2}] \overset{\hat{f}}{\longleftarrow} ([\gamma_2], c_2)$

Άρα, $c_1 = c_2$ (1)

Έστω ότι $c_1 = c_2 = c$.

Άρα, $n_{c_1} = n_{c_2} = n_c$.

Δηλαδή, $[\gamma_1 \delta n] = [\gamma_2 \delta n] \Rightarrow [\gamma_1 \delta n \bar{n} \bar{\delta}] = [\gamma_2 \delta n \bar{n} \bar{\delta}] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\gamma_1] = [\gamma_2]$ (2)

Απο (1) + (2) $\Rightarrow$ Το ζητούμενο.

Λήμμα 3

Έστω $p: \hat{X} \to X$, Κ.Τ.Σ., κανονικός, Ε.Χ του X, και έστω $\hat{G} = G(\hat{X})$. Έστω ακόμα ότι $U \in \mathbb{B}$ και $\hat{U} = p^{-1}(U)$.

Τότε, υπάρχει $\hat{f}: \hat{G} \times U \xrightarrow{\cong} \hat{U}$, ισομορφισμός, G-χώρων.

(Σχόλιο: Εώς βασισμένου ισομορφισμού $/X$, οι $\hat{X}$ αντιστοιχούν με τις $H < G$. Το λήμμα 2, είναι η ειδική περίπτωση όπου $H = 0$).

Απόδειξη

Αρκεί ν.δ.ο. $\hat{X} = X_H$, όπως κατασκευάστηκε στην απόδειξη του θεωρήματος κατάταξης. Ανατρέχοντας στην κατασκευή του X_H, και δεδομένου, του λήμματος 1, παρατηρώ ότι,

$X_H = \tilde{X}/_H$. (Ως $\hat{G}$-χώροι, $\hat{G} \cong G/H$).

Άρα, $\hat{U} \cong \tilde{U}/_H \underset{\text{Λ.2}}{\cong} (G \times U)/_H \underset{\substack{\text{άσκηση} \\ \text{(θεωρήστε πρώτα} \\ \text{ότι } U = *)}}{\cong} G/_H \times U \cong \hat{G} \times U.$

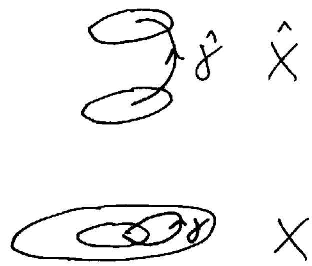
$\boxed{G\text{-σύνολα και Ε.Χ.}}$

Θεώρημα / Ορισμός

Έστω X, Κ.Τ.Σ και $p: \hat{X} \to X$, τυχαίος Ε.Χ. του X.

Έστω $\tilde{X}_\alpha = p^{-1}(\alpha)$ και $G = \pi_1(X, \alpha)$.

Τότε, υπάρχει η <u>κανονική δράση</u> της G, στο νήμα $\tilde{X}_\alpha$, που ορίζεται μέσω της $[\gamma] * b := \hat{\gamma}(0)$, όπου $\hat{\gamma}$ = η μοναδική ανύψωση του γ, που τερματίζει στο b.



Απόδειξη

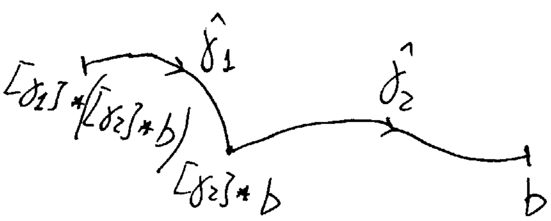
(α) Το $[\gamma] * b$ είναι καλώς ορισμένο, γιατί, εάν $[\gamma] = [\delta] \Rightarrow \gamma, \delta$ τοξοομοτοπικά $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ τοξοομοτοπικά $\Rightarrow$ κοινά άκρα $\Rightarrow$ κοινή αρχή.

(b) $[\varepsilon_\alpha] * b = b$, γιατί $\hat{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_b \Rightarrow \hat{\varepsilon}_\alpha(0) = b$

(c) $\big([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]\big) * b = [\gamma_1] * \big([\gamma_2] * b\big)$

Παίρνω, $\hat{\gamma}_2$ που λήγει στο b.



Επίσης, $\hat{\gamma}_1$ που λήγει στο $[\gamma_2] * b$.

Εξ' ορισμού του $[\gamma_2] * b$, ορίζεται το $\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2$.

Θυμηθείτε ότι $p \circ (\hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2) = (p \circ \hat{\gamma}_1) \cdot (p \circ \hat{\gamma}_2)$

Δηλαδή, το $\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2$ ανυψώνει το $\gamma_1\cdot\gamma_2$, και λήγει στο b.

Άρα ξεκινά από το $[\gamma_1\gamma_2]*b$.

Αλλά ξεκινά από την αρχή του $\hat{\gamma}_1$, που είναι, το

$[\gamma_1]*$ "πέρας του $\hat{\gamma}_1$".

Παρατήρηση

Εαν $\mathbb{D}$:= η κατηγορία των Ε.Χ. του X, δεδομένου μορφισμού στην $\mathbb{D}$, δηλαδή

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & \hat{Y} \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

, αφού η f είναι $/X$, επάγει (μέσω περιορισμού), μορφισμό στα νήματα, $f_*: \hat{X}_\alpha \to \hat{Y}_\alpha$.

Άσκηση

Η f_* είναι μορφισμός G-συνόλων

(Συνιστάται! Δώστε όλες τις λεπτομέρειες σε 5-10 γραμμές).

Άσκηση

(Πολύ εύκολη).

Εαν $\mathbb{G}$:= Κατηγορία των G-συνόλων, τότε, έχω συναρτητή

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\to \mathbb{G} \\ \hat{X} &\mapsto \hat{X}_\alpha \\ f &\mapsto f_* \end{aligned}$$

, όπως παραπάνω.

Θεώρημα Κατάταξης

Έστω X "καλός" και G, G, $\mathbb{D}$ όπως προηγουμένως.

Τότε, $G \sim \mathbb{D}$, και μάλιστα ο συναρτητής

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\to G \\ \hat{X} &\mapsto \hat{X}_\alpha \end{aligned}$$, είναι ισοδυναμία.

Σχόλιο

Εαν $\hat{X}$ Κ.Τ.Σ., κανονικός, που αντιστοιχεί στην H (μέσω του $1^{ου}$ θεωρήματος κατάταξης) $\Rightarrow \hat{X}_\alpha \cong G/H$.

Άσκηση (Συνιστάται)

Με τους παραπάνω συμβολισμούς, υποθέστε ότι ο X "καλός".
Ν.δ.ο. $\hat{X}$ "καλός" $\Leftrightarrow \hat{X}_\alpha$ μεταβατικό (ως G-σύνολο).
(Υπόδειξη : Το θεώρημα κατάταξης δεν χρειάζεται)

Πόρισμα 1 (Hatcher)

Οι κλάσεις ισομορφισμού G-συνόλων, αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα, με κλάσεις Ε.Χ. $/X$, και μάλιστα, μέσω της $\hat{X} \mapsto \hat{X}_\alpha$.

Εισαγωγή στην απόδειξη (του θεωρήματος κατάταξης)

Παίρνουμε τον καθολικό Ε.Χ. $\tilde{X}$, όπως κατασκευάστηκε.
Δεδομένου G-συνόλου F, ορίζουμε τον χώρο

$$X_F := \tilde{X}\times F / G := X \times_G F .$$

Παρατηρώ ότι έχω συναρτητή

$$\begin{aligned} G &\to \mathbb{D} \\ F &\mapsto X_F \\ f &\mapsto f_* \end{aligned} ,$$

όπου $f_* : G([\gamma], s) \to G([\gamma], f(s))$.

Είναι σύνθεση συναρτητών $\{G\text{-σύνολα}\} \longrightarrow \{G\text{-χώρους}\} \longrightarrow \{\text{χώρους}\}$

$$F \longmapsto \tilde{X}\times F \longmapsto \tilde{X}\times F / G$$

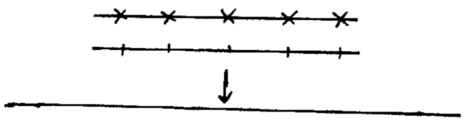
Παράδειγμα

Έστω $X = S^1$. Ταυτίζω το $\tilde{X}$ με το $\mathbb{R}$ και το G με το $\mathbb{Z}$.
Το $\mathbb{Z}$ δρά, στο $F = \{-1, 1\}$, με δύο τρόπους:

F_1 : $n * s = s$ (τετριμμένη δράση), και

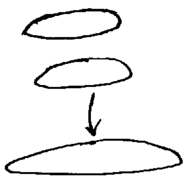
F_2 : $n * s = (-1)^n \cdot s$

Σκίτσα : (α)



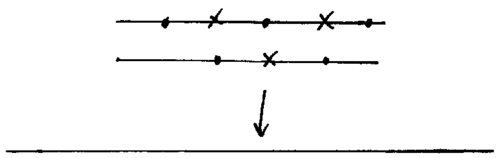
$$\begin{array}{c} \mathbb{R}\times F_1 \\ \downarrow p \\ \mathbb{R} \end{array}$$

(b)



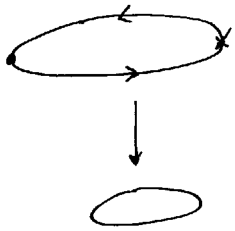
$\mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} F_1$

(c)

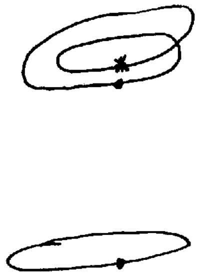


$$\begin{array}{c} \mathbb{R}\times F_2 \\ \downarrow p \\ \mathbb{R} \end{array}$$

(d)



$\mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} F_2$ $\cong$



Άσκηση

Ν.δ.ο. $\mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} F_1 \cong S^1 \times F$

Άσκηση

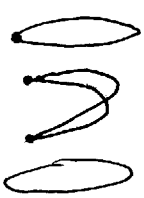
Ν.δ.ο. $\mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} F_2$ είναι Κ.Τ.Σ.

Παράδειγμα

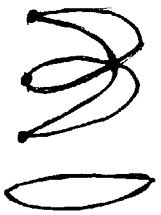
Η δράση του $\mathbb{Z}$ στο F, αντιστοιχεί με $p: \mathbb{Z} \to S_F$, αντιστοιχεί με $p(1): F \xrightarrow{\cong} F$

Π.χ.

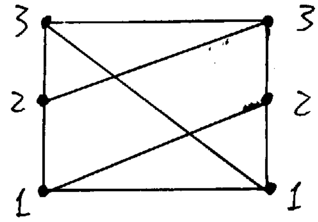
Έστω $F=\{1,2,3\}$. Δράση του $\mathbb{Z}$ στο F αντιστοιχεί με στοιχείο της S_3.



, $f=(1\,2)$.



, $f\,(123)$.



Παρενθετικά

Εαν τα G-σύνολα X_1, X_2, αντιστοιχούν στις αναπαραστάσεις $p_K : G \to S_X := G'$, $K = 1,2$, τότε τα X_1, X_2 είναι ισόμορφα (ως G-σύνολα) $\Leftrightarrow$ οι p_1, p_2 είναι ισόμορφες (συζυγείς). (Δηλαδή, $\exists\, T \in G'$, με, $p_1 = T p_2 T^{-1}$).

Πόρισμα 2 (Hatcher)

Οι κλάσεις ισομορφισμού n-πτυχων Ε.Χ. $/X$ (δηλαδή, χ.β.τ.γ., "νήμα" $= \{1, 2, \ldots, n\}$), αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα με κλάσεις ισομορφισμού, αναπαραστάσεων, της $G = \pi_1(X, a)$ στην S_n.

Συμφωνία

Συχνά γράφουμε (για δράσεις) $g \cdot s$ αντί του $g * s$.

Απόδειξη (του Θεωρήματος κατάταξης).

(1) Είναι ο $\tilde{X} \underset{G}{\times} F$ Ε.Χ. ?

Πράγματι, έστω $U \in \mathbb{B}$, όπου $\mathbb{B}$ η "standard" βάση (βλ. κατασκευή τον $\tilde{X}$). Ξέρω ότι $\tilde{U} \cong G\times U \Rightarrow \tilde{U} \underset{G}{\times} F \cong (G\times U\times F)/_G$.

<u>Βήμα A</u> : Για κάθε ομάδα G και για κάθε G-χώρο Y, έστω, $Y^t = Y$, με την τετριμμένη δράση.

Τότε, υπάρχει ισομορφισμός G-χώρων, $G\times Y \xrightarrow[f]{\cong} G\times Y^t$.

Πράγματι, παίρνω $f(g,y) = (g, g^{-1}y)$ ισομορφισμός, επειδή $f^{-1}(g,y) = (g, gy)$.

(Εύκολη άσκηση : Η f "σέβεται" την δράση).

<u>Βήμα B</u> : Εαν ο Y έχει τετριμμένη δράση, τότε, $G\times Y/_G \cong Y$ (Εύκολη άσκηση).

Απο βήμα $A + B \Rightarrow \tilde{U} \underset{G}{\times} F \cong U\times F = \bigcup_{s\in F} U_s$ (ξένη ένωση), όπου $U_s = U\times\{s\}$ και $p : U_s \xrightarrow{\cong} U$.

(2) Θεωρώ $F \longmapsto \tilde{X} \underset{G}{\times} F \longmapsto (\tilde{X} \underset{G}{\times} F)_\alpha$.

Είναι το $(\tilde{X} \underset{G}{\times} F)_\alpha$, φυσικά ισόμορφο, με το F?

Πράγματι, στο (1), είδα ότι $\tilde{U} \underset{G}{\times} F \cong U\times F$.

Παρόμοια, $(\tilde{X} \underset{G}{\times} F)_\alpha \cong \{\alpha\}\times F$ $(\cong F)$.

Όμως, ο ισομορφισμός $\tilde{U} \cong G\times U$ εξαρτάται απο επιλογές ενός $b \in U$, και τόξου $\delta : \alpha \rightsquigarrow b$, στο X.

Έτσι, ο ισομορφισμός, μοιάζει όχι φυσικός.

Όμως, στην ειδική περίπτωση εδώ, μπορώ να πάρω $b=\alpha$, και $\delta=\varepsilon_\alpha$.

Παίρνω $\tilde{X}_\alpha \cong G\times\{\alpha\}$, με $g\mapsto (g,\alpha)$ (φυσικός ισομορφισμός), και εν τέλει, παίρνω $F \xrightarrow{\cong} (\tilde{X} \times_G F)_\alpha$, φυσικός, τον $s\mapsto G(e,s)$

(3) Έστω $q: Y\to X$ Ε.Χ.. Θεωρώ $Y\mapsto Y_\alpha \mapsto \tilde{X}\times_G Y_\alpha$.

Είναι το $\tilde{X}\times_G Y_\alpha$, φυσικά ισόμορφο, με τον Y (ως Ε.Χ.).

<u>Βήμα Α</u>: Υπάρχει μορφισμός μεταξύ τους?

Έστω η ανύψωση q_s, όπως στο σχήμα:

$$\begin{tikzcd} & (Y,s) \arrow[d] \\ (\tilde{X},\tilde{\alpha}) \arrow[ur, dashed, "q_s"] \arrow[r, "p"] & (X,\alpha) \end{tikzcd}$$

, όπου $s\in Y_\alpha$ τυχαίο.

Ορίζω $\tilde{X}\times_G Y_\alpha \to Y$, με $G([\delta],s)\mapsto q_s[\delta]$.

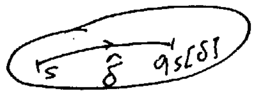
Καλώς ορισμένος: Έστω $G([\delta],s)=G([\delta'],s') \Rightarrow \exists\, g\in G$ με $g([\delta],s)=([\delta'],s') \Rightarrow g[\delta]=[\delta']$ και $gs=s'$.

Έστω $g=[\gamma]$ (βλ. λήμμα 1).

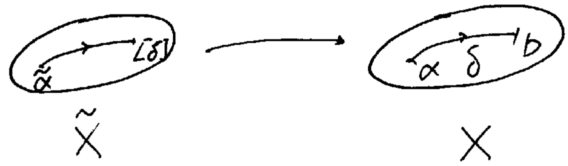
Τότε, $[\gamma\delta]=[\delta'] \Rightarrow g=[\delta'\bar{\delta}]$. Άρα, χ.β.τ.γ., $\gamma=\delta'\bar{\delta}$

Έστω $b = \delta(1) = \delta'(1)$. Αφού $[\gamma]s = s' \Rightarrow$ το γ ανυψώνεται σε $\hat{\gamma} : s' \rightsquigarrow s$ στο Y.

Να θυμηθούμε πως ορίζονται οι ανυψώσεις (μέσω ανυψώσεων τόξων - βλ. σχήμα).



Παρομοίως, για, το δ'.



(Παρατήρηση: Κάθε τόξο ζ, γράφεται μοναδικά ως $\zeta = \zeta_1 \cdot \zeta_2$, όπου $\zeta_1(t) = \zeta\left(\frac{t}{2}\right)$ και $\zeta_2(t) = \zeta\left(\frac{1+t}{2}\right)$, $0 \leq t \leq 1$.)

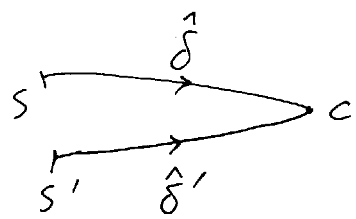
Γράφοντας $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_1 \cdot \hat{\gamma}_2$, παρατηρώ ότι $\gamma = p\hat{\gamma} = (p\hat{\gamma}_1)(p\hat{\gamma}_2) = \delta'\bar{\delta}$.

Μοναδικότητα $\Rightarrow$ $p\hat{\gamma}_1 = \delta'$ και $p\hat{\gamma}_2 = \bar{\delta}$.

Δηλαδή, το $\hat{\gamma}_1$ ανυψώνει το δ' και αρχίζει από το s'

ενώ, το $\hat{\gamma}_2$ —"— $\bar{\delta}$ —"— s.

Έστω $\hat{\delta} := \overline{\hat{\gamma}_2}$ και $c := \hat{\gamma}\left(\frac{1}{2}\right)$



Δηλαδή, $q_s[\delta] = c = q_{s'}[\delta']$

<u>Βήμα Β</u>: Ο μορφισμός, του βήματος Α, είναι επί.

Πράγματι, έστω $c \in Y$, τυχαίο. Έστω ότι $c \mapsto b \in X$.

Ο X Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow \exists\, \delta : \alpha \rightsquigarrow b$, στον X.

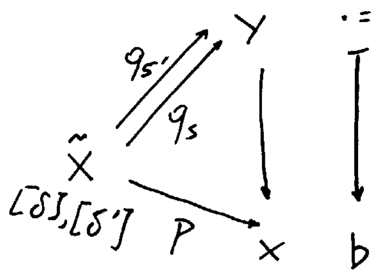
Παίρνω $\hat{\delta}$:= η μοναδική ανύψωση του δ στο Y, που λήγει στο c. Έστω $s = \hat{\delta}(0)$.

Αφού $\hat{\delta}$ ανύψωση του δ $\Rightarrow$ το s είναι πάνω απο το $\delta(0) = \alpha$ δηλαδή, $s \in Y_\alpha$.

Θεωρώντας πάλι, το γνωστό τόξο, $\tilde{\alpha} \rightsquigarrow [\delta]$ στον $\tilde{X}$, (που "σπρώχνεται" στο δ, στον X), καταλήγω στο ότι $q_s[\delta] = c$.

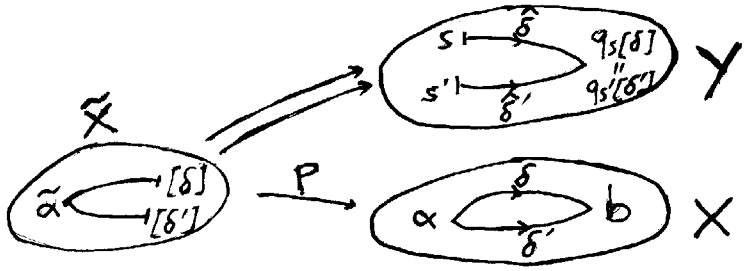
<u>Βήμα Γ</u> : Ο μορφισμός, του βήματος Α, είναι 1-1.

Έστω $q_s[\delta] = q_{s'}[\delta']$.
Αφού οι εικόνες των $[\delta], [\delta']$ ταυτίζονται στον Y, ταυτίζονται και στον X. Δηλαδή τα $[\delta], [\delta'] \in \tilde{X}_b$ (όπου $b = p[\delta] = p[\delta']$)



Απο τον ορισμό των ανυψώσεων (μέσω ανυψώσεων τόξων), και χρησιμοποιώντας τα γνωστά τόξα μας $\tilde{\alpha} \rightsquigarrow [\delta]$, $\tilde{\alpha} \rightsquigarrow [\delta']$, καταλήγω στο ότι, το "σπρώξιμο" του τόξου $\tilde{\alpha} \rightsquigarrow [\delta]$ (δηλαδή, το δ), ανυψώνεται σε $\hat{\delta}$, με $\hat{\delta}(0) = s$, $\hat{\delta}(1) = q_s[\delta]$.

Παρόμοια, για το δ'.



Άρα, ορίζεται, το $\hat{\delta}' \cdot \bar{\hat{\delta}}$ και όπως έχω δει πολλές φορές, ανυγώνει το $\delta'\bar{\delta} := \gamma$.

Έστω $g = [\gamma] \in G$.

Άρα, $gs = s'$, αφού η ανύψωση του γ, λήγει στο s και ξεκινά από το s'.

Υπολογίζω ότι $g([\delta], s) = (g[\delta], gs) \overset{\Lambda.1}{=\!=\!=} ([\delta'\bar{\delta}\delta], s') =$

$= ([\delta'], s')$.

Δηλαδή, $G([\delta], s) = G([\delta'], s')$

$\boxed{\text{Τροχιές (Μέρος II)}}$

Περίληψη

Πότε είναι ο $Y \to Y/G$ Ε.Χ.

Ορισμός

Έστω G ομάδα και Y, G-χώρος.

Θα λέμε ότι η δράση της G στον Y είναι επικαλυπτική δράση (Ε.Δ.) $\Leftrightarrow \forall g \in Y, \exists U \overset{\circ}{\ni} y : \bigcup_{g \in G} gU$ είναι ξένη $(*)$

Συμβολισμός

Το $U \ni y$ σημαίνει ότι το U περιέχει το y.

Το $U \overset{\circ}{\ni} y$ σημαίνει ότι το U είναι ανοιχτή περιοχή του y.

δηλαδή, το U περιέχει το y, και είναι ανοιχτό.

Τα συμφραζόμενα μας λένε που είναι ανοιχτό.

(Εδώ, π.χ., στον Y).

Άσκηση

Ν.δ.ο. (*) $\Leftrightarrow \left[\forall g \in G,\ gU \cap U \neq \emptyset \Rightarrow g = \text{ταυτοτικό}\right]$

Σχόλιο

Αν Y Ε.Χ. του X και $G = G(Y)$ και η δράση, είναι η προφανής, ξέρω ότι είναι Ε.Δ. .

Επίσης, αν ο X "καλός", ξέρω επίσης, ότι $Y \to Y/G$ είναι Ε.Χ. και μάλιστα αντιστοιχεί στον $Y \to X$, μέσω της ταύτισης

$Y/G \cong X$

Θεώρημα

Έστω G ομάδα, που δρά με Ε.Δ. στον Y.

Τότε, (α) Ο μορφισμός πηλίκου $Y \to Y/G$, είναι κανονικός Ε.Χ.

(b) Αν Y Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow G \cong G(Y)$

(c) Αν Y Κ.Τ.Σ., Τ.Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow G \cong \pi_1(Y/G) / p_*(\pi, Y)$

Απόδειξη

(α) Οι ορισμοί της Ε.Δ. και της τοπολογίας πηλίκου, δίνουν ότι $Y \to Y/G$ είναι Ε.Χ.

Η κανονικότητα ($\Rightarrow$ μεταβατικότητα στα νήματα) είναι καλή, (εύκολη), άσκηση.

(b) Ας ταυτίσουμε κάθε $g \in G$ με τον αντίστοιχο $Y \to Y$, με $y \mapsto gy$

(Επιτρέπεται, αφού Ε.Δ. $\Rightarrow$ Ελεύθερη δράση $\Rightarrow$ $(y \mapsto gy)$ διαφορετικές, για διαφορετικό g).

Τότε, $G \subset G(Y)$, αφού μετατίθεται (Άσκηση) το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & Y/G & \end{tikzcd}$$

. Αντιστρόφως, δείχνω ότι, $G(Y) \subset G$, αν Y Κ.Τ.Σ.

Έστω $y \in Y$. Κάθε $\tau \in G(Y)$ είναι ανύψωση

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ Y \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & Y/G \end{tikzcd}$$

Άρα, καθορίζεται μοναδικά, απο το $\tau(y)$.

(Αφού Y Κ.Τ.Σ. - Μόνο "συνεκτικός" αρκεί)

Όμως, το τ είναι πάνω απο τον τροχιακό χώρο Y/G, δηλαδή,

$p\tau y = py \Rightarrow G(\tau y) = Gy \Rightarrow \exists g \in G : \tau y = gy$.

Μοναδικότητα ανυψώσεων $\Rightarrow T = g \in G$.

(c) Πόρισμα, του βασικού θεωρήματος που δείξαμε, για κανονικού Ε.Χ. (δηλαδή "$\hat{G} \cong G/H_*$").

Ασκήσεις.

(1) Ε.Δ. $\Rightarrow$ Ελεύθερη δράση (Εύκολη)

(2) Αν G πεπερασμένη, Y Hausdorff, τότε:

[Ελεύθερη δράση $\Rightarrow$ Ε.Δ.]

Πόρισμα

Αν Y Hausdorff, ελεύθερος G-χώρος, και G πεπερασμένη $\Rightarrow$

$\Rightarrow Y \to Y/G$ είναι Ε.Χ.

Εφαρμογή

Έστω $G := \{\pm 1\}$ με πολλ/μό, η οποία δρά, πολλ/τικά, ελεύθερα στο S^n.

Τότε, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} := S^n/G$, λέγεται, ο προβολικός n-χώρος (πάνω απο το $\mathbb{R}$).

Για $n=1 \to$ Προβολική ευθεία.

Για $n=2 \to$ Προβολικό επίπεδο.

Άρα, $S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ Ε.Χ. και μάλιστα καθολικός, αν $n \geq 2$.

(Τότε, S^n, απλά συνεκτικό).

Άρα, $\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \cong G \cong \mathbb{Z}_2$

(Κ.Τ.Σ., Τ.Κ.Τ.Σ., ισχύουν για τον S^n - Τοπικά ισόμορφοι με τον $\mathbb{R}^n$)

Άσκηση

Έστω $n=1$. Ν.δ.ο. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \cong S^1$

(Άρα, ο Ε.Χ. $S^1 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ ταυτίζεται με τον Κ.Τ.Σ., δίπτυχο, $S^1 \to S^1$)

Άσκηση

Ορίζω σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, με :

$\alpha \sim b \Leftrightarrow \alpha, b$ γρ. εξαρτημένα ($\mathbb{R}$-πολλαπλάσια)

(α) $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim \;\cong \left\{ \begin{array}{l} \text{ευθείες στον } \mathbb{R}^{n+1} \\ \text{που περνούν από το } 0 \end{array} \right\}$

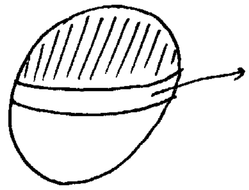
$$\varepsilon - 0 \longleftarrow\!\!\shortmid \varepsilon$$

(b) Δίνω στο $\hat{\mathbb{P}}^n_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim$, την τοπολογία πηλίκου.

Ν.δ.ο. $\hat{\mathbb{P}}^n_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

(c) Ν.δ.ο. (χωρίς πολλές λεπτομέρειες) το $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, είναι το αποτέλεσμα της επικόλλησης "Ταινίας Möbius" + "",

κατά μήκος, του "κοινού τους συνόρου, S^1"

(Υπόδειξη : 

)

$\boxed{\text{Ελεύθερα γινόμενα ομάδων}}$

Ορισμός

Θα λέμε <u>λέξη, μήκους n, στο σύνολο S</u>, μια συνάρτηση

$w : \{1, \dots, n\} \to S$

Συμβολίζω, την w, με $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$, όπου, $\alpha_k = w(k)$.

Επιτρέπω λέξεις μήκους 0. Υπάρχει μόνο μια (η μοναδική συνάρτηση $\emptyset \to S$). Την συμβολίζω με e.

Ορίζω $M_S :=$ Το σύνολο των λέξεων στο S (μήκους $0, 1, 2, \dots$).

Υπάρχει προφανής προσεταιριστική πράξη στο M_S, ουσιαστικά, "γράφω την μια λέξη μετά την άλλη". (concatenation - juxtaposition)

Δηλαδή, $(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \cdot (b_1 \cdots b_m) = \alpha_1 \cdots \alpha_n b_1 \cdots b_m$

Η κενή λέξη e, είναι το ταυτοτικό στοιχείο.

Δηλαδή, το M_S, μονοειδές (Λέγεται και το ελεύθερο μονοειδές στο S)

Ορισμός

Έστω G_1, G_2 ομάδες και $S := (G_1 \times \{1\}) \cup (G_2 \times \{2\})$.

Καταχρηστικά, το $(\alpha, 1) \in S$, το συμβολίζω, με α

και, το $(b, 2) \in S$, το συμβολίζω, με b.

$S =$ ξένη ένωση των G_1, G_2.

Γράφω, $S = G_1 \sqcup G_2$

Μια λέξη $\alpha_1 \cdots \alpha_n \in M_S$ την λέω <u>ανηγμένη</u> (reduced-απλοποιημένη),

όταν: (α) $\alpha_\kappa \neq$ ταυτοτικό της G_1, G_2 $(\kappa = 1, \ldots, n)$

και (b) $\alpha_\kappa \in G_1 \Rightarrow \alpha_{\kappa+1} \in G_2$ $(\kappa = 1, \ldots, n-1)$

$\alpha_\kappa \in G_2 \Rightarrow \alpha_{\kappa+1} \in G_1$

(Δηλαδή, διαδοχικοί όροι, σε διαφορετικές ομάδες).

Εάν $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ μη-ανηγμένη και $\alpha_\kappa, \alpha_{\kappa+1}$ στην ίδια G_i,

έστω $b = \alpha_\kappa \alpha_{\kappa+1}$.

Ονομάζω <u>στοιχειώδη απλοποίηση (Σ.Α.)</u> της $\alpha_1 \cdots \alpha_\kappa \alpha_{\kappa+1} \cdots \alpha_n$,

την $\alpha_1 \cdots \alpha_{\kappa-1}\, b\, \alpha_{\kappa+2} \cdots \alpha_n$

Εάν $\alpha_\kappa = e$, ονομάζω Σ.Α. της $\alpha_1 \cdots \alpha_{\kappa-1} \alpha_\kappa \alpha_{\kappa+1} \cdots \alpha_n$, την

$\alpha_1 \cdots \alpha_{\kappa-1} \alpha_{\kappa+1} \cdots \alpha_n$

Ορίζω $W := \{ w \in M_S \,/\, w \text{ ανηγμένη} \}$.

Ονομάζω, δυο λέξεις στο M_S, <u>ισοδύναμες</u>, εαν συνδέονται, με πεπερασμένο πλήθος Σ.Α.

Παρατηρώ ότι κάθε λέξη στο M_S, είναι ισοδύναμη, με μια μοναδική απλοποιημένη λέξη.

Ορίζω πολλ/μό, στο W, ως εξής:

$w \cdot w'$ = η μοναδική ανηγμένη λέξη, ισοδύναμη, με το αντίστοιχο γινόμενο στο M_S.

<u>Λήμμα</u>

Ο πολλ/μός, στο W, παραμένει προσεταιριστικός.

<u>Απόδειξη</u>

Ορίζω δράση της G_1 στο W: $\alpha * w = \alpha \cdot w$

Έχω την αντίστοιχη αναπαράσταση $p : G_1 \to S_W$.

Παρόμοια, έχω (καταχρηστικά) $p : G_2 \to S_W$.

Ορίζω επέκταση $p : W \to S_W$, τέτοια ώστε, $p(\alpha_1 \cdots \alpha_n) =$

$= p(\alpha_1) \cdots p(\alpha_n)$.

Παρατηρώ: (a) Η p είναι 1-1

Πράγματι, $[p(\alpha_1 \cdots \alpha_n)](e) = \alpha_1 \cdots \alpha_n$

και (b) $p(\alpha b) = p(\alpha)p(b)$, $\forall \alpha, b \in W$

Απο (a)+(b) ⇒ Προσεταιριστικότητα (Εύκολη άσκηση).

Θεώρημα/Ορισμός

Έχω ομάδα $G_1 * G_2$, το λεγόμενο <u>ελεύθερο γινόμενο</u> των G_1, G_2, με στοιχεία, τις απλοποιημένες λέξεις και πράξη, τον πολλ/μό ($G_1 * G_2 = W$, ως σύνολα).

Απόδειξη

Απομένει η ύπαρξη του αντιστρόφου.

Ως συνήθως, $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1} = \alpha_n^{-1} \cdots \alpha_1^{-1}$, (που παραμένει απλοποιημένη, αν η $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ ήταν απλοποιημένη).

Παράδειγμα

(1) $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}_2$, $G_1 = \{e, \alpha\}$, $G_2 = \{e, b\}$

Έχω $\alpha bbb \sim \alpha b$ αφού $\alpha bbb \sim \alpha e b \sim \alpha b$

(όπου $\sim \Leftrightarrow$ ισοδυναμία λέξεων).

Παρομοίως, βλέπω ότι οι απλοποιημένες λέξεις, είναι της μορφής $\alpha b \alpha b \ldots$ ή $b \alpha b \alpha \ldots$

(2) Θεωρώ το $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, με συμβολισμό, όπως στο (1).

Έχω μορφισμό ομάδων $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$, όπου

$\varphi(w) =$ μήκος της $w \pmod 2$.

Αυτός είναι επί. Επίσης, $Ker(\varphi) =$ λέξεις αρτίου μήκους $=$

$= \{(\alpha b)^n\} \cup \{(b\alpha)^n\} \cup \{e\}$.

Αφού $ba = (ab)^{-1}$, έχω, $Ker(\varphi) \cong \mathbb{Z}$.

Προαιρετικά: Αφού ο φ "splits" (π.χ. μέσω του $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, $1 \mapsto a$) έχω $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ είναι το ημιευθύ γινόμενο $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$, που αντιστοι-
χει στην μη-τετριμμένη δράση του $\mathbb{Z}_2$ στο $\mathbb{Z}$.

Σχόλιο

(1) Παρόμοια, ορίζω, το $G_1 * \cdots * G_n$ (Χρησιμοποιώντας λέξεις στο $(G_1 \times \{1\}) \cup \cdots \cup (G_n \times \{n\})$).

Ισχύει ότι π.χ. $G_1 * G_2 * G_3 \cong G_1 * (G_2 * G_3)$, μέσω του "προφανούς" ισομορφισμού.

(2) Ταυτίζω το $a \in G$ με το "προφανές" $a \in G * H$ (λέξη, μήκους 1). Παρόμοια, έχω την κανονική ένθεση $i_k : G_k \to G_1 * \cdots * G_n$, $k = 1, \ldots, n$.

Universal ιδιότητα του $*$.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, bend left, "\forall \varphi_1"] & & \\
& G_1 * G_2 \arrow[r, dashed, "\exists!\, \varphi"] & H \\
G_2 \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, bend right, "\forall \varphi_2"'] & &
\end{tikzcd} \quad , \ \forall H$$

Δεδομένων μορφισμών ομάδων $\varphi_K : G_K \to H$, $K = 1,2$,

$\exists!$ μορφισμός ομάδων $\varphi : G_1 * G_2 \to H$, που επεκτείνει

τους φ_1, φ_2.

Αυτό σημαίνει το εξής : "Το $G_1 * G_2$ είναι το άθροισμα των

G_1, G_2 στην κατηγορία των ομάδων".

Απόδειξη (σκίτσο).

Εαν $\alpha_1 \cdots a_n \in G_1 * G_2$ με $\alpha_1 \in G_1$ (χ.β.τ.γ.) , ορίζω.

$$\varphi(a_1 \cdots \alpha_n) \left[= (\varphi\alpha_1) \cdots (\varphi a_n)\right] = (\varphi_1 \alpha_1)(\varphi_2 \alpha_2) \cdots$$

Ελέγχω : (α) Ο φ ομομορφισμός

(b) Επεκτείνει

(c) Μοναδικότητα

Άπειρα ελεύθερα γινόμενα

Υπάρχει "προφανής" γενίκευση του $G_1 * \cdots * G_n := \underset{\alpha \in \{1,\ldots,n\}}{*} G_\alpha$,

σε ελεύθερο γινόμενο $\underset{\alpha \in I}{*} G_\alpha$, όπου I, τυχαίο, ίσως

άπειρο σύνολο.

Παίρνω τις reduced λέξεις στο $S = \bigcup_\alpha G_\alpha \times \{\alpha\}$, ξένη

ένωση των $G\alpha$.

(Παρατηρώ : Είναι το άθροισμα, στην κατηγορία των συνόλων –

– "ικανοποιεί την προφανή καθολική ιδιότητα").

Θεώρημα του Van Kampen

Διατύπωση

Περίληψη

Εκφράζω το $\pi_1(\bigcup X_\alpha)$ ως συνάρτηση των $\pi_1(X_\alpha)$.

Setup

(X, x_0) Χ.Σ.Β. , όπου $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$, $x_0 \in \bigcap X_\alpha$.

$X_{\alpha b} := X_\alpha \cap X_b = X_{b\alpha}$

$X_{\alpha bc} := X_\alpha \cap X_b \cap X_c$

(Καταχρηστικά), συμβολίζω τον Χ.Σ.Β. (X, x_0) απλώς με X.

Αφού $x_0 \in \bigcap X_\alpha$, έχω Χ.Σ.Β. (X_α, x_0), $(X_{\alpha b}, x_0)$.

(Καταχρηστικά), παραλείπω συνήθως, το x_0.

Οι ενθέσεις δίνουν μεταθετικά διαγράμματα Χ.Σ.Β.

$$\begin{tikzcd}
 & X_\alpha \arrow[dr, "i_\alpha"] & \\
X_{\alpha b} = X_{b\alpha} \arrow[ur, "i^\alpha_{\alpha b}"] \arrow[rr, "i_{\alpha b} = i_{b\alpha}"] \arrow[dr, "i^b_{b\alpha}"'] & & X \\
 & X_b \arrow[ur, "i_b"'] &
\end{tikzcd}$$

Αφού ο π_1 είναι συναρτητής, έχω μεταθετικό διάγραμμα ομάδων:

$$\begin{tikzcd}
 & G_\alpha \arrow[dr, "j_\alpha"] & \\
G_{\alpha b} = G_{b\alpha} \arrow[ur, "j^{\alpha}_{\alpha b}"] \arrow[rr, "j_{\alpha b} = j_{b\alpha}"] \arrow[dr, "j^{b}_{b\alpha}"'] & & G \\
 & G_b \arrow[ur, "j_b"'] &
\end{tikzcd},$$

όπου $G = \pi_1(X)$, $G_\alpha = \pi_1(X_\alpha)$ κ.ο.κ.,

και $j_\alpha = \pi_1(i_\alpha)$ κ.ο.κ..

Απο την καθολική ιδιότητα, $\exists!\ \varphi : \ast_\alpha G_\alpha \to G$ και επεκτείνει τα j_α. Έστω $N := Ker(\varphi)$.

Άμεσος σκοπός μας (βλ. επόμενο λήμμα), είναι να βρώ, τα "προφανή" στοιχεία του N.

Δεδομένου $w \in G_{\alpha b}$, έστω $w_{\alpha b} \in G_\alpha$, το $j^{\alpha}_{\alpha b} w$.

Προσοχή: $G_{\alpha b} = G_{b\alpha}$, αλλά $w_{\alpha b} \neq w_{b\alpha}$ σαν στοιχεία του $\ast_\alpha G_\alpha$ (ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες).

Λήμμα

$w_{\alpha b}\, w_{b\alpha}^{-1} \in N$

Απόδειξη

Ισοδύναμα, δείχνω ότι $\varphi(w_{\alpha b}) = \varphi(w_{b\alpha})$.

Αφού (εκ κατασκευής), ο φ επεκτείνει τον J_α, έχω ότι,

$\varphi(w_{\alpha b}) = \varphi\left(J^{\alpha}_{\alpha b} w\right) = J_\alpha J^{\alpha}_{\alpha b} w = J_{\alpha b} w = J_{b\alpha} w =$

$= \ldots$ (συμμετρικά) $= \varphi(w_{b\alpha})$.

Θεώρημα του Van Kampen

(1) Εάν X_α ανοιχτά και Κ.Τ.Σ., $\forall \alpha$, και εάν $X_{\alpha b}$ Κ.Τ.Σ., $\forall \alpha, b$, τότε ο φ είναι επί.

(Άρα, $G \cong \underset{\alpha}{*} G_\alpha / N$).

(2) Εάν τα $X_{\alpha b c}$ είναι Κ.Τ.Σ, $\forall \alpha, b, c$, τότε το N, είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα του $\underset{\alpha}{*} G_\alpha$, που περιέχει όλα τα $w_{\alpha b} w_{b\alpha}^{-1}$ (Περιγραφή του N).

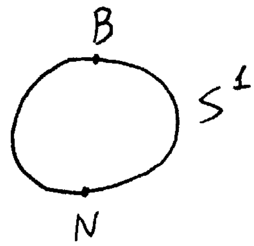
Προαιρετικά

Ισοδύναμη διατύπωση του V.K. χρησιμοποιώντας "γεννήτορες-σχέσεις".

$\pi_1\left(\bigcup X_\alpha\right) = \langle w : w \in \pi_1(X_\alpha) \ ; \ w_{\alpha b} = w_{b\alpha} : w \in X_{\alpha b} \rangle$.

Παράδειγμα.

Έστω $X = S^1$, $X_1 = X \setminus B$, $X_2 = X - N$.



Άρα, $X_1 \cong X_2 \cong \mathbb{R}$

Άρα, $G_1 \cong G_2 \cong 0$

Άρα, $G_1 * G_2 \cong 0$ (Έυκολη άσκηση : $0 * 0 \cong 0$)

Άρα, $\varphi : \underset{\underset{0}{\cong}}{G_1 * G_2} \to \underset{\underset{\mathbb{Z}}{\cong}}{G}$, όχι - επί.

Συμπέρασμα: Η προυπόθεση "X_{ab} Κ.Τ.Σ.", είναι απαραίτητ

<u>Παράδειγμα.</u>

Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω, για $X = S^n$, $n > 1$, έχου

ξανά $X_1 \cong X_2 \cong \mathbb{R}^n$, άρα πάλι $G_1 \cong G_2 \cong 0$.

Ξανά, $X_{12} \cong \mathbb{R}^n - \{0\}$ Κ.Τ.Σ. , αφού $n > 1$.

Επομένως, ο Van Kampen (V.K.) εφαρμόζεται.

Άρα, έχω επί, $\underset{\underset{0}{\cong}}{0 * 0} \to \pi_1(S^n) \Rightarrow \pi_1(S^n) \cong 0$, $n > 1$.

Εφαρμογή: $\boxed{\text{Βασισμένα αθροίσματα}}$

Εαν $\{X_\alpha\}$, οικογένεια χώρων, το τοπολογικό άθροισμα (ή τοπολογική ξένη ένωση ή τοπολογικό ελεύθερο άθροισμα),

$\coprod_\alpha X_\alpha := \bigcup X_\alpha \times \{\alpha\}$, με την παρακάτω, τοπολογία :

Ταυτίζω τον X_α με τον υπόχωρο $X_\alpha \times \{\alpha\}$ του $\sqcup X_\alpha$.

(Έχω "κανονική ένθεση" $X_\alpha \hookrightarrow \sqcup X_\alpha$).

Λέω: Το $U \subset \sqcup X_\alpha$ ανοιχτό $\Leftrightarrow$ $U \cap X_\alpha$ ανοιχτό, $\forall \alpha$ (βλ. ταύτιση).

(Σχόλιο: Ισοδύναμα, θα μπορούσα να πω "κλειστό" αντί για "ανοιχτό").

Ορολογία: Ο X έχει την "ασθενή τοπολογία ως προς τους υπόχωρους X_α".

Εύκολα ελέγχω την καθολική ιδιότητα:

$\forall Y$, $\forall \varphi_\alpha : X_\alpha \to Y$, μορφισμός χώρων, $\exists!\ \varphi : \sqcup X_\alpha \to Y$, που επεκτείνει τους φ_α.

("Το $\sqcup X_\alpha$ είναι το άθροισμα των X_α στην κατηγορία των χώρων").

Παρατηρώ ότι $\exists$ προφανής μορφισμός $\sqcup X_\alpha \xrightarrow{K} \cup X_\alpha$.

Εύκολη άσκηση

(1) $X_1 = (0,1)$, $X_2 = (1,2)$. Ν.δ.ο. K ισομορφισμός χώρων.

(2) $X_1 = (0,1)$, $X_2 = [1,2)$. Ν.δ.ο. K ισομορφισμός συνόλων, αλλά όχι ισομορφισμός χώρων.

Συμβολισμός

$$X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n := \bigsqcup_{\alpha\in\{1,\dots,n\}} X_\alpha$$

Ισχύει ότι $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n \cong X_1 \sqcup \big(\dots (X_{n-1} \sqcup X_n)\dots\big)$

Παράδειγμα

$S^1 \sqcup S^1 \sqcup S^1 \cong$ 

Παράδειγμα

$$\underbrace{X \sqcup \dots \sqcup X}_{n} \cong X \times \{1,\dots,n\}$$

γινόμενο χώρων

σύνολο
"
διακριτός χώρος

Έστω τώρα (X_α, x_α) Χ.Σ.Β.

(Καταχρηστικά), γράφω X_α, αντί του, (X_α, x_α).

Ορίζω:

ως $\bigvee_\alpha X_\alpha$, τον χώρο πηλίκο $\bigsqcup X_\alpha/\sim$, όπου η $\sim$, ταυτίζει, όλα τα x_α μεταξύ τους.

Σαν σύνολο, το $\bigvee_\alpha X_\alpha$, αποτελείται από το σημείο βάσης x_0, και τις εικόνες, των "κανονικών ενθέσεων", $X_\beta \to \bigvee X_\alpha$

Οι "υπόχωροι" X_β του $\vee X_\alpha$, τέμνονται μόνον στο x_0, που ισούνται με όλα τα X_α.

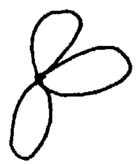
Ως συνήθως, $X_1 \vee \dots \vee X_n := \bigvee\limits_{\alpha \in \{1,\dots,n\}} X_\alpha$.

Ισχύει ότι $X_1 \vee \dots \vee X_n \cong X_1 \vee \big(X_2 \vee \dots (X_{n-1} \vee X_n) \dots\big) \cong$

$\cong$ "όπως βάλω παρενθέσεις".

Παράδειγμα.

$S^1 \vee S^1 \cong$ 

$S^1 \vee S^1 \vee S^1 \cong$ 

(Προσωρινός) ορισμός.

Εάν (X, x_0) είναι Χ.Σ.Β., τον λέω "καλό", εαν $\exists U \overset{\circ}{\subseteq} X$, και def. retracts στο x_0.

Σχόλιο: Στην Αλγ. Τοπολογία, "συνήθως" οι Χ.Σ.Β. είναι "καλοί", αλλιώς "παθολογικοί".

Παράδειγμα

Κάθε $V \subset \mathbb{R}^n$ καλό, $\forall x_0 \in U$, με U, ανοιχτή μπάλλα.

Παράδειγμα.

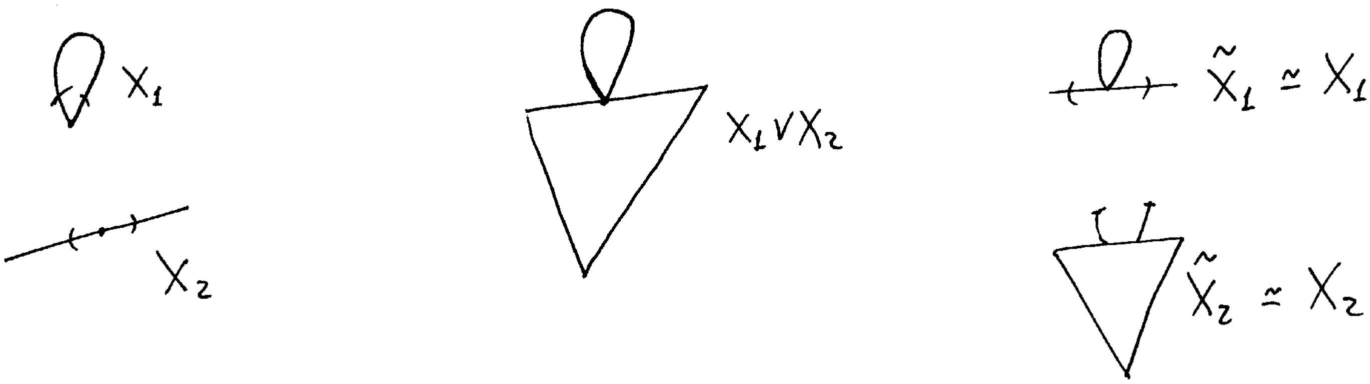
$X=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}\cup\{0\}$, $x_0=0$ $\Rightarrow$ "όχι - καλός".

$\forall U \ni x_0$, τότε, U όχι - Κ.Τ.Σ. , άρα όχι - ομοτοπικά ισοδύναμο με το x_0 , άρα, δεν αποσύρεται παραμορφωτικά (def. retracts) στο x_0.

Έστω ότι κάθε (X_α, x_α) "καλό", με αντίστοιχο U_α.

Έστω $\tilde{X}_\alpha := \left(\bigcup U_\beta\right)\cup X_\alpha \subset \bigvee_\alpha X_\alpha =: X$

Παράδειγμα



Ισχύουν : (1) $X=\bigcup \tilde{X}_\alpha$ (προφανές)

(2) $\tilde{X}_\alpha$ ανοιχτά

(3) $\tilde{X}_{\beta\gamma} \underset{(\beta\neq\gamma)}{\cong} \tilde{X}_{\beta\gamma\delta} \cong \bigcup \tilde{U}_\alpha$

$\downarrow$

Κ.Τ.Σ. , αφού συσταλτό, αφού def. retracts, στο x_0.

Συμπέρασμα : Εαν X_α Κ.Τ.Σ , $\forall \alpha$ (άρα και το $\tilde{X}_\alpha$, αφού, $\tilde{X}_\alpha \simeq X_\alpha$), τότε, εφαρμόζεται ο Van Kampen.

Μάλιστα, $N=0$, αφού $\pi_1(\tilde{X}_{\beta\gamma})=0$, $\forall \beta,\gamma$.

Άρα, $\pi_1\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \cong \ast_\alpha \pi_1(X_\alpha)$,

και μάλιστα, μέσω των μορφισμών, που επάγουν οι ενθέσεις.

Παρενθετικός ορισμός.

Εάν G ομάδα , $G \cong \ast_\alpha \mathbb{Z}$, λέω ότι η G είναι ελεύθερη.

Εάν $\varphi : \ast_\alpha \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} G$ κάποιος ισομορφισμός, έστω $w_\alpha \in G$,

το φ (γεννήτορα του α-παράγοντα).

Τότε, λέω ότι τα w_α είναι ελεύθεροι γεννήτορες της G,

και γράφω $G = F\{w_\alpha\}$

$\downarrow$

Free

Λέω επίσης ότι η G είναι ελεύθερη στο w_α.

Εάν $\alpha \in \{1,\dots,n\}$ γράφω $G = \langle w_1 \cdots w_n \rangle$.

Παράδειγμα

$\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} \ast \mathbb{Z}$ και μάλιστα , ελεύθερο, στα 
w_1 w_2

$(S^1 \vee S^1 \rightsquigarrow$ $)$.

Εφαρμογή : $\boxed{\text{Υπολογισμός του } \pi_1(X), \text{ όπου } X, \text{ μονοδιάστατο C.W.}}$

Ορισμός.

Έστω X, Hausdorff τοπολογικός χώρος.

Μια δομή πεπερασμένου CW-complex, αποτελείται απο δύο "συστατικά":

(1) Πεπερασμένα σύνολα $X_0, X_1, \ldots, X_K$ (όπου X_K = Το σύνολο των K-cells).

(2) Μορφισμούς χώρων $\Phi_p : D_p^K \to X$, $p \in X_K$

$$D_p^K \cong \{p\} \times D^K$$

Το Φ_p λέγεται characteristic map, για το κελλί p.

Αυτά τα "συστατικά", πρέπει να ικανοποιούν, τρείς συνθήκες:

(α) Κάθε Φ_p είναι 1-1, στο $\mathring{D}_p^K := D_p^K \setminus S_p^{K-1}$ (όπου $S_p^{K-1} := \{p\} \times S^{K-1}$).

Ονομάζω $e_p^K := \Phi_p(\mathring{D}_p^K)$, (ισόμορφο του $\mathring{D}_K$, λόγω συμπάγειας/τοπικής συμπάγειας).

(b) $X = \bigcup\limits_{\substack{K=0,\ldots,n \\ p \in X_K}} e_p^K$, ξένη ένωση

Πρίν περιγράψουμε την συνθήκη (c), χρειαζόμαστε τα παρακάτω.

Ορισμός

Ο περιορισμός $\varphi_p := \Phi_p|_{S_p^{k-1}}$, λέγεται απεικόνιση επισύναψης (attaching map).

Ορίζω $X^m := \bigcup_{\substack{0 \le k \le m \\ p \in X_k}} e_p^k$, ως τον m-σκελετό (m-skeleton).

Η συνθήκη (b) $\Rightarrow$ Έχω "filtration" $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n = X$.

(c) Η φ_p, παίρνει τιμές, στον X^{k-1}.

Ορολογία: $n := \dim X$.

Σχόλιο

Ο ορισμός του CW-complex, για τυχαίο (ίσως άπειρο) πλήθος κελλιών, και (ίσως) άπειρης διάστασης, είναι παρόμοιος, με δύο έξτρα point-set topology συνθήκες.

CW $\rightsquigarrow$ Closure-finiteness, Weak topology

(βλ. Hatcher, σελ. 251, διατύπωση proposition A.2., συνθήκες (b), (c).).

Σχόλιο

Η απεικόνιση Φ^k = επικόλληση των Φ_p, $p \in X_k$, είναι μορφισμός πηλίκου $\Phi^{\kappa} : \sqcup D_p^{\kappa} \to X^{\kappa}$

(Στοιχειώδης εφαρμογή συμπάγειας).

"Συμφωνία"

Ταυτίζω (καταχρηστικά), το $p \in X_\kappa$ με το $\mathrm{Im}\,\Phi_p \subset X$.

Εάν $\kappa = 0$, γράφω συχνά p. αντί για $\{p\}$

Τότε, X^0 "$=$" X_0.

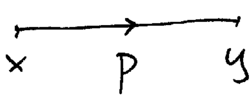
(Ο υπόχωρος X^0 του X, είναι σύνολο (διακριτός χώρος)).

Ειδική περίπτωση $n = \dim X = 1$.

Έστω X, ένα (προσανατολισμένο, τοπολογικό) γράφημα.

Τότε, η CW-δομή, είναι "συνδυαστική" (δηλαδή, έχω σύνολα και μορφισμούς συνόλων).

Έχω $\varphi^1 : X_1 \times \partial D^1 \to X_0$.

Σχηματικά:  , δηλαδή, $\varphi^1(p,-1) = x$
και $\varphi^1(p,1) = y$.

Ισοδύναμα, έχω "αρχή": $X_1 \to X_0$
$p \mapsto \varphi^1(p,-1)$

και "πέρας": $X_1 \to X_0$
$p \mapsto \varphi^1(p,1)$

Απο Graph theory ⇒ Έχω προσανατολισμένο ψευδογράφημα (pg).

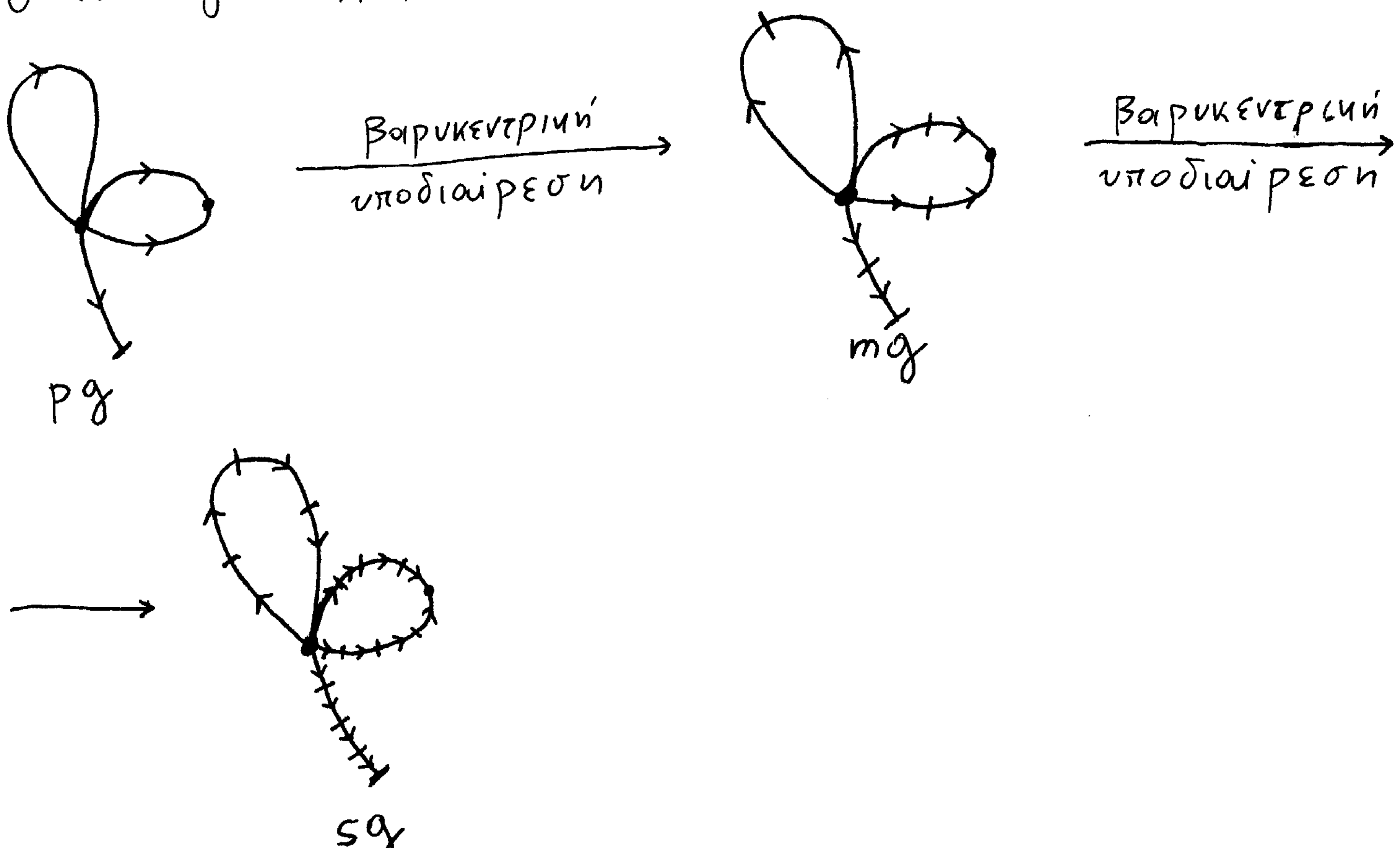
(έχω "loop" , )

Εάν κάθε Φ_p είναι εμφύτευση (όχι-loops), τότε έχω προσανατολισμένο multigraph (mg).
Εάν κάθε $x,y \in X_0$ συνδέονται με το πολύ μια $p \in X_1$, τότε έχω προσανατολισμένο simplegraph (sg).

(sg ⇒ mg ⇒ pg).

Σχόλιο

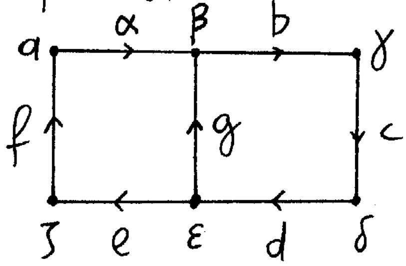
Υποδιαιρώντας κάθε δομή pg, γίνεται δομή sg (χωρίς να αλλάξει ο τοπολογικός χώρος).



Σκοπός

Να περιγράψω/αποδείξω, μέθοδο υπολογισμού του $\pi_1(X)$, όπου, (χ.β.τ.γ.) X Κ.Τ.Σ., 1-dim CW.

Παράδειγμα



, $X_0 = \{a, \beta, \dots, \zeta\}$

$X_1 = \{\alpha, b, \dots, g\}$

Μέρος Α

Βρίσκω, "maximal tree", $T \subset X$.

(όπου tree = συσταλτό γράφημα)

Επαγωγικά, στο, $n = |X_0|$.

Βήμα Α : Παίρνω τυχαίο $\alpha_0 \in X_0$

Βήμα A_{n+1} από A_n : Επαγωγικά, υποθέτω επιλεγμένα,

$\{\alpha_0, \dots, \alpha_m\} \subset X_0$ και $\{p_1, \dots, p_m\} \subset X_n$, όπου p_k μεταξύ των α_k, α_{k+1}.

Αυτές οι κορυφές (0-cells), ακμές (1-cells), με ίδιες, "αρχή", "πέρας", δίνουν T_m γράφημα.

Υποθέτω, επαγωγικά, ότι το T_m def. retracts στο $T_{m-1} \subset T_m$.

(αφού "def. retracts" είναι μεταβατική ιδιότητα - Άσκηση).

Έχω $T_m \simeq T_{m-1} \simeq \dots \simeq T_0 = *$ $\Rightarrow$ T_m συσταλτό $\Rightarrow$ T_m tree.

Για το επαγωγικό βήμα, έχουμε τον εξής, ισχυρισμό.

Ισχυρισμός : Εαν $m < n$, τότε $\exists \alpha_{m+1} \in X_0 - \{\alpha_0, \dots, \alpha_m\}$ και $\exists p_{m+1}$, μεταξύ των α_{m+1} και T_m

(Αυτό αρκεί : Χρησιμοποιώντας ενα def. retraction του D^1 στο ± 1, (ένα απο τα δύο), παίρνω def retraction του p_{m+1}, στο άλλο άκρο του (όχι το α_{m+1}), δηλαδή def. retraction, τον T_{m+1} στο T_m)

Απόδειξη (του ισχυρισμού) : (Με άτοπο).

Εαν $\nexists p_{m+1}$ τέτοια, έχω μη-κενά, ξένα, κλειστά, που καλύπτουν τον X. Δηλαδή, $X = X_1 \cup X_2$, όπου $X_1 = \bigcup_{\partial p \subset \{\alpha_0, \dots, \alpha_m\}} p$ και

$X_2 = \bigcup_{\partial p \subset X_0 - \{\alpha_0, \dots, \alpha_m\}} p$ $\Rightarrow$ X όχι-συνεκτικό $\Rightarrow$ X όχι Κ.Τ.Σ.

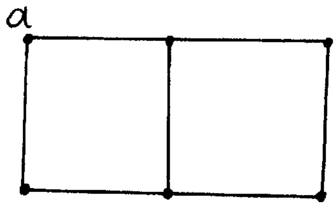
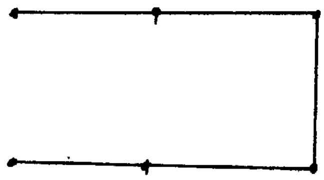
Άτοπο.

Σχόλιο

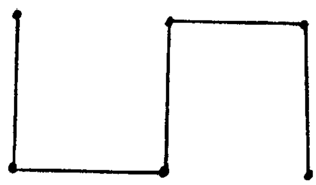
Για X CW, ισχύει ότι [Συνεκτικό $\Leftrightarrow$ Κ.Τ.Σ.], γιατί CW Τ.Κ.Τ.Σ.

Επίσης, $\forall$ χώρο, [Κ.Τ.Σ. $\Rightarrow$ Συνεκτικό] (στοιχειώδες).

Παράδειγμα

$X =$  . Αν $\alpha_0 = a \Rightarrow$ 

ή



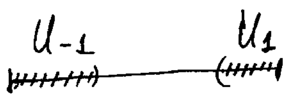
Εδώ, πάντα $|T_0| = 6$, εκ κατασκευής, όλες οι κορυφές.

Επίσης, $|T_1| = 5$, επειδή $T \simeq * \Rightarrow \chi(T) = 1$

Μέρος Β

Έστω $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ οι υπόλοιπες ακμές του X.

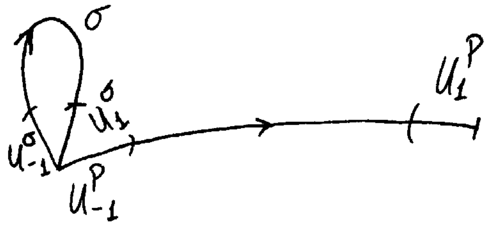
Έστω $V = U_{-1} \cup U_1$, ανοιχτή περιοχή του ∂D^1, η οποία def. retracts στο ∂D^1, τέτοια ώστε U_α def. retracts στο $\alpha = \pm 1$.

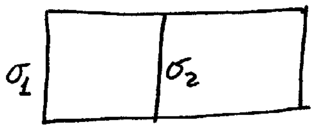


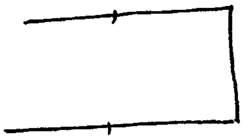
, $V = U_{-1} \cup U_1$

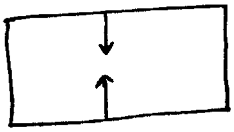
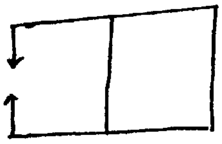
Αυτή η V, δίνει $\forall p \in X_1$, αντίστοιχη $V_p = U^p_\alpha \cup U_\beta$, όχι απαραίτητα ανοικτή, που def. retracts στο $\partial p := \{\alpha, \beta\}$.

Παράδειγμα



Στο παράδειγμα, 

, με $T=$  ,

έχω $\tilde{X}_1 =$  και $\tilde{X}_2 =$ 

Έστω $\tilde{X}_\ell = T \cup \sigma_\ell \bigcup_{\ell=1,\dots,k} V_{p_k}$.

Έχω, $X = \bigcup_{\ell=1,\dots,k} \tilde{X}_\ell$ και $\tilde{X}_\ell$ ανοιχτά.

Επίσης, $\tilde{X}_\ell \cap \tilde{X}_m \underset{\ell \neq m}{=} \tilde{X}_\ell \cap \tilde{X}_m \cap \tilde{X}_J = T \cup (V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_k})$, το οποίο def. retracts στο T ⇒ συσταλτό ⇒ Κ.Τ.Σ. ⇒

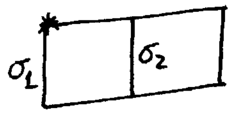
⇒ Εφαρμόζεται ο Van Kampen, και όπως πριν, $N=0$.

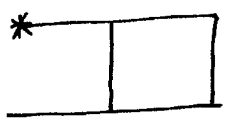
Παρατηρώ ότι κάθε $\tilde{X}_\ell$, def. retracts σε S^1 ⇒

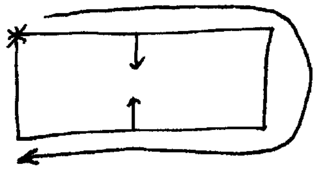
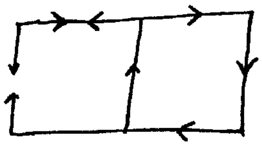
⇒ $\pi_1(\tilde{X}_\ell) \cong \mathbb{Z}$

Van Kampen ⇒ $\pi_1(X) \cong \ast_{\ell=1}^{k} \mathbb{Z}$, με ελεύθερους γεννήτορες, αυτούς του $\pi_1(\tilde{X}_\ell)$.

Παράδειγμα

Για 

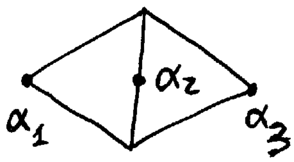
και $T=$  , έστω $\ast$ = σημείο βάσης. Τότε, $\pi_1(X) = \langle w_1, w_2 \rangle$, όπου:

$\tilde{X}_1 =$  και $\tilde{X}_2 =$ 

<u>Σχόλιο</u>

Ισχύει και για άπειρα γραφήματα. (βλ. Hatcher).

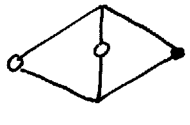
<u>Παράδειγμα</u>

$X =$ 

$X_K = X \setminus \alpha_K$, ανοιχτά, Κ.Τ.Σ., $\downarrow$ σε τοπολογικό S^1

(Συμβολισμός: $\downarrow$ = def. retracts).

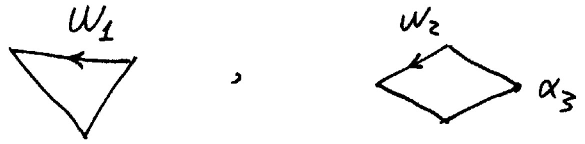
Παρατηρώ, ότι ο Van Kampen, εφαρμόζεται στην αποσύνθεση (decomposition), $X = X_1 \cup X_2$, αφού:

$X_1 \cap X_2 =$  $\cong$ , συσταλτό.

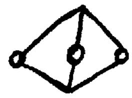
Άρα $N=0$.

Έτσι, Van Kampen $\Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$

Δηλαδή, το $\pi_1(X, \alpha_3)$ ελεύθερο στα w_1, w_2, όπου:



Παρατηρώ, ότι η προϋπόθεση $X_{\alpha\beta\gamma}$ Κ.Τ.Σ., είναι απαραίτητη.
(Δεν ισχύει, π.χ., στο $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, όπου $|\pi_0(X_1 \cap X_2 \cap X_3)| =$

$= \left|\pi_0\left(\right.\right.$  $\left.\left.\right)\right| = 2 \Rightarrow X_{123}$ όχι Κ.Τ.Σ.. Επίσης $N = 0$.

Πράγματι, ο Van Kampen θα προέβλεπε ότι:

$f: \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) * \pi_1(X_3) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X)$, το οποίο είναι ψευδές.

<u>Άσκηση</u>

Ν.δ.ο. αυτό, δεν ισχύει, με δύο τρόπους.

(α) Ν.δ.ο. $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (Υπόδειξη: Universal property).

(b) (Πιό εύκολος) Βρείτε στοιχεία στον $Ker(f)$.

Εφαρμογή: $\boxed{\text{Υπολογισμός του } \pi_1(Y) \text{, όπου } Y \text{, 2-dim CW.}}$

Έστω $X = Y^1$. Επιλέγω σημεία βάσης $x_0 \in X$, $s_0 \in S^1$.

Έτσι, έχω Χ.Σ.Β. $(X, x_0), (Y, x_0)$.

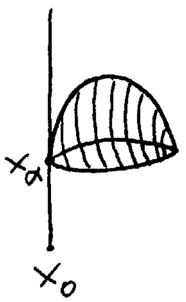
(Καταχρηστικά) έστω αυτοί X, Y.

Για κάθε $\alpha \in Y_2$ ορίζω $x_\alpha := \Phi_\alpha(s_0)$.

Επιλέγω τόξο $\gamma_\alpha : x_0 \rightsquigarrow x_\alpha$.

Ταυτίζω το φ_α με κλειστό τόξο του X στο x_α.

Έστω $w_\alpha := \gamma_\alpha \varphi_\alpha \overline{\gamma_\alpha}$.



Θεώρημα

Έστω $J : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$, η "inclusion induced map" (η απεικόνιση που επάγεται απο την ένθεση).

Τότε, ο J είναι επί, και $Ker(J) = N := \lhd w_\alpha \rhd$, η κανονική υποομάδα, που παράγεται, απο τα w_α.

Πόρισμα

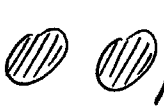
$\pi_1(Y) \cong \pi_1(X)/N$

Απόδειξη (του Θεωρήματος)

Έστω $C = Y_2 \times D^2$.

Ξέρω ότι ο Y είναι χώρος πηλίκου $Y \cong X \sqcup C / \sim$,

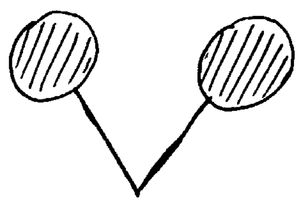
όπου $s \sim \varphi_\alpha(s)$, $\forall s \in S^1_\alpha$, $\forall \alpha \in Y_2$.

(π.χ. $|Y_2| = 2 \Rightarrow C =$ )

Κατασκευάζω, $\tilde{C}$ απο C, ως εξής :

Προσθέτω "ουρά" σε κάθε 2-κελλί και "δένω τις άκρες".

π.χ.



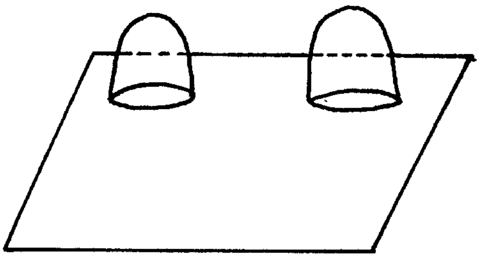
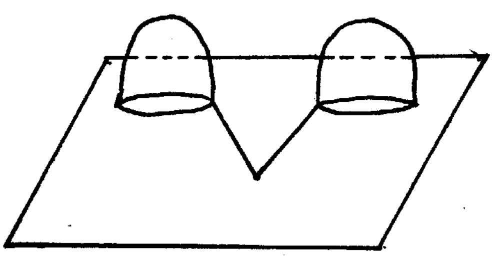
Αυστηρά : $\tilde{C} = \left[X_2 \times D^2 \vee \overbrace{([0,1], 0)}^{X.\Sigma.B.}\right] \big/ \approx$, όπου,

$(\alpha, 1) \approx (b, 1)$, $\forall a, b \in Y_2$.

Άρα, ο Y είναι πηλίκο, $Y \cong X \sqcup \tilde{C} \big/ \approx$, όπου :

$\alpha \approx b \Leftrightarrow \alpha \sim b$ ή $\gamma_\alpha(t) \approx (\alpha, t) \in \tilde{C}$.

(Δηλαδή, ο Y "δεν αλλάζει", αν επικολλήσω την "πάχυνση" $\tilde{C}$, όπου τα "νέα" σημεία, επικολλούνται κατά μήκος της γ_a).

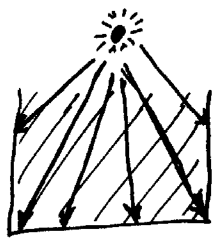
 

Αυστηρά: Μπορώ να ορίσω αντίστροφες απεικονίσεις

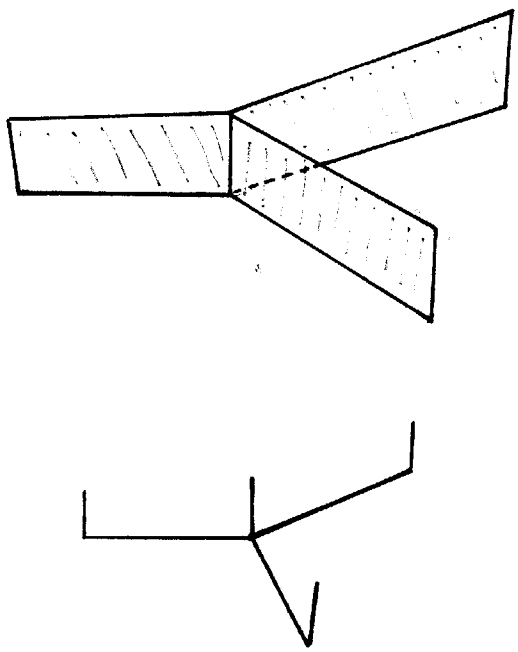
$$X \sqcup C/_{\sim} \rightleftarrows X \sqcup \tilde{C}/_{\approx}$$

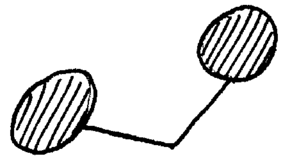
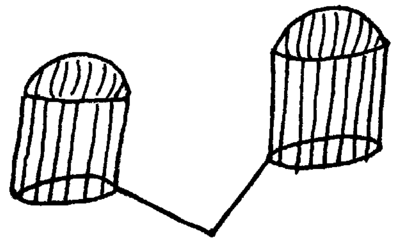
, χρησιμοποιώντας τις universal properties.

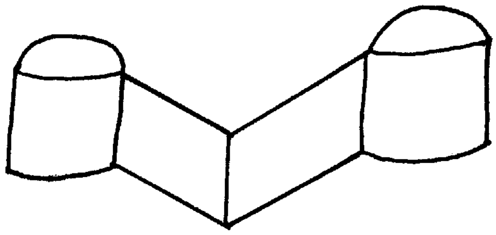
Τώρα, χρησιμοποιώ $[0,1]\times[0,1] \searrow$ "σύνορο ∖ βόρεια πλευρά" (π.χ. με την μέθοδο "σκιάς απο λαμπτήρα" - ροή κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων του σχήματος).



Επικολλώ αντίγραφα αυτών των παραμορφώσεων, ένα για κάθε 2-κελλί, όπως στο σχήμα.



Θυμηθείτε : $\tilde{C} =$  $\cong$ 

Εμφυτεύω το $\tilde{C}$ στο $\hat{C} :=$ 

Το $\hat{C} \searrow$ στο $\tilde{C}$ (χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παραμόρφωση).

Εμφυτεύω το $Y = X \sqcup \tilde{C}/\sim$ στο $\hat{Y} = X \sqcup \hat{C}/\sim$

(Συμβολισμός : $\sim := \approx$) , χωρίς να αλλάξω την $\sim$,
επικολλώ κατά μήκος του κάτω μέρους.

Άρα, $\hat{Y} \searrow Y$.

Αρκει να υπολογίσω το $\pi_1(\hat{Y})$.

(Το $\hat{Y}$ είναι καλύτερο του Y, γιατί $\hat{Y} \setminus X$, κ.τ.Σ.)

Έστω $y_\alpha = \Phi_\alpha(0) \in Y$ και $A := \hat{Y} \setminus \{y_\alpha : \alpha \in Y_2\}$

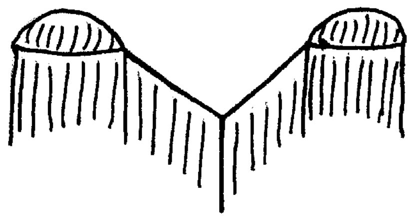
Αφού $D^2 \setminus \{0\} \searrow S^1$, $Y \setminus \{y_\alpha\} \searrow X$

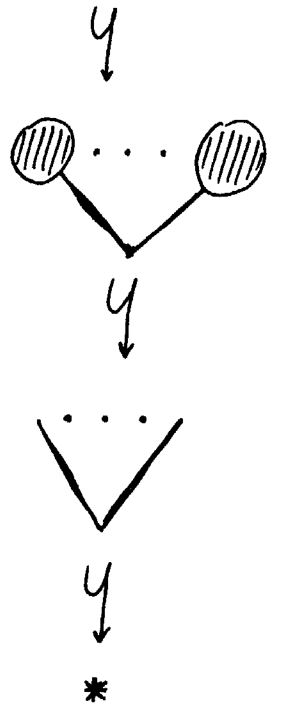
Επίσης $A := \hat{Y} \setminus \{y_\alpha\} \searrow Y$.

Δηλαδή $A \searrow X$.

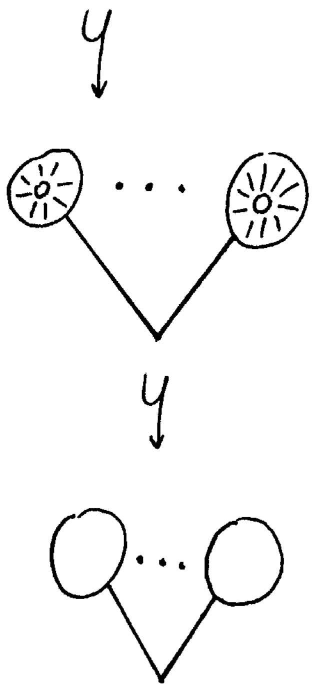
Έστω $B = \hat{Y} \setminus X$, κ.τ.σ.

$\cong$

$\hat{C} \setminus$ "κάτω μέρος" = 

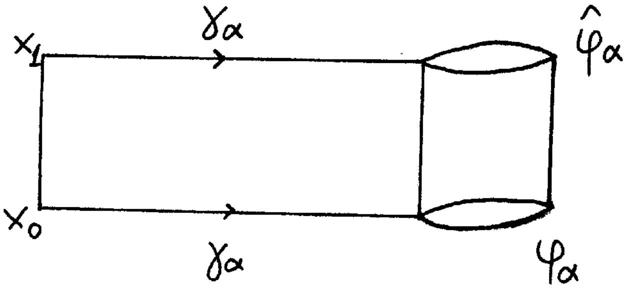


και $A \cap B = B$ με "τρύπιες φουσκάλες"



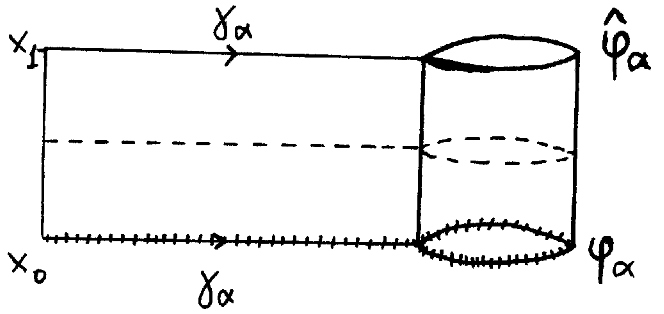
Το $A \cap B$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμο με $\bigvee_{\alpha \in Y_2} S^1$

Όπως στον υπολογισμό του $\pi_1(\vee X_\alpha)$, η ίδια απόδειξη δίνει ότι $\pi_1(A \cap B, x_1) =$ ελεύθερο στα $\hat{w}_\alpha$, όπου παίρνω x_1 σημείο βάσης, όπως στο σχήμα, και τα $\hat{w}_\alpha = \hat{\gamma}_\alpha \varphi_\alpha \bar{\hat{\gamma}}_\alpha$, όπως στο σχήμα.



Όμως, αν $\beta : x_0 \rightsquigarrow x_1$, το "προφανές" τόξο, προφανώς $\beta \hat{w}_\alpha \bar{\beta} \simeq_T w_\alpha$, (όπου $\hat{\beta}(\hat{w}_\alpha) = \beta \hat{w}_\alpha \bar{\beta}$)

Σχηματικά, η ομοτοπία:



Ας θυμηθούμε, ότι ο $\hat{\beta}$ είναι φυσικός ισομορφισμός, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα μετατίθεται:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "J"] \arrow[d, "\hat{\beta}", "\cong"'] & \pi_1(\hat{Y}, x_0) \arrow[d, "\hat{\beta}"] \\ \pi_1(X, x_1) \arrow[r, "J_1"] & \pi_1(\hat{Y}, x_1) \end{tikzcd}$$

Πρέπει: (2) $Ker(J) = \beta \lhd \hat{w}_\alpha \rhd = \lhd \beta \hat{w}_\alpha \rhd = \lhd w_\alpha \rhd$

και (1) J επί

Απο Van Kampen $\Rightarrow \pi_1(\hat{Y}, x_1) \xleftarrow{J_1} \pi_1(X, x_1) * O$, επί,

με $Ker(J_1) = \lhd \hat{w}_\alpha \rhd$

Σχόλιο

$$f: \underset{w_\alpha}{G} \xrightarrow{\cong} G'$$

$$f \lhd w_\alpha \rhd = \lhd f w_\alpha \rhd$$

$$\Uparrow$$

$$f \langle w_\alpha \rangle = \langle f w_\alpha \rangle$$

και $\lhd H \rhd = HU$ (συζυγή της H).

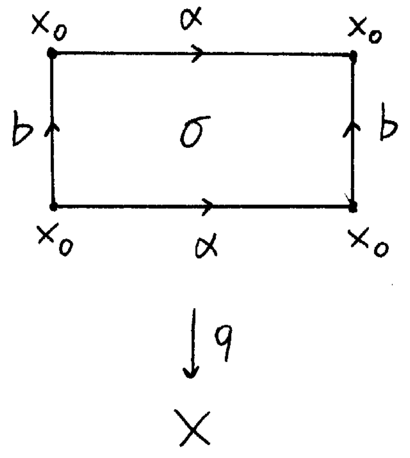
Παράδειγμα

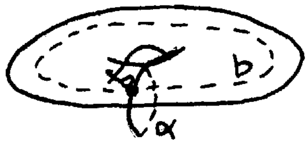
$X = M_1 =$ 

$\pi_1(X) = ?$

$1^{ος}$ τρόπος: $X \cong S^1 \times S^1 \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$2^{ος}$ τρόπος: Θεωρώ την CW-δομή στον X, που δίνεται απο την απεικόνιση πηλίκου, όπως, στο σχήμα.

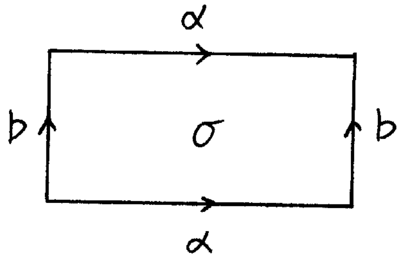


$X^1 =$ 

$\cong S^1 \vee S^1$

Άρα, $\pi_1(X^1) =$ ελεύθερος στα w_α, w_b, προφανή τόξα στο x_0, που αντιστοιχούν, στα α, b.

$\left(S^1 = [0,1]/_{0\sim 1}\right)$

Από το σχήμα 

, είναι προφανές, ότι

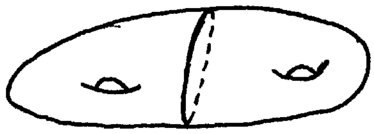
το w_σ του προηγούμενου θεωρήματος $= w_\alpha w_b w_\alpha^{-1} w_b^{-1} =$

$= [w_\alpha, w_b] \rightsquigarrow$ (commutator).

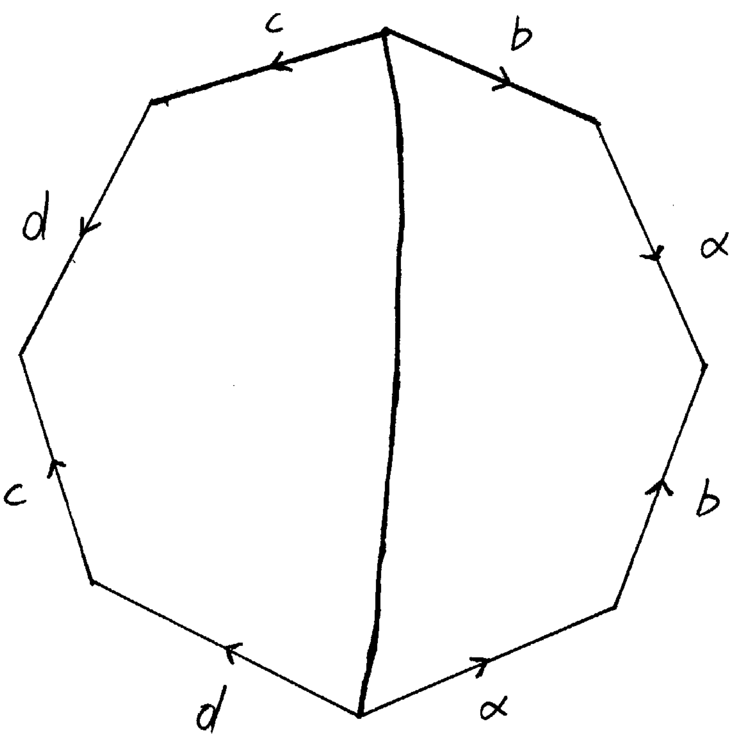
Προηγούμενο θεώρημα $\Rightarrow \pi_1(X) = F(w_\alpha, w_b)/_{[w_\alpha, w_b]} \underset{(*)}{\cong} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

(*-Άσκηση : Να δείξετε τον ισομορφισμό. Υπόδειξη : Δείξτε πρώτα ότι η $F(\kappa,\lambda)/_{[\kappa,\lambda]}$ αβελιανή $\Rightarrow$ παίρνω $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to F(\kappa,\lambda)/_{[\kappa,\lambda]}$, που αντιστρέφει, την προφανή.

<u>Παρόμοια</u>

$X = M_2 =$ 

Έχω



Παρόμοια, $\pi_1(M_2) \cong F(\alpha,b,c,d) \big/ [\alpha,b]\cdot[c,d]$, όχι-αβελιανή.

Εν γένει, $\pi_1(M_g) = F(\alpha_1, b_1, \dots, \alpha_g, b_g) \big/ [\alpha_1,b_1]\cdots[\alpha_g,b_g]$.

Πόρισμα

Έστω M_g = συμπαγής, προσανατολίσιμη, χωρίς σύνορο, πολλαπλότητα, γένους g.

Τότε, $M_g \cong M_h \Rightarrow g = h$.

Απόδειξη

Έχω συναρτητή
$$\begin{aligned} \text{Ομάδες} &\longrightarrow \text{Αβ. Ομάδες}. \\ G &\longmapsto G^{ab} \end{aligned}$$

Άρα, $G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_1^{ab} \cong G_2^{ab}$

Επίσης, $\left(\pi_1(M_g)\right)^{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}$

(Παρόμοια με την προηγούμενη άσκηση, αρκεί ν.δ.ο. $F(a_1, \dots, a_n) \cong \mathbb{Z}^n$).

Για πεπερασμένα παραγόμενες αβ. ομάδες, υπάρχει "invariance of dimensions".

Εφαρμογή: Κάθε ομάδα, είναι θεμελιώδης ομάδα.

Θεώρημα

Έστω G ομάδα. Τότε, $\exists$ Κ.Τ.Σ., 2-dim CW-complex X, με $\pi_1(X) \cong G$

Απόδειξη

Θεωρώ μια παράσταση $\langle g_\alpha : \alpha \in I \, ; \, r_b : b \in J \rangle$.

Δηλαδή, έναν επιμορφισμό $f : F\langle g_\alpha : \alpha \in I \rangle \longrightarrow G$, με

$Ker(f) = \lhd r_b : b \in J \rhd$

Κάθε G, έχει τέτοια, παράσταση. Μια "κανονική", είναι η εξής: $\{g_\alpha\} = G$, $f :=$ η επαγόμενη απο την universal property.

(Επεξηγηματικό σχόλιο: $F\langle g_\alpha \rangle = \underset{\alpha}{*} \mathbb{Z}$ και οι απεικονίσεις ομάδων $\mathbb{Z} \to G$, αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα, με τα στοιχεία g_α της G.).

Έστω $N = Ker(f)$. Έστω $\{r_b : b \in J\} = N$.

Τώρα, κατασκευάζω το X: $(X^0 = *)$

$X_1 := \bigvee_\alpha S^1$.

Άρα, έχω την προφανή, $f_1 : \pi_1(X^1) \xrightarrow{\cong} F\{g_\alpha\}$.

Για $b \in J$, μέσω της f_1, το r_b αντιστοιχεί με στοιχείο του $\pi_1(X^1)$.

Επιλέγω, έναν αντιπρόσωπο, που επάγει $\varphi_b : S^1 \to X^1$, (αφού $S^1 \cong [0,1]/_{0\sim 1}$).

Θέτω $X = X^2 := X^1 \sqcup \left(\bigsqcup_{b\in J} D_b^2\right) \big/ \sim$, όπου, $s \sim \varphi_b(s)$

$(s \in S_b^1, b \in J)$.

<u>Σχόλιο</u>: Εν γέννει, έτσι κατασκευάζω n-dim CW-complex X, δεδομένων των X^{n-1} και των attaching maps, για τα n-cells.

Άρα, $\pi_1(X) \cong \pi_1(X^1) \big/ \langle [\varphi_b] \rangle \underset{f_1\text{-induced}}{\cong} F\{g_a\} \big/ \langle r_b \rangle \underset{f\text{-induced}}{\cong} G$

<u>Πληροφοριακά - Ισχυρότερο</u>

Για κάθε ομάδα G, ∃ Κ.Τ.Σ. CW X :

(1) $\pi_1(X) \cong G$, και

(2) $\tilde{X} \simeq *$.

Μάλιστα, το X είναι μοναδικό, έως ομοτοπικής ισοδυναμίας.

(Καταχρηστικά), ο X γράφεται, ως BG ή $K(G,1)$.

Ενδιαφέροντα Θεωρήματα

(1) Η θεωρία ομάδων "εμφυτεύεται" στην θεωρία ομοτοπίας.

$$\{\text{μορφισμοί ομάδων } G \to G'\} \xleftarrow[\pi_1]{\cong} \left\{\begin{array}{l}\text{κλάσεις βασισμένης} \\ \text{ομοτοπίας, μορφισμών} \\ \text{χώρων, } BG \to BG'\end{array}\right\} = [BG, BG']_*$$

(2) $H_*(BG) \cong H_*(G)$

$H_*(BG)$: singular homology

$H_*(G)$: Ομολογία ομάδων (ορίζεται αλγεβρικά)

(3) G αβελιανή, X χώρος $\Rightarrow [X, BG]_* \cong H^1(X;G)$

BG: Eilenberg MacLane space $K(G,1)$

(4) Για κάθε G, $[X, BG] \cong$ "principal G-bundles" / X

$[X, BG]$: κλάσεις (ελεύθερης) ομοτοπίας

(classifying space BG, "classifies" principal G-bundles)

Απόδειξη του Θεωρήματος Van Kampen

Μέρος A : (Ο Φ είναι επί).

Θυμηθείτε: Εαν $f: A \to B$ μορφισμός τοπ. χώρων με A, συμπαγή, μετρικό και αν $B = \cup B_\alpha$ μια ανοιχτή κάλυψη του B, τότε $\exists \delta \in \mathbb{R}_+$, που είναι αριθμός του Lebesgue, (για τα $f, \cup B_\alpha$), δηλαδή ικανοποιεί : $\forall U \subset A$, με

διάμετρο$(U) \leq \delta$, $\exists \alpha : f(U) \subset B_\alpha$.

(Όπου διάμετρος $(U) = \sup\{$απόσταση$(x,y) : x,y \in U\}$
Αν A συμπαγές $\Rightarrow U$ φραγμένο $\Rightarrow \sup \neq +\infty$.
Απόδειξη: Όχι-δύσκολη άσκηση του point-set topology).

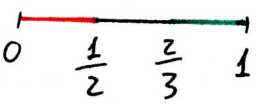
Έστω $f : [0,1] \to X$, κλειστό τόξο στο x_0 .

Βρίσκω $\delta \in \mathbb{R}_+$, αριθμό Lebesgue (για $f, \cup X_\alpha = X$) .

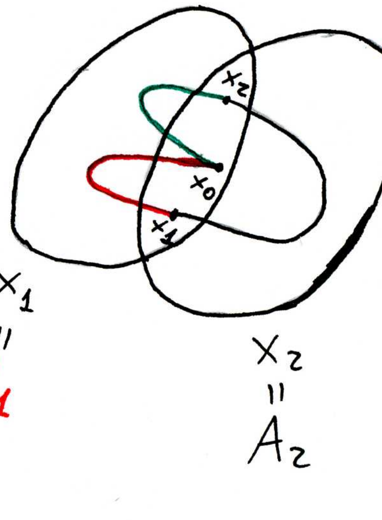
Παίρνω $n \in \mathbb{Z}$, $n > \frac{1}{\delta}$. Έστω $s_i = \frac{i}{n}$.

Έχω υποδιαίρεση $\underset{s_0}{0}\; s_1 \cdots\cdots s_{n-1}\; \underset{s_n}{1}$, με $f[s_{i-1}, s_i]$, να περιέχεται, σε κάποιο, $X_\alpha := A_i$

(π.χ. $X = X_1 \cup X_2$,



,



)

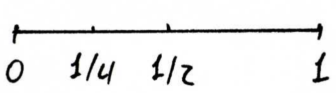
Για $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, εαν $A_i = X_\alpha$, $A_{i+1} = X_b$, τότε $A_i \cap A_{i+1} = X_{\alpha b}$, κ.τ.ξ $\Rightarrow \exists$ τόξο g_i, του $A_i \cap A_{i+1}$, απο το x_0 στο $x_i := f(s_i)$.

Θεωρώ τις "αναπαραμετρήσεις" $f_i : [0,1) \xrightarrow{\text{"κανονικός"}} [s_{i-1}, s_i] \xrightarrow{f|} X$.

Όπως αποδείξαμε, ο πολλ/μός είναι προσεταιριστικός. Μπορούμε, γενικότερα, ν.δ.ο. $f \simeq_T f_1 * \cdots * f_n$ (με όποιο τρόπο, και αν βάλω, παρενθέσεις).

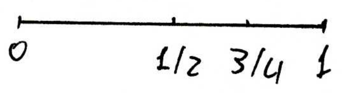
Αυτήν την f, θα την λέω, "γινόμενο χωρίς παρενθέσεις".

(π.χ. $(f_1 f_2) f_3$:

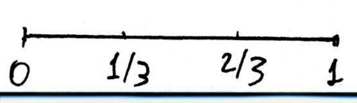


)

$f_1 (f_2 f_3)$:

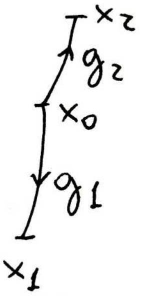


$f_1 f_2 f_3$:

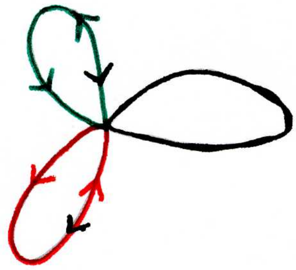


Άρα, $f = f_1 * f_2 * \dots * f_n \simeq_T (f_1 * \bar{g}_1) * (g_1 * f_2 \bar{g}_2) * \dots * (g_{n-1} * f_n)$

(π.χ. Στο προηγούμενο παράδειγμα "$X = X_1 \cup X_2$", διαλέγω)



στο $X_1 \cap X_2 =$  . Έχω $[f] = [w_1] \cdot [w_2] \cdot [w_3]$



Παραγοντοποίηση, σε γινόμενο κλειστών τόξων, και κάθε όρος εντός παρενθέσεως είναι κλειστό τόξο του A_i, στο x_0, δηλαδή, η Φ είναι επί.

Μέρος Β (Πιο δύσκολο): (Περιγραφή του $Ker(\Phi)$)

Εισάγω προσωρινά (ουσιαστικά, ακολουθώντας τον Hatcher), την εξής ορολογία:

Θα λέω ότι τα $([f_1], \alpha_1), \dots, ([f_n], \alpha_n)$, με $[f_i] \in \pi_1(X, \alpha_i)$ αποτελούν μια αποδεκτή παραγοντοποίηση (α.π.) της $[f_1] \dots [f_n]$ (όπου, καταχρηστικά, γράφω $[f_i]$ και για την inclusion-induced εικόνα, στο $\pi_1(X)$).

Σχόλιο

Το ότι η Φ είναι επί, επαναδιατυπώνεται, ως εξής:

Κάθε $[f] \in \pi_1(X)$ έχει κάποια α.π.

"Συμφωνία"

(Καταχρηστικά), μια α.π. της $[f]$, όπως παραπάνω, θα συμβολίζεται απλώς, με $[f] = [f_1] \cdots [f_n]$, όπου, $[f_i] \in \pi_1(X, \alpha_i)$.

Δεδομένης α.π. της $[f]$, όπως παραπάνω, μια αποδεκτή μεταβολή (α.μ.), είναι μια οποιαδήποτε α.π. του τύπου (1) ή (2), παρακάτω:

(1) $[f] = [f_1] \cdots [f_{i-1}] \cdot [f_i f_{i+1}] \cdot [f_{i+2}] \cdots [f_K]$, εαν $\alpha_i = \alpha_{i+1}$

(2) $[f] = \underset{\alpha_1}{[f_1]} \cdots \underset{\alpha_{i-1}}{[f_{i-1}]} \underset{b_i}{[f_i]} \underset{\alpha_{i+1}}{[f_{i+1}]} \cdots \underset{\alpha_K}{[f_K]}$, εαν f_i, παίρνει τιμές, στο, $X_{\alpha_i} \cap X_{b_i}$.

Ονομάζω δύο α.π. της $[f]$ ισοδύναμες, εαν συνδέονται, με πεπερασμένο πλήθος α.μ.

Παρατηρώ ότι:

(1) Εξ' ορισμού του " $\underset{\alpha}{*}$ ", μια α.μ. τύπου (1), δεν αλλάζει το $\underset{\alpha}{*} \pi_1(X_\alpha)$

(2) Εξ' ορισμού του N, μια α.μ. τύπου (2), δεν αλλάζει το γινόμενο, στο $Q := \underset{\alpha}{*} \pi_1(X_\alpha) / N$

Αναβάλλω -πρός το παρόν- την απόδειξη του παρακάτω ισχυρισμού:

Ισχυρισμός: **Κάθε δύο** α.π. της $[f] \in \pi_1(X)$ είναι ισοδύναμες

Ολοκλήρωση της απόδειξης:

Ξέρω ότι $N \subset Ker(\Phi)$.

Άρα, η ϕ επάγει $\bar{\Phi}$, που είναι μέρος, μεταθετικού διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
* \pi_1(X_\alpha) \arrow[r, "\text{"κανονικός"}"] \arrow[d, "\Phi"] & Q = \underset{\alpha}{*} \pi_1(X_\alpha) / N \arrow[dl, dashed, "\bar{\Phi}"] \\
\pi_1(X) &
\end{tikzcd}$$

Απομένει: Η $\bar{\Phi}$ είναι επί.

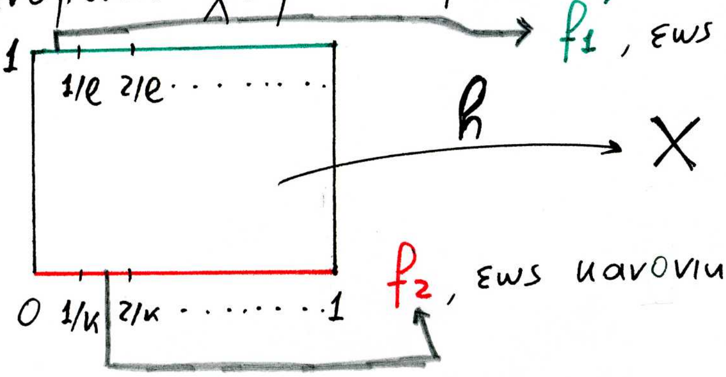
Δηλαδή, εαν δύο α.π. ισούνται στο $\pi_1(X)$, τότε ισούνται και στο Q. Αυτό όμως, είναι άμεση συνέπεια, της προηγούμενης πρότασης ∎

Απόδειξη (του ισχυρισμού)

Έστω $([f_1], \alpha_1) \cdots ([f_\kappa], \alpha_\kappa)$ και $([f_1'], \alpha_1') \cdots ([f_\ell'], \alpha_\ell')$,

δύο α.π. της $[f]$.

Έστω h, μια αντίστοιχη, ομοτοπία τόξων, μεταξύ των "γινομένων χωρίς παρενθέσεις", $f_1 * \cdots * f_\kappa$ και $f_1' * \cdots * f_\ell'$.



Βρίσκω $\delta \in \mathbb{R}_+$, αριθμό Lebesgue, για την h, $\cup X_\alpha = X$.

Βρίσκω $n \in \mathbb{Z}$, $n > \dfrac{\sqrt{2}}{\delta}$, με n πολλαπλάσιο του $\kappa \cdot \ell$.

Άρα, αφού, αν $R \subset [0,1] \times [0,1]$, τετράγωνο πλευράς $\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ διάμετρος $(R) = \sqrt{2} \cdot \alpha$

Αν $\alpha = \frac{1}{n}$, $h(R) \subset$ κάποιο X_α.

Το εφαρμόζω, στην εξής, υποδιαίρεση: