Πανεπιστημιο Κρητησ — Τμημα Μαθηματικων
Γεωμετρικη Τοπολογια — Εαρινο Εξαμηνο 2011–12

Μάνος Λυδάκης 25 Μαΐου 2012

Μέρος 1. Γενική Τοπολογία.

Οι Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$, απόσταση, δίσκοι, ανοιχτά σύνολα, και συνεχείς συναρτήσεις σε Ευκλείδειους χώρους, (τοπολογικοί) χώροι, διακριτοί και τετριμμένοι χώροι, συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ χώρων, κλειστά σύνολα, περιοχές, υπόχωροι, μετρικοί χώροι, ακολουθίες, ομοιομορφισμοί, βάσεις χώρων, χώρος γινόμενο, ξένη ένωση, χώρος πηλίκο, συμπάγεια, συμπάγεια στον $\mathbb{R}^n$, συνεκτικότητα, συνεκτικότητα στον $\mathbb{R}$, κατά δρόμους συνεκτικότητα, συνεκτικότητα του $\mathbb{R}^n$ και του $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Μέρος 2. Επιφάνειες.

Ο ανοιχτός n-δίσκος D^n, ο κλειστός n-δίσκος Δ^n, η n-σφαίρα S^n, καμπύλες, επιφάνειες, n-πολλαπλότητες, παραδείγματα, γινόμενα. Ο n-διάστατος προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ με έμφαση στις περιπτώσεις $n = 1$ (ο $\mathbb{R}P^1$ λέγεται και προβολική ευθεία) και $n = 2$ (ο $\mathbb{R}P^2$ λέγεται και προβολικό επίπεδο). Κατασκευή του προβολικού επιπέδου από μια ταινία του Möbius και ένα δίσκο. Συνεκτικό άθροισμα επιφανειών. Η επιφάνεια

$$M_g = \underbrace{M_1 \sharp M_1 \sharp \cdots \sharp M_1}_{g} \quad (M_1 = S^1 \times S^1)$$

γένους g και η επιφάνεια

$$N_h = \underbrace{N_1 \sharp N_1 \sharp \cdots \sharp N_1}_{h} \quad (N_1 = \mathbb{R}P^2),$$

διατύπωση του Θεωρήματος Κατάταξης των Συμπαγών Επιφανειών (ΘΚΣΕ), «σύμβολα» και οι επιφάνειες που περιγράφουν, σύμβολα και συνεκτικά αθροίσματα, η N_2 είναι η φιάλη K^2 του Klein, $M_1 \sharp N_1 \cong N_3$, οι M_g είναι οι προσανατολίσιμες, και οι N_h είναι οι μη-προσανατολίσιμες, συμπαγείς συνεκτικές επιφάνειες. Τοπολογικά τρίγωνα σε ένα χώρο, γραμμικά τρίγωνα σε ένα διανυσματικό χώρο, τριγωνιοποίηση μιας συμπαγούς επιφάνειας. Το πρώτο (από τα δύο) βήματα στην απόδειξη της «ύπαρξης» στο ΘΚΣΕ: αν S είναι τυχαία συμπαγής (συνεκτική) επιφάνεια, τότε κατασκευάσαμε ένα πολύγωνο, και ένα σύμβολο πάνω σε αυτό το πολύγωνο που περιγράφει την S. Ολοκλήρωση αυτής της απόδειξης: είδαμε πως να μετατρέψουμε το πολύγωνο, χωρίς να αλλάξει η επιφάνεια, αλλά το σύμβολο να γίνει ένα «στάνταρ» σύμβολο.

Μέρος 3. Η Θεμελιώδης Ομάδα.

Αν f και g είναι συνεχείς απεικονίσεις από το χώρο X στο χώρο Y, ορίσαμε τι σημαίνει «οι f και g είναι ομοτοπικές» (συμβολισμός: $f \sim g$), είδαμε παραδείγματα και ειδικότερα τη σχέση με δρόμους στον Y, και αποδείξαμε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Αν X και Y είναι χώροι, ορίσαμε τι σημαίνει «οι X και Y είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι» (συμβολισμός: $X \simeq Y$), παρατηρήσαμε ότι «τοπολογικά ισοδύναμοι $\Rightarrow$ ομοτοπικά ισοδύναμοι», και είδαμε παραδείγματα που δείχνουν ότι το αντίστροφο σαφώς δεν ισχύει. Αν σ και τ είναι δρόμοι στο χώρο X από το σημείο a του X στο σημείο b του X ορίσαμε τι σημαίνει «οι σ και τ είναι δρομο-ομοτοπικοί» (συμβολισμός: $\sigma \overset{a,b}{\sim} \tau$) και παρατηρήσαμε ότι και η $\overset{a,b}{\sim}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Το σύνολο των κλάσεων $[\sigma]$ αυτής της σχέσης το συμβολίσαμε με $\pi(X,a,b)$ και με $\pi(X,a)$ στην ειδική περίπτωση που $b = a$. Ορίσαμε τον πολλαπλασιασμό δρόμων που δίνει, για $[\sigma] \in \pi(X,a,b)$ και $[\tau] \in \pi(X,b,c)$, το γινόμενο $[\sigma][\tau] \in \pi(X,a,c)$. Αποδείξαμε ότι αυτό το γινόμενο έχει ένα είδος προσεταιριστικής ιδιότητας, ένα είδος ταυτοτικού στοιχείου, και ένα είδος αντιστρόφου, που, ειδικότερα για $a = b = c$, κάνει το $\pi(X,a)$ να είναι ομάδα (με την έννοια της άλγεβρας), η λεγόμενη θεμελιώδης ομάδα του χώρου X στο σημείο βάσης a. Αν σ είναι δρόμος από το a στο b, ορίσαμε την απεικόνιση $\sigma_\sharp : \pi(X,a) \to \pi(X,b)$ και είδαμε ότι είναι ισομορφισμός ομάδων.

Ορίσαμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένας χώρος X είναι απλά συνεκτικός, και αποδείξαμε ότι (για $X \neq \varnothing$) ο X είναι απλά συνεκτικός $\Leftrightarrow$ κάθε $\pi(X,a,b)$ είναι μονοσύνολο. Παρατηρήσαμε ότι αυτό συμβαίνει για κάθε (μη-κενό) κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα δώσαμε τους πρώτους μας υπολογισμούς του $\pi(X,a)$ ως εξής: Οι θεμελιώδεις ομάδες όλων των $\mathbb{R}^n, D^n, \Delta^n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ είναι τετριμμένες (για όλα τα πιθανά σημεία βάσης). Αν $f : X \to X'$ είναι τυχαία συνεχής συνάρτηση (μεταξύ δυο τυχαίων χώρων X και X'), και αν a και b είναι τυχαία σημεία του X, ορίσαμε το f_* που είναι μια σημαντική συνάρτηση, και λέγεται επαγόμενος μορφισμός. Το πεδίο ορισμού του f_* είναι το $\pi(X, a, b)$ και το πεδίο τιμών του είναι το $\pi(X', a', b')$ όπου $a' := f(a)$ και $b' := f(b)$. Δείτε τις σελίδες 69 έως 72 στις χειρόγραφες σημειώσεις για τον ορισμό και κάποιες σημαντικές ιδιότητες του επαγόμενου μορφισμού. Διατυπώσαμε το Θεώρημα Υπολογισμού της Θεμελιώδους Ομάδας του Κύκλου (ΘΥΘΟΚ), που, ειδικότερα, εγγυάται ότι η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου είναι (ισόμορφη με) το $\mathbb{Z}$. Είδαμε τη διαισθητική σημασία του ΘΥΘΟΚ, ειδικότερα τη σχέση με τον «δείκτη στροφής» ενός κλειστού δρόμου στο $\mathbb{R}^2$ γύρω από ένα σημείο, και με το «βαθμό» μιας (συνεχούς) $f : S^1 \to S^1$. Αποδείξαμε το ΘΥΘΟΚ (τα λήμματα 1 και 2 της διάλεξης αντιστοιχούν στα λήμματα I και II της σελίδας 52 των χειρόγραφων σημειώσεων). Αποδείξαμε ότι ομοτοπικά ισοδύναμοι χώροι έχουν ισόμορφες θεμελειώδεις ομάδες. Εξηγήσαμε σύντομα πως αποδεικνύεται η μοναδικότητα στο ΘΚΣΕ χρησιμοποιώντας το ότι οι θεμελιώδεις ομάδες των «στάνταρ» επιφανειών μπορούν να υπολογιστούν ως «ομάδες που δίνονται από γεννήτορες και σχέσεις».