Πανεπιστημιο Κρητης — Τμημα Μαθηματικων
Θεωρια Συνολων — Χειμερινο Εξαμηνο 2012–13

Μάνος Λυδάκης «Έξτρα» Ασκήσεις

---

1. Πάρτε $A = \{0, 2, 3, 4, \ldots\}$ (οι φυσικοί αριθμοί χωρίς το 1), πάρτε (για $x, y \in A$) το «$x \leq y$» να σημαίνει «το x διαιρεί το y» (δηλαδή: υπάρχει **ακέραιος** z με $xz = y$. Δείξτε

A. $0 = \max A$

B. Τα ελαχιστικά στοιχεία είναι ακριβώς οι **πρώτοι** αριθμοί (αυτοί που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα).

---

2. Πάρτε το A να είναι όλοι οι φυσικοί αριθμοί και το «$x \leq y$» να σημαίνει πάλι «διαιρετότητα». Βρείτε όλα τα ελαχιστικά και όλα τα μεγιστικά στοιχεία.

---

3. Θυμηθείτε τον «κύβο» που είναι η διάταξη «$\subseteq$» στο $A = \mathcal{P}(3)$ (όπου $3 = \{0, 1, 2\}$). Πάρτε $B = A - \{0, 3\}$ («πετάω έξω» το min και το max). Βρείτε όλα τα ελαχιστικά και όλα τα μεγιστικά στοιχεία.

---

4. Να επαναλάβετε το πρόβλημα 3 με $A = \mathcal{P}(4)$ και $B = A - \{0, 4\}$.

---

5. Να επαναλάβετε το πρόβλημα 3 με $A = \mathcal{P}(n)$ και $B = A - \{0, n\}$ (όπου n φυσικός, $n \geq 5$).

---

6. Έστω Z τυχάιο σύνολο και $\mathcal{A} = \mathcal{P}(Z)$. Θεωρώ τη διάταξη «$\subseteq$» στο $\mathcal{A}$. Για $X, Y \in \mathcal{A}$, έστω $\mathcal{B} = \{X, Y\}$. Υπάρχουν τα $\sup \mathcal{B}$ και $\inf \mathcal{B}$; Αν ναι, ποια είναι αυτά;

---

7. Έστω $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Θεωρώ τη διάταξη «διαιρετότητα» στο A. Για $x, y \in A$, έστω $B = \{x, y\}$. Υπάρχουν τα $\sup B$ και $\inf B$; Αν ναι, ποια είναι αυτά;

---

8. Δίνεται ένα σύνολο A, μια διάταξη στο A που την συμβολίζω με «$\leq$», και ένα υποσύνολο B του A. Δείξτε:

A. Αν υπάρχει το $\max B$ τότε υπάρχει και το $\sup B$ και μάλιστα $\max B = \sup B$.

B. Αν υπάρχει το $\sup B$ και ανήκει στο B τότε υπάρχει και το $\max B$ και μάλιστα $\max B = \sup B$.

---

9. Δίνεται ένα σύνολο A και μια διάταξη στο A που την συμβολίζω με «$\leq$». Δείξτε ότι, αν για κάθε μη-κενό άνω φραγμένο υποσύνολο B υπάρχει το $\sup B$, τότε για κάθε μη-κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο C υπάρχει το $\inf C$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το δεύτερο μέρος του προηγούμενου προβλήματος.

---

10. Για τυχαίους φυσικούς αριθμούς l, m, n, αποδείξτε

A. $m + n = m + l \Rightarrow n = l$

B. $m \cdot 1 = m$, $m \cdot 2 = m + m$, $0 \cdot n = 0$

Προσοχή: Δεν επιτρέπεται να θεωρήσετε τίποτα γνωστό, ούτε από το σχολείο ούτε από αλλα μαθήματα, εκτός από το τι έχουμε παρουσιάσει στο μάθημα (ισοδύναμα, έως την ενότητα 3.6 των σημειώσεων Σκανδάλη, που τελειώνει στη σελίδα 55). Εννοείται, επιτρέπεται και η «στοιχειώδης μαθηματική λογική». Ουσιαστικά δεν θα χρειαστείτε τίποτα άλλο εκτός από τους ορισμούς και επαγωγή (και, στο μέρος A, την προσεταιριστικότητα και αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης και κάποιο «αξίωμα» του Peano).

---

11. Για τυχαίους ακεραίους x, y, αποδείξτε ότι $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$. (Εννοείται, με παρόμοιους περιορισμούς όπως στο πρόβλημα 10. Ουσιαστικά θα χρειαστείτε μόνο τον ορισμό της «$\leq$», δηλαδή ότι $[m, n] \leq [k, l] \Leftrightarrow m + l \leq k + n$.)