Μάνος Λυδάκης 21 Δεκεμβρίου 2012

Κατασκευή του διατεταγμένου ζεύγους (a,b). Γενικευμένες ενώσεις, το Αξίωμα της Ένωσης, παραδείγματα, το Αξίωμα της Έκτασης. Γενικευμένες τομές, γιατί δεν υπάρχει «Αξίωμα της Τομής», το Αξίωμα (ή: Αξιωματικό Σχήμα) του Διαχωρισμού, το Παράδοξο του Russell, απόδειξη της ύπαρξης γενικευμένων τομών. Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου, κατασκευή του καρτεσιανού γινομένου, ο ορισμός της θεωρίας συνόλων για το τι σημαίνει η φράση «η f είναι συνάρτηση από το A στο B» (σημαίνει ότι η f, όπως και σχεδόν κάθε άλλη μαθηματική έννοια σε αυτό το μάθημα, είναι σύνολο—αυτό το σύνολο, που το ταυτίζουμε με την f, είναι το γράφημα της f). Το κριτήριο ισότητας συναρτήσεων. Σύντομη επανάληψη (από το μάθημα Θεμέλια των Μαθηματικών) των ένα-προς-ένα και επί συναρτήσεων, της ταυτοτικής και της αντίστροφης συνάρτησης, της εικόνας $f[A_1]$ ενός υποσυνόλου του πεδίου ορισμού, και της αντίστροφης εικόνας $f^{-1}[B_1]$ ενός υποσυνόλου του πεδίου τιμών. Ένα παράδειγμα σύγκρισης των $f(x)$ και $f[x]$. Το σύνολο B^A, που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις από το A στο B. Ασκήσεις (κυρίως υποδείξεις) πάνω στη «συνολοθεωρητική ερμηνεία» των $m^0 = 1, m^1 = m, m^2 = m \cdot m$, και πάνω στο ότι το 2^A είναι ισοπληθικό με το δυναμοσύνολο του A. Επαγωγικά σύνολα, η κατασκευή του συνόλου ω των φυσικών αριθμών, το Αξίωμα του Απείρου, τα Αξιώματα P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 του Peano (που για μας είναι θεωρήματα), η σχέση του P_5 με τη συνήθη διατύπωση της (Μαθηματικής) Επαγωγής, μεταβατικά σύνολα, κάθε $n \in \omega$, καθώς και το ίδιο το ω, είναι μεταβατικά, ολοκλήρωση της απόδειξης των P_j με την απόδειξη του P_4. Οι σχέσεις στο A ως σύνολα, πότε μια σχέση είναι μερική διάταξη και πότε ολική διάταξη, η σχέση «$\subseteq$» στο $A = \mathcal{P}(\mathcal{B})$ είναι μερική διάταξη (αλλά όχι ολική αν το B έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία), παραδείγματα. Κατασκευή της σχέσης «$\leq$» στο σύνολο των φυσικών αριθμών (η κατασκευή είναι πολύ εύκολη, απλώς ορίζουμε το «$\leq$» να σημαίνει «$\subseteq$») και απόδειξη ότι είναι ολική διάταξη. Ελάχιστα και μέγιστα στοιχεία, ελαχιστικά και μεγιστικά στοιχεία, κάτω φράγματα και άνω φράγματα, inf και sup. Καλές διατάξεις, απόδειξη ότι η διάταξη των φυσικών αριθμών είναι καλή διάταξη. Πλήρης επαγωγή, αναδρομικοί ορισμοί, κατασκευή της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών, κατασκευή των ακεραίων, ρητών και πραγματικών αριθμών (συμπεριλαμβανομένων και των πράξεων και της διάταξης). Ορίσαμε την έννοια του ισομορφισμού (συνόλων) ως εξής: αν f είναι μια συνάρτηση από το A στο B, λέμε ότι «η f είναι ισομορφισμός από το A στο B» και εννοούμε ότι είναι ένα-προς-ένα και επί του B. Λέμε ότι «τα σύνολα A και B είναι ισόμορφα» και εννοούμε ότι υπάρχει κάποιος ισομορφισμός από το A στο B (το συμβολίζουμε με $A \sim B$). Αποδείξαμε ότι αυτή η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας, είδαμε ότι η εμπειρία μας για πεπερασμένα σύνολα A και B μας πείθει ότι τα A και B είναι ισοπληθικά ακριβώς όταν είναι ισόμορφα, και το χρησιμοποιήσαμε αυτό σαν «αυστηρό ορισμό» του «ισοπληθικού» για τυχαία σύνολα. Πληθικοί αριθμοί (πληθάριθμοι), ορισμός του $\aleph_0$, πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, και ύψωση σε δύναμη πληθικών αριθμών. Ορισμός της σχέσης «$x \leq y$» (για πληθικούς αριθμούς x και y) χρησιμοποιώντας ένα-προς-ένα συναρτήσεις, το Θεώρημα των Cantor, Schröder, και Bernstein. Η περιγραφή της σχέσης «$x \leq y$» χρησιμοποιώντας επί συναρτήσεις, το Αξίωμα της Επιλογής, αριστερές και δεξιές αντίστροφες και η ισοδυναμία τους με επί και ένα-προς-ένα συναρτήσεις, η ανισότητα $x < 2^x$. Πεπερασμένα και άπειρα σύνολα, η Αρχή του Περιστεριώνα του Dirichlet, κατά-Dedekind-πεπερασμένα και κατά-Dedekind-άπειρα σύνολα, αριθμήσιμα σύνολα. Οι ισότητες $|\mathbb{Z}_+| = \aleph_0$, $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, και $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, η Εικασία του Συνεχούς. Ο $\aleph_0$ είναι ο μικρότερος άπειρος πληθάριθμος. Τα κατά-Dedekind-πεπερασμένα σύνολα είναι ακριβώς τα πεπερασμένα σύνολα. Διαισθητική εισαγωγή στους διατακτικούς αριθμούς. Αύξουσες συναρτήσεις, ισομορφισμοί διατεταγμένων συνόλων, η ταυτοτική συνάρτηση είναι αύξουσα, η σύνθεση αυξουσών συναρτήσεων είναι αύξουσα, η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας αύξουσας συνάρτησης $f : A \to B$ είναι αύξουσα αρκεί η διάταξη στο A να είναι ολική, τι σημαίνει η φράση «τα A και B είναι ισόμορφα» (ή: «τα A και B είναι όμοια» ή: «$A \approx B$»), η σχέση $\approx$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι ισομορφισμοί (διατεταγμένων συνόλων) διατηρούν ελάχιστα, ελαχιστικά, μέγιστα, και μεγιστικά στοιχεία, καθώς και ολικές και καλές διατάξεις. Παραδείγματα που δείχνουν ότι «$A \approx B$» σημαίνει «τα A και B έχουν ίδιο σχήμα». Γνησίως αύξουσες συναρτήσεις, και γιατί αυτές είναι ακριβώς οι ένα-προς-ένα αύξουσες συναρτήσεις αν η διάταξη στο πεδίο ορισμού είναι ολική. Η ανισότητα $x \leq f(x)$ που ισχύει για κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : A \to A$ και για κάθε x στο A αν το A είναι ΚΔΣ (Καλώς Διατεταγμένο Σύνολο). Συνέπειες αυτής της ανισότητας για A και B ΚΔΣ, ειδικότερα υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $A \to A$ (η ταυτοτική συνάρτηση), και το πολύ ένας ισομορφισμός $A \to B$. Αρχικά τμήματα, γνήσια αρχικά τμήματα, το γνήσιο αρχικό τμήμα $O_A(x)$ του ΚΔΣ A, κάθε γνήσιο αρχικό τμήμα B του ΚΔΣ A γράφεται ως $B = O_A(x)$. Άλλες δύο συνέπειες της παραπάνω ανισότητας $x \leq f(x)$, δηλαδή ότι $A \not\approx O_A(x)$ και ότι $O_A(y) \not\approx O_A(x)$ αν $y \neq x$. Υπερπερπεπερασμένη Επαγωγή, και πως μεταφράζεται σαν μέθοδος απόδειξης ότι «μια πρόταση $\Phi(x)$ ισχύει για κάθε x στο ΚΔΣ A». Σύγκριση ΚΔΣ. Διατακτικοί αριθμοί (δ.α.), κάθε φυσικός αριθμός είναι δ.α., το ίδιο το ω είναι δ.α., τα στοιχεία των δ.α. είναι δ.α., η ισότητα

$O_\alpha(\beta) = \beta$ που ισχύει για κάθε δ.α. α και κάθε στοιχείο β του α, η «προφανής» διάταξη των δ.α. και γιατί είναι ολική, ο (αμέσως) επόμενος δ.α. α^+ του δ.α. α. Η διάταξη των δ.α. είναι καλή, οι δ.α. είναι ακριβώς τα μεταβατικά σύνολα δ. αριθμών, ο δ.α. $\min \Phi$, υπάρχει το $\sup A$ για κάθε σύνολο δ. αριθμών A, το Παράδοξο του Buralli-Forti. Μοναδικότητα, δεδομένου ενός ΚΔΣ A, του διατακτικού αριθμού $\overline{A}$, που λέγεται διατακτικός αριθμός του A, και που καθορίζεται πλήρως από το ότι $A \approx B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$. Η ισότητα $\overline{A} = |A|$ για πεπερασμένα σύνολα, και απλά παραδείγματα του ότι για άπειρα σύνολα πολλοί διαφορετικοί δ.α. αντιστοιχούν στον ίδιο πληθάριθμο. Το Αξίωμα (ή: Αξιωματικό Σχήμα) της Αντικατάστασης, απόδειξη της ύπαρξης του $\overline{A}$. Σύντομη περιγραφή της Αρχής Καλής Διάταξης και του Λήμματος των Kuratowski-Zorn και της ισοδυναμίας τους με το Αξίωμα της Επιλογής. Ο ορισμός των πληθικών αριθμών ως αρχικών διατακτικών αριθμών, η διατάξη των αρχικών διατακτικών αριθμών είναι η ίδια, είτε τους θεωρήσουμε ως πληθικούς, είτε ως διατακτικούς, αριθμούς. Απόδειξη ότι η διάταξη των πληθικών αριθμών είναι καλή, ειδικότερα ολική, και ότι $X \sim Y \Leftrightarrow |X| = |Y|$. Η αριθμητική των διατακτικών αριθμών. Οι αριθμοί $\aleph$ («άλεφ»), οι οποίοι είναι ακριβώς οι άπειροι πληθάριθμοι, και πως αντιστοιχεί ακριβώς ένας τους σε κάθε διατακτικό αριθμό.