Πανεπιστημιο Κρητησ — Τμημα Μαθηματικων
Θεωρια Συνολων — Χειμερινο Εξαμηνο 2012–13

Μάνος Λυδάκης — Ένα μέρος της διάλεξης της 23 Νοεμβρίου

Θεώρημα. Ο $\aleph_0$ είναι ο μικρότερος άπειρος πληθάριθμος.

Απόδειξη. Έστω x άπειρος πληθάριθμος, έστω ότι αντιπροσωπεύεται από το σύνολο A. Ζητώ να δείξω ότι $\aleph_0 \leq x$, αρκεί λοιπόν να βρω $a : \omega \to A$ που να είναι ένα-προς-ένα.

Θα χρησιμοποιήσω το Αξίωμα της Επιλογής. Έστω λοιπόν $I = \{i \in \mathcal{P}(A) : i \neq \varnothing\}$. Δηλαδή τα i στο I είναι ακριβώς τα μη-κενά υποσύνολα του A. Θέτω τώρα $B_i = i$ και χρησιμοποιώ το Αξίωμα της Επιλογής για να επιλέξω $b_i \in B_i$.

Έστω J το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του A. Έστω $h : J \to J$ η συνάρτηση που δίνεται με τον τύπο $h(C) = C \cup \{b(A\backslash C)\}$ (όπου $A\backslash C$ είναι το συμπληρωματικό του C ως προς A).

Για τους προσεκτικούς: Γιατί το b_i ορίζεται αν $i = A\backslash C$; Ισοδύναμα: Γιατί αυτό το i ζει στο I; Δηλαδή: Γιατί αυτό το i δεν είναι κενό; Απάντηση: Επειδή $i = \varnothing$ σημαίνει $A = C$ που δεν γίνεται αφού το A είναι άπειρο.

Ορίζω αναδρομικά το πεπερασμένο υποσύνολο C_n του A. Ο ορισμός είναι: $C_0 = \varnothing$, και ο αναδρομικός τύπος είναι $C_{n+1} = h(C_n)$.

Παρατηρήστε ότι $C_{n+1} = C_n \cup \{b_i\}$, όπου $i = A\backslash C_n$, ειδικότερα $C_n \subseteq C_{n+1}$, οπότε (εύκολη επαγωγή στο k) $C_n \subseteq C_{n+k}$ (για κάθε $k \in \omega$). Ξέρουμε ότι τα $m \in \omega$ με $m \geq n$ είναι ακριβώς τα παραπάνω $n + k$. Το τελικό συμπέρασμα της παραγράφου είναι ότι η C_n είναι αύξουσα ακολουθία, δηλαδή $n \leq m \Rightarrow C_n \subseteq C_m$.

Τώρα ορίζω την ακολουθία $a : \omega \to A$ με $a_n = b_i$ όπου $i = A\backslash C_n$. Δηλαδή $C_{n+1} = C_n \cup \{a_n\}$. Ειδικότερα παρατηρήστε ότι $a_n \in C_{n+1}$, ενώ, αφού το b_i επιλέχτηκε να ανήκει στο $B_i = i$, ειδικότερα το a_n ανήκει στο $A\backslash C_n$, δηλαδή $a_n \notin C_n$.

Εξηγώ τώρα τη διαφορά αυτής της «αυστηρής» απόδειξης από την «ιδέα της απόδειξης» που έδωσα στην αίθουσα. Η διαφορά εδώ είναι ότι ελέγχουμε «ουσιαστικά με κάθε λεπτομέρεια» ότι το a_n είναι πράγματι συνάρτηση του n. Δηλαδή όποιος θέλει, για να βεβαιωθεί, να κατασκευάσει αυτή τη συνάρτηση (ως σύνολο), μπορεί να το κάνει. Τα ουσιαστικά στοιχεία που θα χρειαστεί να θυμηθεί, είναι ότι η αρχή της αναδρομής εγγυάται ότι το C_n είναι συνάρτηση του n, και μετά ο τύπος $a_n = b(A\backslash C_n)$ δείχνει ότι το a_n είναι συνάρτηση του n. (Θυμηθείτε τη συμφωνία μας ότι b_i σημαίνει $b(i)$.)

Απομένει να ελέγξουμε ότι η a είναι ένα-προς-ένα. Ας υποθέσουμε ότι $n \neq m$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n < m$ (αν $m < n$ εναλλάσσουμε τα ονόματα των n και m). Αφού οι n και m είναι φυσικοί αριθμοί, το $n < m$ σημαίνει $n + 1 \leq m$, άρα $C_{n+1} \subseteq C_m$. Ξέρω ότι $a_n \in C_{n+1}$. Επίσης ξέρω $a_m \notin C_m$ άρα (επειδή $C_{n+1} \subseteq C_m$) $a_m \notin C_{n+1}$. Δηλαδή για τα a_n και a_m ισχύει ότι το ένα ζει στο C_{n+1} ενώ το άλλο όχι, άρα $a_n \neq a_m$. Περίληψη: υποθέτοντας ότι $n \neq m$ αποδείξαμε ότι $a_n \neq a_m$. Αποδείξαμε δηλαδή ότι η a είναι ένα-προς-ένα, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.