Μιχάλης Παπαδημητράκης

Ανάλυση

Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στη Μαρία

και

στα παιδιά μας, Μυρτώ-Ασπασία και Δημήτρη.

Προκαταρκτικά.

Το αντικείμενο αυτού του βιβλίου είναι οι **πραγματικοί αριθμοί** και οι **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής**. Αφού αναφερθούν οι βασικές ιδιότητες των (πραγματικών) αριθμών, δηλαδή η **Ιδιότητα Συνέχειας** και τα πορίσματά της, εισάγονται οι έννοιες του ορίου ακολουθίας και του ορίου συνάρτησης, η έννοια της συνεχούς συνάρτησης και οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Ακολουθεί η μελέτη των σειρών αριθμών, των ακολουθιών συναρτήσεων, των σειρών συναρτήσεων και των γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Το βιβλίο τελειώνει με το ζήτημα της **αξιωματικής θεμελίωσης** των πραγματικών αριθμών.

Το πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Παν/μίου Κρήτης περιλαμβάνει τρία μαθήματα σχετικά με τα παραπάνω θέματα. Το ένα είναι το μάθημα πρώτου εξαμήνου *Απειροστικός Λογισμός Ι*, ένα "υπολογιστικό" μάθημα με έμφαση στον χειρισμό των ορίων, των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων, και τα άλλα δυο είναι τα μαθήματα τρίτου και τέταρτου εξαμήνου *Ανάλυση Ι και Ανάλυση ΙΙ*, δυο "θεωρητικά" μαθήματα με έμφαση στη θεμελίωση των εννοιών και στις θεωρητικές αποδείξεις. Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους φοιτητές των δυο τελευταίων μαθημάτων.

Το επίπεδο του βιβλίου *δεν είναι στοιχειώδες*, διότι ασχολείται με τη βαθύτερη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, την Ιδιότητα Συνέχειας, και αποδεικνύει όλα τα βασικά αποτελέσματα που στηρίζονται στην ιδιότητα αυτή. Για παράδειγμα, αποδεικνύονται η ύπαρξη ριζών των θετικών αριθμών, το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass για ακολουθίες, τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις, θεμελιώνεται η έννοια του ολοκληρώματος και αποδεικνύεται η ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων.

Το επίπεδο του βιβλίου *δεν είναι ούτε εύκολο*; είναι αρκετά πυκνογραμμένο και απαιτεί συγκέντρωση και επιμονή. Οι φοιτητές πρέπει να δώσουν μεγάλη έμφαση στην ακριβή διατύπωση των εννοιών, στην κατανόηση και, κυρίως, στην αναπαραγωγή των αποδείξεων των κυριώτερων αποτελεσμάτων και, οπωσδήποτε, στη μαθηματικά αυστηρή επίλυση θεωρητικών ασκήσεων. Σε πολλές από τις ασκήσεις, και κυρίως στις πιο θεωρητικές, υπάρχουν υποδείξεις, άλλοτε λιτές και άλλοτε εκτενείς. Ο φοιτητής θα αποφασίζει κάθε φορά αν και σε ποιο βαθμό θα καταφεύγει σ' αυτές.

Θα ήθελα να κάνω κάποια σχόλια για το περιεχόμενο.

1. Η Ιδιότητα Συνέχειας παρουσιάζεται, *κατ' αρχάς*, στην απλούστερη - και ισοδύναμη - μορφή της: *αν έχουμε δυο μη-κενά υποσύνολα της πραγματικής ευθείας, από τα οποία το ένα βρίσκεται αριστερά και το άλλο δεξιά, τότε υπάρχει κάποιο σημείο της ευθείας ανάμεσα στα δυο αυτά σύνολα*. Ο λόγος είναι ότι αυτή η μορφή είναι πολύ πιο εύληπτη και ψυχολογικά αποδεκτή από φοιτητές χωρίς προηγούμενη εμπειρία σε τέτοιου είδους έννοιες. Σε αυτή τη μορφή της Ιδιότητας Συνέχειας βασίζονται οι αποδείξεις της Αρχιμήδειας Ιδιότητας, της ύπαρξης ριζών, του ορισμού δυνάμεων με άρρητους εκθέτες και λογαρίθμων. Φυσικά, εισάγεται και η έννοια του ελάχιστου άνω φράγματος και αποδεικνύεται η ισοδυναμία της Ιδιότητας Συνέχειας με την Ιδιότητα Supremum: *κάθε μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα*.

2. Τονίζεται η έννοια της περιοχής σε σχέση με την έννοια του ορίου ακολουθίας. Επίσης, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις εκφράσεις "από κάποιον n και πέρα" και "για άπειρους n" και στις σχετικές Προτάσεις 2.2, 2.3. Αντιστοίχως, δίνεται έμφαση στις εκφράσεις "κοντά στο ξ" και "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ" σε σχέση με την έννοια του ορίου συνάρτησης και στις σχετικές Προτάσεις 3.5, 3.6.

3. Οι *αναλυτικοί ορισμοί* των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, μέσω δυναμοσειρών αλλά και μέσω ολοκληρωμάτων, παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 10 και αποδεικνύονται οι γνωστές ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται, όμως, ελεύθερα στα προηγούμενα κεφάλαια ως παραδείγματα.

4. Το ολοκλήρωμα Riemann ορίζεται, κατ' αρχάς, μέσω των αθροισμάτων Darboux και βάσει αυτού του ορισμού αποδεικνύονται οι διάφορες ιδιότητές του. Κατόπιν, παρουσιάζεται και ο ορισμός μέσω των αθροισμάτων Riemann και αποδεικνύεται η ισοδυναμία των δυο ορισμών. Παρά το ότι τα αθροίσματα Riemann συνδέονται πιο άμεσα και φυσιολογικά με τις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων, προτάσσω τα αθροίσματα Darboux διότι μου φαίνεται ότι οι αποδείξεις των περισσότερων ιδιοτήτων του ολοκληρώματος είναι λίγο απλούστερες αν βασιστούν στα αθροίσματα Darboux απ' ότι αν βασιστούν στα αθροίσματα Riemann.

5. Στη μελέτη των γενικευμένων ολοκληρωμάτων *με παράμετρο* χρειάζονται μερικές έννοιες σχετικές με συναρτήσεις δυο πραγματικών μεταβλητών. Για παράδειγμα, η έννοια της συνέχειας και της ομοιόμορφης συνέχειας συνάρτησης δυο πραγματικών μεταβλητών και η έννοια της μερικής παραγώγου. Ό,τι χρειάζεται αναπτύσσεται πολύ σύντομα και μόνο για τον επιδιωκόμενο σκοπό (και πρόχειρα, είναι αλήθεια), αλλά αυστηρά.

6. Είναι βέβαιο ότι ο χρόνος δεν επαρκεί για να διδαχτούν όλα τα θέματα τα οποία περιέχονται σ' αυτό το βιβλίο όπως είναι βέβαιο ότι πρέπει να γίνει προσεκτική *επιλογή* ποιων, από όσα διδαχτούν, θα γίνουν οι αποδείξεις στον πίνακα). Μάλιστα, μερικά τέτοια θέματα (κάποια ζητήματα κυρτών συναρτήσεων, η ανισότητα Jensen, ή διαδοχική άθροιση διπλών σειρών, το θεώρημα του Riemann για αναδιατάξεις σειρών, το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίου για τα γενικευμένα ολοκληρώματα, η αξιωματική θεμελίωση κλπ) τα συμπεριέλαβα μόνο και μόνο για να τα δει και να τα διαβάσει όποιος φοιτητής δείξει ενδιαφέρον. Προβληματίστηκα για το αν πρέπει να παρουσιαστεί το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας: *μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειάς της έχει μηδενικό μέτρο*. Αποφάσισα ότι το κριτήριο αυτό και η απόδειξή του είναι κάπως "εκτός κλίματος" και δεν το συμπεριέλαβα.

7. Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται λεπτομερώς η *αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών θεωρώντας δεδομένους τους φυσικούς και τα Αξιώματα του Peano*. Αυτή είναι, κατά τη γνώμη μου, η φυσιολογική μέθοδος. Η παρουσίαση βασίζεται στο βιβλίο Foundations of Analysis του E. Landau με πολλές δικές μου παρεμβάσεις και προσαρμογές. Η μετάβαση από τους (θετικούς) ρητούς στους (θετικούς) πραγματικούς γίνεται με τη μέθοδο των *τομών του Dedekind*. Παρουσιάζονται, όμως, και οι μέθοδοι των ακολουθιών Cauchy και των εγκιβωτισμένων διαστημάτων, αλλά συνοπτικά και χωρίς αποδείξεις.

Παρουσιάζεται, λεπτομερώς, και η αντίστροφη μέθοδος: ξεκινώντας με τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών, αποδεικνύονται οι βασικές αλγεβρικές ιδιότητές τους και ορίζεται το σύνολο των φυσικών ως *το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο* πραγματικών αριθμών.

8. Για αρκετά θέματα παρουσιάζονται αρκετές αποδείξεις είτε στο κυρίως κείμενο της θεωρίας είτε υπο μορφή ασκήσεων. Για παράδειγμα, για το κριτήριο του Cauchy για σύγκλιση ακολουθιών υπάρχουν τέσσερις αποδείξεις.

9, Τέλος, υπάρχουν μερικά θέματα, τα οποία δύσκολα βρίσκει κανείς σε βιβλία και, μάλιστα, τέτοιου επιπέδου. Μερικά από αυτά είναι: η ακριβής αιτιολόγηση του ότι δεν ορίζονται δυνάμεις αρνητικών αριθμών με μη-ακέραιους εκθέτες, η σύνδεση ανάμεσα στις έννοιες της μέσης τιμής συνάρτησης και της μέσης τιμής αριθμών, μια διεξοδική ανάπτυξη της ολοκλήρωσης ρητών παραστάσεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων και η προηγουμένως αναφερθείσα εναλλακτική και "απλούστερη" μορφή της Ιδιότητας Συνέχειας.

Τα παρακάτω βιβλία διαμόρφωσαν, άλλο λιγότερο και άλλο περισσότερο, την άποψή μου για τα θέματα αυτού του βιβλίου και κατ' επέκταση τη μορφή που αυτά πήραν σ' αυτό το βιβλίο:

Mathematical Analysis, T. Apostol.

Differential and Integral Calculus, R. Courant.

The Theory of Functions of Real Variables, L. Graves.

Foundations of Analysis, E. Landau.

Principles of Mathematical Analysis, W. Rudin.

A Course of Higher Mathematics, V. Smirnov.

Calculus, M. Spivak.

The Theory of Functions, E. C. Titchmarsh.

Από την άλλη μεριά, υπάρχουν αρκετά άλλα πάρα πολύ καλά βιβλία με παρόμοιο περιεχόμενο, όπως τα

Calculus, T. Apostol.

Introduction to Calculus and Analysis, R. Courant - F. John.

και, από τα ελληνικά, τα

Απειροστικός Λογισμός, Α. Γιαννόπουλος (http://users.uoa.gr/∼apgiannop/).

Απειροστικός Λογισμός, Σ. Νεγρεπόντης - Ε. Γιαννακούλιας - Σ. Γιωτόπουλος.

Για να πάρει την παρούσα μορφή του το βιβλίο αυτό έχει γραφτεί, με το χέρι και με τον υπολογιστή, διορθωθεί και ξαναδιορθωθεί άπειρες φορές και συμπυκνώνει εξαιρετικά πολύ κόπο. Επειδή, όμως, είναι σαφές ότι κι αυτή η μορφή απέχει αρκετά από το να είναι βέλτιστη, είναι απείρως ευπρόσδεκτες οποιεσδήποτε επισημάνσεις λαθών αλλά και παρατηρήσεις ως προς το στυλ παρουσίασης ή την επιλογή των θεμάτων.

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης

Σεπτέμβριος 2011.

Περιεχόμενα

Μέρος I

Η έννοια του ορίου: τα βασικά.

Κεφάλαιο 1

Οι πραγματικοί αριθμοί.

1.1 Το $\overline{\mathbb{R}}$.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε $\mathbb{R}$. Τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών τα συμβολίζουμε, αντιστοίχως, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$. Όταν λέμε "αριθμός" ή "σύνολο" θα εννοούμε "πραγματικός αριθμός" ή "υποσύνολο του $\mathbb{R}$", αντιστοίχως.

Δε θα ασχοληθούμε με τις στοιχειώδεις ιδιότητες των πράξεων και των ανισοτήτων στο $\mathbb{R}$ ούτε με την αναπαράσταση των αριθμών ως σημεία ευθείας, της λεγόμενης **πραγματικής ευθείας**. Με όλα αυτά είμαστε εξοικειωμένοι από το γυμνάσιο.

Ορισμός. Το σύνολο

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

ονομάζεται **επεκτεταμένο** $\mathbb{R}$. Τα *σύμβολα* $+\infty$, $-\infty$ ονομάζονται **συν άπειρο** και **πλην άπειρο**, αντιστοίχως.

Τώρα θα ορίσουμε προσεκτικά τις επεκτάσεις των πράξεων και των ανισοτήτων στο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$. Μπορεί οι ορισμοί που ακολουθούν να φαίνονται αυθαίρετοι, αλλά δεν είναι. Όλοι ανάγονται στην εμπειρική αντίληψή μας για τις έννοιες του "μεγάλου" (θετικού ή αρνητικού) και του "μικρού" (θετικού ή αρνητικού) και για τις μεταξύ τους σχέσεις. Για παράδειγμα, η εμπειρία υπαγορεύει ότι το άθροισμα δυο πολύ μεγάλων θετικών ποσοτήτων είναι πολύ μεγάλη θετική ποσότητα: αυτό αιτιολογεί το $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$. Από την εμπειρία μας, και πάλι, γνωρίζουμε ότι η διαφορά δυο πολύ μεγάλων θετικών ποσοτήτων μπορεί να είναι είτε πολύ μεγάλη θετική ποσότητα είτε πολύ μεγάλη αρνητική ποσότητα είτε *οποιαδήποτε* ενδιάμεση ποσότητα: αυτό δικαιολογεί το ότι δεν ορίζεται το $(+\infty) - (+\infty)$ και τον χαρακτηρισμό του ως *απροσδιόριστη μορφή*. Επίσης, το γινόμενο μιας πολύ μεγάλης θετικής ποσότητας και μιας πολύ μικρής ποσότητας (θετικής ή αρνητικής) μπορεί να είναι είτε πολύ μεγάλη θετική ποσότητα είτε πολύ μεγάλη αρνητική ποσότητα είτε *οποιαδήποτε*, ακόμη και πολύ μικρή, ενδιάμεση ποσότητα: αυτό δικαιολογεί το ότι δεν ορίζεται το $(+\infty)0$ και τον χαρακτηρισμό του, επίσης, ως *απροσδιόριστη μορφή*. Θα δούμε αργότερα ότι αυτό ακριβώς το νόημα των απροσδιόριστων μορφών αντανακλάται στην εμφάνισή τους και στον ρόλο τους στην έννοια του ορίου.

Ορισμοί. Κατ' αρχάς, δεχόμαστε ότι το $+\infty$ είναι μεγαλύτερο από κάθε αριθμό, ότι το $-\infty$ είναι μικρότερο από κάθε αριθμό και ότι το $-\infty$ είναι μικρότερο από το $+\infty$. Δηλαδή:

$$-\infty < x, \qquad x < +\infty, \qquad -\infty < +\infty.$$

Ορίζουμε τα αντίθετα

$$-(+\infty) = -\infty\,, \qquad -(-\infty) = +\infty\,.$$

Ορίζουμε τα αθροίσματα

$$(+\infty) + x = +\infty, \qquad x + (+\infty) = +\infty, \qquad (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) + x = -\infty, \qquad x + (-\infty) = -\infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Όμως, τα αθροίσματα

$$(+\infty) + (-\infty), \qquad (-\infty) + (+\infty)$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**. Ορίζουμε τις διαφορές

$$(+\infty) - x = +\infty, \qquad x - (-\infty) = +\infty, \qquad (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) - x = -\infty, \qquad x - (+\infty) = -\infty, \qquad (-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

Δεν ορίζονται οι διαφορές

$$(+\infty) - (+\infty), \qquad (-\infty) - (-\infty)$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**. Ορίζουμε τα γινόμενα

$$(\pm\infty)x = \pm\infty, \quad x(\pm\infty) = \pm\infty \qquad (x > 0),$$

$$(\pm\infty)x = \mp\infty, \quad x(\pm\infty) = \mp\infty \qquad (x < 0),$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty\,, \qquad (\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty.$$

Τα γινόμενα

$$(\pm\infty)0, \qquad 0(\pm\infty)$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**. Ορίζουμε τα αντίστροφα

$$\frac{1}{+\infty} = 0, \qquad \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Το αντίστροφο

$$\frac{1}{0}$$

δεν ορίζεται και χαρακτηρίζεται **απροσδιόριστη μορφή**. Οι παρακάτω λόγοι ορίζονται βάσει των ανάλογων πολλαπλασιασμών και των αντιστρόφων.

$$\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty \quad (x > 0), \qquad \frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty \quad (x < 0), \qquad \frac{x}{\pm\infty} = 0.$$

Οι λόγοι

$$\frac{x}{0}\,, \qquad \frac{\pm\infty}{0}\,, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,, \qquad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**. Το $\frac{x}{0} = x\frac{1}{0}$ δεν ορίζεται διότι δεν ορίζεται το $\frac{1}{0}$. Τα $\frac{\pm\infty}{0} = (\pm\infty)\frac{1}{0}$ δεν ορίζονται διότι δεν ορίζεται το $\frac{1}{0}$. Τα $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = (\pm\infty)\frac{1}{\pm\infty} = (\pm\infty)0$ και τα $\frac{\pm\infty}{\mp\infty} = (\pm\infty)\frac{1}{\mp\infty} = (\pm\infty)0$ δεν ορίζονται διότι καταλήγουν σε απροσδιόριστες μορφές.
Τέλος, ορίζουμε τις απόλυτες τιμές

$$|+\infty| = +\infty, \qquad |-\infty| = +\infty.$$

Σημειώσεις. 1. Όταν γράφουμε, χωρίς κάποια ιδιαίτερη επισήμανση, οποιαδήποτε μικρά γράμματα ($a, u, x, m, n, \xi, \varepsilon$ κλπ) ή και μερικά κεφαλαία (M, S κλπ) θα εννοούμε αριθμούς, δηλαδή στοιχεία του $\mathbb{R}$. Επίσης, με κεφαλαία γράμματα θα δηλώνουμε, εν γένει, σύνολα, δηλαδή υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι μια μεταβλητή μπορεί να πάρει και κάποια από τις τιμές $\pm\infty$ ή ότι ένα σύνολο μπορεί να περιέχει και κάποιο από τα $\pm\infty$, θα το επισημαίνουμε ιδιαιτέρως. Για παράδειγμα: $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\xi \in (a, +\infty]$, $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $A \subseteq [-\infty, 3]$.
2. Δεχόμαστε ότι $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Δηλαδή, ο ακέραιος 0 δεν θεωρείται φυσικός.

Ασκήσεις.

1. Αιτιολογήστε όλους τους ορισμούς και τους μη-ορισμούς (απροσδιόριστες μορφές) των πράξεων των $\pm\infty$ μεταξύ τους και με τους αριθμούς βάσει της εμπειρικής μας αντίληψης για τις έννοιες του "μεγάλου" (θετικού ή αρνητικού) και του "μικρού" (θετικού ή αρνητικού) και για τις μεταξύ τους σχέσεις.

2. Αποδείξτε ότι η μεταβατική ιδιότητα της ανισότητας στο $\mathbb{R}$ ισχύει και στο $\overline{\mathbb{R}}$. Επίσης, αποδείξτε ότι οι βασικές ιδιότητες (μεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα, επιμεριστικότητα) της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{R}$ ισχύουν και στο $\overline{\mathbb{R}}$, αλλά με την εξής επισήμανση: "αρκεί να ορίζονται τα συστατικά τους μέρη". Για παράδειγμα: ισχύει $(xy)z = x(yz)$ για κάθε $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$, αρκεί να ορίζονται τα xy, yz, $(xy)z$, $x(yz)$.

3. Αν $x \leq y < 0$ και $z \leq w < 0$, αποδείξτε ότι $0 < yw \leq xz$.

4. (i) Αν $x \leq y$, $z \leq w$, $t \leq s$ και $x + z + t = y + w + s$, αποδείξτε ότι $x = y$, $z = w$ και $t = s$.
(ii) Αν $0 < x \leq y$, $0 < z \leq w$, $0 < t \leq s$ και $xzt = yws$, αποδείξτε ότι $x = y$, $z = w$ και $t = s$.

5. (i) Αποδείξτε ότι $|x| \leq a$ αν και μόνο αν $-a \leq x \leq a$.
(ii) Αποδείξτε ότι $|x| < a$ αν και μόνο αν $-a < x < a$.
(iii) Αποδείξτε την **τριγωνική ανισότητα**: $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.
(iv) Αποδείξτε ότι $|x + y| = |x| + |y|$ αν και μόνο αν $x, y \geq 0$ ή $x, y \leq 0$.
(v) Αποδείξτε ότι $|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|$. Επίσης, αποδείξτε ότι $|x+y+z| = |x|+|y|+|z|$ αν και μόνο αν $x, y, z \geq 0$ ή $x, y, z \leq 0$.

6. Αποδείξτε ότι, αν $a \leq x \leq b$ και $a \leq y \leq b$, τότε $|x - y| \leq b - a$.

7. (i) Για καθεμιά από τις παρακάτω ανισότητες γράψτε σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων το σύνολο των x για τους οποίους είναι αληθής: $|x + 1| > 2$, $|x - 1| < |x + 1|$, $\frac{x}{x+2} > \frac{x+3}{3x+1}$, $(x - 2)^2 \geq 4$, $|x^2 - 7x| > x^2 - 7x$, $\frac{(x-1)(x+4)}{(x-7)(x+5)} > 0$, $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \leq 0$.
(ii) Για καθένα από τα επόμενα σύνολα βρείτε *μία* ανισότητα με μεταβλητή x ώστε το σύνολο αυτό να είναι το σύνολο των x για τους οποίους η ανισότητα είναι αληθής: $(-\infty, 3]$, $(2, +\infty)$, $(3, 7)$, $(-\infty, -2) \cup (1, 4) \cup (7, +\infty)$, $[-2, 4] \cup [6, +\infty)$, $[-1, 4) \cup (4, 8]$, $(-\infty, -2] \cup [1, 4) \cup [7, +\infty)$.

1.2 Η Ιδιότητα Συνέχειας.

Τώρα θα γνωρίσουμε τη σημαντικότερη και βαθύτερη ιδιότητα του $\mathbb{R}$, την Ιδιότητα Συνέχειας. Η ιδιότητα αυτή, όπως θα βλέπουμε διαρκώς από εδώ και πέρα, *είναι η βάση για να αποδειχτούν όλα τα σημαντικά αποτελέσματα της Ανάλυσης* και περιγράφεται ως εξής: η πραγματική ευθεία "δεν έχει χάσματα", "είναι συνεχής", "δεν διακόπτεται". Πιο συγκεκριμένα, αν τα A, B είναι δυο μη-κενά σύνολα σημείων πάνω στην πραγματική ευθεία και αν το A είναι αριστερά του B, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της ευθείας ανάμεσα στα δυο σύνολα: αν δεν υπήρχε τέτοιο σημείο, τότε θα υπήρχε "χάσμα" ανάμεσα στα δυο σύνολα.

Η Ιδιότητα Συνέχειας. *Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Τότε υπάρχει ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.*

Πρέπει να επισημάνουμε ότι η Ιδιότητα Συνέχειας είναι ιδιότητα του $\mathbb{R}$ και ότι υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν έχουν αυτή την ιδιότητα. Για παράδειγμα, θα δούμε μετά από την Πρόταση 1.5 ότι το $\mathbb{Q}$ δεν έχει την Ιδιότητα Συνέχειας.

Το Θεώρημα 1.1 λέει ότι δεν υπάρχει κανείς αριθμός ο οποίος να είναι μεγαλύτερος από κάθε φυσικό.

Θεώρημα 1.1. *Για κάθε b υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > b$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι υπάρχει b ώστε $n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε το
$$B = \{b \,|\, n \leq b \text{ κάθε } n \in \mathbb{N}\}$$
δεν είναι κενό. Προφανώς, ισχύει $n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $b \in B$. Σύμφωνα με την Ιδιότητα Συνέχειας, υπάρχει ξ ώστε
$$n \leq \xi \leq b \qquad (n \in \mathbb{N}, b \in B).$$
Επειδή $\xi - 1 < \xi$, ο $\xi - 1$ δεν ανήκει στο B. Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > \xi - 1$ και, επομένως, $n + 1 > \xi$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $n + 1 \in \mathbb{N}$. □

Η Αρχιμήδεια Ιδιότητα λέει ότι, αν ένας αριθμός είναι μικρότερος από κάθε αντίστροφο φυσικού, τότε ο αριθμός αυτός είναι ≤ 0.

Αρχιμήδεια Ιδιότητα. *Για κάθε $a > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < a$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.1 με $b = \frac{1}{a}$. □

Η Πρόταση 1.1 λέει ότι κάθε αριθμός βρίσκεται ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς ακεραίους.

Πρόταση 1.1. *Για κάθε x υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \leq x < k + 1$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > x$ και υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $m > -x$. Ορίζουμε $l = -m$, οπότε
$$l < x < n.$$
Οι l, n είναι ακέραιοι.

Ας υποθέσουμε ότι, *για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, από την $k \leq x$ συνεπάγεται η $k + 1 \leq x$*. Τότε από την αρχή της επαγωγής και από το ότι $l \leq x$, συμπεραίνουμε ότι $k \leq x$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq l$. Αυτό, όμως, δεν είναι σωστό διότι $n > l$ αλλά $n > x$. Επομένως, η αρχική μας υπόθεση δεν είναι σωστή, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \leq x$ και $k + 1 > x$, δηλαδή
$$k \leq x < k + 1.$$
Τώρα θα δούμε ότι ο ακέραιος k με την ιδιότητα $k \leq x < k + 1$ είναι μοναδικός. Έστω
$$k \leq x < k + 1, \qquad k' \leq x < k' + 1$$

για κάποιους $k, k' \in \mathbb{Z}$. Τότε

$$k < k' + 1, \qquad k' < k + 1,$$

οπότε

$$-1 < k' - k < 1.$$

Επειδή $k' - k \in \mathbb{Z}$, συνεπάγεται

$$k' - k = 0,$$

οπότε $k' = k$. □

Ορισμός. Ο μοναδικός $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \leq x < k + 1$, η ύπαρξη του οποίου εξασφαλίζεται από την Πρόταση 1.1, ονομάζεται **ακέραιο μέρος** του x και συμβολίζεται $[x]$.

Δηλαδή, είναι

$$[x] \leq x < [x] + 1, \qquad [x] \in \mathbb{Z}.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι "πυκνό". Με αυτό εννοούμε ότι κάθε ανοικτό διάστημα, οσοδήποτε μικρό, περιέχει τουλάχιστον έναν ρητό.

Πυκνότητα των ρητών. *Για κάθε a, b, $a < b$ υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $a < r < b$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n > \tfrac{1}{b-a}\,.$$

Θεωρούμε τον ακέραιο

$$m = [na] + 1.$$

Τότε

$$na < [na] + 1 = m \leq na + 1 < nb$$

και, επομένως, $a < \frac{m}{n} < b$. Άρα για τον ρητό $r = \frac{m}{n}$ ισχύει $a < r < b$. □

Είναι, τώρα, εύκολο να δει κανείς ότι κάθε ανοικτό διάστημα περιέχει άπειρους ρητούς. Παρεμπιπτόντως, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, μέχρι τώρα, δεν έχουμε μιλήσει για αρρήτους: δεν γνωρίζουμε (ακόμη) αν υπάρχουν ή όχι άρρητοι αριθμοί. Αυτό θα το ξεκαθαρίσουμε στην επόμενη ενότητα.

Ασκήσεις.

1. (i) Αν $a \leq \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, αποδείξτε ότι $a \leq 0$.
   Υπόδειξη: Έστω $a > 0$. Βρείτε συγκεκριμένο $\varepsilon > 0$ ώστε $\varepsilon < a$.
   (ii) Αν $a \leq b + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, αποδείξτε ότι $a \leq b$.
   (iii) Αν $|a - b| \leq \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, αποδείξτε ότι $a = b$.

2. Αποδείξτε ότι το διάστημα $[a, b)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο και ότι το διάστημα $(a, +\infty)$ δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.

3. Δείτε ότι τα σύνολα $A = (-\infty, 0], B = [0, +\infty)$ ικανοποιούν την υπόθεση της Ιδιότητας Συνέχειας και βρείτε όλους τους ξ με την ιδιότητα: $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Κάντε το ίδιο για τα $A = (-\infty, 0]$, $B = (0, +\infty)$, για τα $A = (-4, -2)$, $B = (-2, +\infty)$ και για τα $A = (-\infty, 0)$, $B = [1, 13]$.

4. Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$ και $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε $A = (-\infty, \xi), B = [\xi, +\infty)$ ή $A = (-\infty, \xi], B = (\xi, +\infty)$.

5. (i) Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$ και έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $b - a \leq \varepsilon$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένας ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.
(ii) Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $0 < a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$ και έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $\frac{b}{a} \leq 1 + \varepsilon$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένας ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

6. (i) Αν $a \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $a \leq 0$.
(ii) Αν $a \leq b + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $a \leq b$.
(iii) Αν $|a - b| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $a = b$.
Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 1: για να λύσουμε την άσκηση 1 χρειαζόμαστε μόνο τις αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$ ενώ εδώ χρειαζόμαστε την Ιδιότητα Συνέχειας.

7. Δείτε ότι τα σύνολα $A = \{-\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ικανοποιούν την υπόθεση της Ιδιότητας Συνέχειας και βρείτε όλους τους ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Κάντε το ίδιο για τα $A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < 0\}$, $B = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > 0\}$.

8. (i) Αν $x \leq a$ για κάθε $x < b$, αποδείξτε ότι $b \leq a$.
(ii) Αν $r \leq a$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, $r < b$, αποδείξτε ότι $b \leq a$.
(iii) Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > a\} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > b\}$, αποδείξτε ότι $a = b$.
(iv) Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\} \cap \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > b\} = \emptyset$, αποδείξτε ότι $a \leq b$.
(v) Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \leq a\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \geq b\} = \mathbb{Q}$, αποδείξτε ότι $b \leq a$.

9. (i) Αποδείξτε ότι το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και ο λόγος ρητών είναι ρητοί. Βάσει αυτού αποδείξτε ότι το άθροισμα ρητού και αρρήτου είναι άρρητος και το γινόμενο ρητού $\neq 0$ και αρρήτου είναι άρρητος.
(ii) Αποδείξτε ότι, αν ένα διάστημα περιέχει έναν άρρητο, τότε περιέχει άπειρους αρρήτους.

10. (i) Εκφράστε συναρτήσει του $[b]$ τον ελάχιστο $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $n > b$.
(ii) Εκφράστε συναρτήσει του $[b]$ τον ελάχιστο $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $n \geq b$.
(iii) Εκφράστε συναρτήσει του $[b]$ τον ελάχιστο $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > b$.
(iv) Εκφράστε συναρτήσει του $[b]$ τον ελάχιστο $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq b$.
(v) Αν $a > 0$, εκφράστε συναρτήσει του $[\frac{1}{a}]$ τον ελάχιστο $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < a$.

11. Αν $k \in \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι $[x + k] = [x] + k$.

12. Αποδείξτε ότι $[x + y] = [x] + [y]$ ή $[x + y] = [x] + [y] + 1$. Αποδείξτε ανάλογο συμπέρασμα για το $[x + y + z]$.

13. Αποδείξτε ότι $[x] + [x + \frac{1}{n}] + \cdots + [x + \frac{n-2}{n}] + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

14. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $a < b$. Βρείτε την ασθενέστερη γενική συνθήκη για τον $b - a$, η οποία εγγυάται ότι υπάρχει $r \in (a, b)$ ώστε $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq n \leq k$.

1.3 Δυνάμεις και ρίζες.

1.3.1 Δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες.

Ορισμός. Γνωρίζουμε ότι, αν $n \in \mathbb{N}$, τότε η **δύναμη** a^n με **βάση** a και **εκθέτη** n ορίζεται ως εξής:

$$a^n = a \cdots a \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

όπου το γινόμενο έχει n όρους ίσους με a.
Επίσης, αν $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, τότε οι δυνάμεις a^0, a^n ορίζονται ως εξής:

$$a^0 = 1, \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a \cdots a} \qquad (a \neq 0, n \in \mathbb{Z}, n < 0),$$

όπου το γινόμενο έχει $|n| = -n$ όρους ίσους με a.
Το

$$0^0$$

δεν ορίζεται και χαρακτηρίζεται **απροσδιόριστη μορφή**.

Προφανώς, αν ο $n \in \mathbb{Z}$ είναι άρτιος, τότε $(-a)^n = a^n$ και, αν ο $n \in \mathbb{Z}$ είναι περιττός, τότε $(-a)^n = -a^n$. Επίσης, αν ο $n \in \mathbb{Z}$ είναι άρτιος, τότε $a^n > 0$ για κάθε $a \neq 0$. Αν ο $n \in \mathbb{Z}$ είναι περιττός, τότε είτε $a^n > 0$, αν $a > 0$, είτε $a^n < 0$, αν $a < 0$.

Στην Πρόταση 1.2 διατυπώνονται όλες οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων. Η απόδειξή τους απαιτεί μόνο σωστό μέτρημα!

Πρόταση 1.2. *(1) Οι παρακάτω ισότητες ισχύουν αρκεί μόνο να ορίζονται τα συστατικά τους μέρη:* $a^x b^x = (ab)^x$, $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$.
(2) Αν $0 < a < b$, *τότε* (i) $a^x < b^x$, *αν* $x > 0$, (ii) $a^0 = b^0 = 1$, (iii) $a^x > b^x$, *αν* $x < 0$.
(3) Αν $x < y$, *τότε* (i) $a^x < a^y$, *αν* $a > 1$, (ii) $1^x = 1^y = 1$, (iii) $a^x > a^y$, *αν* $0 < a < 1$.

Απόδειξη. (1) *Πρώτη ισότητα:* Αν $x > 0$, τότε

$$a^x b^x = (a \cdots a)(b \cdots b) = (ab) \cdots (ab) = (ab)^x.$$

Οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την περίπτωση $x > 0$.
Δεύτερη ισότητα: Αν $x, y > 0$, τότε

$$a^x a^y = (a \cdots a)(a \cdots a) = a \cdots a = a^{x+y}.$$

Οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την περίπτωση $x, y > 0$.
Τρίτη ισότητα: Αν $x, y > 0$, τότε

$$(a^x)^y = a^x \cdots a^x = (a \cdots a) \cdots (a \cdots a) = a \cdots a = a^{xy}.$$

Οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την περίπτωση $x, y > 0$ και η $(a^y)^x = a^{xy}$ προκύπτει από την $(a^x)^y = a^{xy}$ με εναλλαγή των x, y.
(2) (i) Πολλαπλασιάζοντας την $a < b$ με τον εαυτό της x φορές, βρίσκουμε την

$$a^x = a \cdots a < b \cdots b = b^x.$$

Η (iii) προκύπτει από την (i) και η (ii) είναι προφανής.
(3) (i) Πολλαπλασιάζοντας την $1 < a$ με τον εαυτό της $y - x$ φορές, βρίσκουμε

$$a^x = (a \cdots a)(1 \cdots 1) < (a \cdots a)(a \cdots a) = a^y.$$

Η (iii) προκύπτει από την (i) και η (ii) είναι προφανής. □

Σχόλιο. Αφού ορίσουμε τις δυνάμεις με μη-ακέραιους εκθέτες, θα αποδείξουμε ότι *η Πρόταση 1.2 ισχύει, γενικά, για δυνάμεις με εκθέτες στο* $\mathbb{R}$ και γι αυτό στη διατύπωσή της δεν αναφέρεται περιορισμός σχετικά με το αν οι εκθέτες είναι ακέραιοι. Πάντως, μέχρι αυτό το σημείο, έχουμε αποδείξει την Πρόταση 1.2 μόνο για ακέραιους εκθέτες.

1.3.2 Ρίζες.

Πριν προχωρήσουμε, προσέξτε ιδιαιτέρως τις ασκήσεις 1 και 6 της ενότητας 1.2. Η μια δεν προϋποθέτει την Ιδιότητα της Συνέχειας ενώ η άλλη την προϋποθέτει.

Ανισότητα του Bernoulli. *Αν $a \geq -1$, τότε*

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $a > -1$, $a \neq 0$ ή αν $a = -1$, $n \geq 2$, τότε η ανισότητα ισχύει ως γνήσια ανισότητα.

Απόδειξη. Με την αρχή της επαγωγής. □

Το Θεώρημα 1.2 λέει ότι, αν ο n είναι φυσικός, τότε για κάθε $a \geq 0$ η εξίσωση $x^n = a$ έχει μη-αρνητική λύση και ότι η λύση αυτή είναι μοναδική.

Θεώρημα 1.2. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$ υπάρχει μοναδικός $x \geq 0$ ώστε $x^n = a$.*

Απόδειξη. Αν $a = 0$, τότε, προφανώς, η $x^n = a$ έχει μοναδική λύση τον 0.
Έστω $a > 0$. Αν υπάρχει κάποιος $\xi \geq 0$ ώστε $\xi^n = a$, τότε, προφανώς, θα είναι $\xi > 0$.
Θεωρούμε τα σύνολα

$$Y = \{y \,|\, y > 0, y^n \leq a\}, \qquad Z = \{z \,|\, z > 0, z^n \geq a\}.$$

Ορίζουμε

$$y_0 = \min\{a, 1\}, \qquad z_0 = \max\{a, 1\}.$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι $y_0 \in Y$ και $z_0 \in Z$, οπότε τα Y, Z δεν είναι κενά. Για κάθε $y \in Y$, $z \in Z$ ισχύει $y^n \leq a \leq z^n$, οπότε $y^n \leq z^n$ και, επειδή $y, z > 0$, συνεπάγεται $y \leq z$. Βάσει της Ιδιότητας Συνέχειας, υπάρχει ξ ώστε

$$y \leq \xi \leq z \qquad (y \in Y, z \in Z).$$

Θα αποδείξουμε ότι $\xi^n = a$.
Έστω $0 < \varepsilon < \xi$. Επειδή $\xi - \varepsilon < \xi$, ο $\xi - \varepsilon$ δεν ανήκει στο Z. Άρα $\xi - \varepsilon \leq 0$ ή $(\xi - \varepsilon)^n < a$. Το πρώτο δεν ισχύει, οπότε

$$(\xi - \varepsilon)^n < a.$$

Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται

$$\tfrac{a}{\xi^n} > \left(1 - \tfrac{\varepsilon}{\xi}\right)^n \geq 1 - n\tfrac{\varepsilon}{\xi}\,,$$

οπότε

$$\tfrac{\xi^n - a}{n\xi^{n-1}} < \varepsilon.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \xi$, οπότε ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα

$$\tfrac{\xi^n - a}{n\xi^{n-1}} \leq 0,$$

οπότε

$$\xi^n \leq a.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\xi + \varepsilon > \xi$, ο $\xi + \varepsilon$ δεν ανήκει στο Y. Άρα $\xi + \varepsilon \leq 0$ ή $(\xi + \varepsilon)^n > a$. Το πρώτο δεν ισχύει, οπότε

$$(\xi + \varepsilon)^n > a.$$

Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται

$$\tfrac{\xi^n}{a} > \big(\tfrac{\xi}{\xi+\varepsilon}\big)^n = \big(1 - \tfrac{\varepsilon}{\xi+\varepsilon}\big)^n \geq 1 - n\tfrac{\varepsilon}{\xi+\varepsilon}\,,$$

οπότε

$$\tfrac{a-\xi^n}{na} < \tfrac{\varepsilon}{\xi+\varepsilon} < \tfrac{\varepsilon}{\xi}$$

και, τελικά,

$$\tfrac{\xi(a-\xi^n)}{na} < \varepsilon.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, οπότε

$$\tfrac{\xi(a-\xi^n)}{na} \leq 0$$

και, επομένως,

$$\xi^n \geq a.$$

Από τις ανισότητες $\xi^n \leq a$ και $\xi^n \geq a$ συνεπάγεται

$$\xi^n = a.$$

Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της θετικής λύσης ξ της $x^n = a$. Αν $\xi_1, \xi_2 > 0$, ${\xi_1}^n = a$ και ${\xi_2}^n = a$, τότε ${\xi_1}^n = {\xi_2}^n$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$. □

Θα δούμε μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 1.2 στην ενότητα 4.4.

Ορισμός. Αν $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$, τότε τη μοναδική *μη-αρνητική* λύση της εξίσωσης $x^n = a$, η ύπαρξη της οποίας προκύπτει από το Θεώρημα 1.2, την ονομάζουμε **n-οστή ρίζα** του a και τη συμβολίζουμε

$$\sqrt[n]{a} \qquad (a \geq 0, n \in \mathbb{N}).$$

Επομένως, είναι $\sqrt[n]{0} = 0$ και $\sqrt[n]{a} > 0$, αν $a > 0$.

Το Θεώρημα 1.2 αναφέρεται στη μη-αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = a$. Η Πρόταση 1.3 διαπραγματεύεται όλες τις περιπτώσεις; θα αποφύγουμε την απόδειξή της διότι είναι πολύ απλή, ανάγεται στο Θεώρημα 1.2, είναι αλγεβρικής φύσης και είναι γνωστή από το γυμνάσιο.

Πρόταση 1.3. *Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, τότε η εξίσωση $x^n = a$ έχει είτε ακριβώς δυο λύσεις, την $\sqrt[n]{a}$ και την $-\sqrt[n]{a}$, αν $a > 0$, είτε ακριβώς μια λύση, την $\sqrt[n]{0} = 0$, αν $a = 0$, είτε καμιά λύση, αν $a < 0$. Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, τότε η εξίσωση $x^n = a$ έχει ακριβώς μια λύση, είτε την $\sqrt[n]{a}$, αν $a > 0$, είτε την $\sqrt[n]{0} = 0$, αν $a = 0$, είτε την $-\sqrt[n]{-a}$, αν $a < 0$.*

Ας δούμε τώρα ένα χρήσιμο - και βαθύ - κριτήριο για το αν μια ρίζα είναι ρητός ή άρρητος. Το περιλαμβάνουμε αν και η απόδειξή του είναι καθαρά αλγεβρικής φύσης.

Πρόταση 1.4. *Έστω φυσικοί n, k. Τότε ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός αν και μόνο αν ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού, δηλαδή ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$k = m^n\,.$$

Τότε ο

$$\sqrt[n]{k} = m$$

είναι φυσικός και, επομένως, ρητός.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός. Άρα

$$\sqrt[n]{k} = \tfrac{m}{l},$$

όπου $m, l \in \mathbb{N}$ και έστω - μετά από απλοποίηση - ότι οι m, l δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1. Υποθέτουμε - και θα καταλήξουμε σε άτοπο - ότι $l > 1$, οπότε υπάρχει *πρώτος* αριθμός p ο οποίος διαιρεί τον l. Επειδή οι l, m δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1, ο p δε διαιρεί τον m. Είναι $k = \frac{m^n}{l^n}$, οπότε

$$l^n k = m^n\,.$$

Ο p διαιρεί τον l, οπότε διαιρεί τον $l^n k$ και, επομένως, διαιρεί τον m^n. Γνωρίζουμε ότι, αν ένας πρώτος αριθμός διαιρεί το γινόμενο κάποιων φυσικών, τότε διαιρεί τουλάχιστον έναν από αυτούς τους αριθμούς. Επειδή ο p διαιρεί τον $m^n = m \cdots m$, συνεπάγεται ότι διαιρεί τον m και καταλήγουμε σε αντίφαση. Άρα $l = 1$, οπότε ο

$$k = r^n = m^n$$

είναι n-οστή δύναμη φυσικού. □

Τώρα θα δούμε, επιτέλους, ότι το $\mathbb{R}$ δεν αποτελείται μόνο από ρητούς. Παρατηρήστε ότι η ύπαρξη έστω και ενός αρρήτου βασίζεται στο Θεώρημα 1.2 του οποίου η απόδειξη βασίζεται, με τη σειρά της, στην Ιδιότητα Συνέχειας.

Πρόταση 1.5. *Το* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *δεν είναι κενό.*

Απόδειξη. Επειδή ο 2 δεν είναι τετράγωνο φυσικού, από την Πρόταση 1.4 συνεπάγεται ότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός. □

Παρεμπιπτόντως, επισημαίνουμε, και πάλι, ότι το $\mathbb{Q}$ δεν έχει την Ιδιότητα Συνέχειας: δείτε την άσκηση 2. Επισημαίνουμε ακόμη ότι το Θεώρημα 1.2 δεν ισχύει στο $\mathbb{Q}$: για παράδειγμα, η εξίσωση $x^2 = 2$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}$.

Τέλος, θα δούμε ότι το σύνολο των αρρήτων είναι, όπως το σύνολο των ρητών, κι αυτό "πυκνό": κάθε ανοικτό διάστημα, οσοδήποτε μικρό, περιέχει τουλάχιστον έναν άρρητο.

Πυκνότητα των αρρήτων. *Για κάθε* a, b, $a < b$ *υπάρχει* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ώστε* $a < x < b$.

Απόδειξη. Επειδή $a+\sqrt{2} < b+\sqrt{2}$, υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $a+\sqrt{2} < r < b+\sqrt{2}$. Τότε $(r-\sqrt{2}) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ και $a < r - \sqrt{2} < b$. □

1.3.3 Δυνάμεις με ρητούς εκθέτες.

Λήμμα 1.1. *Έστω* $a > 0$, $m, k \in \mathbb{Z}$, $n, l \in \mathbb{N}$ *ώστε* $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$. *Τότε* $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[l]{a})^k$.

Απόδειξη. Είναι

$$((\sqrt[n]{a})^m)^{nl} = (\sqrt[n]{a})^{mnl} = ((\sqrt[n]{a})^n)^{ml} = a^{ml}\,, \qquad ((\sqrt[l]{a})^k)^{nl} = (\sqrt[l]{a})^{knl} = ((\sqrt[l]{a})^l)^{kn} = a^{kn}\,.$$

Επειδή $ml = kn$, είναι $a^{ml} = a^{kn}$, οπότε $((\sqrt[n]{a})^m)^{nl} = ((\sqrt[l]{a})^k)^{nl}$. Άρα, επειδή $(\sqrt[n]{a})^m > 0$ και $(\sqrt[l]{a})^k > 0$, συνεπάγεται $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[l]{a})^k$. □

Ορισμός. Τώρα, έστω $a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$. Υπάρχουν άπειρα ζεύγη αριθμών $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \frac{m}{n}$. Όμως, σύμφωνα με το Λήμμα 1.1, ο αριθμός $(\sqrt[n]{a})^m$ είναι ο ίδιος για κάθε τέτοιο ζεύγος. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε και ορίζουμε

$$a^r = (\sqrt[n]{a})^m \qquad (a > 0, r = \tfrac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}).$$

Τέλος, αν $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, ορίζουμε

$$0^r = 0 \qquad (r \in \mathbb{Q}, r > 0).$$

Είναι σαφές, από τον ορισμό του 0^r, ότι $0^r = (\sqrt[n]{0})^m$ αν $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Επίσης, είναι σαφές ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $(a \geq 0, n \in \mathbb{N})$. Τέλος, σχετικά με το πρόσημο του a^r, είναι προφανές ότι $a^r > 0$ για κάθε $a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$.

Απόδειξη της Πρότασης 1.2 για ρητούς εκθέτες. Θα θεωρήσουμε γνωστές και θα χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες ιδιότητες για ακέραιους εκθέτες.
Στα παρακάτω θεωρούμε $x = \frac{m}{n}$ και $y = \frac{k}{l}$, όπου $m, k \in \mathbb{Z}$, $n, l \in \mathbb{N}$.
Πριν προχωρήσουμε θα αποδείξουμε την ισότητα $(a^x)^n = a^m$ που θα μας φανεί χρήσιμη παρακάτω:

$$(a^x)^n = ((\sqrt[n]{a})^m)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m .$$

(1) *Πρώτη ισότητα:* Έστω $a, b > 0$. Τότε

$$(a^x b^x)^n = (a^x)^n (b^x)^n = a^m b^m = (ab)^m = ((ab)^x)^n$$

και, επειδή $a^x b^x > 0$ και $(ab)^x > 0$, συνεπάγεται $a^x b^x = (ab)^x$. Η απόδειξη στις περιπτώσεις $a = 0$ ή $b = 0$ είναι προφανής.
Δεύτερη ισότητα: Είναι $x + y = \frac{ml+kn}{nl}$. Έστω $a > 0$. Τότε

$$(a^x a^y)^{nl} = (a^x)^{nl} (a^y)^{nl} = ((a^x)^n)^l ((a^y)^l)^n = (a^m)^l (a^k)^n = a^{ml} a^{kn} = a^{ml+kn} = (a^{x+y})^{nl}$$

και, επειδή $a^x a^y > 0$ και $a^{x+y} > 0$, συνεπάγεται $a^x a^y = a^{x+y}$. Η απόδειξη στην περίπτωση $a = 0$ είναι προφανής.
Τρίτη ισότητα: Είναι $xy = \frac{mk}{nl}$. Έστω $a > 0$. Τότε

$$((a^x)^y)^{nl} = (((a^x)^y)^l)^n = ((a^x)^k)^n = ((a^x)^n)^k = (a^m)^k = a^{mk} = (a^{xy})^{nl}$$

και, επειδή $(a^x)^y > 0$ και $a^{xy} > 0$, συνεπάγεται $(a^x)^y = a^{xy}$. Η $(a^y)^x = a^{xy}$ προκύπτει από την $(a^x)^y = a^{xy}$ με εναλλαγή των x, y. Η απόδειξη στην περίπτωση $a = 0$ είναι προφανής.
(2) (i) Επειδή $x > 0$, είναι $m > 0$. Τότε

$$(a^x)^n = a^m < b^m = (b^x)^n$$

και, επειδή $a^x > 0$ και $b^x > 0$, συνεπάγεται $a^x < b^x$. Η (iii) προκύπτει από την (i) και η (ii) είναι προφανής.
(3) (i) Είναι

$$(a^x)^{nl} = ((a^x)^n)^l = (a^m)^l = a^{ml}, \qquad (a^y)^{nl} = ((a^y)^l)^n = (a^k)^n = a^{kn} .$$

Επειδή $x < y$ και $n, l > 0$, είναι $ml < kn$. Άρα $a^{ml} < a^{kn}$, οπότε $(a^x)^{nl} < (a^y)^{nl}$. Επειδή $a^x > 0$ και $a^y > 0$, συνεπάγεται $a^x < a^y$. Η (iii) προκύπτει από την (i) και η (ii) είναι προφανής. □

1.3.4 Δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

Έστω $a > 1$. Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}$, $s < r < t$ ισχύει $a^s < a^r < a^t$. *Αν είχαμε ορίσει* τις δυνάμεις με άρρητους εκθέτες έτσι ώστε να ισχύουν και γι αυτές οι συνηθισμένες ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες, τότε για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $s < x < t$ θα ίσχυε $a^s < a^x < a^t$. Στη διπλή αυτή ανισότητα οι a^s, a^t είναι ήδη ορισμένοι ενώ ο a^x δεν έχει ακόμη οριστεί. Όμως, η ανισότητα αυτή αποτελεί τον "οδηγό" για το πώς πρέπει να οριστεί και ο a^x: πρέπει να οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει $a^s < a^x < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x < t$.

Λήμμα 1.2. *Έστω $a > 1$.*
(1) Για κάθε $b > 1$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $b^n > a$.
(2) Αν $b \leq a^{\frac{1}{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $b \leq 1$.

Απόδειξη. (1) Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n > \tfrac{a-1}{b-1}\,.$$

Τότε, από την ανισότητα του Bernoulli,

$$b^n = (1 + b - 1)^n \geq 1 + n(b - 1) > a.$$

(2) Ισοδύναμο με το (1). □

Θεώρημα 1.3. *(1) Έστω $a > 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Τότε υπάρχει μοναδικός ξ ώστε $a^s < \xi < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x < t$.*
(2) Έστω $a > 1$, $x \in \mathbb{Q}$. Τότε υπάρχει μοναδικός ξ ώστε $a^s < \xi < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x < t$ και ο μοναδικός αυτός ξ είναι ο ήδη ορισμένος a^x.

Απόδειξη. (1) Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Ορίζουμε τα σύνολα

$$S = \{a^s \,|\, s \in \mathbb{Q}, s < x\}, \qquad T = \{a^t \,|\, t \in \mathbb{Q}, t > x\}.$$

Τα S, T δεν είναι κενά, διότι υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Q}$ ώστε $s < x < t$. Επίσης, κάθε στοιχείο του S είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του T. Πράγματι, από την $s < x < t$ συνεπάγεται $s < t$ και, επειδή $a > 1$, $s, t \in \mathbb{Q}$, προκύπτει $a^s < a^t$. Άρα τα S, T ικανοποιούν τις υποθέσεις της Ιδιότητας Συνέχειας, οπότε υπάρχει ξ ώστε

$$a^s \leq \xi \leq a^t \qquad (s, t \in \mathbb{Q}, s < x < t).$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει η ισχυρότερη διπλή ανισότητα $a^s < \xi < a^t$. Πράγματι, λόγω της πυκνότητας των ρητών, υπάρχουν $s', t' \in \mathbb{Q}$ ώστε

$$s < s' < x < t' < t,$$

οπότε

$$a^s < a^{s'} \leq \xi \leq a^{t'} < a^t$$

και, επομένως,

$$a^s < \xi < a^t \qquad (s, t \in \mathbb{Q}, s < x < t).$$

(2) Έστω $x \in \mathbb{Q}$. Θεωρούμε τον $\xi = a^x$, για τον οποίο γνωρίζουμε ότι ισχύει $a^s < \xi < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x < t$.
Ας δείξουμε, σε οποιαδήποτε από τις περιπτώσεις (1) και (2), την μοναδικότητα του ξ με τις παραπάνω ιδιότητες. Έστω ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 ώστε $a^s < \xi_1 < a^t$ και $a^s < \xi_2 < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x < t$. Συνεπάγεται

$$\tfrac{\xi_2}{\xi_1} < a^{t-s}\,, \qquad \tfrac{\xi_1}{\xi_2} < a^{t-s}$$

για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x < t$. Λόγω της πυκνότητας των ρητών, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Q}$ ώστε

$$x - \tfrac{1}{2n} < s < x < t < x + \tfrac{1}{2n}\,.$$

Τότε $t - s < \frac{1}{n}$ και, επομένως,

$$\tfrac{\xi_2}{\xi_1} < a^{\frac{1}{n}}\,, \qquad \tfrac{\xi_1}{\xi_2} < a^{\frac{1}{n}}\,.$$

Επειδή αυτές οι ανισότητες ισχύουν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το Λήμμα 1.2 συνεπάγεται

$$\tfrac{\xi_2}{\xi_1} \leq 1, \qquad \tfrac{\xi_1}{\xi_2} \leq 1.$$

Άρα $\xi_1 = \xi_2$. □

Ορισμός. Αν $a > 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ορίζουμε τον a^x να είναι ακριβώς ο αριθμός ξ που αναφέρεται στο πρώτο μέρος του Θεωρήματος 1.3.

$$a^x = \xi \qquad (a > 1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Από τον ορισμό του, λοιπόν, ο a^x ικανοποιεί τη διπλή ανισότητα $a^s < a^x < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x < t$ και είναι ο *μοναδικός* αριθμός με αυτήν την ιδιότητα. Σύμφωνα με το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 1.3, ακριβώς τα ίδια ισχύουν και στην περίπτωση $a > 1$, $x \in \mathbb{Q}$ για τον ήδη ορισμένο αριθμό a^x .

Δείτε την άσκηση 9 της ενότητας 1.5 για έναν εναλλακτικό ισοδύναμο ορισμό του a^x, όταν $a > 1$ και $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ορισμός. Αν $a = 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ορίζουμε

$$1^x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Αν $0 < a < 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε έχει ορισθεί ο $(\frac{1}{a})^x$. Ορίζουμε

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x} \qquad (0 < a < 1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Τέλος, αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x > 0$, ορίζουμε

$$0^x = 0 \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x > 0).$$

Επομένως, συνυπολογίζοντας τους προηγούμενους ορισμούς, βλέπουμε ότι ο a^x ορίζεται όταν $a > 0$, όταν $a = 0$, $x > 0$ και όταν $a < 0$, $x \in \mathbb{Z}$. Ισοδύναμα, ο a^x δεν ορίζεται όταν $a = 0$, $x \leq 0$ και όταν $a < 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Σχόλιο. Στην ενότητα 4.3 θα συζητήσουμε διεξοδικά για τους λόγους για τους οποίους αποφεύγουμε να ορίσουμε την δύναμη a^x όταν $a < 0$ και ο x δεν είναι ακέραιος.

Σε σχέση με το πρόσημο του a^x έχουμε τα εξής. Έστω $a > 0$. Αν $x \in \mathbb{Q}$, τότε γνωρίζουμε ότι $a^x > 0$. Αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε, βάσει του ορισμού του a^x, ισχύει $a^x > a^s$ για κάθε $s \in \mathbb{Q}$, $s < x$, οπότε, επειδή $a^s > 0$, συνεπάγεται $a^x > 0$. Άρα $a^x > 0$ για κάθε $a > 0$ και κάθε x.

Λήμμα 1.3. *(1) Έστω $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x + y < t$. Τότε υπάρχουν $s', s'', t', t'' \in \mathbb{Q}$ ώστε $s' < x < t'$, $s'' < y < t''$, $s = s' + s''$, $t = t' + t''$.*
(2) Έστω $x, y > 0$, $s, t \in \mathbb{Q}$, $0 < s < xy < t$. Τότε υπάρχουν $s', s'', t', t'' \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < s' < x < t'$, $0 < s'' < y < t''$, $s = s's''$, $t = t't''$.

Απόδειξη. (1) Βάσει της πυκνότητας των ρητών, υπάρχει $s' \in \mathbb{Q}$ ώστε

$$s - y < s' < x$$

και ορίζουμε

$$s'' = s - s' \in \mathbb{Q}.$$

Τότε $s' < x$, $s = s' + s''$ και $s'' = s - s' < y$. Ομοίως, υπάρχει $t' \in \mathbb{Q}$ ώστε

$$x < t' < t - y$$

και ορίζουμε

$$t'' = t - t' \in \mathbb{Q}.$$

Τότε $x < t'$, $t = t' + t''$ και $y < t - t' = t''$.
(2) Υπάρχει $s' \in \mathbb{Q}$ ώστε

$$\tfrac{s}{y} < s' < x$$

και ορίζουμε

$$s'' = \tfrac{s}{s'} \in \mathbb{Q}.$$

Τότε $s' < x$, $s = s's''$ και $s'' = \frac{s}{s'} < y$. Ομοίως, υπάρχει $t' \in \mathbb{Q}$ ώστε

$$x < t' < \tfrac{t}{y}$$

και ορίζουμε

$$t'' = \tfrac{t}{t'} \in \mathbb{Q}.$$

Τότε $x < t'$, $t = t't''$ και $y < \frac{t}{t'} = t''$. □

Απόδειξη της Πρότασης 1.2 για άρρητους εκθέτες. Θα θεωρήσουμε γνωστές και θα χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες ιδιότητες για ρητούς εκθέτες.
(1) *Πρώτη ισότητα:* Έστω $a, b > 1$. Για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x < t$ ισχύει $a^s < a^x < a^t$ και $b^s < b^x < b^t$, οπότε

$$(ab)^s = a^s b^s < a^x b^x < a^t b^t = (ab)^t\,.$$

Επειδή ο $a^x b^x$ είναι ανάμεσα στους $(ab)^s$, $(ab)^t$ για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x < t$, από τον ορισμό του $(ab)^x$ συνεπάγεται

$$a^x b^x = (ab)^x\,.$$

Οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν - με αλγεβρικό τρόπο - από την περίπτωση $a, b > 1$.
Δεύτερη ισότητα: Έστω $a > 1$. Για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x + y < t$ υπάρχουν, σύμφωνα με το Λήμμα 1.3, $s', s'', t', t'' \in \mathbb{Q}$ ώστε $s' < x < t'$, $s'' < y < t''$, $s = s' + s''$, $t = t' + t''$. Τότε $a^{s'} < a^x < a^{t'}$ και $a^{s''} < a^y < a^{t''}$ και, επομένως,

$$a^s = a^{s'} a^{s''} < a^x a^y < a^{t'} a^{t''} = a^t\,.$$

Επειδή ο $a^x a^y$ είναι ανάμεσα στους a^s, a^t για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x + y < t$, από τον ορισμό του a^{x+y} συνεπάγεται

$$a^x a^y = a^{x+y}\,.$$

Οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την περίπτωση $a > 1$.
Τρίτη ισότητα: Έστω $a > 1$, $x, y > 0$. Για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < xy < t$ θεωρούμε έναν επιπλέον $s_1 \in \mathbb{Q}$ ώστε $s_1 \geq s$, $0 < s_1 < xy < t$. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3, υπάρχουν $s', s'', t', t'' \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < s' < x < t'$, $0 < s'' < y < t''$, $s_1 = s's''$, $t = t't''$. Τότε $1 < a^{s'} < a^x < a^{t'}$ και, επομένως,

$$a^s \leq a^{s_1} = (a^{s'})^{s''} < (a^x)^{s''} < (a^x)^y < (a^x)^{t''} < (a^{t'})^{t''} = a^t\,.$$

Επειδή ο $(a^x)^y$ είναι ανάμεσα στους a^s, a^t για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < xy < t$, από τον ορισμό του a^{xy} συνεπάγεται

$$(a^x)^y = a^{xy}\,.$$

Οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την περίπτωση $a > 1$, $x, y > 0$ και η $(a^y)^x = a^{xy}$ προκύπτει από την $(a^x)^y = a^{xy}$ με εναλλαγή των x, y.
(2) (i) Υπάρχει $s \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < s < x$, οπότε, επειδή $1 < \frac{b}{a}$, συνεπάγεται

$$1 < (\tfrac{b}{a})^s < (\tfrac{b}{a})^x\,.$$

Επομένως,
$$a^x < a^x(\tfrac{b}{a})^x = (a\tfrac{b}{a})^x = b^x\,.$$
Το (ii) είναι προφανές και το (iii) προκύπτει από το (i).
(3) (i) Υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $x < r < y$, οπότε $a^x < a^r < a^y$. Το (ii) είναι προφανές και το (iii) προκύπτει από το (i). $\square$

Το (2) της Πρότασης 1.2 λέει ότι η a^x *ως συνάρτηση του* a είναι είτε γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, αν $x > 0$, είτε σταθερή 1 στο $(0, +\infty)$, αν $x = 0$, είτε γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, αν $x < 0$. Το (3) της Πρότασης 1.2 λέει ότι η a^x *ως συνάρτηση του* x είναι είτε γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$, αν $a > 1$, είτε σταθερή 1 στο $(-\infty, +\infty)$, αν $a = 1$, είτε γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, +\infty)$, αν $0 < a < 1$. Μπορούμε να συμπληρώσουμε ότι η a^x *ως συνάρτηση του* a είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, αν $x > 0$.

Ορισμός. Ας αναφέρουμε, τέλος, ότι ορίζονται οι δυνάμεις

$$\begin{aligned} a^{+\infty} &= 0 \quad (0 \le a < 1), & a^{+\infty} &= +\infty \quad (a > 1), \\ a^{-\infty} &= +\infty \quad (0 < a < 1), & a^{-\infty} &= 0 \quad (a > 1), \\ (+\infty)^b &= +\infty \quad (b > 0 \text{ ή } b = +\infty), & (+\infty)^b &= 0 \quad (b < 0 \text{ ή } b = -\infty), \end{aligned}$$

ενώ, όπως η δύναμη 0^0, οι δυνάμεις

$$1^{\pm\infty}, \qquad (+\infty)^0, \qquad 0^{-\infty}$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε την απόδειξη της ανισότητας του Bernoulli και αποδείξτε την Πρόταση 1.3. Συμπληρώστε τις αποδείξεις όλων των υποπεριπτώσεων της Πρότασης 1.2, τις οποίες αφήσαμε αναπόδεικτες.

2. Θεωρήστε τα σύνολα $S = \{s \in \mathbb{Q} \,|\, s < \sqrt{2}\}$ και $T = \{t \in \mathbb{Q} \,|\, t > \sqrt{2}\}$. Παρατηρήστε ότι $S, T \subseteq \mathbb{Q}$ και $s \le t$ για κάθε $s \in S$, $t \in T$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένας $\xi \in \mathbb{Q}$ ώστε $s \le \xi \le t$ για κάθε $s \in S$, $t \in T$. Συμπεράνατε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν έχει την Ιδιότητα Συνέχειας.

3. Αιτιολογήστε όλους τους ορισμούς και τους μη-ορισμούς (απροσδιόριστες μορφές) των δυνάμεων των $\pm\infty$ μεταξύ τους και με τους αριθμούς βάσει της εμπειρικής μας αντίληψης για τις έννοιες του "μεγάλου" (θετικού ή αρνητικού) και του "μικρού" (θετικού ή αρνητικού) αλλά και του "κοντά στο 1" και για τις μεταξύ τους σχέσεις. Ίσως χρειαστείτε υπολογιστή τσέπης για τα πειράματά σας.

4. (i) Αν $a \le \epsilon^2$ για κάθε $\epsilon > 0$, αποδείξτε ότι $a \le 0$.
(ii) Αν $a \le 1 + \epsilon + \epsilon^2$ για κάθε $\epsilon > 0$, αποδείξτε ότι $a \le 1$.

5. Έστω $0 < a < 1$. Αποδείξτε ότι ο a^x είναι ο μοναδικός ξ ώστε $a^t < \xi < a^s$ για κάθε $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x < t$.

6. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αποδείξτε ότι $(1 + a)^n \ge 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ για κάθε $a \ge 0$ και ότι $(1 + a)^n \ge 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3$ για κάθε $a \ge -1$. Γενικεύστε.

7. Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, αποδείξτε ότι $x^n < y^n$ αν και μόνο αν $x < y$. Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, αποδείξτε ότι $x^n < y^n$ αν και μόνο αν $|x| < |y|$.

8. Αποδείξτε ότι, αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, τότε

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

και, αν ο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ είναι περιττός, τότε

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

9. Αν οι x, y δεν είναι και οι δυο 0, αποδείξτε ότι $x^2+xy+y^2 > 0$ και $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4 > 0$. Ποια είναι η γενίκευση αυτών των ανισοτήτων; Τι μπορείτε να πείτε για τις ανισότητες $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 > 0$ και $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5 > 0$; Ποια είναι η γενίκευσή τους;

10. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το **παραγοντικό** $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ και το $0! = 1$. Ορίζουμε και τους **δυωνυμικούς συντελεστές** $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m \leq n$.
(i) Μελετήστε τη μονοτονία του $\binom{n}{m}$ σε σχέση με τον $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq m$ και τη μονοτονία του $\binom{n}{m}$ σε σχέση με τον $m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m \leq n$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$ για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq m \leq n$.
(iii) Αποδείξτε τον **δυωνυμικό τύπο του Newton**: για κάθε x, y και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k .$$

Υπόδειξη: Αρχή της επαγωγής.
(iv) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$.

11. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ρίζας, αποδείξτε ότι:
(i) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ και $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, αν $a \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$.
(ii) $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, αν $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a < b$.

12. Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

13. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a, b \geq 0$. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ αν και μόνο αν $a = 0$ ή $b = 0$.

14. Αποδείξτε ότι οι $\sqrt{3}$, $\sqrt[7]{129}$, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ και $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

15. Να συγκρίνετε τους $\sqrt[105]{105}$ και $\sqrt[106]{106}$.

1.4 Λογάριθμοι.

Το Θεώρημα 1.4 λέει ότι, αν $a > 0$, $a \neq 1$, τότε για κάθε $y > 0$ η εξίσωση $a^x = y$ *έχει* λύση και ότι η λύση αυτή είναι μοναδική.

Θεώρημα 1.4. *Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Τότε για κάθε $y > 0$ υπάρχει μοναδικός x ώστε $a^x = y$.*

Απόδειξη. Έστω $a > 1$, $y \geq 1$.
Θεωρούμε τα σύνολα
$$U = \{u \,|\, a^u \leq y\}, \qquad V = \{v \,|\, a^v \geq y\}.$$
Προφανώς, $0 \in U$. Επίσης, σύμφωνα με το Λήμμα 1.2, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^n > y$ και, επομένως, $n \in V$. Άρα τα U, V δεν είναι κενά. Για κάθε $u \in U$, $v \in V$ ισχύει $a^u \leq y \leq a^v$, οπότε $a^u \leq a^v$ και, επειδή $a > 1$, συνεπάγεται $u \leq v$. Άρα τα U, V ικανοποιούν τις υποθέσεις της Ιδιότητας Συνέχειας, οπότε υπάρχει ξ ώστε
$$u \leq \xi \leq v \qquad (u \in U, v \in V).$$
Θα αποδείξουμε ότι $a^\xi = y$.
Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\xi - \frac{1}{n} < \xi$, οπότε ο $\xi - \frac{1}{n}$ δεν ανήκει στο V. Άρα
$$a^{\xi - \frac{1}{n}} < y.$$
Ομοίως, $\xi < \xi + \frac{1}{n}$, οπότε ο $\xi + \frac{1}{n}$ δεν ανήκει στο U. Άρα
$$y < a^{\xi + \frac{1}{n}}.$$
Άρα
$$\frac{y}{a^\xi} < a^{\frac{1}{n}}, \qquad \frac{a^\xi}{y} < a^{\frac{1}{n}}$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οπότε, σύμφωνα με το Λήμμα 1.2,
$$\frac{y}{a^\xi} \leq 1, \qquad \frac{a^\xi}{y} \leq 1.$$
Άρα
$$a^\xi = y.$$
Οι αποδείξεις στις άλλες περιπτώσεις ανάγονται στο αποτέλεσμα της πρώτης περίπτωσης:
Αν $a > 1$, $0 < y < 1$, τότε, επειδή $\frac{1}{y} > 1$, υπάρχει η ώστε $a^\eta = \frac{1}{y}$ και, επομένως, για τον $\xi = -\eta$ ισχύει $a^\xi = a^{-\eta} = y$.
Αν $0 < a < 1$, τότε, επειδή $\frac{1}{a} > 1$, υπάρχει η ώστε $(\frac{1}{a})^\eta = y$, οπότε για τον $\xi = -\eta$ ισχύει $a^\xi = a^{-\eta} = y$.
Τέλος, θα αποδείξουμε ότι η λύση ξ της $a^x = y$ είναι μοναδική. Αν $a^{\xi_1} = y$, $a^{\xi_2} = y$, τότε $a^{\xi_1} = a^{\xi_2}$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$. □

Επομένως, αν $a > 0$, $a \neq 1$, οι συναρτήσεις a^x και $\log_a y$ είναι αντίστροφες.

Ορισμός. Αν $y > 0$ και $a > 0$, $a \neq 1$, η μοναδική λύση της $a^x = y$, η ύπαρξη της οποίας εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 1.4, ονομάζεται **λογάριθμος του** y **με βάση** a και συμβολίζεται
$$\log_a y.$$
Αν $y \leq 0$ και $a > 0$, $a \neq 1$, είναι προφανές ότι η $a^x = y$ δεν έχει λύση.

Δείτε την άσκηση 9 της ενότητας 1.5 για έναν εναλλακτικό ισοδύναμο ορισμό του $\log_a y$.

Η Πρόταση 1.6 περιγράφει όλες τις βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων.

Πρόταση 1.6. *Έστω* $a, b > 0$, $a, b \neq 1$.
(1) $\log_a(yz) = \log_a y + \log_a z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(2) $\log_a \frac{y}{z} = \log_a y - \log_a z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(3) $\log_a(y^z) = z \log_a y$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* z.
(4) $\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$ *για κάθε* $y > 0$.
(5) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
(6) Έστω $0 < y < z$. *Τότε* (i) $\log_a y < \log_a z$, *αν* $a > 1$, *και* (ii) $\log_a y > \log_a z$, *αν* $0 < a < 1$.

Απόδειξη. (1) Ορίζουμε $x = \log_a y$, $w = \log_a z$, οπότε $a^x = y$, $a^w = z$. Τότε $a^{x+w} = a^x a^w = yz$, οπότε $\log_a(yz) = x + w = \log_a y + \log_a z$.
(2) Είναι $\log_a \frac{y}{z} + \log_a z = \log_a(\frac{y}{z} z) = \log_a y$, οπότε $\log_a \frac{y}{z} = \log_a y - \log_a z$.
(3) Ορίζουμε $x = \log_a y$, οπότε $a^x = y$. Τότε $a^{zx} = (a^x)^z = y^z$ και, επομένως, $\log_a(y^z) = zx = z \log_a y$.
(4) Ορίζουμε $x = \log_b y$, $w = \log_a b$, οπότε $b^x = y$, $a^w = b$. Άρα $a^{wx} = (a^w)^x = b^x = y$. Άρα $\log_a y = wx = \log_a b \log_b y$.
(5) Η $\log_a 1 = 0$ προκύπτει από την $a^0 = 1$ και η $\log_a a = 1$ από την $a^1 = a$.
(6) Ορίζουμε $x = \log_a y$, $w = \log_a z$, οπότε $y = a^x$, $z = a^w$. Τότε $a^x < a^w$ και, αν $a > 1$, συνεπάγεται $x < w$ ενώ, αν $0 < a < 1$, συνεπάγεται $x > w$. □

Το (6) της Πρότασης 1.6 λέει ότι η συνάρτηση $\log_a y$ είναι είτε γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, αν $a > 1$, είτε γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, αν $0 < a < 1$.

Ασκήσεις.

1. Γιατί δεν εξετάζουμε την εξίσωση $a^x = y$ στις περιπτώσεις $a \leq 0$, $a = 1$, $y \leq 0$;

2. Υπολογίστε το γινόμενο $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 10 \cdot \log_{10} 8$.

3. Είναι ο $\log_2 3$ ρητός;

4. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $\log_{\frac{1}{a}} y = -\log_a y$ για κάθε $y > 0$.

5. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $\log_{a^z}(y^z) = \log_a y$ για κάθε $y > 0$ και $z \neq 0$.

1.5 Supremum και infimum.

Ορισμός. Έστω μη-κενό σύνολο A. Το A χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει u ώστε $u \geq a$ για κάθε $a \in A$ ή, ισοδύναμα, $A \subseteq (-\infty, u]$. Κάθε u με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** του A. Ομοίως, το A χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει l ώστε $l \leq a$ για κάθε $a \in A$ ή, ισοδύναμα, $A \subseteq [l, +\infty)$. Κάθε l με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** του A. Τέλος, το A χαρακτηρίζεται **φραγμένο** αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχουν l, u ώστε $A \subseteq [l, u]$.

Αν ο u είναι άνω φράγμα του A, τότε κάθε $u' \geq u$ είναι, επίσης, άνω φράγμα του A και, αν ο l είναι κάτω φράγμα του A, τότε κάθε $l' \leq l$ είναι κι αυτό κάτω φράγμα του A.

Παραδείγματα. (1) Τα άνω φράγματα του διαστήματος $[a, b]$ είναι όλοι οι $u \geq b$ και κανένας άλλος. Το ίδιο ισχύει και για τα διαστήματα $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$. Παρατηρήστε: όλα αυτά τα διαστήματα έχουν κάποιο *ελάχιστο* άνω φράγμα, τον b.
(2) Τα κάτω φράγματα καθενός από τα διαστήματα $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ είναι όλοι οι $l \leq a$ και κανένας άλλος. Παρατηρήστε και πάλι: όλα αυτά τα διαστήματα έχουν κάποιο *μέγιστο* κάτω φράγμα, τον a.
(3) Προφανώς, τα διαστήματα $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένα και τα διαστήματα $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι κάτω φραγμένα.
(4) Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένο και, επειδή ο 1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του, τα κάτω φράγματα του $\mathbb{N}$ είναι όλοι οι $l \leq 1$ και κανένας άλλος. Δηλαδή, ο 1 είναι το *μέγιστο* κάτω φράγμα του $\mathbb{N}$. Από την άλλη μεριά, το Θεώρημα 1.1 λέει, ακριβώς, ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο: δεν

υπάρχει u που να είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$ αφού για κάθε u υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > u$. Όσο περίεργο κι αν φαίνεται, η απόδειξη του ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο βασίζεται στην Ιδιότητα Συνέχειας!!!

Θεώρημα 1.5. *Έστω μη-κενό σύνολο A.*
(1) Αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε από τα άνω φράγματα του A υπάρχει ένα το οποίο είναι ελάχιστο.
(2) Αν το A είναι κάτω φραγμένο, τότε από τα κάτω φράγματα του A υπάρχει ένα το οποίο είναι μέγιστο.

Απόδειξη. (1) Ορίζουμε το σύνολο

$$U = \{u \,|\, u \text{ άνω φράγμα του } A\}.$$

Το U δεν είναι κενό αφού υπάρχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα του A. Προφανώς, ισχύει $a \leq u$ για κάθε $a \in A$, $u \in U$. Σύμφωνα με την Ιδιότητα Συνέχειας, υπάρχει ξ ώστε

$$a \leq \xi \leq u \qquad (a \in A, u \in U).$$

Επειδή $a \leq \xi$ για κάθε $a \in A$, ο ξ είναι άνω φράγμα του A. Επειδή $\xi \leq u$ για κάθε $u \in U$, ο ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.
(2) Ομοίως: αντί του U, θεωρούμε το σύνολο $L = \{l \,|\, l \text{ κάτω φράγμα του } A\}$. □

Ορισμός. Το **ελάχιστο άνω φράγμα** ενός μη-κενού, άνω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και **supremum** του A και συμβολίζεται

$$\sup A.$$

Το **μέγιστο κάτω φράγμα** ενός μη-κενού, κάτω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και **infimum** του A και συμβολίζεται

$$\inf A.$$

Παράδειγμα. Όλα τα διαστήματα $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ έχουν το ίδιο supremum, τον b. Ομοίως, όλα τα διαστήματα $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ έχουν το ίδιο infimum, τον a.

Ορισμός. Το μέγιστο στοιχείο, αν υπάρχει, ενός συνόλου A ονομάζεται και **maximum** του A και συμβολίζεται

$$\max A.$$

Επίσης, το ελάχιστο στοιχείο, αν υπάρχει, του A ονομάζεται και **minimum** του A και συμβολίζεται

$$\min A$$

Πρόταση 1.7. *(1) Αν υπάρχει το $\max A$, τότε $\sup A = \max A$.*
(2) Αν υπάρχει το $\min A$, τότε $\inf A = \min A$.

Απόδειξη. (1) Το $\max A$ είναι άνω φράγμα του A. Δε μπορεί να υπάρχει άνω φράγμα του A μικρότερο από το $\max A$, αφού το $\max A$ είναι στοιχείο του A.
(2) Ομοίως. □

Παραδείγματα. (1) Το $A = \{0\} \cup [2,3] \cup \{4\}$ έχει $\min A = 0$ και $\max A = 4$. Άρα $\inf A = 0$ και $\sup A = 4$.
(2) $\min \mathbb{N} = 1$, οπότε $\inf \mathbb{N} = 1$.
(3) Το $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ έχει $\max A = 1$, οπότε $\sup A = 1$. Όμως το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Θα βρούμε το $\inf A$.
Προφανώς, κάθε $l \leq 0$ είναι κάτω φράγμα του A. Αν $l > 0$, τότε, βάσει της Αρχιμήδειας Ιδιότητας, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < l$, οπότε ο l δεν είναι κάτω φράγμα του A. Άρα τα κάτω φράγματα του A είναι ακριβώς οι μη-αρνητικοί αριθμοί, οπότε το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα του A είναι ο 0. Επομένως, $\inf A = 0$.

Ορισμός. Αν το μη-κενό σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε

$$\sup A = +\infty.$$

Ομοίως, αν το μη-κενό σύνολο A δεν είναι κάτω φραγμένο, ορίζουμε

$$\inf A = -\infty.$$

Αιτιολογούμε τον ορισμό. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, δεν έχει ως άνω φράγμα κανέναν *αριθμό*. Όμως, το $+\infty$ συμβολίζει μια "ποσότητα" μεγαλύτερη από κάθε αριθμό, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως το μοναδικό, και, επομένως, το ελάχιστο, "άνω φράγμα" του A.

Παράδειγμα. Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Σημείωση. Από εδώ και πέρα, όταν γράφουμε $\sup A$, χωρίς ιδιαίτερη επισήμανση, θα εννοούμε ότι αυτό είναι αριθμός ή $+\infty$. Όταν, όμως, γράφουμε $\sup A = u$ (ή άλλο γράμμα) θα εννοούμε ότι το $\sup A$ είναι ο *αριθμός* u, εκτός αν αναφέρουμε ότι $\sup A = u \in \overline{\mathbb{R}}$ ή κάτι παρόμοιο. Τα ανάλογα ισχύουν και για το $\inf A$.

Πρόταση 1.8. *Κάθε μη-κενό σύνολο A έχει supremum και infimum και*

$$\inf A \leq \sup A.$$

Απόδειξη. Αν το μη-κενό σύνολο A είναι άνω φραγμένο, τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.5, υπάρχει το $\sup A$ και είναι αριθμός. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε, εξ ορισμού, $\sup A = +\infty$. Ομοίως, αν το μη-κενό A είναι κάτω φραγμένο, τότε υπάρχει το $\inf A$ και είναι αριθμός, ενώ, αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε $\inf A = -\infty$.
Τέλος, έστω $a \in A$. Τότε

$$\inf A \leq a \leq \sup A,$$

οπότε $\inf A \leq \sup A$. □

Μια απλή παρατήρηση. Αν το A έχει ένα μόνο στοιχείο, τότε τα $\inf A$, $\sup A$ ταυτίζονται με αυτό το στοιχείο και, επομένως, $\inf A = \sup A$. Αν το A έχει τουλάχιστον δυο στοιχεία, τότε $\inf A < \sup A$.

Η Πρόταση 1.9 είναι, ουσιαστικά, μια αναδιατύπωση των ορισμών των supremum και infimum.

Πρόταση 1.9. *Έστω μη-κενό σύνολο A.*
(1) Ισχύει $a \leq \sup A$ για κάθε $a \in A$. Επίσης, για κάθε $u < \sup A$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $a > u$ και, επομένως, $u < a \leq \sup A$.
(2) Ισχύει $a \geq \inf A$ για κάθε $a \in A$. Επίσης, για κάθε $l > \inf A$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $a < l$ και, επομένως, $\inf A \leq a < l$.

Απόδειξη. (1) Αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε το $\sup A$ είναι ένα (το ελάχιστο) από τα άνω φράγματα του A, οπότε ισχύει $a \leq \sup A$ για κάθε $a \in A$. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $\sup A = +\infty$ και, προφανώς, ισχύει $a \leq \sup A$ για κάθε $a \in A$.
Τέλος, έστω $u < \sup A$. Επειδή το $\sup A$ είναι το ελάχιστο από τα άνω φράγματα του A, ο u δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $a > u$.
(2) Ομοίως. □

Το ένα από τα δυο "συμμετρικά" μέρη του Θεωρήματος 1.5 διατυπώνεται ως εξής.

Η Ιδιότητα Supremum. *Κάθε μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Όπως είδαμε, η απόδειξη της Ιδιότητας Supremum βασίζεται στην Ιδιότητα Συνέχειας. Αντιστρόφως, η Πρόταση 1.10 αποδεικνύει την Ιδιότητα Συνέχειας από την Ιδιότητα Supremum. Άρα *η Ιδιότητα Συνέχειας και η Ιδιότητα Supremum είναι ισοδύναμες.*

Πρόταση 1.10. *Έστω ότι κάθε μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Τότε ισχύει η Ιδιότητα Συνέχειας.*

Απόδειξη. Έστω A, B μη-κενά σύνολα ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.
Προφανώς, κάθε $b \in B$ είναι άνω φράγμα του A και, επειδή το B δεν είναι κενό, το A είναι άνω φραγμένο. Άρα το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έναν αριθμό που συμβολίζουμε $\sup A$. Το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, οπότε

$$a \leq \sup A$$

για κάθε $a \in A$. Κάθε $b \in B$ είναι άνω φράγμα του A και το $\sup A$ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, οπότε

$$\sup A \leq b$$

για κάθε $b \in B$. Άρα, αν ορίσουμε $\xi = \sup A$, τότε

$$a \leq \xi \leq b$$

για κάθε $a \in A$, $b \in B$. □

Υπάρχει, φυσικά, και η **Ιδιότητα Infimum**, που λέει ότι *κάθε μη-κενό, κάτω φραγμένο σύνολο έχει μέγιστο κάτω φράγμα.* Κι αυτή αποδεικνύεται στο Θεώρημα 1.5 βάσει της Ιδιότητας Συνέχειας. Όπως στην Πρόταση 1.10, μπορούμε να αποδείξουμε ότι από την Ιδιότητα Infimum αποδεικνύεται η Ιδιότητα Συνέχειας. Δείτε την άσκηση 15.

Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι ένας *χαρακτηρισμός* των διαστημάτων. Γενικά, αν έχουμε μια συλλογή οποιωνδήποτε αντικειμένων και κάθε αντικείμενο της συλλογής αυτής έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα - την ίδια για όλα τα αντικείμενα της συλλογής - τότε λέμε ότι η ιδιότητα αυτή *χαρακτηρίζει* τα αντικείμενα της συλλογής αν κανένα άλλο αντικείμενο δεν έχει την ιδιότητα αυτή εκτός από τα αντικείμενα της συλλογής.

Έστω ότι το σύνολο A είναι οποιοδήποτε *διάστημα*. Γνωρίζουμε ότι το A έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ και για κάθε x ώστε $x_1 < x < x_2$ ισχύει $x \in A$. Με άλλα λόγια: ένα διάστημα περιέχει κάθε στοιχείο που είναι ανάμεσα σε δυο στοιχεία του. Η Πρόταση 1.11 λέει ότι, από τα μη-κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει τα διαστήματα.

Πρόταση 1.11. *Έστω μη-κενό σύνολο A με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ και για κάθε x ώστε $x_1 < x < x_2$ ισχύει $x \in A$. Τότε το A είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω
$$u = \sup A, \qquad l = \inf A,$$
οπότε $-\infty \le l \le u \le +\infty$. Τότε, προφανώς, είναι
$$A \subseteq [l, u].$$
Έστω $x \in (l, u)$. Τότε ο x δεν είναι κάτω φράγμα ούτε άνω φράγμα του A, οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$, ώστε
$$x_1 < x < x_2\,.$$
Βάσει της υπόθεσης, συνεπάγεται $x \in A$. Επομένως,
$$(l, u) \subseteq A.$$
Από τη διπλή σχέση
$$(l, u) \subseteq A \subseteq [l, u]$$
προκύπτουν ακριβώς τέσσερις περιπτώσεις: $A = (l, u)$, $A = [l, u]$, $A = (l, u]$ και $A = [l, u)$. Σε κάθε περίπτωση το A είναι διάστημα. □

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε τις αποδείξεις του Θεωρήματος 1.5 και των Προτάσεων 1.7 και 1.9.

2. Αποδείξτε ότι $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ και $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

3. (i) Αποδείξτε ότι $t \le x$, $t \le y$ και $t \le z$ αν και μόνο αν $t \le \min\{x, y, z\}$.
   (ii) Αποδείξτε ότι $t \ge x$, $t \ge y$ και $t \ge z$ αν και μόνο αν $t \ge \max\{x, y, z\}$.

4. Γιατί τα κάτω φράγματα των $(a, +\infty)$, (a, b), $(a, b]$ είναι μόνο οι $l \le a$;

5. (i) Βρείτε τα infima και suprema των $\{-1, 0, 2, 5\}$, $[-1, 5]$, $(-1, 5)$, $(-1, 0] \cup (2, 5]$. Τι παρατηρείτε;
   (ii) Έστω $\inf A = \inf B$ και $\sup A = \sup B$. Συνεπάγεται $A = B$;

6. Βρείτε τα infima και suprema των συνόλων $\{(-1)^n n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1+(-1)^n}{2n} + \frac{1-(-1)^n}{2} n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{n-(-1)^n(n-1)}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$, $\{x + y \,|\, 0 < y < 1, 4 < x < 5\}$, $\{x - y \,|\, 0 < y < 1, 4 < x < 5\}$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[2n - 1, 2n]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$.

7. Έστω μη-κενό σύνολο A. Περιγράψτε το σύνολο των άνω φραγμάτων του A, διακρίνοντας τις περιπτώσεις: $\sup A = +\infty$, $\sup A < +\infty$.

8. Έστω $a < b$ και $A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, a < r < b\}$. Βρείτε τα $\inf A$ και $\sup A$.

9. (i) Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι $\sup\{a^s \,|\, s \in \mathbb{Q}, s < x\} = a^x = \inf\{a^t \,|\, t \in \mathbb{Q}, t > x\}$. Μια από τις δυο ισότητες - συνήθως η πρώτη - χρησιμεύει ως εναλλακτικός ισοδύναμος ορισμός του a^x για άρρητο x. Τι γίνεται αν $a = 1$ ή αν $0 < a < 1$;
   (ii) Αν $y > 0$, $a > 1$, αποδείξτε ότι $\sup\{u \,|\, a^u \le y\} = \log_a y = \inf\{v \,|\, a^v \ge y\}$. Μια από τις δυο ισότητες - συνήθως η πρώτη - χρησιμεύει ως εναλλακτικός ισοδύναμος ορισμός του $\log_a y$. Τι γίνεται αν $0 < a < 1$;

10. Έχοντας υπόψη τα παραδείγματα $A = [0, 2]$, $A = [0, 2)$, $A = [0, 1] \cup \{2\}$ και την Πρόταση 1.9, απαντήστε, γενικά, στα εξής. Έστω μη-κενό σύνολο A και $u = \sup A$.
(i) Είναι σωστό ότι $A \cap (u - \varepsilon, u] \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$;
(ii) Είναι σωστό ότι $A \cap (u - \varepsilon, u) \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$;
Ποια είναι η απάντηση στα ίδια ερωτήματα αν, επιπλέον, $u \notin A$;
Προσαρμόστε όλα τα προηγούμενα στην περίπτωση του $l = \inf A$.

11. Έστω μη-κενό σύνολο A.
(i) Αποδείξτε ότι $\sup A \leq u$ αν και μόνο αν $a \leq u$ για κάθε $a \in A$.
(ii) Αποδείξτε ότι $u \leq \sup A$ αν και μόνο αν για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $a \in A$, $a > \gamma$.
Προσαρμόστε όλα τα προηγούμενα στην περίπτωση του $\inf A$.

12. Έστω μη-κενά σύνολα A, B.
(i) Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$ αν και μόνο αν $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.
(ii) Έστω $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Περιγράψτε το σύνολο όλων των ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.
(iii) Έστω $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$ και έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $b - a \leq \varepsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$. Συσχετίστε με το (i) της άσκησης 5 της ενότητας 1.2.

13. Έστω μη-κενά σύνολα A, B, $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.
Υπόδειξη: Το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του B, οπότε είναι άνω φράγμα και του A.

14. Έστω μη-κενά σύνολα A, B. Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και κάθε $\gamma < a$ υπάρχει $b \in B$, $b > \gamma$.

15. Αποδείξτε την Ιδιότητα Συνέχειας υποθέτοντας την Ιδιότητα Infimum.

16. Έστω μη-κενά σύνολα A, B. Αποδείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

17. (i) Για το μη-κενό σύνολο A ορίζουμε $-A = \{-a \,|\, a \in A\}$. Αποδείξτε ότι $\sup(-A) = -\inf A$ και $\inf(-A) = -\sup A$.
(ii) Για μη-κενά σύνολα A, B ορίζουμε $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$. Αποδείξτε ότι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ και $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
(iii) Για μη-κενά σύνολα $A, B \subseteq (0, +\infty)$ ορίζουμε $A \cdot B = \{ab \,|\, a \in A, b \in B\}$. Αποδείξτε ότι $\inf(A \cdot B) = \inf A \inf B$ και $\sup(A \cdot B) = \sup A \sup B$.

18. Ποιά πιστεύετε ότι είναι τα κάτω φράγματα και τα άνω φράγματα του $\emptyset$; Επομένως, πώς θα ορίζατε τα $\inf \emptyset$, $\sup \emptyset$; Θα ίσχυε τότε η ανισότητα $\inf \emptyset \leq \sup \emptyset$;

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες και όρια ακολουθιών.

2.1 Ακολουθίες.

2.1.1 Ακολουθίες, μονότονες ακολουθίες, φραγμένες ακολουθίες.

Ορισμός. Χαρακτηρίζουμε **ακολουθία (πραγματικών αριθμών)** οποιαδήποτε συνάρτηση

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πραγματικές τιμές. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η αντίστοιχη τιμή $x(n)$ της συνάρτησης συμβολίζεται, παραδοσιακά, x_n. Δηλαδή,

$$x_n = x(n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Απλοϊκά μιλώντας, ακολουθία είναι οποιαδήποτε άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά ο καθένας: ο πρώτος αριθμός x_1, ο δεύτερος x_2, ο τρίτος x_3 κλπ. Οι επιλεγμένοι αριθμοί, δηλαδή οι τιμές της ακολουθίας/συνάρτησης ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας. Ο όρος x_{n+1} χαρακτηρίζεται **επόμενος** του x_n και ο x_{n-1} **προηγούμενος** του x_n. Η ανεξάρτητη μεταβλητή n, η οποία διατρέχει το $\mathbb{N}$, ονομάζεται **δείκτης** και *δείχνει* τη σειρά επιλογής των όρων της ακολουθίας. Αντί του συναρτησιακού συμβόλου $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε τα

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \qquad (x_n), \qquad (x_n)_{n=1}^{+\infty}.$$

Μπορούμε, φυσικά, να χρησιμοποιούμε κι άλλα γράμματα, εκτός των x, n, για να συμβολίσουμε ακολουθίες: (y_n), (x_k), (z_m) κλπ.

Παραδείγματα. (1) Η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ ή $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$.
(2) Η ακολουθία (n) ή $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$.
(3) Η ακολουθία (1) ή $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$.
(4) Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ ή $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots)$.
(5) Η ακολουθία $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ ή $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots)$.
(6) Η ακολουθία με n-οστό όρο ίσο με το πλήθος των θετικών διαιρετών του n, δηλαδή η ακολουθία $(1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, \dots)$.
(7) Η ακολουθία $(m-n)_{n=1}^{+\infty}$ ή $(m-1, m-2, m-3, \dots, m-n, \dots)$.
(8) Η ακολουθία $(m-n)_{m=1}^{+\infty}$ ή $(1-n, 2-n, 3-n, \dots, m-n, \dots)$.
Στα δυο τελευταία παραδείγματα βλέπουμε ότι μερικές φορές χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, αντί του απλούστερου (x_n), για να δηλώσουμε ποιός - ανάμεσα σε διάφορα γράμματα - είναι ο δείκτης της ακολουθίας.

Προσέξτε: μια ακολουθία είναι συνάρτηση και όχι το σύνολο τιμών της. Με πιο απλά λόγια, μια ακολουθία είναι διαδοχική επιλογή αριθμών, δεν είναι το σύνολο των αριθμών αυτών. Το σύνολο των όρων της ακολουθίας $(1)_{n=1}^{+\infty}$ είναι το μονοσύνολο $\{1\}$. Η ακολουθία, όμως, είναι η διαδοχική επιλογή $(1, 1, 1, \dots)$. Το πλήθος των όρων μιας ακολουθίας είναι πάντοτε άπειρο, ενώ άλλες ακολουθίες έχουν άπειρο σύνολο όρων και άλλες έχουν πεπερασμένο σύνολο όρων. Επίσης, δυο διαφορετικές ακολουθίες μπορεί να έχουν το ίδιο σύνολο όρων. Για παράδειγμα, οι $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, $(1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots)$ είναι διαφορετικές ακολουθίες αλλά έχουν σύνολο όρων το $\{-1, 1\}$. Άλλο παράδειγμα: οι ακολουθίες $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$, $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots)$ είναι διαφορετικές αλλά έχουν σύνολο όρων το $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\} = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Ορισμός. Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **αύξουσα** αν $x_{n+1} \geq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, **γνησίως αύξουσα** αν $x_{n+1} > x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, **φθίνουσα** αν $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, **γνησίως φθίνουσα** αν $x_{n+1} < x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η (x_n) χαρακτηρίζεται **μονότονη** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα, **γνησίως μονότονη** αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Η (x_n) χαρακτηρίζεται **σταθερή** αν όλοι οι όροι της είναι ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή αν υπάρχει c ώστε $x_n = c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Φυσικά, μια σταθερή ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα. Από τα προηγούμενα παραδείγματα, η πρώτη, η πέμπτη και η έβδομη ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσες και η δεύτερη και η όγδοη ακολουθία είναι γνησίως αύξουσες. Η τρίτη ακολουθία είναι σταθερή και η τέταρτη και η έκτη ακολουθία δεν είναι μονότονες.

Ορισμός. Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένη** αν το σύνολο των όρων της είναι άνω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει u ώστε $x_n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε τέτοιος u χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** της (x_n). Η (x_n) χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένη** αν το σύνολο των όρων της είναι κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει l ώστε $x_n \geq l$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε τέτοιος l χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** της (x_n). Η (x_n) χαρακτηρίζεται **φραγμένη** αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν l, u ώστε $l \leq x_n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι, αν ο u είναι άνω φράγμα της ακολουθίας (x_n), τότε κάθε $u' \geq u$ είναι άνω φράγμα της και, αν ο l είναι κάτω φράγμα της (x_n), τότε κάθε $l' \leq l$ είναι κάτω φράγμα της.

Παραδείγματα. (1) Κάθε σταθερή ακολουθία (c) είναι φραγμένη.

(2) Οι ακολουθίες $(\frac{1}{n})$, $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$, $(\frac{n-1}{n})$, $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένες αφού όλοι οι όροι τους ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$.

(3) Η ακολουθία $\left(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\right)$ ή $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \dots)$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη. Προφανώς, κάθε $l \leq 0$ είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας. Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι υπάρχει άνω φράγμα u της ακολουθίας αυτής. Τότε $\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2} \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε, δοκιμάζοντας τους περιττούς $n = 2k - 1$, ισχύει $2k - 1 \leq u$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα $k \leq \frac{u+1}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άτοπο.

(4) Η ακολουθία $(-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, 0, \dots)$, δηλαδή η αντίθετη της προηγούμενης, είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη. Αν κάποιος l ήταν κάτω φράγμα της, δηλαδή αν όλοι οι όροι της ήταν $\geq l$, τότε όλοι οι όροι της προηγούμενης ακολουθίας θα ήταν $\leq -l$, οπότε η προηγούμενη ακολουθία θα ήταν άνω φραγμένη.

(5) Η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ ή $(1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$ δεν είναι άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει u ή l ώστε, αντιστοίχως, $(-1)^{n-1}n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή $l \leq (-1)^{n-1}n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Καταλήγουμε σε άτοπο, δοκιμάζοντας περιττούς ή άρτιους $n \in \mathbb{N}$, αντιστοίχως.

Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, δηλαδή ότι υπάρχουν l, u ώστε

$$l \leq x_n \leq u$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν ορίσουμε

$$M = \max\{u, -l\},$$

τότε $M \geq u$ και $-M \leq l$ και, επομένως, $-M \leq x_n \leq M$ ή, ισοδύναμα,

$$|x_n| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, αν μια ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, τότε υπάρχει M ώστε $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει και το αντίστροφο: αν υπάρχει M ώστε

$$|x_n| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$-M \leq x_n \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε ο M είναι άνω φράγμα και ο $-M$ είναι κάτω φράγμα της (x_n). Επομένως: *Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει M ώστε $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

2.1.2 "Τελικά" ή "από κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και πέρα". "Για άπειρους $n \in \mathbb{N}$".

Ας υποθέσουμε ότι κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα ισχύει ή όχι ανάλογα με τις τιμές που παίρνει ο $n \in \mathbb{N}$. Για παράδειγμα: "ο n διαιρεί τον 234" ή "ο 4 διαιρεί τον n" ή "ισχύει $n^2 - n > 8$" ή "ισχύει $x_n < x_{n+1}$" για κάποια συγκεκριμένη ακολουθία (x_n).

Ορισμός. Λέμε ότι μια συγκεκριμένη ιδιότητα **ισχύει τελικά** ή, ισοδύναμα, ότι **ισχύει από κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και πέρα** αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει η ιδιότητα αυτή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Αν ο n είναι ο δείκτης μιας συγκεκριμένης ακολουθίας (x_n) και η ιδιότητα για την οποία μιλάμε αναφέρεται στους όρους της (x_n), τότε λέμε ότι η (x_n) *έχει τελικά την ιδιότητα αυτή* ή, ισοδύναμα, *από κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και πέρα*. Τέτοιες ιδιότητες είναι για παράδειγμα οι: $x_{n+1} \leq x_n$, $x_{n+1} > x_n$, $x_n \leq u$, $x_n = c$ κλπ. Αν μια από αυτές τις ιδιότητες ισχύει τελικά, λέμε ότι η (x_n) είναι, αντιστοίχως, *τελικά φθίνουσα, τελικά γνησίως αύξουσα, τελικά άνω φραγμένη με άνω φράγμα τον u, τελικά σταθερή c* κλπ.

Παραδείγματα. (1) Η ακολουθία $(1, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, -2, -1, -1, -1, -1, \dots)$ είναι τελικά σταθερή, διότι είναι σταθερή από τον πέμπτο όρο και πέρα.
(2) Η ακολουθία $(n^2 - 14n + 8)$ είναι τελικά γνησίως αύξουσα. Πράγματι, το $n^2 - 14n + 8 = (n-7)^2 - 41$ αυξάνεται γνησίως για $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 7$ ενώ, αντιθέτως, οι αρχικοί επτά όροι φθίνουν γνησίως.

Έστω μια ιδιότητα που εξαρτάται από τον $n \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ και θεωρήσουμε οποιονδήποτε ${n_0}' \in \mathbb{N}$, ${n_0}' \geq n_0$, τότε είναι φανερό ότι η ίδια ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq {n_0}'$.

Τώρα, έστω δυο ιδιότητες που εξαρτώνται από τον $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ${n_0}', {n_0}'' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει η πρώτη ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq {n_0}'$ και να ισχύει η δεύτερη ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq {n_0}''$. Θεωρούμε τον

$$n_0 = \max\{{n_0}', {n_0}''\} \in \mathbb{N}.$$

Επειδή $n_0 \geq n_0'$, η πρώτη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Επίσης, επειδή $n_0 \geq n_0''$, η δεύτερη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα ισχύουν και οι δυο, ταυτόχρονα, ιδιότητες για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Το σχήμα που περιγράψαμε διατυπώνεται ως εξής:

Αν μια ιδιότητα ισχύει τελικά και μια άλλη ιδιότητα ισχύει τελικά κι αυτή, τότε ισχύουν τελικά και οι δυο, ταυτόχρονα, ιδιότητες.

Παράδειγμα. Ισχύει $n^2 - 3n \geq 37$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \frac{\sqrt{157}+3}{2}$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$. Επίσης, ισχύει $\frac{2n+1}{n+1} > \frac{25}{13}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n > 12$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 13$. Άρα ισχύει $n^2 - 3n \geq 37$ *και* $\frac{2n+1}{n+1} > \frac{25}{13}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{8, 13\} = 13$.

Αυτά ισχύουν και για τρεις ή τέσσερις ή, γενικά, πεπερασμένες ιδιότητες: αντί να θεωρήσουμε τον μέγιστο από δυο φυσικούς, τους n_0', n_0'', θα θεωρήσουμε τον μέγιστο από τρεις ή τέσσερις αντίστοιχους φυσικούς, έναν για κάθε ιδιότητα. Δε μπορούμε, όμως, να επεκτείνουμε το παραπάνω επιχείρημα σε άπειρες ιδιότητες διότι άπειροι φυσικοί μπορεί να μην έχουν μέγιστο!

Ορισμός. Το νόημα του ότι μια ιδιότητα **ισχύει για άπειρους** $n \in \mathbb{N}$ είναι σαφές.

Παράδειγμα. Ισχύει $(-1)^{n-1} > 0$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$, αφού ισχύει για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως, ισχύει και η αντίθετη ιδιότητα $(-1)^{n-1} \leq 0$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$, αφού ισχύει για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{N}$. Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι μπορεί μια ιδιότητα να ισχύει για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ αλλά να μην είναι σωστό ότι ισχύει από κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και πέρα.

Έστω μια ιδιότητα που εξαρτάται από τον $n \in \mathbb{N}$. Ας υποθέσουμε ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ και ας θεωρήσουμε οποιονδήποτε $k \in \mathbb{N}$. Οι αριθμοί $n \in \mathbb{N}$, $n \leq k$ είναι πεπερασμένοι, οπότε υπάρχει κάποιος $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ για τον οποίο η ιδιότητα ισχύει. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ για τον οποίο η ιδιότητα ισχύει. Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ για τον οποίο η ιδιότητα ισχύει. *Αν* η ιδιότητα ισχύει για το πολύ πεπερασμένους $n \in \mathbb{N}$, τότε θεωρούμε ως $k \in \mathbb{N}$ τον μεγαλύτερο από αυτούς τους πεπερασμένους $n \in \mathbb{N}$, οπότε δεν υπάρχει κανένας $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ για τον οποίο η ιδιότητα ισχύει και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα η ιδιότητα αυτή ισχύει για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξαμε, λοιπόν, την εξής ισοδυναμία:

Μια ιδιότητα ισχύει για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει κάποιος $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ για τον οποίο η ιδιότητα ισχύει.

Έστω μια ιδιότητα που εξαρτάται από τον $n \in \mathbb{N}$. Ας υποθέσουμε ότι η ιδιότητα ισχύει τελικά, δηλαδή ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Τότε η αντίθετη ιδιότητα ισχύει το πολύ για κάποιους $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq n_0 - 1$, δηλαδή για το πολύ πεπερασμένους $n \in \mathbb{N}$. Αντιστρόφως, έστω ότι η αντίθετη ιδιότητα ισχύει για το πολύ πεπερασμένους $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε η αντίθετη ιδιότητα να μην ισχύει για κανέναν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ και, επομένως, η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα έχουμε την εξής ισοδυναμία:

Μια ιδιότητα ισχύει τελικά αν και μόνο αν η αντίθετη ιδιότητα ισχύει το πολύ για πεπερασμένους $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν είναι λάθος ότι η αντίθετη ιδιότητα ισχύει για άπειρους $n \in \mathbb{N}$.

Φυσικά, το τελευταίο μπορούμε να το διατυπώσουμε και ως εξής:

Μια ιδιότητα ισχύει για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν είναι λάθος ότι η ιδιότητα ισχύει το πολύ για πεπερασμένους $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν είναι λάθος ότι η αντίθετη ιδιότητα ισχύει τελικά.

Ασκήσεις.

1. Οι έξι πρώτοι όροι μιας άγνωστης ακολουθίας είναι: $1, 4, 9, 16, 25, 36$. Ο έβδομος είναι: ο 49; ο 24; οποιοσδήποτε αριθμός;

2. (i) Βρείτε το σύνολο των όρων της ακολουθίας $\left(\frac{a+b}{2} + (-1)^{n-1}\frac{a-b}{2}\right)$.
(ii) Αν $m \in \mathbb{N}$, βρείτε το σύνολο των όρων της ακολουθίας $\left(n - m[\frac{n}{m}]\right)_{n=1}^{+\infty}$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε πρώτα τις περιπτώσεις $m = 1, 2, 3$.

3. (i) Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα, αποδείξτε ότι είναι σταθερή.
(ii) Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη και ότι κάθε φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη.

4. Το *άθροισμα δυο ακολουθιών* (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n + y_n)$.
(i) Αποδείξτε ότι το άθροισμα δυο αυξουσών ή δυο φθινουσών ακολουθιών είναι, αντιστοίχως, αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία.
(ii) Αποδείξτε ότι το άθροισμα δυο άνω φραγμένων ή δυο κάτω φραγμένων ακολουθιών είναι, αντιστοίχως άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη ακολουθία.

5. Ποιές από τις ακολουθίες $((-1)^{n-1}n)$, $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$, $\left(\frac{1-8n}{n^2+n+1}\right)$, $\left(\frac{13^n}{n!}\right)$, $\left(\frac{n^{30}}{2^n}\right)$, $\left(2[\frac{n}{2}]\right)$, $\left(n - 3[\frac{n}{3}]\right)$ είναι *τελικά* μονότονες; τελικά άνω φραγμένες; τελικά κάτω φραγμένες;

6. Αποδείξτε ότι, αν μια ακολουθία είναι τελικά άνω φραγμένη ή τελικά κάτω φραγμένη, τότε είναι, αντιστοίχως, άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη.

7. Έστω ότι το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι υπάρχει x ώστε $x_n = x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$.

8. **Γραμμικοί αναδρομικοί τύποι δεύτερου βαθμού**. Έστω αριθμοί a, b, p, q, όπου οι p, q δεν είναι και οι δυο 0. Έστω ακολουθία (x_n) που ορίζεται από τους δυο πρώτους όρους της και από *αναδρομικό τύπο* ως εξής:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b \qquad \text{και} \qquad x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Θα περιγράψουμε γενική μέθοδο υπολογισμού του n-οστού όρου x_n.
Περίπτωση 1: $p \neq 0, q = 0$. Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $x_n = bp^{n-2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Περίπτωση 2: $p = 0, q \neq 0$. Αποδείξτε ότι $x_n = aq^{\frac{n-1}{2}}$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$ και $x_n = bq^{\frac{n-2}{2}}$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{N}$.
Περίπτωση 3: $p \neq 0, q \neq 0$. Θεωρήστε την εξίσωση $x^2 = px + q$.
(i) Αν $\Delta = p^2 + 4q > 0$, υπάρχουν δυο λύσεις, οι $\rho_1 = \frac{p+\sqrt{\Delta}}{2}$, $\rho_2 = \frac{p-\sqrt{\Delta}}{2}$. Βρείτε κ, λ ώστε $\kappa + \lambda = a$, $\kappa\rho_1 + \lambda\rho_2 = b$. Αποδείξτε ότι $x_n = \kappa{\rho_1}^{n-1} + \lambda{\rho_2}^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.
(ii) Αν $\Delta = p^2 + 4q = 0$, υπάρχει μια λύση, η $\rho = \frac{p}{2}$. Βρείτε κ, λ ώστε $\kappa = a$, $\kappa\rho + \lambda\rho = b$. Αποδείξτε ότι $x_n = \kappa\rho^{n-1} + \lambda(n-1)\rho^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.
(iii) Αν $\Delta = p^2 + 4q < 0$ (οπότε $q < 0$), υπάρχουν δυο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, οι $\rho_1 = \frac{p+i\sqrt{-\Delta}}{2}$, $\rho_2 = \frac{p-i\sqrt{-\Delta}}{2}$. Πάρτε $\rho = \sqrt{-q} > 0$, οπότε $\left(\frac{p}{2\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho}\right)^2 = 1$ και, επομένως, υπάρχει μοναδικός $\theta \in [0, 2\pi)$ ώστε $\cos\theta = \frac{p}{2\rho}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho}$. Συνεπάγεται $\rho_1 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\rho_2 = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$. Αποδείξτε ότι $\rho^2\cos(2\theta) = p\rho\cos\theta + q$, $\rho^2\sin(2\theta) = p\rho\sin\theta$. Βρείτε κ, λ ώστε $\kappa = a$, $\rho(\kappa\cos\theta + \lambda\sin\theta) = b$ και αποδείξτε ότι $x_n = \kappa\rho^{n-1}\cos((n-1)\theta) + \lambda\rho^{n-1}\sin((n-1)\theta)$ $(n \in \mathbb{N})$.
Υπολογίστε τον n-οστό όρο καθεμιάς από τις τέσσερις ακολουθίες που ορίζονται με πρώτους όρους $x_1 = x_2 = 1$ και με τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+2} = 3x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$,

$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$. Η δεύτερη ακολουθία ονομάζεται **ακολουθία Fibonnaci** και οι εφτά αρχικοί όροι της είναι οι $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$.

9. Ποιοι αρχικοί όροι - και με τι περιορισμούς - χρειάζονται για να ορισθεί η ακολουθία (x_n) με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n \quad (n \in \mathbb{N})$; Ίδια ερώτηση για τον αναδρομικό τύπο $x_{n+3} = \frac{x_{n+2}x_n}{x_{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$.

2.2 Όρια ακολουθιών.

Ορισμός. Λέμε ότι η ακολουθία (x_n) **συγκλίνει στον αριθμό** x ή ότι η (x_n) **τείνει στον** x ή ότι ο x **είναι το όριο της** (x_n) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Πιο συνοπτικά: η (x_n) συγκλίνει στον x αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \varepsilon$.
Το ότι η (x_n) συγκλίνει στον x το συμβολίζουμε

$$x_n \to x \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = x \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Αν η (x_n) δε συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, λέμε ότι **η** (x_n) **αποκλίνει**.

Μπορούμε να εκφράσουμε τα προηγούμενα λέγοντας πιο απλά: η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στον x αν η απόσταση του n-οστού όρου x_n από τον x είναι τελικά μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό. Ή αλλιώς: η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στον x αν ο n-οστός όρος x_n πλησιάζει απεριόριστα τον x όταν ο n γίνεται κατάλληλα μεγάλος.

Σχόλιο. Για να αποδείξουμε ότι $x_n \to x$, θεωρούμε έναν τυχόντα $\varepsilon > 0$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός $n_0 \in \mathbb{N}$ - ο οποίος εξαρτάται από τον ε - τέτοιου ώστε "*από* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *να συνεπάγεται* $(\Rightarrow)$ $|x_n - x| < \varepsilon$" ή, ισοδύναμα, ώστε "*να ισχύει* $|x_n - x| < \varepsilon$ *αρκεί* $(\Leftarrow)$ *να ισχύει* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$". Δείτε: το λογικό σχήμα

$$(n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \quad \Rightarrow \quad |x_n - x| < \varepsilon$$

είναι ταυτόσημο με το

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq n_0).$$

Παραδείγματα. (1) Η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει στον 0. Δηλαδή $\frac{1}{n} \to 0$.
Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Για $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $\frac{1}{n} < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Με σύμβολα:

$$|\tfrac{1}{n} - 0| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \tfrac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad n > \tfrac{1}{\varepsilon}.$$

Το Θεώρημα 1.1 λέει ότι *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Προφανώς, η ανισότητα $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ να ισχύει $n > \frac{1}{\varepsilon}$ και, επομένως, $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. Με σύμβολα:

$$(n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \quad \Rightarrow \quad n > \tfrac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\tfrac{1}{n} - 0| < \varepsilon.$$

Μπορούμε - αν και δεν είναι υποχρεωτικό - να βρούμε *συγκεκριμένο* $n_0 \in \mathbb{N}$.

Λήμμα 2.1. *Αν* $a \geq 0$, *ο* $n_0 = [a] + 1$ *είναι ο ελάχιστος* $n \in \mathbb{N}$, $n > a$. *Αν* $a < 0$, *ο* $n_0 = 1$ *είναι ο ελάχιστος* $n \in \mathbb{N}$, $n > a$.

Απόδειξη. Προφανής. $\square$

Για παράδειγμα: ο ελάχιστος $n \in \mathbb{N}$, $n > -3$ είναι ο 1, ο ελάχιστος $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{8}{3}$ είναι ο $3 = [\frac{8}{3}]+1$ και ο ελάχιστος $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ είναι και πάλι ο $3 = 2 + 1 = [2] + 1$.
Πίσω στο παράδειγμά μας. Ο
$$n_0 = [\tfrac{1}{\varepsilon}] + 1$$
είναι ο ελάχιστος $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Άρα, με αυτόν τον $n_0 \in \mathbb{N}$, ισχύει $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.
(2) Η σταθερή ακολουθία (c) συγκλίνει στον c. Δηλαδή
$$c \to c.$$
Έστω $\varepsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|c - c| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Ισχύει $|c - c| < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $0 < \varepsilon$. Προφανώς, η $0 < \varepsilon$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα υπάρχει ο συγκεκριμένος $n_0 = 1 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|c - c| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.
(3) Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ δε συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, δηλαδή αποκλίνει.
Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι η $((-1)^{n-1})$ συγκλίνει σε κάποιον x. Τότε για *κάθε* $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|(-1)^{n-1} - x| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Όμως, όποιος κι αν είναι ο n_0, υπάρχουν *άρτιοι και περιττοί* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Από τους άρτιους $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ συνεπάγεται $|-1 - x| < \varepsilon$ και από τους περιττούς $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ συνεπάγεται $|1 - x| < \varepsilon$. Από το $|-1 - x| < \varepsilon$ συνεπάγεται $x \in (-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$ και από το $|1 - x| < \varepsilon$ συνεπάγεται $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, ο x πρέπει να ανήκει και στα δυο διαστήματα $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ και $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Αν, όμως, είναι $0 < \varepsilon \leq 1$, τότε τα διαστήματα αυτά είναι ξένα, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Ορισμός. Λέμε ότι η ακολουθία (x_n) **αποκλίνει στο** $+\infty$ ή ότι η (x_n) **τείνει στο** $+\infty$ ή ότι το $+\infty$ **είναι το όριο της** (x_n) αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει
$$x_n > M$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Πιο συνοπτικά: η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$.
Το ότι η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ το συμβολίζουμε
$$x_n \to +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty\,.$$
Επίσης, λέμε ότι η ακολουθία (x_n) **αποκλίνει στο** $-\infty$ ή ότι η (x_n) **τείνει στο** $-\infty$ ή ότι το $-\infty$ **είναι το όριο της** (x_n) αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει
$$x_n < -M$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Πιο συνοπτικά: η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$ αν για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n < -M$.
Το ότι η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$ το συμβολίζουμε
$$x_n \to -\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = -\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty\,.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλες εκφράσεις: η ακολουθία (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ αν ο n-οστός όρος x_n είναι τελικά δεξιότερα κάθε θετικού αριθμού. Επίσης: η ακολουθία (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ αν ο n-οστός όρος x_n πλησιάζει απεριόριστα το $+\infty$ όταν ο n γίνεται κατάλληλα μεγάλος. Ανάλογες εκφράσεις υπάρχουν για την απόκλιση στο $-\infty$.

Δείτε τις ασκήσεις 6, 7 και 8 για ισοδύναμες διατυπώσεις των ορισμών των ορίων καθώς και για διατυπώσεις των αρνήσεων των ορίων.

Παραδείγματα. (1) Η ακολουθία (n) αποκλίνει στο $+\infty$. Δηλαδή $n \to +\infty$.
Έστω $M > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $n > M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > M$. Προφανώς, η ανισότητα $n > M$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.
Μπορούμε - χωρίς να είναι υποχρεωτικό - να θεωρήσουμε τον συγκεκριμένο

$$n_0 = [M] + 1 \in \mathbb{N}$$

και, με αυτόν τον n_0, ισχύει $n > M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.
(2) Η ακολουθία $(\sqrt{n})$ αποκλίνει στο $+\infty$. Δηλαδή $\sqrt{n} \to +\infty$.
Έστω $M > 0$. Θα δούμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\sqrt{n} > M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Επειδή $M > 0$, ισχύει $\sqrt{n} > M$ αρκεί να ισχύει $n > M^2$. Με σύμβολα:

$$\sqrt{n} > M \quad \Leftarrow \quad n > M^2 .$$

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > M^2$ και, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > M^2$ και, επομένως, $\sqrt{n} > M$. Με σύμβολα:

$$(n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \quad \Rightarrow \quad n > M^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} > M.$$

(3) Με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή μελετώντας τις ανισότητες $-n < -M$ και $-\sqrt{n} < -M$, βλέπουμε ότι: $-n \to -\infty$ και $-\sqrt{n} \to -\infty$.
(4) Η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ ή $(1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots)$ δεν αποκλίνει στα $\pm\infty$.
Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $(-1)^{n-1}n > M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Όποιος κι αν είναι ο n_0, υπάρχουν άρτιοι και περιττοί $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Από τους άρτιους $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ συνεπάγεται $-n > M$ και από τους περιττούς $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ συνεπάγεται $n > M$. Όμως, το $-n > M$ είναι, προφανώς, αδύνατο, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.
Ομοίως, το ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$ οδηγεί σε άτοπο.

Ας δούμε, τώρα, μερικά λίγο πιο γενικά και σημαντικά παραδείγματα.

Παραδείγματα. (1) Γενίκευση της ακολουθίας $(\frac{1}{n})$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{n^a} \to 0 \qquad (a > 0).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{n^a} - 0| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Για $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $|\frac{1}{n^a} - 0| < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $\frac{1}{n^a} < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $n^a > \frac{1}{\varepsilon}$ αρκεί να ισχύει $n > (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{a}}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{a}}$ και, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $|\frac{1}{n^a} - 0| < \varepsilon$.
(2) Γενίκευση των ακολουθιών (n) και $(\sqrt{n})$. Θα αποδείξουμε ότι

$$n^a \to +\infty \qquad (a > 0).$$

Έστω $M > 0$. Για $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $n^a > M$ αρκεί να ισχύει $n > M^{\frac{1}{a}}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > M^{\frac{1}{a}}$, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > M^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $n^a > M$.

(3) Θα αποδείξουμε ότι

$$\log_a n \to +\infty \qquad (a > 1).$$

Έστω $M > 0$. Για $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\log_a n > M$ αρκεί να ισχύει $n > a^M$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > a^M$, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > a^M$ και, επομένως, $\log_a n > M$.

(4) **Γεωμετρική πρόοδος**. Θεωρούμε την ακολουθία $(a, a^2, a^3, a^4, \dots)$, δηλαδή την (a^n). Η ακολουθία αυτή είναι γνωστή από το λύκειο: είναι η **γεωμετρική πρόοδος με λόγο** a.

Αν $a = 1$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (1) η οποία συγκλίνει στον 1. Επίσης, αν $a = 0$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (0) η οποία συγκλίνει στον 0.

Αν $a \leq -1$, οι όροι της (a^n) είναι $a \leq -1$, $a^2 \geq 1$, $a^3 \leq -1$, $a^4 \geq 1, \dots$. Θα αποδείξουμε ότι η (a^n) δεν έχει κανένα όριο. Κατ' αρχάς, έστω ότι η (a^n) συγκλίνει σε κάποιον x. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|a^n - x| < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $x > a^n - 1 \geq 0$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ και $x < a^n + 1 \leq 0$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $x > 0$ και $x < 0$, το οποίο είναι άτοπο. Κατόπιν, έστω ότι η (a^n) αποκλίνει στο $+\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $a^n > M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Αυτό είναι αδύνατο για περιττούς $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Ομοίως, η (a^n) δεν αποκλίνει στο $-\infty$.

Αν $0 < |a| < 1$, θα δούμε ότι η (a^n) συγκλίνει στον 0. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, ισχύει $|a^n - 0| < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $|a|^n < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $n > \log_{|a|} \varepsilon$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > \log_{|a|} \varepsilon$ και, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > \log_{|a|} \varepsilon$ και, επομένως, $|a^n - 0| < \varepsilon$.

Αν $a > 1$, θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε, ισχύει $a^n > M$ αρκεί να ισχύει $n > \log_a M$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > \log_a M$ και, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > \log_a M$ και, επομένως, $a^n > M$.

Άρα

$$a^n \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ \to 1, & \text{αν } a = 1 \\ \to 0, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Θα δούμε στην ενότητα 2.4 και στην άσκηση 7 της ενότητας 2.5 κι άλλες αποδείξεις μερικών από τα όρια της γεωμετρικής προόδου.

Σχόλιο. Σε τρία από τα προηγούμενα παραδείγματα χρειάστηκε να αποδείξουμε ότι κάποια ακολουθία δεν έχει όριο. Θα γνωρίσουμε λίγο αργότερα δυο τρόπους - βασισμένους στις Προτάσεις 2.3(3) και 2.23 - για να αποδεικνύουμε ότι μια συγκεκριμένη ακολουθία δεν έχει όριο, παρακάμπτοντας τους ορισμούς των ορίων.

Σημείωση. Χρησιμοποιούμε τη λέξη "όριο" και τα σύμβολα $\to$, lim, $\lim_{n\to+\infty}$ σε όλες τις περιπτώσεις που η ακολουθία έχει όριο, είτε συγκλίνει σε αριθμό είτε αποκλίνει σε ένα από τα $\pm\infty$. Χρησιμοποιούμε το ρήμα "συγκλίνει" όταν το όριο είναι αριθμός και το ρήμα "αποκλίνει" σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή όταν το όριο δεν υπάρχει ή είναι ένα από τα $\pm\infty$. Όταν γράφουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n$, χωρίς άλλη επισήμανση, εννοούμε ότι το όριο είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$. Όταν, όμως, γράφουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ (ή άλλο γράμμα), εννοούμε ότι το $\lim_{n\to+\infty} x_n$ είναι ο *αριθμός* x, εκτός αν γράψουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$ ή κάτι ανάλογο.

Ασκήσεις.

1. Βάσει παραδειγμάτων της ενότητας αυτής βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{3^{2n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \log_3 n$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{3^n}$.

2. Για ποιες τιμές του x υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{(2x+1)^n}$;

3. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς, αποδείξτε τα όρια: $\frac{1}{n+8}\to 0$, $\frac{3n+1}{2n+5}\to\frac{3}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}+5}\to 0$, $n^2-7n\to+\infty$, $2^n+2^{-n}\to+\infty$, $\frac{3+\log_2 n}{1+3\log_2 n}\to\frac{1}{3}$.

4. (i) Αποδείξτε ότι $\frac{3+(-1)^n}{2n}\to 0$, ότι $\frac{3+(-1)^n}{2n}>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και ότι η ακολουθία $\left(\frac{3+(-1)^n}{2n}\right)$ δεν είναι φθίνουσα.
(ii) Αποδείξτε ότι $\frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2}\to+\infty$ και ότι η ακολουθία $\left(\frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2}\right)$ δεν είναι αύξουσα.

5. (i) Έστω $x_n\to x$. Για κάθε $\varepsilon>0$ έστω $n_0(\varepsilon)$ ο *ελάχιστος* $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n-x|<\varepsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$. Αποδείξτε ότι, αν $0<\varepsilon'<\varepsilon$, τότε $n_0(\varepsilon')\geq n_0(\varepsilon)$.
(ii) Έστω $x_n\to+\infty$. Για κάθε $M>0$ έστω $n_0(M)$ ο *ελάχιστος* $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n>M$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$. Αποδείξτε ότι, αν $M'>M>0$, τότε $n_0(M')\geq n_0(M)$.

6. Αποδείξτε τις "αρνήσεις" των ορίων:
(i) Η ακολουθία (x_n) *δε* συγκλίνει στον x αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon_0>0$ ώστε να ισχύει $|x_n-x|\geq\varepsilon_0$ για άπειρους $n\in\mathbb{N}$.
(ii) Η ακολουθία (x_n) *δεν* αποκλίνει στο $+\infty$ αν και μόνο αν υπάρχει $M_0>0$ ώστε να ισχύει $x_n\leq M_0$ για άπειρους $n\in\mathbb{N}$.
(iii) Η ακολουθία (x_n) *δεν* αποκλίνει στο $-\infty$ αν και μόνο αν υπάρχει $M_0>0$ ώστε να ισχύει $x_n\geq -M_0$ για άπειρους $n\in\mathbb{N}$.

7. Αποδείξτε τους παρακάτω ισοδύναμους ορισμούς των ορίων.
(i) Αν $\varepsilon_0>0$, τότε $x_n\to x$ αν και μόνο αν για κάθε ε, $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ ισχύει τελικά $|x_n-x|<\varepsilon$.
(ii) Αν $M_0>0$, τότε $x_n\to+\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M\geq M_0$ ισχύει τελικά $x_n>M$.
(iii) Είναι $x_n\to+\infty$ αν και μόνο αν για κάθε M - χωρίς κανένα περιορισμό - ισχύει τελικά $x_n>M$.

8. Έστω x και ακολουθία (x_n).
(i) Προφανώς, αν για *κάποιον* $\varepsilon>0$ ισχύει τελικά $|x_n-x|<\varepsilon$, τότε για *τον ίδιο* ε ισχύει τελικά $|x_n-x|\leq\varepsilon$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει. Παράδειγμα: $x_n=(-1)^{n-1}$, $x=0$, $\varepsilon=1$. Αποδείξτε τον εξής ισοδύναμο ορισμό ορίου: $x_n\to x$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει τελικά $|x_n-x|\leq\varepsilon$.
(ii) Προφανώς, αν για *κάποιον* $M>0$ ισχύει τελικά $x_n>M$, τότε για *τον ίδιο* M ισχύει τελικά $x_n\geq M$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει. Παράδειγμα: $x_n=1$, $M=1$. Αποδείξτε τον εξής ισοδύναμο ορισμό ορίου: $x_n\to+\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M>0$ ισχύει τελικά $x_n\geq M$.

9. Έστω ότι για την ακολουθία (x_n) και τον x ισχύει ότι: υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $\varepsilon>0$ να ισχύει $|x_n-x|<\varepsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$. Τι συμπεραίνετε για την ακολουθία; Να αντιπαραβάλετε με τον ορισμό του $x_n\to x$.

10. Έστω ότι το σύνολο των όρων της ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι, αν $x_n\to x$, τότε η (x_n) είναι τελικά σταθερή και ότι ο x είναι ένας από τους όρους της.
Υπόδειξη: Έστω A το σύνολο των όρων της (x_n) και έστω $d>0$ η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε δυο οποιαδήποτε στοιχεία του A. Υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|x_n-x|<\frac{d}{2}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$. Τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$ είναι $|x_n-x_{n_0}|\leq|x_n-x|+|x_{n_0}-x|<\frac{d}{2}+\frac{d}{2}=d$. Συνεπάγεται $x_n=x_{n_0}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$.

11. Έστω ακολουθία (x_n) ώστε $x_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι τελικά σταθερή και ότι $x \in \mathbb{Z}$.
Υπόδειξη: Δείτε την υπόδειξη της άσκησης 10: η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε δυο οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{Z}$ είναι ίση με 1.

2.3 Περιοχές.

Θα ξαναδιατυπώσουμε τους ορισμούς του ορίου ακολουθίας με διαφορετικό τρόπο, αφού εισαγάγουμε μερικούς νέους όρους.

Ορισμός. Έστω $\varepsilon > 0$. Το διάστημα $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ονομάζεται ε**-περιοχή του** x και συμβολίζεται

$$N_x(\varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Αν δε θέλουμε να αναφέρουμε τον συγκεκριμένο ε, χρησιμοποιούμε τον όρο **περιοχή του** x και το σύμβολο N_x. Για παράδειγμα, όταν λέμε "υπάρχει κάποια περιοχή N_x του x ώστε να ισχύει ..." εννοούμε "υπάρχει κάποιος $\varepsilon > 0$ ώστε για την περιοχή $N_x(\varepsilon)$ του x να ισχύει ..." και όταν λέμε "για κάθε περιοχή N_x του x ισχύει ..." εννοούμε "για κάθε $\varepsilon > 0$, για την περιοχή $N_x(\varepsilon)$ του x ισχύει ...".

Ορισμός. Έστω $\varepsilon > 0$. Το $(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty]$ ονομάζεται ε**-περιοχή του** $+\infty$ και το $[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$ ονομάζεται ε**-περιοχή του** $-\infty$. Συμβολίζουμε

$$N_{+\infty}(\varepsilon) = \big(\tfrac{1}{\varepsilon}, +\infty\big], \qquad N_{-\infty}(\varepsilon) = \big[-\infty, -\tfrac{1}{\varepsilon}\big).$$

Αν δεν αναφέρουμε τον συγκεκριμένο ε, χρησιμοποιούμε τους όρους **περιοχή του** $\pm\infty$ και τα αντίστοιχα σύμβολα $N_{\pm\infty}$. Μέσω των αντίστροφων τύπων $M = \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon = \frac{1}{M}$ τα διαστήματα $(M, +\infty]$ $(M > 0)$ είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα $(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty]$ $(\varepsilon > 0)$ και τα $[-\infty, -M)$ $(M > 0)$ είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα $[-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$.

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι, όταν μικραίνει ο ε και το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ μένει αμετάβλητο, τότε η αντίστοιχη περιοχή $N_x(\varepsilon)$ μικραίνει. Δείτε την άσκηση 1. Ο ε αποτελεί το "μέτρο" της εγγύτητας στο x των στοιχείων της περιοχής $N_x(\varepsilon)$. Όσο πιο μικρός είναι ο ε τόσο πιο κοντά στο x είναι τα στοιχεία της $N_x(\varepsilon)$.

Παρατηρήστε ότι η συνθήκη

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

στον ορισμό του $x_n \to x$ γράφεται, ισοδύναμα,

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$$

ή, ισοδύναμα,

$$x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

ή, ισοδύναμα,

$$x_n \in N_x(\varepsilon).$$

Ομοίως, οι

$$x_n > M, \qquad x_n < -M$$

που αναφέρονται στους ορισμούς των $x_n \to \pm\infty$ γράφονται, ισοδύναμα,

$$x_n \in (M, +\infty], \qquad x_n \in [-\infty, -M)$$

ή, ισοδύναμα,

$$x_n \in N_{+\infty}(\varepsilon), \qquad x_n \in N_{-\infty}(\varepsilon),$$

όπου $\varepsilon = \frac{1}{M}$.

Μπορούμε, τώρα, να διατυπώσουμε *και τους τρεις* ορισμούς ορίων ως *έναν* ορισμό, ως εξής.

Ορισμός. Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Τότε $x_n \to x$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\varepsilon)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\varepsilon)$. Ακόμη πιο συνοπτικά: $x_n \to x$ αν για κάθε περιοχή N_x του x ισχύει τελικά $x_n \in N_x$.

Είναι καλό να γνωρίζουμε ότι με την έννοια της περιοχής μπορούμε να ενοποιήσουμε τους τρεις ορισμούς ορίων σε έναν. Αν, σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, η φύση των επιχειρημάτων δεν απαιτεί να διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς το αν ένα όριο είναι αριθμός ή ένα από τα $\pm\infty$, τότε θα χρησιμοποιούμε τις περιοχές. Κάπως πιο σημαντικό ρόλο θα παίξουν οι περιοχές στο επόμενο κεφάλαιο σε σχέση με τα όρια συναρτήσεων, όπου οι περιπτώσεις ορίων είναι πολύ περισσότερες.

Ασκήσεις.

1. Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$.
   (i) Αποδείξτε ότι, αν $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, τότε $N_x(\varepsilon_1) \subseteq N_x(\varepsilon_2)$.
   (ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $N_x(\frac{1}{n}) \subseteq N_x(\varepsilon)$.

2. Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$.
   (i) Αποδείξτε ότι $\bigcap_{\varepsilon>0} N_x(\varepsilon) = \{x\}$ ή, με άλλα λόγια, το μοναδικό στοιχείο που ανήκει σε όλες τις περιοχές του x είναι το ίδιο το x.
   (ii) Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} N_x(\frac{1}{n}) = \{x\}$.

3. Έστω $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq y$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $N_x(\varepsilon) \cap N_y(\varepsilon) = \emptyset$.

2.4 Ιδιότητες σχετικές με όρια ακολουθιών.

Πρόταση 2.1. *Έστω ότι οι ακολουθίες (x_n), (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Αν η μια ακολουθία έχει κάποιο όριο, τότε και η άλλη έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Το ότι οι (x_n), (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα σημαίνει ότι υπάρχουν $k_0, m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$x_{k_0} = y_{m_0}\,,\ x_{k_0+1} = y_{m_0+1}\,,\ x_{k_0+2} = y_{m_0+2}\,,\ \ldots\,.$$

Υποθέτουμε ότι $x_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ και θα αποδείξουμε ότι $y_n \to a$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n \in N_a(\varepsilon)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Θεωρούμε τον

$$n_0{}' = \max\{n_0, k_0\} \in \mathbb{N},$$

οπότε $n_0{}' \geq n_0$ και $n_0{}' \geq k_0$. Επειδή $n_0{}' \geq n_0$, ισχύει $x_n \in N_a(\varepsilon)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0{}'$. Θεωρούμε τον ακέραιο

$$n_0{}'' = n_0{}' + m_0 - k_0\,.$$

Επειδή $n_0{}' \geq k_0$, είναι $n_0{}'' \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0{}''$ ισχύει $n \geq m_0$, οπότε

$$y_n = x_{n-m_0+k_0}\,, \qquad n - m_0 + k_0 \geq n_0{}'\,.$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0{}''$ ισχύει $y_n \in N_a(\varepsilon)$. Άρα $y_n \to a$. □

Παραδείγματα. (1) Δείτε τις ακολουθίες $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$, $(-2, 5, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$. Η πρώτη συγκλίνει στον 0. Η δεύτερη ταυτίζεται, από τον τρίτο όρο της και πέρα, με την πρώτη, από τον τέταρτο όρο της και πέρα, οπότε κι αυτή συγκλίνει στον 0.

(2) Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει όριο. Η (x_n) γράφεται $(x_1, x_2, x_3, \dots)$. Τότε η ακολουθία $(x_2, x_3, x_4, \dots)$, δηλαδή η (x_{n+1}), έχει το ίδιο όριο με την (x_n). Το ίδιο ισχύει για την ακολουθία $(x_3, x_4, x_5, \dots)$, δηλαδή την (x_{n+2}). Γενικότερα, αν $m \in \mathbb{N}$,

$$x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad x_{n+m} \to x \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Για παράδειγμα: $\frac{1}{n+3} \to 0$ και $\log_2(n+8) \to +\infty$.

Όλες οι προτάσεις αυτής της ενότητας είναι χρήσιμες. Όμως, οι απλές Προτάσεις 2.2 και 2.3 είναι πολύ σημαντικές για την κατανόηση της έννοιας του ορίου.

Η Πρόταση 2.2 λέει ότι αν το όριο μιας ακολουθίας ικανοποιεί μια γνήσια (απλή) ανισότητα, τότε και οι όροι της ακολουθίας ικανοποιούν τελικά την ίδια γνήσια ανισότητα.

Πρόταση 2.2. *Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$.*
(1) Αν $x > u$, τότε ισχύει τελικά $x_n > u$.
(2) Αν $x < l$, τότε ισχύει τελικά $x_n < l$.
(3) Αν $u < x < l$, τότε ισχύει τελικά $u < x_n < l$.

Απόδειξη. (1) Έστω $x_n \to x$ και $x > u$. Επειδή $x - u > 0$, ισχύει τελικά

$$|x_n - x| < x - u$$

και, επομένως, ισχύει τελικά

$$x_n > x - (x - u) = u.$$

Έστω $x_n \to +\infty$. Θεωρούμε έναν $M > 0$ ώστε $M \geq u$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επομένως, ισχύει τελικά $x_n > u$.
(2) Ομοίως.
(3) Ισχύει τελικά $x_n > u$ και ισχύει τελικά $x_n < l$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > u$ και $x_n < l$. □

Η Πρόταση 2.3 λέει ότι αν άπειροι όροι μιας ακολουθίας ικανοποιούν μια μη-γνήσια (απλή) ανισότητα, τότε και το όριο - αν υπάρχει - της ακολουθίας ικανοποιεί την ίδια μη-γνήσια ανισότητα. Επίσης, η Πρόταση 2.3 περιέχει ένα χρήσιμο κριτήριο μη-ύπαρξης ορίου: αν δυο συγκεκριμένοι αριθμοί χωρίζουν κάποιους άπειρους όρους μιας ακολουθίας από κάποιους άλλους άπειρους όρους της ίδιας ακολουθίας, τότε η ακολουθία δεν έχει όριο. Παρεμπιπτόντως, και το αντίστροφο αυτού του κριτηρίου είναι σωστό. Για δυο αποδείξεις του αντιστρόφου δείτε την άσκηση 14 της ενότητας 2.7 και την άσκηση 12 της ενότητας 2.9.

Πρόταση 2.3. *(1) Αν ισχύει $x_n \geq l$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \geq l$.*
(2) Αν ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \leq u$.
(3) Αν $u < l$ και ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \geq l$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$, τότε η (x_n) δεν έχει όριο.

Απόδειξη. (1) Αν ήταν $x < l$, θα ίσχυε τελικά $x_n < l$, οπότε θα ίσχυε $x_n \geq l$ για το πολύ πεπερασμένους $n \in \mathbb{N}$.
(2) Ομοίως.
(3) Αν η (x_n) είχε όριο, το όριο αυτό θα ήταν $\leq u$ και $\geq l$, οπότε $l \leq u$. □

Παραδείγματα. (1) Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και ισχύει $x_n \in [l, u]$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$, τότε $x \in [l, u]$.
(2) Αν $a \le -1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος (a^n) δεν έχει όριο, αφού ισχύει $a^n \ge 1$ για τους άρτιους $n \in \mathbb{N}$ και $a^n \le -1$ για τους περιττούς $n \in \mathbb{N}$.
(3) Η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ δεν έχει όριο, αφού ισχύει $(-1)^{n-1}n \ge 1$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$ και $(-1)^{n-1}n \le -1$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{N}$.
(4) Η ακολουθία $\big(n - 3[\frac{n}{3}]\big)$ δεν έχει όριο, αφού ισχύει $n - 3[\frac{n}{3}] = 0$ για $n = 3k\,(k \in \mathbb{N})$ και $n - 3[\frac{n}{3}] = 1$ για $n = 3k + 1\,(k \in \mathbb{N})$.

Η Πρόταση 2.4 εκφράζει τη **μοναδικότητα του ορίου**.

Πρόταση 2.4. *Καμιά ακολουθία δεν έχει δυο διαφορετικά όρια.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει δυο διαφορετικά όρια. Θεωρούμε οποιονδήποτε a γνησίως ανάμεσα στα δυο αυτά όρια. Από την Πρόταση 2.2, ισχύει τελικά $x_n > a$ και, επίσης, ισχύει τελικά $x_n < a$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > a$ και $x_n < a$. Άτοπο. □

Η Πρόταση 2.5 είναι, ουσιαστικά, μια παραλλαγή της Πρότασης 2.3. Λέει ότι αν άπειροι όροι δυο ακολουθιών ικανοποιούν μια μη-γνήσια μεταξύ τους ανισότητα, τότε και τα όριά τους - αν υπάρχουν - ικανοποιούν την ίδια μη-γνήσια ανισότητα.

Πρόταση 2.5. *Αν ισχύει $x_n \le y_n$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \le y$.*

Απόδειξη. Έστω $x > y$. Θεωρούμε a ώστε $x > a > y$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > a$ και ισχύει τελικά $a > y_n$. Επομένως, ισχύει τελικά $x_n > a$ και $a > y_n$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > y_n$ και, επομένως, ισχύει $x_n \le y_n$ για το πολύ πεπερασμένους $n \in \mathbb{N}$. Άτοπο. □

Παράδειγμα. Ισχύει $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $-\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$.
Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι, αν ισχύει $x_n < y_n$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε δε συνεπάγεται $x < y$. Από το ότι ισχύει $x_n < y_n$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \le y_n$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$, οπότε $x \le y$.

Οι Προτάσεις 2.6 και 2.7 είναι πολύ χρήσιμες για την απόδειξη ύπαρξης αλλά και τον υπολογισμό του ορίου μιας ακολουθίας: η μέθοδος συνίσταται στην κατάλληλη σύγκριση της ακολουθίας με άλλες ακολουθίες των οποίων γνωρίζουμε τα όρια.

Πρόταση 2.6. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \le y_n$.*
(1) Αν $x_n \to +\infty$, τότε $y_n \to +\infty$.
(2) Αν $y_n \to -\infty$, τότε $x_n \to -\infty$.

Απόδειξη. (1) Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επειδή ισχύει τελικά $y_n \ge x_n$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n > M$ και $y_n \ge x_n$. Άρα ισχύει τελικά $y_n > M$ και, επομένως, $y_n \to +\infty$.
(2) Ομοίως. □

Παραδείγματα. (1) Ισχύει $n+(-1)^{n-1} \ge n-1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $n-1 \to +\infty$, συνεπάγεται $n + (-1)^{n-1} \to +\infty$.
(2) Επειδή ισχύει $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \ge n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $n \to +\infty$, συνεπάγεται $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \to +\infty$.
(3) Ισχύει $[\sqrt{n}] > \sqrt{n} - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sqrt{n} - 1 \to +\infty$. Άρα $[\sqrt{n}] \to +\infty$.

Η Πρόταση 2.7 εκφράζει τη λεγόμενη **ιδιότητα παρεμβολής**.

Πρόταση 2.7. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \le y_n \le z_n$. Αν $x_n \to a$ και $z_n \to a$, τότε $y_n \to a$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - a| < \varepsilon$ και, επίσης, ισχύει τελικά $|z_n - a| < \varepsilon$. Άρα ισχύει τελικά

$$|x_n - a| < \varepsilon, \qquad |z_n - a| < \varepsilon, \qquad x_n \le y_n \le z_n\,.$$

Άρα ισχύει τελικά

$$x_n > a - \varepsilon, \qquad z_n < a + \varepsilon, \qquad x_n \le y_n \le z_n\,.$$

Άρα ισχύει τελικά $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ ή, ισοδύναμα, $|y_n - a| < \varepsilon$. Άρα $y_n \to a$. $\square$

Παραδείγματα. (1) Ισχύει $-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^{n-1}}{n} \le \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $-\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$, συνεπάγεται $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$.
(2) Ομοίως, ισχύει $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

Πρόταση 2.8. *Αν μια ακολουθία συγκλίνει, τότε αυτή είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$. Από την $|x_n - x| < 1$ συνεπάγεται

$$|x_n| = |(x_n - x) + x| \le |x_n - x| + |x| < 1 + |x|.$$

Άρα ισχύει $|x_n| < 1 + |x|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$. Ορίζουμε

$$M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x|\}$$

και βλέπουμε ότι ισχύει $|x_n| \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $1 \le n \le n_0 - 1$ και $|x_n| < 1 + |x| \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$. Άρα ισχύει $|x_n| \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η (x_n) είναι φραγμένη. $\square$

Παράδειγμα. Δεν αληθεύει το αντίστροφο της Πρότασης 2.8. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη αλλά δε συγκλίνει.

Πρόταση 2.9. *(1) Αν μια ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$, τότε αυτή είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.*
(2) Αν μια ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$, τότε αυτή είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.

Απόδειξη. (1) Έστω $x_n \to +\infty$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$. Ορίζουμε

$$l = \min\{x_1, \ldots, x_{n_0-1}, 1\},$$

οπότε ισχύει $x_n \ge l$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $1 \le n \le n_0 - 1$ και $x_n > 1 \ge l$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$. Άρα ισχύει $x_n \ge l$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η (x_n) είναι κάτω φραγμένη. Τώρα, για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$. Άρα κανένας $M > 0$ δεν είναι άνω φράγμα της (x_n), οπότε η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
(2) Ομοίως. $\square$

Παράδειγμα. Τα αντίστροφα των (1), (2) της Πρότασης 2.9 δεν αληθεύουν. Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία $\left(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\right)$, δηλαδή η $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots)$, είναι κάτω φραγμένη και όχι άνω φραγμένη. Όμως, η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$ διότι ισχύει $\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2} \le 0$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως, η ακολουθία $(-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, \ldots)$ είναι άνω φραγμένη, όχι κάτω φραγμένη και δεν αποκλίνει στο $-\infty$.

Η **αντίθετη ακολουθία** μιας ακολουθίας (x_n) είναι η ακολουθία $(-x_n)$. Η Πρόταση 2.10 λέει ότι το όριο του αντιθέτου είναι ίσο με το αντίθετο του ορίου.

Πρόταση 2.10. *Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $-x_n \to -x$.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - x| < \varepsilon$. Άρα ισχύει τελικά

$$|(-x_n) - (-x)| = |x_n - x| < \varepsilon.$$

Άρα $-x_n \to -x$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > M$, οπότε ισχύει τελικά $-x_n < -M$ και, επομένως, $-x_n \to -\infty = -(+\infty)$.
Ομοίως, αποδεικνύεται ότι, αν $x_n \to -\infty$, τότε $-x_n \to +\infty = -(-\infty)$. □

Το **άθροισμα δυο ακολουθιών** (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n + y_n)$. Η Πρόταση 2.11 λέει ότι το όριο του αθροίσματος είναι ίσο με το άθροισμα των ορίων.

Πρόταση 2.11. *Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν το άθροισμα $x + y$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $x_n + y_n \to x + y$.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$, $y_n \to y$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ και ισχύει τελικά $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Άρα ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως, ισχύει τελικά

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και, επομένως, $x_n + y_n \to x + y$.
Έστω $x_n \to +\infty$ και $y_n \to y$ ή $y_n \to +\infty$. Η (y_n) είναι κάτω φραγμένη, οπότε υπάρχει l ώστε $y_n \geq l$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $M > 0$. Θεωρούμε έναν $M' > 0$ ώστε $M' \geq M - l$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > M'$, οπότε ισχύει τελικά $x_n > M - l$, οπότε ισχύει τελικά $x_n + y_n > (M - l) + l = M$.
Άρα $x_n + y_n \to +\infty = \left\{ \begin{matrix} (+\infty) + y \\ (+\infty) + (+\infty) \end{matrix} \right\}$.
Οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν παρόμοια αιτιολόγηση. □

Παραδείγματα. (1) $\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$, οπότε $\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} \to 0 + 0 = 0$.
(2) $-n \to -\infty$ και $\frac{1}{n} \to 0$, οπότε $\frac{-n^2+1}{n} = -n + \frac{1}{n} \to (-\infty) + 0 = -\infty$.
(3) $n \to +\infty$ και $\sqrt{n} \to +\infty$, οπότε $n + \sqrt{n} \to (+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Ιδού μερικά παραδείγματα για την απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) + (-\infty)$, όπου δυο ακολουθίες έχουν όρια $+\infty$ και $-\infty$ και το άθροισμά τους μπορεί να έχει οποιοδήποτε όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$ ή και να μην έχει όριο:

Παραδείγματα. (1) $n + c \to +\infty$, $-n \to -\infty$ και $(n + c) + (-n) = c \to c$.
(2) $2n \to +\infty$, $-n \to -\infty$ και $2n + (-n) = n \to +\infty$.
(3) $n \to +\infty$, $-2n \to -\infty$ και $n + (-2n) = -n \to -\infty$.
(4) $n + (-1)^{n-1} \to +\infty$, $-n \to -\infty$ και η $(n + (-1)^{n-1}) + (-n) = (-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο.

Η **διαφορά δυο ακολουθιών** (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n - y_n)$. Η περίπτωση της $(x_n - y_n)$ ανάγεται στις περιπτώσεις του αθροίσματος ακολουθιών και της αντίθετης ακολουθίας, αφού $x_n - y_n = x_n + (-y_n)$. Η Πρόταση 2.12 λέει ότι το όριο της διαφοράς είναι ίσο με τη διαφορά των ορίων.

Πρόταση 2.12. *Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν η διαφορά $x - y$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $x_n - y_n \to x - y$.*

Το **γινόμενο δυο ακολουθιών** (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n y_n)$. Η Πρόταση 2.13 λέει ότι το όριο του γινομένου είναι ίσο με το γινόμενο των ορίων.

Πρόταση 2.13. *Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν το γινόμενο xy δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $x_n y_n \to xy$.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$, $y_n \to y$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3|y|+1}$ και, επίσης, ισχύει τελικά $|y_n - y| < \min\{\frac{\varepsilon}{3|x|+1}, \frac{1}{3}\}$. Άρα ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3|y|+1}$ και $|y_n - y| < \min\{\frac{\varepsilon}{3|x|+1}, \frac{1}{3}\}$. Συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$\begin{aligned}|x_n y_n - xy| &= |(x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + y(x_n - x)| \\ &\leq |x_n - x||y_n - y| + |x||y_n - y| + |y||x_n - x| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{3|y|+1}\tfrac{1}{3} + |x|\tfrac{\varepsilon}{3|x|+1} + |y|\tfrac{\varepsilon}{3|y|+1} < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

και, επομένως, $x_n y_n \to xy$.
Έστω $x_n \to +\infty$, $y_n \to y > 0$ ή $y_n \to +\infty$. Θεωρούμε έναν l ώστε $0 < l < y$. Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > \frac{M}{l}$ και, επίσης, ισχύει τελικά $y_n > l$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > \frac{M}{l}$ και $y_n > l$. Συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n y_n > \frac{M}{l} l = M$ και, επομένως, $x_n y_n \to +\infty = \left\{\begin{matrix} (+\infty)y \\ (+\infty)(+\infty) \end{matrix}\right\}$.
Όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν ουσιαστικά την ίδια αιτιολόγηση. □

Παραδείγματα. (1) $\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$, οπότε $\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{(-1)^n}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$.
(2) $\frac{n-1}{n} \to 1$ και $\frac{1}{n} \to 0$, οπότε $\frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{n}\frac{1}{n} \to 1 \cdot 0 = 0$.
(3) $n \to +\infty$ και $1-n \to -\infty$, οπότε $n-n^2 = n(1-n) \to (+\infty)(-\infty) = -\infty$. Παρατηρήστε ότι δεν εφαρμόζεται ο κανόνας της διαφοράς στην ακολουθία $(n-n^2)$ διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.
(4) Έστω αριθμός c και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και έστω ότι το γινόμενο cx δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, δηλαδή δεν είναι, συγχρόνως, $c = 0$ και $x = \pm\infty$. Τότε, επειδή $c \to c$,

$$cx_n \to cx.$$

Πάντως, αν $c = 0$, τότε, όποιο κι αν είναι το $x \in \overline{\mathbb{R}}$, ισχύει $cx_n = 0x_n = 0 \to 0$.
(5) Έστω $a > 0$. Αν $c > 0$, τότε $cn^a \to c(+\infty) = +\infty$. Αν $c < 0$, τότε $cn^a \to c(+\infty) = -\infty$.
(6) Αν $a > 0$, τότε $cn^{-a} \to c0 = 0$.
(7) **Πολυωνυμική παράσταση του** n. Έστω πολυώνυμο $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ τουλάχιστον πρώτου βαθμού, δηλαδή $a_k \neq 0$, $k \geq 1$.
Τότε γράφουμε

$$a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k = a_k n^k \big(\tfrac{a_0}{a_k}\tfrac{1}{n^k} + \tfrac{a_1}{a_k}\tfrac{1}{n^{k-1}} + \cdots + \tfrac{a_{k-1}}{a_k}\tfrac{1}{n} + 1\big).$$

Το όριο της παρένθεσης είναι 1, διότι κάθε όρος της εκτός του τελευταίου έχει όριο 0. Επίσης, $a_k n^k \to a_k(+\infty)$. Άρα

$$a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k \to a_k(+\infty)1 = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η τιμή του ορίου εξαρτάται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο του πολυωνύμου. Δηλαδή, $\lim_{n\to+\infty}(a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k) = \lim_{n\to+\infty} a_k n^k$.
Για παράδειγμα: $3n^2 - 5n + 2 \to +\infty$ και $-\frac{1}{2}n^5 + 4n^4 - n^3 \to -\infty$.
(8) **Γεωμετρικά αθροίσματα**. Η ακολουθία των **γεωμετρικών αθροισμάτων με λόγο** a είναι η

$(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+a^n)$, δηλαδή η $(1+a, 1+a+a^2\,, 1+a+a^2+a^3\,, \dots)$. Το αποτέλεσμα είναι:

$$1+a+a^2+\cdots+a^n \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } a\geq 1 \\ \to \frac{1}{1-a}\,, & \text{αν } -1<a<1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } a\leq -1 \end{cases}$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από το όριο της γεωμετρικής προόδου.
Αν $a>1$, τότε $1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \to \frac{(+\infty)-1}{a-1} = +\infty$.
Αν $a=1$, τότε $1+a+a^2+\cdots+a^n = n+1 \to +\infty$.
Αν $-1<a<1$, τότε $1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \to \frac{0-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$.
Έστω $a\leq -1$.
Πρώτη απόδειξη: Ισχύει $a^{n+1} = 1+(a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. *Αν* $1+a+a^2+\cdots+a^n \to x\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε $a^{n+1}\to 1+(a-1)x$. Όμως, η (a^{n+1}) δεν έχει όριο.
Δεύτερη απόδειξη: Ισχύει $1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \geq \frac{2}{1-a}$ για κάθε άρτιο $n\in\mathbb{N}$ και $1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \leq 0$ για κάθε περιττό $n\in\mathbb{N}$. Επειδή $0<\frac{2}{1-a}$, η ακολουθία δεν έχει όριο.

Πρόταση 2.14. *Αν* $x_n\to x\in\overline{\mathbb{R}}$ *και* $k\in\mathbb{N}$, *τότε* ${x_n}^k \to x^k$.

Απόδειξη. ${x_n}^k = x_n\cdots x_n \to x\cdots x = x^k$. □

Παραδείγματα. (1) $\frac{n-1}{n}\to 1$, οπότε $(\frac{n-1}{n})^3 \to 1^3 = 1$.
(2) $n^5-2n^2+n-7\to+\infty$, οπότε $(n^5-2n^2+n-7)^8 \to (+\infty)^8 = +\infty$.
(3) $-n^3+2n-1\to-\infty$, οπότε $(-n^3+2n-1)^5 \to (-\infty)^5 = -\infty$.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα για την απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$, όπου δυο ακολουθίες έχουν όρια $+\infty$ και 0 και το γινόμενό τους μπορεί να έχει οποιοδήποτε όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$ ή και να μην έχει όριο:

Παραδείγματα. (1) $n\to+\infty$, $\frac{c}{n}\to 0$ και $n\frac{c}{n} = c\to c$.
(2) $n^2\to+\infty$, $\frac{1}{n}\to 0$ και $n^2\frac{1}{n} = n\to+\infty$.
(3) $n^2\to+\infty$, $-\frac{1}{n}\to 0$ και $n^2(-\frac{1}{n}) = -n\to-\infty$.
(4) $n\to+\infty$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n}\to 0$ αλλά η $n\frac{(-1)^{n-1}}{n} = (-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο.

Το **αντίστροφο μιας ακολουθίας** (x_n) είναι η ακολουθία $\big(\frac{1}{x_n}\big)$. Η Πρόταση 2.15 λέει ότι το όριο του αντιστρόφου είναι ίσο με το αντίστροφο του ορίου.

Πρόταση 2.15. *Έστω* $x_n\neq 0$ *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$. *Αν* $x_n\to x\in\overline{\mathbb{R}}$ *και αν το* $\frac{1}{x}$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή - δηλαδή, αν* $x\neq 0$ *- τότε* $\frac{1}{x_n}\to\frac{1}{x}$.

Απόδειξη. Έστω $x_n\to x>0$. Θεωρούμε l ώστε $0<l<x$. Τότε ισχύει τελικά $x_n>l$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n-x|<lx\varepsilon$. Άρα ισχύει τελικά $x_n>l$ και $|x_n-x|<lx\varepsilon$. Επομένως, ισχύει τελικά

$$\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x}\right| = \frac{|x_n-x|}{x_nx} < \frac{lx\varepsilon}{lx} = \varepsilon,$$

οπότε $\frac{1}{x_n}\to\frac{1}{x}$.
Έστω $x_n\to+\infty$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n>\frac{1}{\varepsilon}$, οπότε ισχύει τελικά $0<\frac{1}{x_n}<\varepsilon$ και, επομένως, ισχύει τελικά $\left|\frac{1}{x_n}-0\right| = \frac{1}{x_n}<\varepsilon$. Άρα $\frac{1}{x_n}\to 0 = \frac{1}{+\infty}$.
Ομοίως, αν το όριο είναι αρνητικός αριθμός ή $-\infty$. □

Παραδείγματα. (1) Αν $a > 1$, τότε $\frac{1}{\log_a n} \to \frac{1}{+\infty} = 0$.

(2) Ο κανόνας δεν ισχύει αν $x_n \to 0$. Για παράδειγμα, $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$, αλλά η $\frac{n}{(-1)^{n-1}} = (-1)^{n-1}n$ δεν έχει όριο. Γι αυτόν τον λόγο η $\frac{1}{0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή.

Το πρόβλημα στο τελευταίο παράδειγμα είναι η εναλλαγή προσήμου των όρων της ακολουθίας. Αν δεν υφίσταται εναλλαγή προσήμου, τότε έχουμε θετικά αποτελέσματα; η κατάσταση αυτή περιγράφεται στην Πρόταση 2.16.

Πρόταση 2.16. *Έστω $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to 0$.*
(1) Αν ισχύει τελικά $x_n > 0$, τότε $\frac{1}{x_n} \to +\infty$.
(2) Αν ισχύει τελικά $x_n < 0$, τότε $\frac{1}{x_n} \to -\infty$.

Απόδειξη. (1) Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - 0| < \frac{1}{M}$. Επειδή ισχύει τελικά $x_n > 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $|x_n - 0| < \frac{1}{M}$ και $x_n > 0$. Άρα ισχύει τελικά $0 < x_n < \frac{1}{M}$. Άρα ισχύει τελικά $\frac{1}{x_n} > M$, οπότε $\frac{1}{x_n} \to +\infty$.
(2) Ομοίως. □

Ο **λόγος δυο ακολουθιών** (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$. Τα αποτελέσματα για την $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ προκύπτουν από τα αποτελέσματα για το γινόμενο ακολουθιών και για την αντίστροφη ακολουθία, αφού $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}$. Η Πρόταση 2.17 λέει ότι το όριο του λόγου είναι ίσο με τον λόγο των ορίων.

Πρόταση 2.17. *Έστω $y_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν ο λόγος $\frac{x}{y}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$.*

Παραδείγματα. (1) **Ρητή παράσταση του** n. Έστω ρητή παράσταση $\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$, όπου $a_k \neq 0$, $b_m \neq 0$.
Γράφουμε

$$\frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k}{b_0 + b_1 n + \cdots + b_m n^m} = \frac{a_k n^k}{b_m n^m} \frac{\frac{a_0}{a_k}\frac{1}{n^k} + \frac{a_1}{a_k}\frac{1}{n^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{1}{n} + 1}{\frac{b_0}{b_m}\frac{1}{n^m} + \frac{b_1}{b_m}\frac{1}{n^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{b_m}\frac{1}{n} + 1}$$

και, όπως έχουμε δει, τα όρια του αριθμητή και του παρονομαστή του τελευταίου λόγου είναι ίσα με 1. Επειδή $\frac{a_k n^k}{b_m n^m} = \frac{a_k}{b_m} n^{k-m}$, προκύπτει ότι

$$\frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k}{b_0 + b_1 n + \cdots + b_m n^m} \to \begin{cases} \frac{a_k}{b_m}(+\infty), & \text{αν } k > m \\ \frac{a_k}{b_m}, & \text{αν } k = m \\ 0, & \text{αν } k < m \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι η τιμή του ορίου εξαρτάται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή.
Για παράδειγμα: $\frac{n^3 - 2n^2 + n + 1}{2n^2 - 3n - 1} \to +\infty$, $\frac{-n^2 + n}{n+2} \to -\infty$, $\frac{n^4 - n^3}{n^4 + 1} \to 1$ και $\frac{-n^2 + n + 4}{n^3 + n^2 + 5n + 6} \to 0$.
(2) $\frac{-2n^3 + n^2 + n + 1}{2n+3} \to -\infty$, οπότε $\left(\frac{-2n^3 + n^2 + n + 1}{2n+3}\right)^7 \to (-\infty)^7 = -\infty$.
(3) $\frac{n^3 + n + 7}{-3n^3 + n^2 + 1} \to -\frac{1}{3}$, οπότε $\left(\frac{n^3 + n + 7}{-3n^3 + n^2 + 1}\right)^3 \to (-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$.

Τέλος, θα δούμε παραδείγματα για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{+\infty}{+\infty}$, όπου δυο ακολουθίες έχουν όρια είτε 0 και 0 είτε $+\infty$ και $+\infty$ και ο λόγος τους μπορεί να έχει οποιοδήποτε όριο είτε στο $\overline{\mathbb{R}}$, στην πρώτη περίπτωση, είτε στο $[0, +\infty]$, στη δεύτερη περίπτωση, είτε και να μην έχει όριο:

Παραδείγματα. (1) $\frac{c}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$ και $(\frac{c}{n})/(\frac{1}{n}) = c \to c$.
(2) $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$ και $(\frac{1}{n})/(\frac{1}{n^2}) = n \to +\infty$.
(3) $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$ και $(\frac{1}{n^2})/(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \to 0$.
(4) $-\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$ και $(-\frac{1}{n})/(\frac{1}{n^2}) = -n \to -\infty$.
(5) Είναι $\frac{1}{n} \leq \frac{2+(-1)^{n-1}}{n} \leq \frac{3}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\frac{2+(-1)^{n-1}}{n} \to 0$. Επίσης, $\frac{1}{n} \to 0$ και η $(\frac{2+(-1)^{n-1}}{n})/(\frac{1}{n}) = 2 + (-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο, διότι ισχύει $2 + (-1)^{n-1} \leq 1$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{N}$ και $2 + (-1)^{n-1} \geq 3$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$.
(6) Θεωρώντας τα παραδείγματα (1) με $c > 0$, (2), (3) και (5) με τις αντίστροφες των ακολουθιών (x_n) και τις αντίστροφες των αντίστοιχων ακολουθιών (y_n) βρίσκουμε ακολουθίες που αποκλίνουν στο $+\infty$ και ο λόγος τους μπορεί να έχει οποιοδήποτε όριο στο $[0, +\infty]$ ή και να μην έχει όριο.

Η **απόλυτη τιμή μιας ακολουθίας** (x_n) είναι η ακολουθία $(|x_n|)$. Η Πρόταση 2.18 λέει ότι το όριο της απόλυτης τιμής είναι ίσο με την απόλυτη τιμή του ορίου.

Πρόταση 2.18. *Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $|x_n| \to |x|$.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - x| < \varepsilon$. Άρα ισχύει τελικά

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x| < \varepsilon$$

και, επομένως, $|x_n| \to |x|$.
Έστω $x_n \to +\infty$ ή $x_n \to -\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > M$ ή $x_n < -M$, αντιστοίχως. Σε κάθε περίπτωση, ισχύει τελικά $|x_n| > M$, οπότε $|x_n| \to +\infty = | \pm \infty|$. □

Παράδειγμα. Το αντίστροφο της Πρότασης 2.18 δεν ισχύει. Για παράδειγμα, $\big|(-1)^{n-1}\big| = 1 \to 1$ ενώ η $(-1)^{n-1}$ δεν έχει όριο.

Ας δούμε τώρα τρία λίγο πιο δύσκολα - αλλά χρήσιμα - παραδείγματα ορίων.

Παραδείγματα. (1) Έστω $a > 0$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad (a > 0).$$

Η περίπτωση $a = 1$ είναι απλή: $\sqrt[n]{1} = 1 \to 1$.
Έστω $a > 1$.
Πρώτη απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Για να ισχύει $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$ αρκεί (διότι $\sqrt[n]{a} > 1$) να ισχύει $\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $\frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon)$ αρκεί να ισχύει $n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$ και, επομένως, $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Άρα $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Δεύτερη απόδειξη: Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται

$$(1 + \tfrac{a-1}{n})^n \geq 1 + n\tfrac{a-1}{n} = a$$

και, επομένως,

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \tfrac{a-1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με παρεμβολή συνεπάγεται $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \to \frac{1}{1} = 1$.

(2) Θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{n} \to 1.$$

Από την ανισότητα του Bernoulli,

$$(1+\tfrac{\sqrt{n}-1}{n})^n \geq 1+n\tfrac{\sqrt{n}-1}{n} = \sqrt{n}\,,$$

οπότε

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq (1+\tfrac{\sqrt{n}-1}{n})^2 < (1+\tfrac{1}{\sqrt{n}})^2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, με παρεμβολή, $\sqrt[n]{n} \to 1$.
(3) Έστω $a > 1$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{a^n}{n} \to +\infty \quad (a > 1).$$

Πρώτη απόδειξη: Από την ανισότητα του Bernoulli,

$$(\sqrt{a})^n = (1+\sqrt{a}-1)^n \geq 1+n(\sqrt{a}-1) > n(\sqrt{a}-1)$$

και, επομένως,

$$\tfrac{a^n}{n} > n(\sqrt{a}-1)^2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\frac{a^n}{n} \to +\infty$.
Δεύτερη απόδειξη: Θεωρούμε b ώστε $1 < b < a$. Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται

$$b^n = (1+b-1)^n \geq 1+n(b-1) > n(b-1)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\tfrac{a^n}{n} = \tfrac{b^n}{n}(\tfrac{a}{b})^n > (b-1)(\tfrac{a}{b})^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, επειδή $\frac{a}{b} > 1$, συνεπάγεται $\frac{a^n}{n} \to +\infty$.
(4) Θα δούμε ακόμη τρεις αποδείξεις των ορίων της γεωμετρικής προόδου (a^n) στις βασικές περιπτώσεις $a > 1$, $|a| < 1$.
Έστω $a > 1$.
Δεύτερη απόδειξη: Θεωρούμε τον $b = a-1 > 0$. Από την ανισότητα Bernoulli,

$$a^n = (1+b)^n \geq 1+nb > nb$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $nb \to +\infty$, συνεπάγεται $a^n \to +\infty$.
Τρίτη απόδειξη: Αποδεικνύουμε πάλι την προηγούμενη ανισότητα $a^n > nb$. Έστω $M > 0$. Τότε, ισχύει $a^n > M$ αρκεί να ισχύει $nb > M$ αρκεί να ισχύει $n > \frac{M}{b}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > \frac{M}{b}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{M}{b}$ και, επομένως, $a^n > M$. Άρα $a^n \to +\infty$.
Τέταρτη απόδειξη: Αν είχαμε αποδείξει πρώτα το όριο στην περίπτωση $|a| < 1$, τότε θα λέγαμε: είναι $0 < \frac{1}{a} < 1$, οπότε $\frac{1}{a^n} = (\frac{1}{a})^n \to 0$ και, επομένως, $a^n \to +\infty$.
Έστω $|a| < 1$. Η περίπτωση $a = 0$ είναι προφανής, οπότε έστω $0 < |a| < 1$.
Δεύτερη απόδειξη: Είναι $\frac{1}{|a|} > 1$, οπότε, από την προηγούμενη περίπτωση, $\frac{1}{|a|^n} = (\frac{1}{|a|})^n \to +\infty$. Άρα $|a|^n \to 0$. Όμως,

$$-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $a^n \to 0$.
Τρίτη απόδειξη: Θεωρούμε τον $b = \frac{1}{|a|} - 1 > 0$. Από την ανισότητα Bernoulli,

$$|a|^n = \tfrac{1}{(1+b)^n} \leq \tfrac{1}{1+nb} < \tfrac{1}{nb}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$-\tfrac{1}{nb} < a^n < \tfrac{1}{nb}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $a^n \to 0$.

Τέταρτη απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού αποδείξουμε την $|a|^n < \frac{1}{nb}$ βλέπουμε ότι ισχύει $|a^n - 0| < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $\frac{1}{nb} < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $n > \frac{1}{\varepsilon b}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > \frac{1}{\varepsilon b}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{1}{\varepsilon b}$ και, επομένως, $|a^n - 0| < \varepsilon$. Άρα $a^n \to 0$.

Θα δούμε παρακάτω αρκετές ακόμη αποδείξεις των προηγούμενων ορίων.

Τέλος, θα διατυπώσουμε την Πρόταση 2.19, αλλά θα την αποδείξουμε στην ενότητα 4.3. Η τυπική θέση της είναι εδώ, αλλά η απόδειξή της - αν και θα μπορούσε να γίνει στο σημείο αυτό - ταιριάζει καλύτερα στο πλαίσιο των εννοιών του ορίου και της συνέχειας συνάρτησης. Ας θυμηθούμε από την ενότητα 1.3 τις απροσδιόριστες μορφές της δύναμης a^b. Αυτές είναι οι 0^0, $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, $(+\infty)^0$, $0^{-\infty}$.

Η **δύναμη** μιας ακολουθίας (x_n) με εκθέτη την ακολουθία (y_n) είναι η ακολουθία $\big({x_n}^{y_n}\big)$.

Πρόταση 2.19. *Έστω $x_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν η δύναμη x^y δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε ${x_n}^{y_n} \to x^y$. Ακόμη, αν $x_n \to 0$ και $y_n \to -\infty$, τότε ${x_n}^{y_n} \to +\infty$.*

Παραδείγματα. (1) Βάσει της Πρότασης 2.19, μπορεί να αποδειχθεί το όριο $\sqrt[n]{a} \to 1$ όταν $a > 0$. Πράγματι, θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (a) και την ακολουθία $(\frac{1}{n})$. Τότε $a \to a$ και $\frac{1}{n} \to 0$, οπότε $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to a^0 = 1$.

(2) Η γεωμετρική πρόοδος (a^n) στις περιπτώσεις $a > 1$, $0 < a < 1$ μπορεί, επίσης, να ενταχθεί στο πλαίσιο της Πρότασης 2.19. Θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (a) και την ακολουθία (n). Επειδή $a \to a$ και $n \to +\infty$, συνεπάγεται $a^n \to a^{+\infty}$, το οποίο είναι ίσο είτε με $+\infty$, αν $a > 1$, είτε με 0, αν $0 < a < 1$.

(3) Το όριο $\sqrt[n]{n} \to 1$ *δεν* αποδεικνύεται με την Πρόταση 2.19. Αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες (n) και $(\frac{1}{n})$, τότε $n \to +\infty$ και $\frac{1}{n} \to 0$, αλλά η δύναμη $(+\infty)^0$ είναι απροσδιόριστη μορφή.

Τώρα θα δούμε παραδείγματα για τις απροσδιόριστες μορφές $(+\infty)^0$ και 0^0, όπου δυο ακολουθίες έχουν όρια είτε $+\infty$ και 0 είτε 0 και 0 και η αντίστοιχη δύναμη μπορεί να έχει οποιοδήποτε όριο στο $[0, +\infty]$ ή και να μην έχει όριο.

Παραδείγματα. (1) $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ και $n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n} \to 1$.

(2) Αν $a > 1$, τότε $a^n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ και $(a^n)^{\frac{1}{n}} = a \to a$.

(3) Αν $a > 1$, τότε $a^n \to +\infty$, $-\frac{1}{n} \to 0$ και $(a^n)^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a} \to \frac{1}{a}$.

(4) $n^n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ και $(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$.

(5) $n^n \to +\infty$, $-\frac{1}{n} \to 0$ και $(n^n)^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \to 0$.

(6) $n^n \to +\infty$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$ αλλά η $(n^n)^{\frac{(-1)^{n-1}}{n}} = n^{(-1)^{n-1}}$ δεν έχει όριο. Πράγματι, ισχύει $n^{(-1)^{n-1}} = n \geq 1$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$ και $n^{(-1)^{n-1}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{N}$.

(7) Θεωρούμε πάλι τα ίδια παραδείγματα, αλλά ως ακολουθίες βάσης (x_n) παίρνουμε τις αντίστροφες των προηγουμένων. Έτσι βρίσκουμε παραδείγματα όπου $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ αλλά η ακολουθία $({x_n}^{y_n})$ μπορεί να έχει οποιοδήποτε όριο στο $[0, +\infty]$ ή και να μην έχει όριο.

Η τελευταία περίπτωση της Πρότασης 2.19 θα μπορούσε να λειτουργήσει ως αιτιολόγηση της ισότητας $0^{-\infty} = +\infty$, η οποία, όμως, δεν είναι εν γένει αποδεκτή. Τα επόμενα παραδείγματα σχετίζονται με την απροσδιόριστη μορφή $0^{-\infty}$.

Παραδείγματα. (1) $\frac{1}{n} \to 0$, $-n \to -\infty$ και $(\frac{1}{n})^{-n} = n^n \to +\infty$. Το τελευταίο ισχύει διότι ισχύει $n^n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(2) $-\frac{1}{n} \to 0$, $-2n-1 \to -\infty$ και $(-\frac{1}{n})^{-2n-1} = -n^{2n+1} \to -\infty$.
(3) $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$, $-n \to -\infty$ και η $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-n} = (-1)^{n^2}n^n$ δεν έχει όριο, αφού ισχύει $(-1)^{n^2}n^n = n^n \geq 4$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{N}$ και $(-1)^{n^2}n^n = -n^n \leq -1$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$.

Για τις μόνες απροσδιόριστες μορφές που έχουν απομείνει, τις $1^{+\infty}$ και $1^{-\infty}$, θα δούμε παραδείγματα στην ενότητα 2.5.

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε τις αποδείξεις των Προτάσεων 2.2, 2.3, 2.6, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.15, 2.16 και 2.17.

2. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\left(\frac{(n+1)^{27}(n+3)^{79}}{(2n+1)^{106}}\right)$, $\left(\frac{-n^2+(-1)^n n+\frac{1}{n}}{3n+2(-1)^{n-1}\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{n(n+1)}{n+4} - \frac{4n^3}{4n^2+1}\right)$, $((1-n)^5+n^4)$, $\left((\frac{-n^3+n+1}{3n^2+3n+1})^9\right)$, $\left(\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}\right)$, $(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1})$.

3. Βρείτε - αν υπάρχουν - τα όρια των ακολουθιών $(1-2+2^2+\cdots+(-1)^n 2^n)$, $(1+2+2^2+\cdots+2^n)$, $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$, $\left(\frac{2^7}{3^7}+\frac{2^8}{3^8}+\cdots+\frac{2^{n+6}}{3^{n+6}}\right)$, $\left(\frac{2^n}{3^n}+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\cdots+\frac{2^{2n}}{3^{2n}}\right)$.

4. Έστω $x_n \neq -1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x \neq -1$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\frac{x_n}{1+x_n} \to \frac{x}{1+x}$.

5. Ποια είναι τα πιθανά όρια της ακολουθίας (x_n) αν ικανοποιεί οποιονδήποτε από τους παρακάτω αναδρομικούς τύπους: $x_{n+1} = -x_n+2$, $x_{n+3} = x_n-3$, $x_{n+1} = {x_n}^2-3$, $x_{n+2} = -{x_n}^2+3$, $x_{n+1} = {x_n}^2+3$, $x_{n+2} = x_{n+1}+{x_n}^3$;

6. Βρείτε το όριο της ακολουθίας (x_n)
(i) αν ισχύει τελικά $1 < x_n \leq \frac{n^2+3n}{n^2+1}$.
(ii) αν ισχύει τελικά $\frac{\log_{10} n-2}{2\log_{10} n+4} < x_n < \frac{3+n}{1+2n}$.
(iii) αν ισχύει τελικά $x_n \leq 15n+6n^2-n^3$.

7. Αποδείξτε, συγκρίνοντας με απλούστερες ακολουθίες, ότι $2n+(-1)^{n-1}n \to +\infty$, $2n+n\sin n \to +\infty$, $\frac{1}{n(2-\sin n)} \to 0$.

8. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών: $\left(\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\left[\frac{3n^2-n+1}{n+2}\right]\right)$, $\left(\frac{[\frac{n^3+1}{n+2}]+1}{n[\sqrt{n}]+2n}\right)$.

9. Αποδείξτε ότι: $[nx] \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \\ -\infty, & \text{αν } x<0 \end{cases}$ $[nx]-[ny] \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x>y \\ 0, & \text{αν } x=y \\ -\infty, & \text{αν} x<y \end{cases}$

$$nx-[ny] \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } x>y \\ \to 0, & \text{αν } x=y\in\mathbb{Z} \\ \to -\infty, & \text{αν } x<y \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } x=y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$$

10. Με την ιδιότητα παρεμβολής αποδείξτε τα όρια: $2^{-2n+(-1)^{n-1}n} \to 0$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n-1}}{4}\right)^n \to 0$.

11. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \to 1$ και $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \to 1$.
Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $n\frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leq n\frac{n}{n^2+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

12. Αν ισχύει τελικά $n^2x_n^2 - 2n(n-1)x_n + n^2 - 2n - 3 \leq 0$, αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.

13. Αν ισχύει τελικά $0 < a \leq {x_n}^n \leq b$, αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.

14. Έστω $0 \leq a \leq b \leq c$. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n + b^n} \to b$, $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \to c$.
Υπόδειξη: $b^n \leq a^n + b^n \leq 2b^n$.

15. Αποδείξτε ότι: $\sqrt[n]{n^3} \to 1$, $\sqrt[n]{n^4 + 3n^2 + n + 1} \to 1$.

16. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^{n} k^k \to 1$.

17. Υπολογίζοντας όρια, απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:
(i) ισχύει τελικά $-n^5 + 4n^3 < -100$;
(ii) ισχύει $n^7 - 35n^6 + n^3 - 47n < 84$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$;
(iii) ισχύει τελικά $\frac{3}{2} < \frac{7n^3-n+5}{4n^3+n^2+35} < 2$;
(iv) ισχύει τελικά $\frac{2n^4-n^3+7}{-n^3+n^2+3} \leq -78$;
(v) ισχύει $\frac{2n^3-n^2+7n+1}{n^3+n^2+3} \leq 1$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$;

18. Βάσει της Πρότασης 2.3, αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών $\big(2^{(-1)^{n-1}}\big)$, $\big((1 + \frac{(-1)^{n-1}}{2})^n\big)$, $\big((-1)^{n-1} + \frac{10}{n^3}\big)$, $\big((-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\big)$.

19. Αν $|x_n| \to 0$, αποδείξτε ότι $x_n \to 0$ με δυο τρόπους: με τον ορισμό του ορίου και με την ιδιότητα παρεμβολής.

20. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, όπου $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $\max\{x_n, y_n\} \to \max\{x, y\}$ και $\min\{x_n, y_n\} \to \min\{x, y\}$.

21. (i) Βρείτε το λάθος: $n\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \to 0 + \cdots + 0 = 0$.
(ii) Βρείτε το λάθος: $(1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n}) \cdots (1 + \frac{1}{n}) \to 1 \cdots 1 = 1$.
Ποια είναι η σχέση των δυο "ορίων" με τις Προτάσεις 2.11, 2.13, 2.19;

22. Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν $x < y$, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $x_n < y_n$.

23. Γνωρίζουμε ότι, αν ισχύει $x_n \in [l, u]$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x$, τότε $x \in [l, u]$. Υπάρχει παρόμοιο συμπέρασμα για το όριο x της (x_n), αν ισχύει $x_n \in (l, u)$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$; Ποιο είναι το γενικό συμπέρασμα σ' αυτήν την περίπτωση;

24. (i) Αν $x_n \to +\infty$ και η (y_n) είναι κάτω φραγμένη, αποδείξτε ότι $x_n + y_n \to +\infty$.
(ii) Αν $x_n \to -\infty$ και η (y_n) είναι άνω φραγμένη, αποδείξτε ότι $x_n + y_n \to -\infty$.
(iii) Αν $x_n \to 0$ και η (y_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι $x_n y_n \to 0$.
(iv) Αν $x_n \to +\infty$ ή $-\infty$ και αν ισχύει τελικά $y_n > l > 0$, αποδείξτε ότι $x_n y_n \to +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.
(v) Αν $x_n \to +\infty$ ή $-\infty$ και αν ισχύει τελικά $y_n < u < 0$, αποδείξτε ότι $x_n y_n \to -\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

25. (i) Αν $a < 1$ και αν ισχύει τελικά $|x_{n+1}| \leq a|x_n|$, αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.
Υπόδειξη: Αν $|x_{n+1}| \leq a|x_n|$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε $|x_n| \leq \frac{|x_{n_0}|}{a^{n_0}} a^n$ για κάθε $n \geq n_0$.
(ii) Αν $a > 1$ και αν ισχύει τελικά $x_{n+1} \geq a x_n > 0$, αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.
(iii) Αν $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \to a < 1$, αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.
(iv) Αν $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a > 1$, αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$ ή $x_n \to -\infty$.
(v) Αποδείξτε ότι, αν $a > 1$, τότε $\frac{a^n}{n} \to +\infty$. Επίσης, αποδείξτε ότι $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \to 0$ και $\frac{2^n n!}{n^n} \to 0$.

26. (i) Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) που δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n + y_n)$ να έχει όριο.
(ii) Βρείτε (x_n), (y_n) που δεν έχουν όριο ώστε η $(x_n y_n)$ να έχει όριο.

27. (i) Αν η $(x_n + y_n)$ έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.
(ii) Αν η $(x_n y_n)$ έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.

28. Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε να ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η $(x_n y_n)$ να μην έχει όριο.

29. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} \geq x_1 + \cdots + x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $0 < a < 2$, αποδείξτε ότι $\frac{x_n}{a^n} \to +\infty$. Εξετάστε την ακολουθία (2^n) σχετικά με την περίπτωση $a = 2$.

30. (i) Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία (r_n) ώστε να ισχύει $r_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $r_n \to x$.
Υπόδειξη: Από πυκνότητα των ρητών, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $r_n \in \mathbb{Q}$ ώστε $x - \frac{1}{n} < r_n < x + \frac{1}{n}$.
(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία (t_n) ώστε να ισχύει $t_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t_n \to x$.
(iii) Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει *γνησίως αύξουσα* ακολουθία (r_n) και *γνησίως φθίνουσα* ακολουθία (s_n) ώστε να ισχύει $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $r_n \to x$ και $s_n \to x$.

31. (i) Αν $x_n \to x$ και $x_n \leq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = x$.
(ii) Αν $x_n, x < y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x$, αποδείξτε ότι $\sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\} < y$.

32. Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι $\inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geq k\} \leq x \leq \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geq k\}$.

33. (i) Αν $x_n \to x$ και $x_n < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) δεν έχει μέγιστο όρο.
(ii) Αν $x_n \to x$ και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $x_k \geq x$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει μέγιστο όρο.

2.5 Μονότονες ακολουθίες. Ο αριθμοί e, π.

Το Θεώρημα 2.1 είναι ένα από τα σημαντικότερα της Ανάλυσης. Το κυριότερο συμπέρασμά του είναι ότι κάθε *μονότονη* ακολουθία *έχει* όριο και ότι, αν επιπλέον η ακολουθία είναι φραγμένη, τότε το όριό της είναι αριθμός. Τέτοιο συμπέρασμα δεν ισχύει για μη-μονότονες ακολουθίες: η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ αν και είναι φραγμένη δεν έχει όριο.

Θεώρημα 2.1. *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο. Πιο συγκεκριμένα:*
(1) Αν η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα, τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Ειδικώτερα: η (x_n) είτε δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο $+\infty$, είτε είναι άνω φραγμένη, οπότε συγκλίνει και το όριό της είναι ίσο με το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της.
(2) Αν η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα, τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Ειδικώτερα: η (x_n) είτε δεν είναι κάτω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο $-\infty$, είτε είναι κάτω φραγμένη, οπότε συγκλίνει και το όριό της είναι ίσο με το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου των όρων της.

Απόδειξη. (1) Θεωρούμε το μη-κενό σύνολο $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Αν αυτό είναι άνω φραγμένο - δηλαδή αν η ακολουθία είναι άνω φραγμένη - τότε έχει supremum αριθμό ενώ, αν δεν είναι άνω φραγμένο - δηλαδή αν η ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη - τότε το supremum του είναι το $+\infty$.
Έστω ότι η ακολουθία (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ και θα αποδείξουμε ότι $x_n \to +\infty$. Έστω $M > 0$. Επειδή ο M δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{n_0} > M$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει

$$x_n \geq x_{n_0} > M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $x_n \to +\infty$.
Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι άνω φραγμένη. Ορίζουμε $x = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ και θα αποδείξουμε ότι $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $x - \varepsilon < x$, ο $x - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x - \varepsilon < x_{n_0}$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Επειδή ο x είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, ισχύει

$$x_n \leq x < x + \varepsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα ισχύει $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ και, επομένως, $x_n \to x$.
(2) Ομοίως. □

Ας δούμε ένα χρήσιμο συμπλήρωμα του Θεωρήματος 2.1. Αν μια ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, η (x_n) συγκλίνει και το όριό της, έστω x, είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της. Επομένως, ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν, επιπλέον, η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα, τότε είναι $x_n < x_{n+1} \leq x$ και, επομένως, $x_n < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τα ανάλογα ισχύουν για φθίνουσες και γνησίως φθίνουσες ακολουθίες. Δηλαδή:
Αν η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και $x_n \to x$, τότε ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν, επιπλέον, η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα, τότε ισχύει $x_n < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αν η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \to x$, τότε ισχύει $x_n \geq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν, επιπλέον, η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύει $x_n > x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το Θεώρημα 2.1 είναι πολύτιμο. Βάσει αυτού μπορούμε να συμπεράνουμε για μια δοσμένη ακολουθία ότι έχει όριο αρκεί μόνο να ελέγξουμε ότι είναι μονότονη, χωρίς να χρειάζεται να μαντέψουμε από πριν το πιθανό όριό της. Προσέξτε: για να αποδείξουμε, με τον ορισμό του ορίου, ότι μια ακολουθία έχει όριο πρέπει να γνωρίζουμε ή να μαντέψουμε το υποψήφιο όριό της ώστε, κατόπιν, να αποδείξουμε με υπολογισμούς ότι η απόσταση του n-οστού όρου της από αυτό είναι τελικά μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό. Το Θεώρημα 2.1 εφαρμόζεται σε περιπτώσεις που δε μπορούμε να μαντέψουμε το όριο μιας ακολουθίας και που δε μπορούμε να εφαρμόσουμε τους διάφορους κανόνες υπολογισμού ορίων (πράξεις, παρεμβολή κλπ), αρκεί μόνο να μπορέσουμε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία είναι μονότονη.

Το Θεώρημα 2.1 δεν παρέχει τρόπο υπολογισμού του ορίου μονότονης ακολουθίας. Όμως, εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι μια ακολουθία *έχει* όριο, μπορεί να καταφέρουμε με κάποιο τρόπο - ανάλογα με την περίπτωση - να υπολογίσουμε και την τιμή του ορίου. Δείτε, για παράδειγμα, την άσκηση 5 της ενότητας 2.4.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 χρησιμοποιήσαμε την Ιδιότητα Supremum του $\mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα, την Ιδιότητα Συνέχειας. Πρέπει να αναφέρουμε ότι από το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1 και, μάλιστα, μόνο από το ότι "κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει" μπορεί να αποδειχτεί η Ιδιότητα Supremum. Με άλλα λόγια, *η Ιδιότητα Supremum είναι ισοδύναμη με το ότι "κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει"*. Για την απόδειξη δείτε την άσκηση 12.

Παράδειγμα. Έστω ακολουθία (x_n) ώστε $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Οι αρχικοί όροι της (x_n) είναι $1, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \ldots$. Μαντεύουμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και το αποδεικνύουμε με την αρχή της επαγωγής. Προφανώς, $x_1 \leq x_2$ και έστω $x_n \leq x_{n+1}$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Κατ' αρχάς όλοι οι όροι είναι ≥ 0 διότι ο πρώτος είναι 1 και όλοι οι άλλοι είναι τετραγωνικές ρίζες. Επομένως: $x_n \leq x_{n+1}$ συνεπάγεται $2x_n \leq 2x_{n+1}$ συνεπάγεται $\sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2x_{n+1}}$ συνεπάγεται $x_{n+1} \leq x_{n+2}$. Άρα ισχύει $x_n \leq x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο.
Από την $x_n \leq x_{n+1}$ και τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται $x_n \leq \sqrt{2x_n}$, οπότε ισχύει $x_n \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η (x_n) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει σε αριθμό.
Έστω $x_n \to x$. Επειδή ισχύει ${x_{n+1}}^2 = 2x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $x^2 = 2x$, οπότε $x = 0$ ή $x = 2$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα και $x_1 = 1$, ισχύει $x_n \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $x \geq 1$ και, επομένως, $x = 2$.
Υπάρχει και δεύτερος τρόπος να αποδειχθεί ότι η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Η $x_n \leq x_{n+1}$ είναι ισοδύναμη με την $x_n \leq \sqrt{2x_n}$ και (επειδή $x_n \geq 0$) αυτή με την $x_n \leq 2$. Άρα, αν αποδείξουμε ότι ισχύει $x_n \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε αποδείξει ότι η (x_n) είναι αύξουσα αλλά *και* ότι είναι άνω φραγμένη με άνω φράγμα τον 2. Αυτό γίνεται με την αρχή της επαγωγής. Η $x_1 \leq 2$ είναι προφανώς σωστή. Έστω $x_n \leq 2$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Τότε $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$, οπότε ισχύει $x_n \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 2.20. *Η ακολουθία $((1 + \frac{1}{n})^n)$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη.*

Απόδειξη. Η ανισότητα $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ ισοδυναμεί με την $(\frac{n+1}{n})^n < (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1}(\frac{n+1}{n})^{n+1} < (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1} < (\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1} < (1-\frac{1}{n^2+2n+1})^{n+1}$ η οποία είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας του Bernoulli. Πράγματι, είναι

$$(1 - \tfrac{1}{n^2+2n+1})^{n+1} > 1 - \tfrac{n+1}{n^2+2n+1} = 1 - \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{n}{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $(1 + \frac{1}{n})^n < 4$ ή, ισοδύναμα, $\frac{1}{2} < \big(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\big)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την ανισότητα του Bernoulli είναι

$$\begin{aligned}\big(\tfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\big)^n &= \big(1 - \tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\big)^n \geq 1 - n\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 - n\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \\ &= 1 - \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 1 - \tfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 1 - \tfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Ορισμός. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 και την Πρόταση 2.20, η ακολουθία $((1 + \frac{1}{n})^n)$ έχει όριο, το οποίο συμβολίζουμε με το γράμμα e. Δηλαδή, *ορίζουμε*

$$e = \lim_{n \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n .$$

Επειδή η ακολουθία $((1+\frac{1}{n})^n)$ είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $(1+\frac{1}{n})^n < e$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός e είναι άρρητος. Αυτό θα το αποδείξουμε αργότερα στην Πρόταση 8.8.

Ορισμός. Ονομάζουμε **φυσικούς λογαρίθμους** τους λογαρίθμους με βάση τον e και χρησιμοποιούμε για κάθε $y > 0$ τα απλούστερα σύμβολα

$$\log y \quad \text{ή} \quad \ln y$$

αντί του $\log_e y$.

Η Πρόταση 2.21 είναι, φυσικά, εξειδίκευση της Πρότασης 1.6.

Πρόταση 2.21. *(1)* $\log(yz) = \log y + \log z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(2) $\log \frac{y}{z} = \log y - \log z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(3) $\log(y^z) = z \log y$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* z.
(4) $\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* $a > 0$, $a \neq 1$.
(5) $\log 1 = 0$, $\log e = 1$.
(6) Αν $0 < y < z$, *τότε* $\log y < \log z$.

Θα δούμε τώρα παραδείγματα σχετικά με τις απροσδιόριστες μορφές $1^{+\infty}$ και $1^{-\infty}$, όπου δυο ακολουθίες έχουν όρια είτε 1 και $+\infty$ είτε 1 και $-\infty$ και η αντίστοιχη δύναμη μπορεί να έχει οποιοδήποτε όριο στο $[0, +\infty]$ ή και να μην έχει όριο.

Παραδείγματα. (1) $1 \to 1$, $n \to +\infty$ και $1^n = 1 \to 1$.
(2) Έστω $a > 1$ και $b = \log a$. Τότε $1 + \frac{1}{n} \to 1$, $bn \to +\infty$ και $(1+\frac{1}{n})^{bn} = ((1+\frac{1}{n})^n)^b \to e^b = a$.
(3) $\sqrt[n]{n} \to 1$, $n \to +\infty$ και $(\sqrt[n]{n})^n = n \to +\infty$.
(4) Θεωρώντας τα προηγούμενα παραδείγματα με τις αντίστροφες των ακολουθιών βάσης (x_n) και τις ίδιες ακολουθίες (y_n) βρίσκουμε παραδείγματα όπου $x_n \to 1$, $y_n \to +\infty$ και η ακολουθία $({x_n}^{y_n})$ μπορεί να έχει οποιοδήποτε όριο στο $[0, 1]$.
(5) Είναι $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq n^{\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \leq \sqrt[n]{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $n^{\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \to 1$. Επίσης, $n \to +\infty$ και η $\big(n^{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}\big)^n = n^{(-1)^{n-1}}$ δεν έχει όριο, διότι ισχύει $n^{(-1)^{n-1}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{N}$ και $n^{(-1)^{n-1}} = n \geq 1$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$.
(6) Θεωρώντας όλα τα προηγούμενα παραδείγματα με τις ίδιες ακολουθίες βάσης (x_n) και τις αντίθετες ακολουθίες (y_n) βρίσκουμε παραδείγματα όπου $x_n \to 1$, $y_n \to -\infty$ και η ακολουθία $({x_n}^{y_n})$ μπορεί να έχει οποιοδήποτε όριο στο $[0, +\infty]$ ή και να μην έχει όριο.

Και τρία σημαντικά παραδείγματα.

Παραδείγματα. (1) Έστω η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$. Θα αποδείξουμε ότι η (x_n) συγκλίνει και, πιο συγκεκριμένα, ότι

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \to e.$$

Είναι φανερό ότι ισχύει

$$x_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} + \tfrac{1}{(n+1)!} = x_n + \tfrac{1}{(n+1)!} > x_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα. Ισχύει $k! \geq 2^{k-1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι προφανές για $k = 1$ ενώ, για $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ ισχύει $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{k-1}$. Επομένως, ισχύει

$$x_n = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} \leq 1 + \tfrac{1}{2^0} + \tfrac{1}{2^1} + \cdots + \tfrac{1}{2^{n-1}} = 1 + \tfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η (x_n) είναι, εκτός από αύξουσα, άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει. Τώρα, έστω $t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Βάσει του δυωνυμικού τύπου του Newton (δείτε την άσκηση 10 της ενότητας 1.3), είναι

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdots(1-\tfrac{k-1}{n}) \\ &\quad + \cdots + \tfrac{1}{n!}(1-\tfrac{1}{n})\cdots(1-\tfrac{n-1}{n}). \end{aligned}$$

Επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι > 0 και < 1, ισχύει

$$t_n \leq 1 + \tfrac{1}{1!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} = x_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, παραλείποντας τους (θετικούς) όρους μετά από τον k-οστό, βρίσκουμε

$$t_n \geq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\cdots(1-\tfrac{k-1}{n}).$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε

$$e \geq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{k!} = x_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και, με αλλαγή συμβολισμού, $e \geq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα ισχύει

$$t_n \leq x_n \leq e$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, επειδή $t_n \to e$, συνεπάγεται $x_n \to e$.
Θα δούμε την ίδια ακολουθία στο Κεφάλαιο 8 και μια γενίκευσή της στο Κεφάλαιο 10.
(2) Έστω η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Θα αποδείξουμε ότι

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty.$$

Είναι $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα. Παρατηρούμε ότι

$$x_{2n} - x_n = \tfrac{1}{n+1} + \cdots + \tfrac{1}{n+n} \geq \tfrac{1}{n+n} + \cdots + \tfrac{1}{n+n} = \tfrac{n}{n+n} = \tfrac{1}{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως,

$$x_2 - x_1 > \tfrac{1}{2}\,,\ x_{2^2} - x_2 > \tfrac{1}{2}\,,\ x_{2^3} - x_{2^2} > \tfrac{1}{2}\,,\ \ldots\,,\ x_{2^{k-1}} - x_{2^{k-2}} > \tfrac{1}{2}\,,\ x_{2^k} - x_{2^{k-1}} > \tfrac{1}{2}\,.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες αυτές, βρίσκουμε $x_{2^k} - x_1 > \frac{k}{2}$, οπότε

$$x_{2^k} > \tfrac{k}{2} + 1$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Πράγματι, αν υπήρχε u ώστε να ίσχυε $x_n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε θα ήταν $x_{2^k} \leq u$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα θα ήταν $\frac{k}{2} + 1 \leq u$ και, επομένως, $k \leq 2u - 2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άτοπο. Άρα η (x_n) είναι αύξουσα και όχι άνω φραγμένη. Άρα $x_n \to +\infty$.
Για δυο ακόμη αποδείξεις του ορίου αυτού δείτε την άσκηση 5 της ενότητας 2.7 και την άσκηση 1 της ενότητας 2.8.
(3) Έστω η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Θα αποδείξουμε ότι η (x_n) συγκλίνει.
Είναι $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα. Παρατηρούμε ότι

$$x_n \leq 1 + \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \tfrac{1}{(n-1)n} = 1 + \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n} = 2 - \tfrac{1}{n} < 2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.
Μια ακόμη απόδειξη υπάρχει στην ενότητα 2.8.

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει ότι, αν πάρουμε μια ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων έτσι ώστε κάθε διάστημα να περιέχει το επόμενό του, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο το οποίο περιέχεται σε όλα αυτά τα διαστήματα καθώς και ότι υπάρχει ένα μόνο τέτοιο σημείο αν και μόνο αν η ακολουθία των μηκών των διαστημάτων έχει όριο 0.

Εγκιβωτισμένα διαστήματα. *Έστω αύξουσα ακολουθία* (a_n) *και φθίνουσα ακολουθία* (b_n) *ώστε να ισχύει* $a_n \leq b_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Ισοδύναμα, έστω ακολουθία διαστημάτων* $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ... *ώστε να ισχύει* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε:*
(i) *οι ακολουθίες* (a_n) *και* (b_n) *συγκλίνουν.*
(ii) *υπάρχει τουλάχιστον ένας* x *ώστε να ισχύει* $a_n \leq x \leq b_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.
(iii) *υπάρχει μοναδικός* x *με την ιδιότητα που αναφέρεται στο* (ii) *αν και μόνο αν* $b_n - a_n \to 0$. *Στην περίπτωση αυτή, οι* (a_n), (b_n) *έχουν το ίδιο όριο και ο μοναδικός* x *είναι το κοινό όριο των δυο ακολουθιών.*

Απόδειξη. Επειδή η (b_n) είναι φθίνουσα, ισχύει $a_n \leq b_n \leq b_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η (a_n) είναι, εκτός από αύξουσα, άνω φραγμένη. Άρα η (a_n) συγκλίνει και έστω

$$a_n \to a.$$

Ομοίως, επειδή η (a_n) είναι αύξουσα, ισχύει $a_1 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η (b_n) είναι, εκτός από φθίνουσα, κάτω φραγμένη. Άρα η (b_n) συγκλίνει και έστω

$$b_n \to b.$$

Επειδή ισχύει $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $a \leq b$. Άρα ισχύει

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $a_n \leq a \leq x \leq b \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αντιστρόφως, αν για κάποιον x ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $a \leq x \leq b$, δηλαδή $x \in [a, b]$.
Άρα οι x για τους οποίους ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι ακριβώς τα στοιχεία του διαστήματος $[a, b]$. Επομένως, υπάρχει μοναδικός τέτοιος x αν και μόνο αν $a = b$ ή, ισοδύναμα, $b_n - a_n \to 0$. Στην περίπτωση αυτή ο μοναδικός αυτός x είναι ο $x = a = b$. $\square$

Για μια δεύτερη απόδειξη του μέρους (ii) της πρότασης για τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, η οποία είναι άμεση εφαρμογή της Ιδιότητας Συνέχειας, δείτε την άσκηση 13.

Παραδείγματα. **(1)** Το παράδειγμα αυτό έχει ιστορική, περισσότερο, σημασία.
Έστω κύκλος Κ με ακτίνα 1 και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ένα κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές εγγεγραμμένο στον Κ και ένα κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές περιγεγραμμένο στον Κ. Συμβολίζουμε p_n και q_n τα μήκη του εσωτερικού και του εξωτερικού, αντιστοίχως, πολυγώνου. Σχηματίζονται, λοιπόν, οι δυο ακολουθίες $(p_n)_{n=2}^{+\infty}$, $(q_n)_{n=2}^{+\infty}$.
Είναι $p_2 = 4\sqrt{2}$, $q_2 = 8$ και αποδεικνύονται - *γεωμετρικά* - οι αναδρομικοί τύποι

$$p_{n+1} = 2p_n\big(2 + \big(4 - \tfrac{{p_n}^2}{4^n}\big)^{\frac{1}{2}}\big)^{-\frac{1}{2}}, \quad q_{n+1} = 4q_n\big(2 + \big(4 + \tfrac{{q_n}^2}{4^n}\big)^{\frac{1}{2}}\big)^{-1} \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

καθώς και η μεταξύ των δυο ακολουθιών σχέση

$$q_n = p_n\big(1 - \tfrac{{p_n}^2}{4^{n+1}}\big)^{-\frac{1}{2}} \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Η (p_n) είναι αύξουσα και η (q_n) φθίνουσα, διότι ισχύει

$$p_{n+1} = 2p_n\big(2 + \big(4 - \tfrac{{p_n}^2}{4^n}\big)^{\frac{1}{2}}\big)^{-\frac{1}{2}} > 2p_n\big(2 + 4^{\frac{1}{2}}\big)^{-\frac{1}{2}} = p_n$$

και

$$q_{n+1} = 4q_n\big(2 + \big(4 + \tfrac{{q_n}^2}{4^n}\big)^{\frac{1}{2}}\big)^{-1} < 4q_n\big(2 + 4^{\frac{1}{2}}\big)^{-1} = q_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Επίσης, ισχύει

$$q_n = p_n\big(1 - \tfrac{{p_n}^2}{4^{n+1}}\big)^{-\frac{1}{2}} > p_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Βάσει της πρότασης με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, οι (p_n), (q_n) συγκλίνουν και έστω $p_n \to p$ και $q_n \to q$. Επειδή ισχύει $q_n = p_n\big(1 - \tfrac{{p_n}^2}{4^{n+1}}\big)^{-\frac{1}{2}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, συνεπάγεται

$$q = p\big(1 - p^2 0\big)^{-\frac{1}{2}} = p.$$

Άρα $q_n - p_n \to 0$, οπότε, βάσει της ίδιας πρότασης, υπάρχει μοναδικός x ώστε να ισχύει $p_n \leq x \leq q_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Αυτός ο x είναι το κοινό όριο των δυο ακολουθιών: $p = q = x$.
Μια από τις μαθηματικές *παραδοχές ή διαπιστώσεις* της κλασσικής αρχαιότητας ήταν ότι το μήκος της περιφέρειας του κύκλου K, το οποίο, παραδοσιακά, συμβολίζεται 2π, έχει την ιδιότητα: $p_n \leq 2\pi \leq q_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Άρα

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = 2\pi.$$

Είναι γνωστό ότι ο αριθμός π είναι άρρητος. Για μια απόδειξη δείτε την άσκηση 20 της ενότητας 7.3.
(2) **p-αδικές προσεγγίσεις**. Έστω $x \in [0,1)$ και $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Ορίζουμε

$$x_n = [p^n x] - p[p^{n-1}x]$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Είναι φανερό ότι ισχύει $x_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την $[p^{n-1}x] \leq p^{n-1}x < [p^{n-1}x] + 1$ συνεπάγεται $p[p^{n-1}x] \leq p^n x < p[p^{n-1}x] + p$ συνεπάγεται $p[p^{n-1}x] \leq [p^n x] < p[p^{n-1}x] + p$, οπότε $0 \leq x_n < p$ και, επειδή $x_n \in \mathbb{Z}$, συνεπάγεται

$$0 \leq x_n \leq p - 1.$$

Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο x_n είναι ένας από τους ακεραίους $0, 1, \ldots, p-1$.
Τώρα ορίζουμε

$$s_n = \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_n}{p^n}\,, \quad t_n = \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_n}{p^n} + \tfrac{1}{p^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Είναι

$$s_{n+1} = s_n + \tfrac{x_{n+1}}{p^{n+1}} \geq s_n\,, \quad t_{n+1} = t_n + \tfrac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \tfrac{1}{p^{n+1}} - \tfrac{1}{p^n} \leq t_n + \tfrac{p-1}{p^{n+1}} + \tfrac{1}{p^{n+1}} - \tfrac{1}{p^n} = t_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η (s_n) είναι αύξουσα και η (t_n) φθίνουσα. Προφανώς, ισχύει

$$s_n \leq t_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε οι δυο ακολουθίες ικανοποιούν τις υποθέσεις της πρότασης με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα. Μάλιστα, είναι

$$t_n - s_n = \tfrac{1}{p^n} \to 0,$$

οπότε οι (s_n), (t_n) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Ποιο είναι αυτό το κοινό όριο;
Βλέπουμε ότι

$$s_n = \left(\frac{[px]}{p} - [x]\right) + \left(\frac{[p^2x]}{p^2} - \frac{[px]}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{[p^{n-1}x]}{p^{n-1}} - \frac{[p^{n-2}x]}{p^{n-2}}\right) + \left(\frac{[p^nx]}{p^n} - \frac{[p^{n-1}x]}{p^{n-1}}\right) = \frac{[p^nx]}{p^n} - [x] = \frac{[p^nx]}{p^n}\,.$$

Επομένως, από την $[p^nx] \le p^nx < [p^nx]+1$ συνεπάγεται

$$s_n \le x < s_n + \tfrac{1}{p^n} = t_n\,.$$

Άρα $s_n \to x$ και $t_n \to x$.

Ορισμός. Η (s_n) ονομάζεται **ακολουθία των p-αδικών προσεγγίσεων (καθ' έλλειψιν)** του x και η (t_n) **ακολουθία των p-αδικών προσεγγίσεων καθ' υπεροχήν** του x. Η (x_n) ονομάζεται **ακολουθία των p-αδικών ψηφίων** του x.

Η ακολουθία των p-αδικών ψηφίων του $x \in [0,1)$ έχει την εξής ιδιότητα: *δεν είναι τελικά σταθερή* $p-1$. Ας υποθέσουμε - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n = p-1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$. Τότε ισχύει

$$t_{n+1} = t_n + \tfrac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \tfrac{1}{p^{n+1}} - \tfrac{1}{p^n} = t_n + \tfrac{p-1}{p^{n+1}} + \tfrac{1}{p^{n+1}} - \tfrac{1}{p^n} = t_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$. Συνεπάγεται ότι η (t_n) είναι τελικά σταθερή και, επειδή $t_n \to x$, ισχύει τελικά $t_n = x$. Αυτό αντιφάσκει με το ότι ισχύει $s_n \le x < t_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μερικές απλές περιπτώσεις είναι: η $p=2$ με τα δυαδικά ψηφία $0,1$, η $p=3$ με τα τριαδικά ψηφία $0,1,2$ και, φυσικά, η $p=10$ με τα δεκαδικά ψηφία $0,1,\ldots,9$.

Οι ακολουθίες των p-αδικών προσεγγίσεων θα μελετηθούν πληρέστερα στο Κεφάλαιο 8.

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.

2. (i) Αποδείξτε ότι: $(1+\frac{1}{n})^{n+3} \to e$, $(1+\frac{1}{n+2})^{3n+5} \to e^3$, $(1-\frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e}$, $(1+\frac{2}{n})^n \to e^2$, $(1-\frac{2}{n})^n \to \frac{1}{e^2}$.
(ii) Αποδείξτε ότι $(1+\frac{k}{n})^n \to e^k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

3. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\left((1+\frac{1}{n})^{n+1}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα, ότι συγκλίνει στον e και ότι $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > e$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Έστω $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{{x_n}^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και βρείτε το όριό της.

5. Έστω $7x_{n+1} = {x_n}^3 + 6$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

6. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \frac{6+6x_n}{7+x_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

7. (i) Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (a^n) είναι αύξουσα και, χρησιμοποιώντας την $a^{n+1} = aa^n$ $(n \in \mathbb{N})$, ότι $a^n \to +\infty$. Μελετήστε με τον ίδιο τρόπο και την περίπτωση $0 < a < 1$.
(ii) Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $\left(\frac{a^n}{n}\right)$ είναι τελικά αύξουσα και, χρησιμοποιώντας

την $\frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{an}{n+1}\frac{a^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, ότι $\frac{a^n}{n} \to +\infty$.
(iii) Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $\big(\sqrt[n]{a}\big)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και, χρησιμοποιώντας την $\big(\sqrt[2n]{a}\big)^2 = \sqrt[n]{a}$ $(n \in \mathbb{N})$, ότι $\sqrt[n]{a} \to 1$. Τι γίνεται στις περιπτώσεις $a = 1$, $0 < a < 1$;

8. (i) Αν $a, x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι κάτω φραγμένη και, από τον δεύτερο όρο και πέρα, φθίνουσα και βρείτε το όριό της.
(ii) Αν $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_1 = y_1 = 1$ και $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $\frac{x_n}{y_n} \to \sqrt{2}$.

9. Έστω φραγμένη ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $2x_{n+1} \leq x_n + x_{n+2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $y_n = x_n - x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (y_n) είναι μονότονη και φραγμένη και ότι $y_n \to 0$.

10. (i) Αν $0 < x_1 \leq y_1$ και $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ και $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, η (y_n) φθίνουσα, ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο.
(ii) Αν $0 < x_1 \leq y_1$ και $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$ και $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, η (y_n) φθίνουσα, ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

11. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι για κάθε $x \in I$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in (x - \delta_0, x + \delta_0) \cap I$, $x' < x < x''$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I.
Υπόδειξη: Έστω $a, b \in I$ ώστε $a < b$, $f(a) > f(b)$. Αν $f(a) > f(\frac{a+b}{2})$, πάρτε $a_1 = a, b_1 = \frac{a+b}{2}$ και, αν $f(\frac{a+b}{2}) > f(b)$, πάρτε $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$. Αποδείξτε ότι $f(a_1) > f(b_1)$. Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργήστε ακολουθία διαστημάτων $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ ώστε να ισχύει $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, $f(a_n) > f(b_n)$ και $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα υπάρχει ξ ώστε $a_n \leq \xi \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$. Θεωρώντας τον αντίστοιχο δ_0 για τον ξ, καταλήξτε σε αντίφαση.

12. Έστω ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Αποδείξτε ότι ισχύει η Ιδιότητα Supremum.
Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2^n} \to 0$. Τώρα, έστω μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο A. Θεωρήστε $x_1 \in A$ και άνω φράγμα y_1 του A. Το $[x_1, y_1]$ περιέχει ένα στοιχείο του A και ένα άνω φράγμα του A. Αν το $\frac{x_1+y_1}{2}$ είναι άνω φράγμα του A, πάρτε $x_2 = x_1$, $y_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, αν όχι, πάρτε $x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, $y_2 = y_1$. Αποδείξτε ότι το $[x_2, y_2]$ περιέχει ένα στοιχείο του A και ένα άνω φράγμα του A. Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργήστε ακολουθία διαστημάτων $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots$ ώστε να είναι $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ και $y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ώστε κάθε $[x_n, y_n]$ να περιέχει ένα $a_n \in A$ και ένα άνω φράγμα u_n του A. Αποδείξτε ότι υπάρχει u ώστε $x_n \to u$, $y_n \to u$ και, επίσης, $a_n \to u$, $u_n \to u$. Αποδείξτε ότι ο u είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

13. Έστω αύξουσα ακολουθία (a_n) και φθίνουσα ακολουθία (b_n) ώστε να ισχύει $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι τα σύνολα $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ και $\{b_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ικανοποιούν την υπόθεση της Ιδιότητας Συνέχειας και, επομένως, ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας x ώστε να ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

14. Ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο A - όχι κατ' ανάγκη υποσύνολο του $\mathbb{R}$ - χαρακτηρίζεται **άπειρο-αριθμήσιμο** αν υπάρχει συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to A$ η οποία είναι ένα-προς-ένα και επί. Χρησιμοποιώντας τον παραδοσιακό συμβολισμό $a_n = a(n)$, μπορούμε να πούμε ότι το A είναι άπειρο-αριθμήσιμο αν μπορεί να γραφτεί $A = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ή, ισοδύναμα, αν το A είναι το σύνολο των όρων κάποιας ακολουθίας με διαφορετικούς ανά δύο όρους. Τέλος, ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **αριθμήσιμο** αν είναι είτε πεπερασμένο είτε άπειρο-αριθμήσιμο και **υπεραριθμήσιμο** αν δεν είναι αριθμήσιμο.
Αποδείξτε ότι κάθε διάστημα I (όχι μονοσύνολο) είναι υπεραριθμήσιμο.
Υπόδειξη: Έστω $I = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Θεωρήστε $[x_1, y_1] \subseteq I$ ώστε $y_1 - x_1 > 0$ και $a_1 \notin [x_1, y_1]$. Θεωρήστε $[x_2, y_2] \subseteq [x_1, y_1]$ ώστε $y_2 - x_2 > 0$ και $a_2 \notin [x_2, y_2]$. Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργήστε ακολουθία διαστημάτων $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots$ ώστε να είναι $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ και $a_n \notin [x_n, y_n]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε να ισχύει $\xi \in [x_n, y_n]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, επομένως, $\xi \neq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Καταλήξτε σε αντίφαση.

2.6 Supremum, infimum και ακολουθίες.

Έστω σύνολο A. Όταν λέμε ότι η ακολουθία (x_n) *είναι στο* A εννοούμε ότι $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ότι όλοι οι όροι της (x_n) ανήκουν στο A.

Από την Πρόταση 2.22 προκύπτει μια χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum και μια αντίστοιχη ιδιότητα του infimum ενός μη-κενού συνόλου: το $\sup A$ είναι το μέγιστο όριο ακολουθίας στο A και το $\inf A$ είναι το ελάχιστο όριο ακολουθίας στο A.

Πρόταση 2.22. *Έστω μη-κενό σύνολο A.*
(1) Υπάρχει ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$ και δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο μεγαλύτερο από το $\sup A$.
(2) Υπάρχει ακολουθία στο A με όριο το $\inf A$ και δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο μικρότερο από το $\inf A$.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι το A είναι άνω φραγμένο, οπότε το $x = \sup A$ είναι αριθμός. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο $x - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε υπάρχει $x_n \in A$ ώστε

$$x - \tfrac{1}{n} < x_n \leq x.$$

Άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$.
Κατόπιν, έστω ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup A = +\infty$. Τότε κανένας $n \in \mathbb{N}$ δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in A$ ώστε

$$x_n > n.$$

Άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to +\infty$.
Τέλος, έστω ακολουθία (x_n) στο A. Αν η (x_n) έχει όριο, αυτό είναι $\leq \sup A$, διότι ισχύει $x_n \leq \sup A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο μεγαλύτερο από το $\sup A$.
(2) Ομοίως. □

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε την απόδειξη της Πρότασης 2.22.

2. Για καθένα από τα $[0,2]$, $[0,2)$, $\{2\}$, $[0,1]\cup\{2\}$ βρείτε διάφορες ακολουθίες στο σύνολο οι οποίες συγκλίνουν στο supremum του συνόλου. Παρατηρήστε ότι για το πρώτο, το τρίτο και το τέταρτο σύνολο υπάρχει ως επιλογή ο απλούστερος τύπος ακολουθίας (δηλαδή μια σταθερή ακολουθία) η οποία, όμως, δεν υφίσταται ως επιλογή για το δεύτερο σύνολο. Παρατηρήστε, επίσης, ότι για το τρίτο σύνολο υπάρχει μια μόνο επιλογή ακολουθίας, ενώ για το τέταρτο σύνολο οι μόνες επιλογές είναι οι τελικά σταθερές ακολουθίες.

3. Για καθένα από τα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ βρείτε δυο όσο το δυνατό πιο απλές ακολουθίες, μια με όριο το supremum και μια με όριο το infimum του συνόλου.

4. Έστω μη-κενό σύνολο A και u άνω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι $u=\sup A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο τον u. Προσαρμόστε τα παραπάνω για το $\inf A$ και για κάτω φράγμα l του A.

5. Έστω μη-κενό σύνολο A. Αν $\sup A\in A$ βρείτε μια όσο το δυνατό πιο απλή ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$. Αν $\sup A\notin A$, αποδείξτε ότι υπάρχει *γνησίως αύξουσα* ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$. Προσαρμόστε τα προηγούμενα για το $\inf A$.

6. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ αύξουσα στο $[0,1]$ ώστε $f(0)>0$ και $f(x)\neq x$ για κάθε $x\in[0,1]$. Αν $A=\{x\in[0,1]\,|\,f(x)>x\}$, αποδείξτε ότι $\sup A\in A$ και ότι $f(1)>1$.

2.7 Υποακολουθίες.

Ορισμός. Έστω ακολουθία (x_n). Επιλέγουμε άπειρες τιμές $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots$ του δείκτη n, δηλαδή φυσικούς, ώστε $n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$. Κατόπιν επιλέγουμε τους αντίστοιχους όρους της (x_n). Δηλαδή από τους $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ επιλέγουμε τους $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$. Αυτοί οι αριθμοί αποτελούν μια άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά: πρώτος ο x_{n_1}, δεύτερος ο x_{n_2} και ούτω καθ' εξής. Άρα οι αριθμοί αυτοί αποτελούν τους όρους μιας νέας ακολουθίας, της (x_{n_k}). Επειδή οι όροι της νέας ακολουθίας είναι όροι της αρχικής, η (x_{n_k}) χαρακτηρίζεται **υποακολουθία** της (x_n). Κάπως πιο αυστηρά, μπορούμε να πούμε ότι η *ακολουθία* (x_{n_k}) είναι η *συνάρτηση* $x\circ n:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ με τύπο $(x\circ n)(k)=x(n(k))=x_{n(k)}=x_{n_k}$, η οποία προκύπτει ως σύνθεση των *συναρτήσεων* $n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ και $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι, αντιστοίχως, μια γνησίως αύξουσα *ακολουθία* (n_k) με τιμές φυσικούς και η αρχική *ακολουθία* (x_n).

Τονίζουμε ότι, λόγω της συνθήκης $n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$, η σειρά επιλογής των όρων της υποακολουθίας είναι *ομόρροπη* με τη σειρά επιλογής που έχουν αυτοί οι όροι ως όροι της ακολουθίας.

Παραδείγματα. (1) Επιλέγοντας τους $n_1=1$, $n_2=3$, $n_3=10$, $n_4=11$, μπορούμε να αρχίσουμε μια υποακολουθία της (x_n) με τους όρους x_1, x_3, x_{10}, x_{11}.
(2) Επιλέγοντας τους $n_1=2$, $n_2=5$, $n_3=6$, $n_4=9$, $n_5=13$, μπορούμε να αρχίσουμε μια υποακολουθία της (x_n) με τους όρους $x_2, x_5, x_6, x_9, x_{13}$.
(3) Όμως, με τους $n_1=2$, $n_2=5$, $n_3=6$, $n_4=10$, $n_5=8$ δεν επιτρέπεται να σχηματιστεί υποακολουθία της (x_n). Η σειρά επιλογής των $x_2, x_5, x_6, x_{10}, x_8$ δεν είναι ομόρροπη με τη σειρά επιλογής που έχουν ως όροι της (x_n) : ο x_{10} ακολουθεί τον x_8 στην (x_n) - με ενδιάμεσο τον x_9 - οπότε ο x_{10} πρέπει να ακολουθεί τον x_8 και στην υποακολουθία.

Παραδείγματα. Μερικά πιο συγκεκριμένα παραδείγματα υποακολουθιών.
(1) Με $n_k=2k$ $(k\in\mathbb{N})$, φτιάχνουμε την υποακολουθία (x_{2k}) ή $(x_2,x_4,x_6,x_8,x_{10},\dots)$ που

ονομάζεται **υποακολουθία των άρτιων δεικτών** της (x_n).
(2) Με $n_k = 2k-1 \ \ (k \in \mathbb{N})$, φτιάχνουμε την υποακολουθία (x_{2k-1}) ή $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \dots)$ που ονομάζεται **υποακολουθία των περιττών δεικτών** της (x_n).
(3) Με $n_k = k \ \ (k \in \mathbb{N})$, φτιάχνουμε την υποακολουθία (x_k) ή $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots)$, δηλαδή την ίδια την (x_n). Άρα, μια από τις υποακολουθίες της (x_n) είναι η ίδια η (x_n).
(4) Με $n_k = 2^{k-1} \ \ (k \in \mathbb{N})$, φτιάχνουμε την υποακολουθία $(x_{2^{k-1}})$ ή $(x_1, x_2, x_4, x_8, x_{16}, \dots)$.
(5) Με $n_k = k^2 \ \ (k \in \mathbb{N})$, φτιάχνουμε την υποακολουθία (x_{k^2}) ή $(x_1, x_4, x_9, x_{16}, x_{25}, \dots)$.

Πρέπει να θυμόμαστε ότι ο δείκτης μιας υποακολουθίας (x_{n_k}) είναι ο k. Καθώς ο k μεταβάλλεται διατρέχοντας *όλους* τους φυσικούς $1, 2, 3, \dots$, ο αντίστοιχος n_k μεταβάλλεται *γνησίως αυξανόμενος* διατρέχοντας *κάποιους* από τους δείκτες της αρχικής ακολουθίας (x_n).

Λήμμα 2.2. *Έστω $n_k \in \mathbb{N}$ και $n_k < n_{k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύει $n_k \geq k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Η $n_1 \geq 1$ είναι σωστή διότι $n_1 \in \mathbb{N}$. Έστω $n_k \geq k$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$. Επειδή $n_{k+1} > n_k$ και $n_k, n_{k+1} \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $n_{k+1} \geq n_k + 1$, οπότε $n_{k+1} \geq k+1$. Άρα ισχύει $n_k \geq k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 2.23. *Αν μια ακολουθία έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Θα αποδείξουμε ότι $x_{n_k} \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\varepsilon)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Τώρα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ συνεπάγεται $n_k \geq n_0$, αφού, λόγω του Λήμματος 2.2, $n_k \geq k$. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ συνεπάγεται $x_{n_k} \in N_x(\varepsilon)$. Άρα $x_{n_k} \to x$. □

Η Πρόταση 2.23 χρησιμοποιείται, συνήθως, ως εξής: αν μια ακολουθία έχει δυο υποακολουθίες με διαφορετικά όρια, τότε η ακολουθία δεν έχει όριο. Ο αντίστροφος ισχυρισμός είναι κι αυτός αληθής - για δυο αποδείξεις του δείτε την άσκηση 14 αυτής της ενότητας και την άσκηση 12 της ενότητας 2.9.

Παράδειγμα. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ δεν έχει όριο. Πράγματι, για την υποακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k-1)-1} = 1 \to 1$ και για την υποακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k)-1} = -1 \to -1$.

Η Πρόταση 2.24 είναι χρήσιμη σε αρκετές περιπτώσεις.

Πρόταση 2.24. *Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x_{2k} \to x$, $x_{2k-1} \to x$. Τότε $x_n \to x$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x_{2k} \to x$, $x_{2k-1} \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $k_0' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_{2k} \in N_x(\varepsilon)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0'$. Επίσης, υπάρχει $k_0'' \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_{2k-1} \in N_x(\varepsilon)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0''$. Θεωρούμε τον

$$n_0 = \max\{2k_0', 2k_0'' - 1\}.$$

Τότε $n_0 \in \mathbb{N}$ και είναι εύκολο να δει κανείς ότι ισχύει $x_n \in N_x(\varepsilon)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. □

Το επόμενο παράδειγμα μελετά μια χαρακτηριστική ακολουθία.

Παράδειγμα. Έστω η ακολουθία (x_n) με $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \ \ (n \in \mathbb{N})$. Θα δούμε ότι η (x_n) συγκλίνει.
Είναι

$$x_{2k+2} - x_{2k} = \tfrac{1}{2k+1} - \tfrac{1}{2k+2} > 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επίσης, είναι

$$x_{2k} = 1 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - \cdots - (\tfrac{1}{2k-2} - \tfrac{1}{2k-1}) - \tfrac{1}{2k} < 1$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, διότι κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η υποακολουθία (x_{2k}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.
Είναι

$$x_{2k+1} - x_{2k-1} = -\tfrac{1}{2k} + \tfrac{1}{2k+1} < 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επίσης, είναι

$$x_{2k-1} = (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \cdots + (\tfrac{1}{2k-3} - \tfrac{1}{2k-2}) + \tfrac{1}{2k-1} > 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ διότι κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η υποακολουθία (x_{2k-1}) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.
Τέλος,

$$x_{2k} - x_{2k-1} = -\tfrac{1}{2k} \to 0,$$

οπότε οι (x_{2k}), (x_{2k-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Άρα η (x_n) συγκλίνει.
Για μια ακόμη απόδειξη δείτε την άσκηση 2 της ενότητας 2.8.

Γνωρίζουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη αλλά δε συγκλίνει. Όμως, η $((-1)^{n-1})$, παρόλο που δε συγκλίνει, έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που συγκλίνει: η υποακολουθία των περιττών δεικτών συγκλίνει στον 1. Θα δούμε τώρα ότι αυτό το φαινόμενο παρατηρείται όχι μόνο στην ακολουθία $((-1)^{n-1})$ αλλά και σε κάθε φραγμένη ακολουθία. Αυτό είναι το περιεχόμενο του επόμενου θεωρήματος, ενός από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Ανάλυσης.

Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass. *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υποακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία (x_n) και l, u ώστε να ισχύει $l \leq x_n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει, περιγράφοντας έναν "αλγόριθμο" επιλογής των διαδοχικών όρων της υποακολουθίας: περιγράφουμε πώς επιλέγουμε τον πρώτο όρο της υποακολουθίας, κατόπιν πώς επιλέγουμε τον δεύτερο όρο της, κατόπιν πώς επιλέγουμε τον τρίτο όρο της και ούτω καθ' εξής.
Βήμα 1. Χωρίζουμε το $[l, u]$ στα δυο ισομήκη διαστήματα $[l, \frac{l+u}{2}]$, $[\frac{l+u}{2}, u]$. Επειδή όλοι οι (άπειροι) όροι της (x_n) ανήκουν στο $[l, u]$, τουλάχιστον ένα από τα δυο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$. Πιο συγκεκριμένα, αν το $[l, \frac{l+u}{2}]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n) και το $[\frac{l+u}{2}, u]$ περιέχει μόνο πεπερασμένους όρους, τότε συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$ το $[l, \frac{l+u}{2}]$. Αν το $[\frac{l+u}{2}, u]$ περιέχει άπειρους όρους και το $[l, \frac{l+u}{2}]$ περιέχει μόνο πεπερασμένους όρους, τότε συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$ το $[\frac{l+u}{2}, u]$. Αν, τέλος, και τα δυο υποδιαστήματα περιέχουν άπειρους όρους, τότε συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$ ένα οποιοδήποτε από αυτά. Άρα $[l_1, u_1] \subseteq [l, u]$, $u_1 - l_1 = \frac{u-l}{2}$ και το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_1, u_1]$: έστω $x_{n_1} \in [l_1, u_1]$.
Βήμα 2. Χωρίζουμε το $[l_1, u_1]$ στα δυο ισομήκη διαστήματα $[l_1, \frac{l_1+u_1}{2}]$, $[\frac{l_1+u_1}{2}, u_1]$. Επειδή το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δυο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_2, u_2]$ - ακριβώς όπως στο πρώτο βήμα. Άρα $[l_2, u_2] \subseteq [l_1, u_1]$, $u_2 - l_2 = \frac{u_1-l_1}{2}$ και το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_2, u_2]$: έστω $x_{n_2} \in [l_2, u_2]$. *Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι* $n_2 > n_1$. Αυτό *είναι* εφικτό, ακριβώς επειδή

υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στο $[l_2, u_2]$.
Βήμα 3. Χωρίζουμε το $[l_2, u_2]$ στα δυο ισομήκη διαστήματα $[l_2, \frac{l_2+u_2}{2}]$, $[\frac{l_2+u_2}{2}, u_2]$. Επειδή το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δυο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_3, u_3]$. Άρα $[l_3, u_3] \subseteq [l_2, u_2]$, $u_3 - l_3 = \frac{u_2-l_2}{2}$ και το $[l_3, u_3]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_3, u_3]$: έστω $x_{n_3} \in [l_3, u_3]$. Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι $n_3 > n_2$.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον. Επιλέγουμε έτσι διαδοχικά διαστήματα $[l_k, u_k]$ $(k \in \mathbb{N})$ ώστε να ισχύει

$$[l_{k+1}, u_{k+1}] \subseteq [l_k, u_k], \qquad u_{k+1} - l_{k+1} = \tfrac{u_k-l_k}{2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επίσης, επιλέγουμε όρους x_{n_k} $(k \in \mathbb{N})$ της (x_n) ώστε να ισχύει $n_{k+1} > n_k$ και

$$x_{n_k} \in [l_k, u_k]$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Από το ότι ισχύει $u_{k+1} - l_{k+1} = \frac{u_k-l_k}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ προκύπτει ότι ισχύει

$$u_k - l_k = \tfrac{u-l}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε

$$u_k - l_k \to 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, οι (l_k), (u_k) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Έστω $l_k \to x$ και $u_k \to x$. Τώρα, επειδή ισχύει $n_{k+1} > n_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία της (x_n) και, επειδή ισχύει

$$l_k \leq x_{n_k} \leq u_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $x_{n_k} \to x$. $\square$

Στην άσκηση 8 θα βρείτε μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass.

Γνωρίζουμε ότι κάθε ακολουθία που αποκλίνει στο $+\infty$ δεν είναι άνω φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \dots)$ δεν είναι άνω φραγμένη αλλά δεν αποκλίνει στο $+\infty$. Στο ίδιο παράδειγμα, παρόλο που η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$, υπάρχει κάποια υποακολουθία της που αποκλίνει στο $+\infty$: δείτε την υποακολουθία των περιττών δεικτών, την $(1, 3, 5, 7, \dots)$. Αυτό το φαινόμενο ισχύει γενικότερα.

Πρόταση 2.25. *(1) Κάθε ακολουθία που δεν είναι άνω φραγμένη έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που αποκλίνει στο $+\infty$.*
(2) Κάθε ακολουθία που δεν είναι κάτω φραγμένη έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που αποκλίνει στο $-\infty$.

Απόδειξη. (1) Έστω ακολουθία (x_n) όχι άνω φραγμένη. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει υποακολουθία της που αποκλίνει στο $+\infty$. Αυτό θα το πετύχουμε περιγράφοντας έναν "αλγοριθμικό" τρόπο επιλογής των όρων της υποακολουθίας.
Βήμα 1. Επειδή η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει κάποιος όρος της που είναι > 1. Επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο: έστω $x_{n_1} > 1$.
Βήμα 2. Επειδή η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχουν *άπειροι* όροι της που είναι > 2. Γιατί υπάρχουν άπειροι όροι > 2; Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι είναι το πολύ πεπερασμένοι

όροι της (x_n) μεγαλύτεροι από τον 2. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Ορίζουμε

$$u = \max\{x_1, \dots, x_{n_0-1}, 2\}$$

και τότε είναι $x_n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq n_0 - 1$ και $x_n \leq 2 \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε ο u είναι άνω φράγμα της (x_n) και καταλήγουμε σε άτοπο. Επιλέγουμε, τώρα, έναν όρο της (x_n) μεγαλύτερο από τον 2: έστω $x_{n_2} > 2$. Φροντίζουμε, όμως, να είναι $n_2 > n_1$. Αυτό είναι εφικτό ακριβώς διότι υπάρχουν άπειροι όροι > 2.

Βήμα 3. Επειδή η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχουν - όπως πριν - *άπειροι* όροι της που είναι > 3. Επιλέγουμε έναν όρο της (x_n) μεγαλύτερο από τον 3: έστω $x_{n_3} > 3$. Φροντίζουμε, όμως, να είναι $n_3 > n_2$.

Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον. Βρίσκουμε έτσι διαδοχικά όρους x_{n_k} $(k \in \mathbb{N})$ της (x_n) ώστε να ισχύει $n_{k+1} > n_k$ και

$$x_{n_k} > k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία της (x_n) και $x_{n_k} \to +\infty$.

(2) Ομοίως. □

Η Πρόταση 2.26 προκύπτει από την Πρόταση 2.25 και το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass.

Πρόταση 2.26. *Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία έχει όριο.*

Απόδειξη. Αν η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, έχει υποακολουθία που αποκλίνει στο $+\infty$. Ομοίως, αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, έχει υποακολουθία που αποκλίνει στο $-\infty$. □

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε την απόδειξη της Πρότασης 2.25.

2. Έστω $a < b < c < d$. Βρείτε μια πολύ απλή ακολουθία που να έχει τέσσερις υποακολουθίες ώστε η πρώτη να συγκλίνει στον a, η δεύτερη στον b, η τρίτη στον c και η τέταρτη στον d.

3. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει μια οποιαδήποτε από τις ιδιότητες: (γνησίως) αύξουσα, (γνησίως) φθίνουσα, άνω φραγμένη, κάτω φραγμένη, φραγμένη. Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έχει την ίδια ιδιότητα.

4. Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x_{3k} \to x$, $x_{3k-1} \to x$, $x_{3k-2} \to x$. Προσαρμόζοντας την απόδειξη της Πρότασης 2.24, αποδείξτε ότι $x_n \to x$.

5. (i) Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει όριο και ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$.
   (ii) Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι μονότονη και ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$.
   (iii) Έστω $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Από την ενότητα 2.5 γνωρίζουμε ότι ισχύει $x_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.
   (iv) Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι ισχύει $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $a_1, \dots, a_n \geq 0$.
   (v) Έστω ότι ο b δεν είναι αρνητικός ακέραιος. Διακρίνοντας περιπτώσεις $a = b$, $a > b$, $a < b$, υπολογίστε το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$.

6. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{1+x_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(i) Αποδείξτε ότι οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες.
(ii) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και υπολογίστε το όριό της.

7. Έστω $a, b, x \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \neq b$. Έστω ότι $x_{2k} \to a$, $x_{2k-1} \to b$ και ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x$.
(i) Αποδείξτε ότι η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς είτε με την (x_{2k}) είτε με την (x_{2k-1}).
(ii) Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$.

8. (i) Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n). Ένας όρος x_n χαρακτηρίζεται *όρος-σκιάς* αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, $m > n$ ώστε $x_m > x_n$. Αποδείξτε ότι, αν η (x_n) έχει άπειρους όρους-σκιάς, τότε οι όροι αυτοί σχηματίζουν γνησίως αύξουσα υποακολουθία της (x_n) και ότι, αν η (x_n) δεν έχει άπειρους όρους-σκιάς, τότε είναι τελικά φθίνουσα.
(ii) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (i) δώστε δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass και, γενικότερα, της Πρότασης 2.26.

9. Αποδείξτε ότι μια ακολουθία (x_n) έχει μια ιδιότητα για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία έχει την ίδια ιδιότητα για *κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

10. Αν το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας είναι *πεπερασμένο*, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερή υποακολουθία της.

11. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει όριο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει υποακολουθία με όριο x.

12. Έστω $x_n < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = x$ αν και μόνο αν υπάρχει υποακολουθία της (x_n) που συγκλίνει στον x.

13. Έστω ακολουθία (x_n) και υποακολουθία (x_{n_k}). Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία της (x_{n_k}) είναι υποακολουθία και της (x_n).

14. (i) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) δεν έχει όριο αν και μόνο αν υπάρχουν δυο υποακολουθίες της με διαφορετικά όρια. Να αντιπαραβάλετε με την Πρόταση 2.23.
(ii) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) δεν έχει όριο αν και μόνο αν υπάρχουν l, u, $u < l$ ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \geq l$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Να αντιπαραβάλετε με την Πρόταση 2.3(3).

15. (i) Έστω $x_n \to x$ και $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) δεν έχει καμιά σταθερή υποακολουθία.
(ii) Έστω φραγμένη ακολουθία ακολουθία (r_n) χωρίς καμιά σταθερή υποακολουθία, ώστε $r_n = \frac{q_n}{p_n}$, $q_n \in \mathbb{Z}$, $p_n \in \mathbb{N}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $p_n \to +\infty$.
(iii) Έστω άρρητος x και ακολουθία (r_n) ώστε $r_n \to x$ και $r_n = \frac{q_n}{p_n}$, $q_n \in \mathbb{Z}$, $p_n \in \mathbb{N}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $q_n \to +\infty$ και είτε $p_n \to +\infty$, αν $x > 0$, είτε $p_n \to -\infty$, αν $x < 0$.

16. (i) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της άσκησης 2 της ενότητας 2.5, αποδείξτε ότι $(1 + \frac{1}{2n})^n \to e^{\frac{1}{2}}$, $(1 + \frac{2}{3n})^n \to e^{\frac{2}{3}}$ και, γενικότερα, ότι $(1 + \frac{r}{n})^n \to e^r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$.
Έστω άρρητος x.
(ii) Έστω $\varepsilon > 0$. Βάσει του ορισμού του e^x αποδείξτε ότι υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Q}$, $s < x < t$

ώστε $e^x - \varepsilon < e^s < e^t < e^x + \varepsilon$.
(iii) Βάσει του (i), αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $e^x - \varepsilon < (1+\frac{s}{n})^n < (1+\frac{x}{n})^n < (1+\frac{t}{n})^n < e^x + \varepsilon$.
Συμπεράνατε ότι $(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$.

2.8 Η Ιδιότητα Πληρότητας.

Ορισμός. Η ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$. Μερικές φορές αυτό το διατυπώνουμε ως εξής:

$$\lim_{n,m \to +\infty} (x_n - x_m) = 0.$$

Με άλλα λόγια: η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy αν οι όροι της πλησιάζουν απεριόριστα ο ένας τον άλλο όταν οι δείκτες τους γίνονται κατάλληλα μεγάλοι.

Πρόταση 2.27. *Αν η ακολουθία (x_n) συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Επομένως, αλλάζοντας απλώς το σύμβολο από n σε m, ισχύει $|x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$. Άρα ισχύει

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) - (x_m - x)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$. Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. □

Λήμμα 2.3. *Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| < 1$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$. Ειδικώτερα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $|x_n - x_{n_0}| < 1$ και, επομένως,

$$|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Ορίζουμε

$$M = \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x_{n_0}|\}.$$

Τότε ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq n_0 - 1$ και $|x_n| < 1 + |x_{n_0}| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η (x_n) είναι φραγμένη. □

Το κριτήριο του Cauchy είναι το αντίστροφο της Πρότασης 2.27.

Κριτήριο του Cauchy. *Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, συγκλίνει.*

Απόδειξη. Η (x_n) είναι φραγμένη και, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass, έχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω $x_{n_k} \to x$. Θα αποδείξουμε ότι $x_n \to x$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$. Επίσης, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$. Θα συνδυάσουμε αυτές τις δυο ανισότητες παίρνοντας κατάλληλο n_k, ο οποίος να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη δεύτερη ανισότητα αλλά και στη θέση του m στην πρώτη ανισότητα. Για να γίνει αυτό πρέπει να είναι $k \geq k_0$ (για τη δεύτερη ανισότητα) και $n_k \geq n_0$ (για την πρώτη ανισότητα). Για να είναι $n_k \geq n_0$, αρκεί (επειδή $n_k \geq k$) να είναι $k \geq n_0$. Ορίζουμε

$$k = \max\{k_0, n_0\} \in \mathbb{N}.$$

Τότε $k \geq k_0$, οπότε ισχύει $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, και $n_k \geq k \geq n_0$, οπότε ισχύει $|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα ισχύει

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $x_n \to x$. □

Δείτε τις ασκήσεις 5 και 6 καθώς και την άσκηση 11 της ενότητας 2.9 για τρεις ακόμη αποδείξεις του Κριτηρίου του Cauchy.

Η χρησιμότητα του κριτηρίου του Cauchy είναι παρόμοια με τη χρησιμότητα του Θεωρήματος 2.1. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και δε γνωρίζουμε το υποψήφιο όριο x της (x_n), αντί να μελετήσουμε τις αποστάσεις $|x_n - x|$ των όρων της ακολουθίας απο τον άγνωστο x, μελετάμε τις αποστάσεις $|x_n - x_m|$ μεταξύ των όρων της ακολουθίας. Πρέπει, βέβαια, να λάβουμε υπ' όψη ότι το κριτήριο του Cauchy δεν προσδιορίζει το όριο μιας ακολουθίας Cauchy.

Παράδειγμα. Έστω η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, $(n \in \mathbb{N})$. Θα αποδείξουμε ότι η (x_n) συγκλίνει.
Έστω $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$. Τότε

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \tfrac{1}{(m-1)^2} + \tfrac{1}{m^2} \\ &< \tfrac{1}{n(n+1)} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \tfrac{1}{(m-2)(m-1)} + \tfrac{1}{(m-1)m} \\ &= \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{1}{m-2} - \tfrac{1}{m-1} + \tfrac{1}{m-1} - \tfrac{1}{m} = \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m} < \tfrac{1}{n}\,.\end{aligned}$$

Τώρα, έστω $\varepsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Τότε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq n < m$ ισχύει $|x_n - x_m| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.
Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει.

Το κριτήριο του Cauchy εκφράζει την Ιδιότητα Πληρότητας του $\mathbb{R}$.

Ιδιότητα Πληρότητας. *Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.*

Η Ιδιότητα Πληρότητας αποδείχθηκε βάσει του Θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass, η απόδειξη του οποίου ανάγεται, τελικά, στην Ιδιότητα Συνέχειας. Άρα από την Ιδιότητα Συνέχειας συνεπάγεται η Ιδιότητα Πληρότητας. Το αντίστροφο δεν είναι ακριβώς σωστό. Η Ιδιότητα Πληρότητας δεν είναι αρκετή για να αποδειχθεί η Ιδιότητα Συνέχειας. Αν, όμως, υποθέσουμε την Ιδιότητα Πληρότητας *μαζί* με την Αρχιμήδεια Ιδιότητα, τότε μπορούμε να αποδείξουμε την Ιδιότητα Συνέχειας. Με άλλα λόγια: *η Ιδιότητα Συνέχειας είναι ισοδύναμη με την σύζευξη της Ιδιότητας Πληρότητας και της Αρχιμήδειας Ιδιότητας*. Για την απόδειξη δείτε την άσκηση 4.

Ασκήσεις.

1. Αν $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, από την ενότητα 2.5 γνωρίζουμε ότι $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι η (x_n) ακολουθία Cauchy; Αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.

2. Έστω $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$.
   (i) Αποδείξτε ότι $|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{m-n-1}}{m}\right| \leq \frac{1}{n+1}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$.
   (ii) Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.

3. (i) Έστω ακολουθία (x_n), $0 \leq \rho < 1$ και έστω ότι ισχύει τελικά $|x_n - x_{n+1}| \leq c\rho^n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n - x_m| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)| \leq c\frac{\rho^n}{1-\rho}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq n < m$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.
   (ii) Έστω ακολουθία (x_n), $0 \leq \rho < 1$ και έστω ότι ισχύει τελικά $|x_{n+1} - x_{n+2}| \leq \rho|x_n - x_{n+1}|$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.
   (iii) Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{1+x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

4. Έστω ότι ισχύει η Αρχιμήδεια Ιδιότητα και η Ιδιότητα Πληρότητας. Αποδείξτε την Ιδιότητα Supremum.
   Υπόδειξη: Έστω μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο A. Παραλείποντας το αρχικό βήμα, δηλαδή χωρίς να αποδείξετε ότι κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει, να επαναλάβετε όλα τα επιχειρήματα της άσκησης 12 της ενότητας 2.5, παρατηρώντας ότι οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy.

5. Ακολουθώντας (αν θέλετε) την παρακάτω υπόδειξη, αποδείξτε με δεύτερο τρόπο το κριτήριο του Cauchy.
   Υπόδειξη: Έστω ακολουθία Cauchy (x_n). Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα $[a_1, b_1]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_1, b_1]$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ ώστε $b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$ και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_2, b_2]$. Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργήστε διαστήματα $[a_k, b_k]$ $(k \in \mathbb{N})$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να είναι $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$, $b_k - a_k < \frac{1}{k}$ και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_k, b_k]$. Επομένως, υπάρχει x ώστε να ισχύει $x \in [a_k, b_k]$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι, αν $\frac{1}{k} < \varepsilon$, τότε $[a_k, b_k] \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, οπότε ισχύει τελικά $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Συμπεράνατε ότι $x_n \to x$.

6. Ακολουθώντας (αν θέλετε) την παρακάτω υπόδειξη, αποδείξτε με τρίτο τρόπο το κριτήριο του Cauchy.
   Υπόδειξη: Έστω ακολουθία Cauchy (x_n). Θεωρήστε $l_n = \inf\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$ και $u_n = \sup\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $l_n \leq u_n$, $l_n \leq l_{n+1}$ και $u_{n+1} \leq u_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $u_n - l_n \to 0$ και, επομένως, υπάρχει x ώστε $l_n \to x$ και $u_n \to x$. Αποδείξτε ότι ισχύει $l_n \leq x_n \leq u_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $x_n \to x$.

2.9 limsup και liminf ακολουθίας.

Για την ενότητα αυτή καλό θα ήταν να ξαναθυμηθούμε την υποενότητα 2.1.2 και ειδικά τα τελευταία συμπεράσματα.

Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) και, βάσει αυτής της ακολουθίας, ορίζουμε τα εξής δυο σύνολα:

$$U' = \{x \,|\, \text{ισχύει } x_n > x \text{ για άπειρους } n \in \mathbb{N}\}, \qquad U = \{x \,|\, \text{ισχύει τελικά } x_n \leq x\}.$$

Είναι φανερό ότι οι κανόνες που ορίζουν τα σύνολα U' και U είναι ο ένας αντίθετος του άλλου και ότι κάθε αριθμός ικανοποιεί έναν από τους δυο κανόνες. Άρα τα U', U είναι ξένα και η ένωσή τους είναι ίση με το $\mathbb{R}$:

$$U' \cap U = \emptyset, \qquad U' \cup U = \mathbb{R}.$$

Σε λίγο θα δούμε συγκεκριμένα παραδείγματα, αλλά ας εξαγάγουμε πρώτα μερικά γενικά συμπεράσματα.

Κατ' αρχάς έχουμε τις δυο "ακραίες" περιπτώσεις που ένα από τα δυο σύνολα είναι κενό. Δηλαδή, την περίπτωση $U' = \emptyset$, $U = \mathbb{R}$ και την $U' = \mathbb{R}$, $U = \emptyset$. Έχουμε, όμως, και την "ενδιάμεση" περίπτωση που κανένα από τα U', U δεν είναι κενό. Τότε

$$u' < u \qquad (u' \in U', u \in U).$$

Πράγματι, έστω $u' \in U'$, $u \in U$. Τότε ισχύει τελικά $x_n \leq u$. Αν ήταν $u \leq u'$, θα ίσχυε τελικά $x_n \leq u'$, οπότε θα ήταν $u' \in U$. Αυτό είναι άτοπο, οπότε $u' < u$.
Άρα στην περίπτωση που κανένα από τα U', U δεν είναι κενό, για τα δυο αυτά σύνολα ισχύει η υπόθεση της Ιδιότητας Συνέχειας. Άρα υπάρχει $\overline{x}$ ώστε

$$u' \leq \overline{x} \leq u \qquad (u' \in U', u \in U).$$

Στην ίδια περίπτωση, η "εικόνα" συμπληρώνεται ως εξής. Επειδή $U' \cap U = \emptyset$ και $U' \cup U = \mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι

$$U' = (-\infty, \overline{x}], \quad U = (\overline{x}, +\infty) \qquad \text{ή} \qquad U' = (-\infty, \overline{x}), \quad U = [\overline{x}, +\infty).$$

Θα ξαναγυρίσουμε στις δυο αρχικές "ακραίες" περιπτώσεις. Αν $U' = \emptyset$ και $U = \mathbb{R}$, θεωρούμε $\overline{x} = -\infty$, οπότε και πάλι ισχύει $u' \leq \overline{x} \leq u$ για κάθε $u' \in U'$, $u \in U$ και, επίσης,

$$U' = (-\infty, \overline{x}], \quad U = (\overline{x}, +\infty).$$

Πράγματι, το ότι $\overline{x} \leq u$ για κάθε $u \in U$ είναι σαφές. Το ότι $u' \leq \overline{x}$ για κάθε $u' \in U'$ είναι, επίσης, σαφές, διότι δεν υπάρχει κανένας $u' \in U'$ (επειδή $U' = \emptyset$) για τον οποίο να μην ισχύει $u' \leq \overline{x}$. Τέλος, η $U = (\overline{x}, +\infty)$ είναι προφανής, αλλά και η $U' = (-\infty, \overline{x}]$ είναι προφανής, αφού και τα δυο σύνολα είναι κενά.
Αν $U' = \mathbb{R}$ και $U = \emptyset$, θεωρούμε $\overline{x} = +\infty$, οπότε - με τα ίδια επιχειρήματα - πάλι ισχύει $u' \leq \overline{x} \leq u$ για κάθε $u' \in U'$, $u \in U$ και, επίσης,

$$U' = (-\infty, \overline{x}), \quad U = [\overline{x}, +\infty).$$

Ορισμός. Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ με τις παραπάνω ιδιότητες σε σχέση με την ακολουθία (x_n). Αυτό το $\overline{x}$ ονομάζεται **ανώτατο όριο** της (x_n) και συμβολίζεται

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad \limsup x_n \qquad \text{ή} \qquad \overline{\lim}\, x_n\,.$$

Η Πρόταση 2.28 περιγράφει πλήρως τις ιδιότητες του $\overline{\lim}\, x_n$.

Πρόταση 2.28. *Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n).*
(1) $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ αν και μόνο αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
(2) $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ αν και μόνο αν $x_n \to -\infty$.
(3) Για κάθε $x > \overline{\lim}\, x_n$ ισχύει τελικά $x_n < x$. Επίσης, αν ισχύει τελικά $x_n < x$, τότε $x \geq \overline{\lim}\, x_n$.
(4) Για κάθε $x < \overline{\lim}\, x_n$ ισχύει $x_n > x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αν ισχύει $x_n > x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$, τότε $x \leq \overline{\lim}\, x_n$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τα σύνολα U', U από τα οποία ορίστηκε το $\overline{\lim}\, x_n = \overline{x}$.
(1) Έστω $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$. Τότε $U' = \mathbb{R}$ και $U = \emptyset$. Άρα για κάθε x ισχύει $x_n > x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$, οπότε κανένας x δεν είναι άνω φράγμα της (x_n). Άρα η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Αντιστρόφως, έστω ότι η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε για κάθε x ισχύει $x_n > x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Αυτό το είδαμε για τον $x = 2$ (και τον $x = 3$) στο Βήμα 2 στην απόδειξη της Πρότασης

2.25 αλλά το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται για οποιονδήποτε x. Επομένως, $x \in U'$ για κάθε x. Άρα $U' = \mathbb{R}$ και $U = \emptyset$, οπότε $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$.
(2) Έστω $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$. Τότε $U' = \emptyset$ και $U = \mathbb{R}$. Άρα για κάθε $M > 0$ ισχύει $-M - 1 \in U$, οπότε ισχύει τελικά $x_n \leq -M - 1 < -M$. Άρα $x_n \to -\infty$. Αντιστρόφως, έστω $x_n \to -\infty$. Τότε για κάθε x ισχύει τελικά $x_n < -|x| - 1$ και, επομένως, $x_n \leq x$. Άρα $x \in U$ για κάθε x, οπότε $U' = \emptyset$ και $U = \mathbb{R}$. Άρα $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$.
(3) Έστω $x > \overline{\lim}\, x_n$. Θεωρούμε έναν x' ώστε $\overline{\lim}\, x_n < x' < x$. Τότε $x' \in U$, οπότε ισχύει τελικά $x_n \leq x'$. Άρα ισχύει τελικά $x_n < x$. Τώρα, έστω ότι ισχύει τελικά $x_n < x$. Τότε ισχύει τελικά $x_n \leq x$, οπότε $x \in U$. Άρα $x \geq \overline{\lim}\, x_n$.
(4) Έστω $x < \overline{\lim}\, x_n$. Τότε $x \in U'$, οπότε ισχύει $x_n > x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Κατόπιν, έστω ότι ισχύει $x_n > x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Τότε $x \in U'$, οπότε $x \leq \overline{\lim}\, x_n$. □

Παραδείγματα. (1) $\overline{\lim}\, \frac{1}{n} = 0$. Διότι $U' = (-\infty, 0]$ και $U = (0, +\infty)$.
(2) $\overline{\lim}(-\frac{1}{n}) = 0$. Διότι $U' = (-\infty, 0)$ και $U = [0, +\infty)$.
(3) $\overline{\lim}\, 0 = 0$. Διότι $U' = (-\infty, 0)$ και $U = [0, +\infty)$.
(4) $\overline{\lim}\, \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$. Διότι $U' = (-\infty, 0]$ και $U = (0, +\infty)$.
(5) $\overline{\lim}(-1)^{n-1} = 1$. Διότι $U' = (-\infty, 1)$ και $U = [1, +\infty)$.
(6) $\overline{\lim}\, n = +\infty$. Διότι $U' = (-\infty, +\infty)$ και $U = \emptyset$. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι η ακολουθία (n) δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε $\overline{\lim}\, n = +\infty$.
(7) $\overline{\lim}(-n) = -\infty$. Διότι $U' = \emptyset$ και $U = (-\infty, +\infty)$. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι $-n \to -\infty$, οπότε $\overline{\lim}(-n) = -\infty$.
(8) $\overline{\lim}(-1)^{n-1} n = +\infty$. Διότι $U' = (-\infty, +\infty)$ και $U = \emptyset$. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι η ακολουθία $((-1)^{n-1} n)$ δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε $\overline{\lim}(-1)^{n-1} n = +\infty$.
(9) $\overline{\lim}\, \frac{(-1)^{n-1} - 1}{2} n = 0$. Διότι $U' = (-\infty, 0)$ και $U = [0, +\infty)$.
(10) $\overline{\lim}\, \frac{(-1)^{n-1} + 1}{2} n = +\infty$. Διότι $U' = (-\infty, +\infty)$ και $U = \emptyset$. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι η ακολουθία $\big(\frac{(-1)^{n-1}+1}{2} n\big)$ δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε $\overline{\lim}\, \frac{(-1)^{n-1}+1}{2} n = +\infty$.

Τώρα θα περιγράψουμε συνοπτικά τη "συμμετρική" κατάσταση. Ορίζουμε τα εξής σύνολα:

$$L = \{x \,|\, \text{ισχύει τελικά } x_n \geq x\}, \qquad L' = \{x \,|\, \text{ισχύει } x_n < x \text{ για άπειρους } n \in \mathbb{N}\}.$$

Τότε οι κανόνες που ορίζουν τα σύνολα L και L' είναι ο ένας αντίθετος του άλλου και κάθε αριθμός ικανοποιεί έναν από τους δυο κανόνες. Άρα τα L, L' είναι ξένα και η ένωσή τους είναι ίση με το $\mathbb{R}$:

$$L \cap L' = \emptyset, \qquad L \cup L' = \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε την περίπτωση που κανένα από τα L, L' δεν είναι κενό. Τότε

$$l < l' \qquad (l \in L, l' \in L').$$

Πράγματι, έστω $l \in L$, $l' \in L'$. Τότε ισχύει τελικά $x_n \geq l$. Αν ήταν $l' \leq l$, θα ίσχυε τελικά $x_n \geq l'$, οπότε θα ήταν $l' \in L$. Αυτό είναι άτοπο, οπότε $l < l'$.
Άρα στην περίπτωση που κανένα από τα L, L' δεν είναι κενό, για τα δυο αυτά σύνολα ισχύει η υπόθεση της Ιδιότητας Συνέχειας. Άρα υπάρχει $\underline{x}$ ώστε

$$l \leq \underline{x} \leq l' \qquad (l \in L, l' \in L').$$

Στην ίδια περίπτωση, επειδή $L \cap L' = \emptyset$ και $L \cup L' = \mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι

$$L = (-\infty, \underline{x}], \quad L' = (\underline{x}, +\infty) \qquad \text{ή} \qquad L = (-\infty, \underline{x}), \quad L' = [\underline{x}, +\infty).$$

Αν $L = \emptyset$ και $L' = \mathbb{R}$, θεωρούμε $\underline{x} = -\infty$, οπότε και πάλι ισχύει $l \leq \underline{x} \leq l'$ για κάθε $l \in L$, $l' \in L'$ και, επίσης,

$$L = (-\infty, \underline{x}], \quad L' = (\underline{x}, +\infty).$$

Αν $L = \mathbb{R}$ και $L' = \emptyset$, θεωρούμε $\underline{x} = +\infty$, οπότε πάλι ισχύει $l \leq \underline{x} \leq l'$ για κάθε $l \in L$, $l' \in L'$ και, επίσης,

$$L = (-\infty, \underline{x}), \quad L' = [\underline{x}, +\infty).$$

Ορισμός. Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα $\underline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ με τις παραπάνω ιδιότητες σε σχέση με την (x_n). Αυτό το $\underline{x}$ ονομάζεται **κατώτατο όριο** της (x_n) και συμβολίζεται

$$\liminf_{n \to +\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad \liminf x_n \qquad \text{ή} \qquad \underline{\lim}\, x_n\,.$$

Πρόταση 2.29. *Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n).*
(1) $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$ αν και μόνο αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη.
(2) $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $x_n \to +\infty$.
(3) Για κάθε $x < \underline{\lim}\, x_n$ ισχύει τελικά $x_n > x$. Επίσης, αν ισχύει τελικά $x_n > x$, τότε $x \leq \underline{\lim}\, x_n$.
(4) Για κάθε $x > \underline{\lim}\, x_n$ ισχύει $x_n < x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αν ισχύει $x_n < x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$, τότε $x \geq \underline{\lim}\, x_n$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τα σύνολα L, L' από τα οποία ορίστηκε το $\underline{\lim}\, x_n = \underline{x}$.
(1) Έστω $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$. Τότε $L = \emptyset$ και $L' = \mathbb{R}$. Άρα για κάθε x ισχύει $x_n < x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$, οπότε κανένας x δεν είναι κάτω φράγμα της (x_n). Άρα η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη. Αντιστρόφως, έστω ότι η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη. Τότε για κάθε x ισχύει $x_n < x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, $x \in L'$ για κάθε x. Άρα $L = \emptyset$ και $L' = \mathbb{R}$, οπότε $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$.
(2) Έστω $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$. Τότε $L = \mathbb{R}$ και $L' = \emptyset$. Άρα για κάθε $M > 0$ ισχύει $M + 1 \in L$, οπότε ισχύει τελικά $x_n \geq M + 1 > M$. Άρα $x_n \to +\infty$. Αντιστρόφως, έστω $x_n \to +\infty$. Τότε για κάθε x ισχύει τελικά $x_n > |x| + 1$ και, επομένως, $x_n \geq x$. Άρα $x \in L$ για κάθε x, οπότε $L = \mathbb{R}$ και $L' = \emptyset$. Άρα $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$.
(3) Έστω $x < \underline{\lim}\, x_n$. Θεωρούμε έναν x' ώστε $x < x' < \underline{\lim}\, x_n$. Τότε $x' \in L$, οπότε ισχύει τελικά $x_n \geq x'$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > x$. Κατόπιν, έστω ότι ισχύει τελικά $x_n > x$. Τότε ισχύει τελικά $x_n \geq x$, οπότε $x \in L$. Άρα $x \leq \underline{\lim}\, x_n$.
(4) Έστω $x > \underline{\lim}\, x_n$. Τότε $x \in L'$, οπότε ισχύει $x_n < x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Τέλος, έστω ότι ισχύει $x_n < x$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Τότε $x \in L'$, οπότε $x \geq \underline{\lim}\, x_n$. ☐

Παραδείγματα. (1) $\underline{\lim}\, \frac{1}{n} = 0$. Διότι $L = (-\infty, 0]$ και $L' = (0, +\infty)$.
(2) $\underline{\lim}(-\frac{1}{n}) = 0$. Διότι $L = (-\infty, 0)$ και $L' = [0, +\infty)$.
(3) $\underline{\lim}\, 0 = 0$. Διότι $L = (-\infty, 0]$ και $L' = (0, +\infty)$.
(4) $\underline{\lim}\, \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$. Διότι $L = (-\infty, 0)$ και $L' = [0, +\infty)$.
(5) $\underline{\lim}(-1)^{n-1} = -1$. Διότι $L = (-\infty, -1]$ και $L' = (-1, +\infty)$.
(6) $\underline{\lim}\, n = +\infty$. Διότι $L = (-\infty, +\infty)$ και $L' = \emptyset$. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι $n \to +\infty$, οπότε $\underline{\lim}\, n = +\infty$.
(7) $\underline{\lim}(-n) = -\infty$. Διότι $L = \emptyset$ και $L' = (-\infty, +\infty)$. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι η ακολουθία $(-n)$ δεν είναι κάτω φραγμένη, οπότε $\underline{\lim}(-n) = -\infty$.
(8) $\underline{\lim}(-1)^{n-1}n = -\infty$. Διότι $L = \emptyset$ και $L' = (-\infty, +\infty)$. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ δεν είναι κάτω φραγμενη, οπότε $\underline{\lim}(-1)^{n-1}n = -\infty$.
(9) $\underline{\lim}\, \frac{(-1)^{n-1}-1}{2}n = -\infty$. Διότι $L = \emptyset$ και $L' = (-\infty, +\infty)$. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι η ακολουθία $\big(\frac{(-1)^{n-1}-1}{2}n\big)$ δεν είναι κάτω φραγμένη, οπότε $\underline{\lim}\, \frac{(-1)^{n-1}-1}{2}n = -\infty$.
(10) $\underline{\lim}\, \frac{(-1)^{n-1}+1}{2}n = 0$. Διότι $L = (-\infty, 0]$ και $L' = (0, +\infty)$.

Γνωρίζουμε ότι δεν έχουν όλες οι ακολουθίες όριο. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι, σύμφωνα με όσα έχουμε πει σ' αυτήν την ενότητα:

Κάθε ακολουθία έχει ανώτατο όριο και κατώτατο όριο.

Για έναν δεύτερο ισοδύναμο τρόπο ορισμού των $\overline{\lim}$ και $\underline{\lim}$ δείτε την άσκηση 13.

Παρατηρήστε τα *ίδια παραδείγματα* μετά από τις Προτάσεις 2.28 και 2.29. (i) Σε κάθε παράδειγμα το κατώτατο όριο δεν είναι μεγαλύτερο από το ανώτατο όριο. (ii) Σε όποιο παράδειγμα το ανώτατο και το κατώτατο όριο είναι ίσα η ακολουθία έχει όριο και οι τρεις αυτές ποσότητες είναι ίσες. Σε όποιο παράδειγμα το ανώτατο και το κατώτατο όριο δεν είναι ίσα η ακολουθία δεν έχει όριο. (iii) Σε κάθε παράδειγμα υπάρχει υποακολουθία με όριο το ανώτατο όριο και υποακολουθία με όριο το κατώτατο όριο. Όλα αυτά θα τα γενικεύσουμε στις επόμενες προτάσεις.

Πρόταση 2.30. *Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n).*
(1) $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$.
(2) Η (x_n) έχει όριο αν και μόνο αν $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$. Επίσης, στην περίπτωση που η (x_n) έχει όριο, είναι $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$.

Απόδειξη. (1) Έστω $\overline{\lim}\, x_n < \underline{\lim}\, x_n$. Θεωρούμε οποιονδήποτε x ώστε $\overline{\lim}\, x_n < x < \underline{\lim}\, x_n$. Από την $\overline{\lim}\, x_n < x$ και την Πρόταση 2.28 συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n < x$ και από την $x < \underline{\lim}\, x_n$ και την Πρόταση 2.29 συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x < x_n$. Άρα ισχύει τελικά $x_n < x$ και $x < x_n$. Αυτό είναι άτοπο.
(2) Έστω ότι η (x_n) έχει όριο.
Αν $\lim x_n = +\infty$, τότε $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$ και, από το ότι η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, συνεπάγεται $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$.
Αν $\lim x_n = -\infty$, τότε $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ και, από το ότι η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, συνεπάγεται $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$.
Έστω $\lim x_n = x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$. Από τις Προτάσεις 2.28 και 2.29 συνεπάγεται

$$x - \varepsilon \leq \underline{\lim}\, x_n\,, \qquad \overline{\lim}\, x_n \leq x + \varepsilon.$$

Επειδή αυτά ισχύουν για κάθε $\varepsilon > 0$, συνεπάγεται

$$x \leq \underline{\lim}\, x_n\,, \qquad \overline{\lim}\, x_n \leq x.$$

Επειδή $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$, συμπεραίνουμε ότι $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x = \lim x_n$.
Αντιστρόφως, έστω $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.
Αν $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = +\infty$, τότε από την $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$ συνεπάγεται $\lim x_n = +\infty$.
Αν $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = -\infty$, τότε από την $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ συνεπάγεται $\lim x_n = -\infty$.
Τέλος, έστω $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $\overline{\lim}\, x_n < x + \varepsilon$, οπότε, βάσει της Πρότασης 2.28, ισχύει τελικά

$$x_n < x + \varepsilon.$$

Ομοίως, για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $x - \varepsilon < \underline{\lim}\, x_n$, οπότε, βάσει της Πρότασης 2.29, ισχύει τελικά

$$x_n > x - \varepsilon.$$

Άρα ισχύει τελικά $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, οπότε $\lim x_n = x$. □

Ορισμός. Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Το x χαρακτηρίζεται **υποακολουθιακό όριο** της ακολουθίας (x_n) αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) με όριο x : $x_{n_k} \to x$.

Παραδείγματα. (1) Αν η ακολουθία (x_n) έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο, οπότε το όριό της είναι το μοναδικό υποακολουθιακό της όριο. Για παράδειγμα, η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ έχει μοναδικό υποακολουθιακό όριο τον 0 και η ακολουθία $(-n)$ το $-\infty$.

(2) Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ έχει τουλάχιστον δυο υποακολουθιακά όρια, τους ± 1. Σύμφωνα με την άσκηση 7 της ενότητας 2.7, δεν υπάρχει άλλο υποακολουθιακό όριο.

(3) Ομοίως, η ακολουθία $\big(\frac{(-1)^{n-1}+1}{2}n\big)$ έχει μοναδικά υποακολουθιακά όρια τον 0 και το $+\infty$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.26, κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο: αν είναι φραγμένη, τότε έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο το οποίο είναι αριθμός ενώ, αν δεν είναι φραγμένη, τότε ένα τουλάχιστον από τα $\pm\infty$ είναι υποακολουθιακό όριό της.

Αν μια ακολουθία έχει δυο διαφορετικά υποακολουθιακά όρια, δηλαδή έχει δυο υποακολουθίες με διαφορετικά όρια, τότε δεν έχει όριο. Η Πρόταση 2.31 εξασφαλίζει δυο *συγκεκριμένα* υποακολουθιακά όρια μιας οποιασδήποτε ακολουθίας - τα οποία μπορεί να ταυτίζονται.

Πρόταση 2.31. *Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n). Τότε τα στοιχεία $\underline{\lim}\, x_n$ και $\overline{\lim}\, x_n$ του $\overline{\mathbb{R}}$ είναι το ελάχιστο και το μέγιστο, αντιστοίχως, υποακολουθιακό όριο της (x_n).*

Απόδειξη. Για συντομία, έστω $\overline{x} = \overline{\lim}\, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$.
Αν $\overline{x} = +\infty$, τότε η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε έχει το $+\infty$ ως υποακολουθιακό όριο. Άρα το $\overline{x} = +\infty$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Αν $\overline{x} = -\infty$, τότε $x_n \to -\infty$, οπότε κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει όριο $-\infty$. Άρα το $\overline{x} = -\infty$ είναι το μοναδικό - και, επομένως, το μέγιστο - υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Τέλος, έστω $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Έστω u', u ώστε

$$u' < \overline{x} < u.$$

Τότε, βάσει της Πρότασης 2.28, ισχύει τελικά $x_n < u$ και, επίσης, ισχύει $x_n > u'$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, ισχύει

$$u' < x_n < u$$

για άπειρους $n \in \mathbb{N}$.
Άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\overline{x} - 1 < x_{n_1} < \overline{x} + 1$. Κατόπιν, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ ώστε $\overline{x} - \frac{1}{2} < x_{n_2} < \overline{x} + \frac{1}{2}$. Κατόπιν, υπάρχει $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 > n_2$ ώστε $\overline{x} - \frac{1}{3} < x_{n_3} < \overline{x} + \frac{1}{3}$. Συνεχίζοντας επ' άπειρον, ορίζουμε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n), ώστε να ισχύει

$$\overline{x} - \tfrac{1}{k} < x_{n_k} < \overline{x} + \tfrac{1}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα $x_{n_k} \to \overline{x}$, οπότε ο $\overline{x}$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Έστω υποακολουθιακό όριο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ της (x_n). Δηλαδή, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x$. Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι $\overline{x} < x$. Έστω t ώστε

$$\overline{x} < t < x.$$

Επειδή $x_{n_k} \to x$, ισχύει τελικά $t < x_{n_k}$. Άρα ισχύει $t < x_n$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Όμως, επειδή $\overline{x} < t$, ισχύει τελικά $x_n < t$. Καταλήγουμε σε αντίφαση, οπότε $x \leq \overline{x}$. Άρα ο $\overline{x}$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Ομοίως, το $\underline{\lim}\, x_n$ είναι το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n). □

Πρόταση 2.32. *Έστω οποιεσδήποτε ακολουθίες (x_n), (y_n). Αν ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$, τότε $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$ και $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$.*

Απόδειξη. Έστω $u > \overline{\lim}\, y_n$. Από την Πρόταση 2.28 συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $y_n < u$. Άρα ισχύει τελικά $x_n < u$, οπότε, πάλι από την Πρόταση 2.28, είναι $u \geq \overline{\lim}\, x_n$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $u > \overline{\lim}\, y_n$, συμπεραίνουμε ότι $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$. □

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε τις αποδείξεις των Προτάσεων 2.31 και 2.32.

2. Έστω $a < b < c$ και οι ακολουθίες $(a, b, a, b, a, b, a, b, \dots)$ και $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots)$. Βρείτε τα $\overline{\lim}$ και $\underline{\lim}$ των ακολουθιών αυτών καθώς και όλα τα υποακολουθιακά όριά τους.

3. Βρείτε, μέσω των ορισμών τους, τα $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ των ακολουθιών: $(\frac{n+1}{n})$, $(\frac{n-1}{n})$, (2^n), (2^{-n}), $((-2)^n)$, $(2^{(-1)^{n-1}n})$, $((-1)^{n-1} + \frac{1}{n})$, $((-1)^{n-1}(1 + \frac{1}{n}))$, $((-1)^{n-1}(1 - \frac{1}{n}))$.

4. (i) Αποδείξτε ότι, αν δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή, τότε $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n)$ και $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.
(ii) Αποδείξτε ότι, αν ισχύει τελικά $x_n, y_n > 0$ και δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή, τότε $\underline{\lim}\, x_n\, \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\, x_n y_n$ και $\overline{\lim}\, x_n y_n \leq \overline{\lim}\, x_n\, \overline{\lim}\, y_n$.
(iii) Αποδείξτε ότι, αν $t > 0$, τότε $\overline{\lim}\, t x_n = t\, \overline{\lim}\, x_n$ και $\underline{\lim}\, t x_n = t\, \underline{\lim}\, x_n$. Τι γίνεται αν $t < 0$;

5. (i) Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει το $\lim y_n$ και δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές, τότε $\overline{\lim}(x_n + y_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim y_n$ και $\underline{\lim}(x_n + y_n) = \underline{\lim}\, x_n + \lim y_n$.
(ii) Αποδείξτε ότι, αν ισχύει τελικά $x_n, y_n > 0$, υπάρχει το $\lim y_n$ και δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές, τότε $\overline{\lim}\, x_n y_n = \overline{\lim}\, x_n \lim y_n$ και $\underline{\lim}\, x_n y_n = \underline{\lim}\, x_n \lim y_n$.

6. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι οι (x_n), (x_{n+m}) έχουν τα ίδια υποακολουθιακά όρια.

7. (i) Θεωρήστε την ακολουθία $(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 0, \dots)$ και αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της είναι το $[0, 1]$.
(ii) Υπάρχει ακολουθία (x_n) με σύνολο υποακολουθιακών ορίων το $(0, 1)$ ή το $(0, 1]$ ή το $[0, 1)$;

8. (i) Αποδείξτε ότι ο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας (x_n) αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $x_n \in N_x(\varepsilon)$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Έστω $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της ακολουθίας (x_n). Αν (y_n) είναι οποιαδήποτε ακολουθία στο X και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $y \in X$.
(iii) Έστω $a < b < c \leq d$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) με σύνολο υποακολουθιακών ορίων το $[a, b) \cup [c, d]$ ή το $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.

9. (i) Αποδείξτε το **Θεώρημα του Cesáro**: *Αν $x_n \to x$, τότε $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to x$.*
Υπόδειξη: Γνωρίζουμε ότι υπάρχει M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \frac{x_1+\cdots+x_{n_0-1}}{n} + \frac{x_{n_0}+\cdots+x_n}{n} \leq \frac{(n_0-1)M}{n} + \frac{(n-n_0+1)(x+\varepsilon)}{n} \leq \frac{(n_0-1)M}{n} + x + \varepsilon$ και, ομοίως, $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq -\frac{(n_0-1)M}{n} + x - \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Βάσει της Πρότασης 2.32, αποδείξτε ότι $x - \varepsilon \leq \underline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ και $\overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq x + \varepsilon$. Αποδείξτε ότι $x \leq \underline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ και $\overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq x$. Συμπεράνατε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to x$.
(ii) Αν $x_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to 0$. Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος του Cesáro.
(iii) Αποδείξτε ότι, αν $x_n \to \pm\infty$, τότε $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to \pm\infty$, αντιστοίχως.
(iv) Αν $x_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x \in [0, +\infty]$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \to x$.

10. Ακολουθώντας (αν θέλετε) την παρακάτω υπόδειξη, αποδείξτε με τέταρτο τρόπο το κριτήριο του Cauchy.
Υπόδειξη: Έστω ακολουθία Cauchy (x_n). Έστω $\underline{x} = \underline{\lim}\, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{x} = \overline{\lim}\, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Η (x_n) είναι φραγμένη, οπότε $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$. Έστω $\underline{x} < \overline{x}$. Θεωρήστε l, u ώστε $\underline{x} < l < u < \overline{x}$. Τότε ισχύει $x_m < l$ για άπειρους $m \in \mathbb{N}$ και $x_n > u$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Άρα ισχύει $x_n - x_m > u - l$ για άπειρους $n, m \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι αυτό είναι άτοπο. Συμπεράνατε ότι $\underline{x} = \overline{x}$ και, επομένως, ότι η (x_n) συγκλίνει.

11. Δώστε δεύτερη λύση της άσκησης 14 της ενότητας 2.7.

12. Έστω ακολουθία (x_n).
(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $u_n = \sup\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$. (α) Αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, αποδείξτε ότι $u_n = +\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (β) Αν η (x_n) είναι άνω φραγμένη, αποδείξτε ότι $u_n \in \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι ισχύει $u_{n+1} \leq u_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η (u_n) έχει όριο στο $[-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $u_n \to \overline{\lim}\, x_n$.
(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $l_n = \inf\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$. (α) Αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, αποδείξτε ότι $l_n = -\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (β) Αν η (x_n) είναι κάτω φραγμένη, αποδείξτε ότι $l_n \in \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι ισχύει $l_n \leq l_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η (l_n) έχει όριο στο $(-\infty, +\infty]$. Αποδείξτε ότι $l_n \to \underline{\lim}\, x_n$.
(iii) Αποδείξτε ότι $l_n \leq u_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(iv) Υποθέτουμε ότι δεν έχουμε ορίσει τα $\overline{\lim}\, x_n$ και $\underline{\lim}\, x_n$. Βάσει του (i), ορίζουμε $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ στην περίπτωση (α) και $\overline{\lim}\, x_n = \lim u_n$ στην περίπτωση (β). Ομοίως, βάσει του (ii), ορίζουμε $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$ στην περίπτωση (α) και $\underline{\lim}\, x_n = \lim l_n$ στην περίπτωση (β).
Αποδείξτε τις Προτάσεις 2.28 - 2.32 χρησιμοποιώντας αυτούς τους ορισμούς των $\overline{\lim}\, x_n$ και $\underline{\lim}\, x_n$.

13. (i) Έστω $s, t \in \mathbb{Q}$ ώστε $s < x < t$. Τότε ισχύει $(1 + \frac{s}{n})^n < (1 + \frac{x}{n})^n < (1 + \frac{t}{n})^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 16(i) της ενότητας 2.7 και την Πρόταση 2.32, αποδείξτε ότι $e^s \leq \underline{\lim}(1 + \frac{x}{n})^n \leq \overline{\lim}(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^t$.
(ii) Ανατρέχοντας στον ορισμό του e^x, αποδείξτε ότι $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$ για κάθε άρρητο x.

14. Έστω ακολουθία (x_n) ώστε $x_{n+1} - x_n \to 0$. Ένα παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας χωρίς όριο είναι στην άσκηση 8, ένα παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας με όριο $+\infty$ είναι η ακολουθία με n-οστό όρο $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, και ένα παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας που συγκλίνει είναι η ακολουθία με n-οστό όρο $1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.
(i) Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι ολόκληρο το διάστημα $[\underline{\lim}\, x_n, \overline{\lim}\, x_n] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.
(ii) Βρείτε ακολουθία (x_n) ώστε $x_{n+1} - x_n \to 0$ και ώστε το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της να είναι το $\overline{\mathbb{R}}$.

Κεφάλαιο 3

Όρια συναρτήσεων.

3.1 Περιοχές και σημεία συσσώρευσης.

3.1.1 Περιοχές. Σημεία συσσώρευσης.

Ας ξαναθυμηθούμε από την ενότητα 2.3 τις περιοχές των σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, συμβολίζουμε $N_\xi(\delta) = (\xi - \delta, \xi + \delta)$. Αν $\xi = \pm\infty$, $\delta > 0$, συμβολίζουμε $N_{+\infty}(\delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty]$ και $N_{-\infty}(\delta) = [-\infty, -\frac{1}{\delta})$. Σε κάθε περίπτωση, το σύνολο/διάστημα $N_\xi(\delta)$ ονομάζεται δ-*περιοχή* του $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ορισμός. Μια παραλλαγή της περιοχής είναι η **τρυπημένη περιοχή**

$$N_\xi^*(\delta) = N_\xi(\delta) \setminus \{\xi\}.$$

Δηλαδή, αν $\xi \in \mathbb{R}$, τότε

$$N_\xi^*(\delta) = (\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus \{\xi\} = (\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta),$$

αν $\xi = +\infty$, τότε

$$N_{+\infty}^*(\delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty] \setminus \{+\infty\} = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty)$$

και, αν $\xi = -\infty$, τότε

$$N_{-\infty}^*(\delta) = [-\infty, -\tfrac{1}{\delta}) \setminus \{-\infty\} = (-\infty, -\tfrac{1}{\delta}).$$

Ορισμός. Το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ χαρακτηρίζεται **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου A αν για κάθε $\delta > 0$ είναι $A \cap N_\xi^*(\delta) \neq \emptyset$ ή, ισοδύναμα, αν το A τέμνει κάθε τρυπημένη περιοχή του ξ.

Πιο συγκεκριμένα: (i) ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $\delta > 0$ είναι $A \cap ((\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)) \neq \emptyset$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$ ώστε $0 < |x - \xi| < \delta$, (ii) το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$ είναι $A \cap (N, +\infty) \neq \emptyset$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$ ώστε $x > N$ και (iii) το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$ είναι $A \cap (-\infty, -N) \neq \emptyset$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$ ώστε $x < -N$.

Με άλλα λόγια, το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ *δεν* είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A \cap N_\xi^*(\delta) = \emptyset$. Πιο συγκεκριμένα: (i) ο $\xi \in \mathbb{R}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A \cap ((\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)) = \emptyset$, δηλαδή το μοναδικό *πιθανό* σημείο του A στο διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ είναι ο ξ, (ii) το $+\infty$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A αν υπάρχει $N > 0$ ώστε $A \cap (N, +\infty) = \emptyset$ και (iii) το $-\infty$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A αν υπάρχει $N > 0$ ώστε $A \cap (-\infty, -N) = \emptyset$.

Παρατηρήστε ότι, αν $\xi \notin A$, τότε $A \cap N_\xi^*(\delta) = A \cap N_\xi(\delta)$, οπότε το να υπάρχει $x \in A \cap N_\xi^*(\delta)$ είναι ισοδύναμο με το να υπάρχει $x \in A \cap N_\xi(\delta)$. Αν, όμως, $\xi \in A$ - κάτι που μπορεί να συμβαίνει μόνο αν $\xi \in \mathbb{R}$ - τότε το $A \cap N_\xi(\delta)$ έχει ακριβώς ένα επιπλέον στοιχείο από το $A \cap N_\xi^*(\delta)$, τον ξ, οπότε το να υπάρχει $x \in A \cap N_\xi^*(\delta)$ είναι ισοδύναμο με το να υπάρχει $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ ώστε $x \neq \xi$.

Μετά από αυτά, μπορούμε να πούμε ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το ξ σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του ξ. Ή, αλλιώς, ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το ξ τα οποία πλησιάζουν απεριόριστα το ξ.

Πρόταση 3.1. *(1) Το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν το A δεν είναι άνω φραγμένο.*
(2) Το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο.

Απόδειξη. (1) Το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $x \in A$, $x > N$ αν και μόνο αν κανένας $N > 0$ δεν είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν το A δεν είναι άνω φραγμένο.
(2) Ομοίως. □

Παραδείγματα. Στην κατανόηση των παρακάτω παραδειγμάτων θα βοηθήσει η προσεκτική σχεδίαση των διαφόρων συνόλων και περιοχών.
(1) Έστω $a < b$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα $(a,b), (a,b], [a,b)$, $[a,b]$ είναι το $[a,b]$.
Ας βρούμε τα σημεία συσσώρευσης του $[a,b)$. Τα $\pm\infty$ δεν είναι σημεία συσσώρευσης, διότι το $[a,b)$ είναι φραγμένο. Αν $\xi < a$, παίρνουμε

$$\delta = a - \xi$$

και τότε $[a,b) \cap N_\xi^*(\delta) = \emptyset$. Ομοίως, αν $\xi > b$, παίρνουμε

$$\delta = \xi - b$$

και τότε $[a,b) \cap N_\xi^*(\delta) = \emptyset$. Άρα, σ' αυτές τις περιπτώσεις, ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $[a,b)$. Αν $\xi \in [a,b]$, τότε για κάθε $\delta > 0$ είναι $[a,b) \cap N_\xi^*(\delta) \neq \emptyset$. Ειδικώτερα, αν $a \leq \xi < b$, τότε το $[a,b) \cap N_\xi^*(\delta)$ περιέχει το διάστημα

$$(\xi, \min\{\xi + \delta, b\})$$

και, αν $a < \xi \leq b$, τότε το $[a,b) \cap N_\xi^*(\delta)$ περιέχει το διάστημα

$$(\max\{\xi - \delta, a\}, \xi).$$

Άρα κάθε $\xi \in [a,b]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $[a,b)$.
Παρατηρήστε ότι τα άκρα a, b είναι σημεία συσσώρευσης και των τεσσάρων διαστημάτων (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$.
(2) Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ είναι το $[a,+\infty]$. Ομοίως, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ είναι το $[-\infty,b]$. Τέλος, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $(-\infty,+\infty)$ είναι το $[-\infty,+\infty]$.
(3) Έστω $a < b$. Το σύνολο $\{a,b\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.
Το $\{a,b\}$ είναι φραγμένο, οπότε τα $\pm\infty$ δεν είναι σημεία συσσώρευσής του. Αν $\xi < a$ ή $\xi > b$ ή $a < \xi < b$, παίρνουμε, αντιστοίχως,

$$\delta = a - \xi \quad \text{ή} \quad \delta = \xi - b \quad \text{ή} \quad \delta = \min\{\xi - a, b - \xi\}.$$

Τότε, σε κάθε περίπτωση, είναι $\{a,b\}\cap N_\xi^*(\delta)=\emptyset$. Τέλος, αν $\xi=a$ ή $\xi=b$, παίρνουμε $\delta=b-a$ και τότε πάλι $\{a,b\}\cap N_\xi^*(\delta)=\emptyset$. Άρα κανένας ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $\{a,b\}$.

(4) Αν $a<b<c$, τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $[a,b)\cup\{c\}$ είναι το $[a,b]$.

(5) Το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$ είναι το $+\infty$.

Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε το $+\infty$ *είναι* σημείο συσσώρευσής του. Το $-\infty$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$ διότι το $\mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένο. Αν $\xi\in\mathbb{N}$, θεωρούμε $\delta=1$ και τότε $\mathbb{N}\cap N_\xi^*(\delta)=\emptyset$. Αν $\xi<1$, παίρνουμε $\delta=1-\xi$ και τότε $\mathbb{N}\cap N_\xi^*(\delta)=\emptyset$. Αν $\xi>1$ και $\xi\notin\mathbb{N}$, τότε ο ξ είναι ανάμεσα στους φυσικούς $[\xi],[\xi]+1$, οπότε παίρνουμε

$$\delta=\min\{\xi-[\xi],[\xi]+1-\xi\}$$

και τότε $\mathbb{N}\cap N_\xi^*(\delta)=\emptyset$. Άρα κανένας ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$.

(6) Ο 0 είναι το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $A=\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$.

Για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n}<\delta$, οπότε $\frac{1}{n}\in A\cap N_0^*(\delta)$. Άρα ο 0 *είναι* σημείο συσσώρευσης του A. Τα $\pm\infty$ δεν είναι σημεία συσσώρευσης του A διότι το A είναι φραγμένο. Αν $\xi<0$, θεωρούμε $\delta=|\xi|$ και τότε $A\cap N_\xi^*(\delta)=\emptyset$. Αν $\xi>1$, θεωρούμε $\delta=\xi-1$ και τότε $A\cap N_\xi^*(\delta)=\emptyset$. Αν $\xi\in(0,1]\setminus A$, τότε είναι $\frac{1}{\xi}\geq 1$ και $\frac{1}{\xi}\notin\mathbb{N}$, οπότε υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε $n<\frac{1}{\xi}<n+1$. Τότε $\frac{1}{n+1}<\xi<\frac{1}{n}$ και θεωρούμε

$$\delta=\min\{\xi-\tfrac{1}{n+1},\tfrac{1}{n}-\xi\}.$$

Με αυτόν τον δ έχουμε $A\cap N_\xi^*(\delta)=\emptyset$. Τέλος, έστω $\xi\in A$. Αν $\xi=1$, τότε με $\delta=\frac{1}{2}$ έχουμε $A\cap N_1^*(\delta)=\emptyset$. Αν $\xi=\frac{1}{n}$, όπου $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, τότε θεωρούμε

$$\delta=\min\{\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1},\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n}\}=\tfrac{1}{n(n+1)}$$

και τότε $A\cap N_{\frac{1}{n}}^*(\delta)=\emptyset$. Άρα κανένας $\xi\neq 0$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Το Θεώρημα 3.1 δίνει έναν χαρακτηρισμό της έννοιας του σημείου συσσώρευσης βασισμένο στην έννοια του ορίου ακολουθίας. Προηγουμένως, είχαμε πει ότι το $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το ξ τα οποία πλησιάζουν απεριόριστα το ξ. Το Θεώρημα 3.1 λέει ότι από τα σημεία του A που είναι διαφορετικά από το ξ και πλησιάζουν απεριόριστα το ξ μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία οι όροι της οποίας είναι διαφορετικοί από το ξ και πλησιάζουν απεριόριστα το ξ όταν ο δείκτης τους γίνεται κατάλληλα μεγάλος.

Θεώρημα 3.1. *Έστω $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$. Το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n\to\xi$ και ώστε να ισχύει $x_n\neq\xi$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ είναι $A\cap N_\xi^*(\frac{1}{n})\neq\emptyset$, οπότε υπάρχει

$$x_n\in A\cap N_\xi^*(\tfrac{1}{n}).$$

Άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A για την οποία ισχύει $x_n\neq\xi$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επίσης, έστω $\delta>0$. Τότε ισχύει τελικά $\frac{1}{n}\leq\delta$, οπότε ισχύει τελικά $N_\xi(\frac{1}{n})\subseteq N_\xi(\delta)$. Άρα ισχύει τελικά

$$x_n\in N_\xi(\delta)$$

και, επομένως, $x_n\to\xi$.

Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n\to\xi$ και ώστε να ισχύει $x_n\neq\xi$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επειδή $x_n\to\xi$, για κάθε $\delta>0$ ισχύει τελικά $x_n\in N_\xi(\delta)$ και, επειδή ισχύει $x_n\neq\xi$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ισχύει τελικά $x_n\in N_\xi^*(\delta)$. Άρα για κάθε $\delta>0$ είναι $A\cap N_\xi^*(\delta)\neq\emptyset$, οπότε το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. □

Παραδείγματα. (1) Έστω, πάλι, το $[a,b)$. Αν $a \le \xi < b$, θεωρούμε την ακολουθία $(\xi + \frac{b-\xi}{2n})$ στο $[a,b)$ με όριο ξ της οποίας όλοι οι όροι είναι $\neq \xi$. Ομοίως, αν $a < \xi \le b$, θεωρούμε την ακολουθία $(\xi - \frac{\xi-a}{n})$ στο $[a,b)$ με όριο ξ της οποίας όλοι οι όροι είναι $\neq \xi$. Άρα κάθε $\xi \in [a,b]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $[a,b)$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι κανένα $\xi \notin [a,b]$ δεν είναι όριο ακολουθίας στο $[a,b)$ και, επομένως, ούτε σημείο συσσώρευσης του $[a,b)$.

(2) Αν $a < b$, το $\{a,b\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης. Ο b δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $\{a,b\}$, διότι η μοναδική ακολουθία στο $\{a,b\}$ με όλους τους όρους της $\neq b$ είναι η σταθερή (a), η οποία, όμως, έχει όριο a και όχι b. Ομοίως, ο a δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $\{a,b\}$. Τέλος, έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{a,b\}$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του $\{a,b\}$. Τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $\{a,b\}$ ώστε $x_n \to \xi$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η (x_n) έχει άπειρους όρους ίσους με a και άπειρους όρους ίσους με b, τότε η (x_n) δεν έχει όριο. Άρα ισχύει τελικά $x_n = a$ ή ισχύει τελικά $x_n = b$ και, επομένως, $x_n \to a$ ή $x_n \to b$. Άτοπο.

(3) Το $+\infty$ είναι το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$. Η ακολουθία (n) στο $\mathbb{N}$ έχει όριο $+\infty$, οπότε το $+\infty$ *είναι* σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$. Τώρα, έστω $\xi \in [-\infty,+\infty)$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{N}$ ώστε $x_n \to \xi$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή ισχύει $x_n \ge 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $\xi \neq -\infty$. Επομένως, $\xi \in \mathbb{R}$. Επειδή $x_n \to \xi$, ισχύει τελικά $x_n \in (\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2})$. Όμως, το ανοικτό διάστημα $(\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2})$ έχει μήκος 1, οπότε περιέχει το πολύ έναν φυσικό. Άρα η (x_n) είναι τελικά σταθερή. Επειδή $x_n \to \xi$, ισχύει τελικά $x_n = \xi$. Άτοπο.

(4) Ο 0 είναι το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ είναι στο A, έχει όριο 0 και όλοι οι όροι της είναι $\neq 0$. Άρα ο 0 *είναι* σημείο συσσώρευσης του A. Τώρα, έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, $\xi \neq 0$ ο οποίος είναι σημείο συσσώρευσης του A. Τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\xi \neq 0$, συνεπάγεται $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{\xi}$. Επίσης, ισχύει $\frac{1}{x_n} \in \mathbb{N}$ και $\frac{1}{x_n} \neq \frac{1}{\xi}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα ο $\frac{1}{\xi}$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$, οπότε, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, $\frac{1}{\xi} = +\infty$. Άτοπο.

Ορισμός. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, συμβολίζουμε

$$N_\xi^-(\delta) = (\xi - \delta, \xi), \qquad N_\xi^+(\delta) = (\xi, \xi + \delta)$$

και αυτά τα διαστήματα τα ονομάζουμε **αριστερή δ-περιοχή** και **δεξιά δ-περιοχή** του ξ, αντιστοίχως.

Παρατηρήστε τις απλές σχέσεις:

$$N_\xi^-(\delta) \cup N_\xi^+(\delta) = N_\xi^*(\delta), \qquad N_\xi^-(\delta) \cap N_\xi^+(\delta) = \emptyset.$$

Ορισμός. Ο ξ χαρακτηρίζεται **από αριστερά του σημείο συσσώρευσης** του συνόλου A αν για κάθε $\delta > 0$ είναι $A \cap N_\xi^-(\delta) \neq \emptyset$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$ ώστε $\xi - \delta < x < \xi$.
Ο ξ χαρακτηρίζεται **από δεξιά του σημείο συσσώρευσης** του συνόλου A αν για κάθε $\delta > 0$ είναι $A \cap N_\xi^+(\delta) \neq \emptyset$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$ ώστε $\xi < x < \xi + \delta$.

Μπορούμε να πούμε ότι ο ξ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν υπάρχουν σημεία του A τα οποία πλησιάζουν απεριόριστα τον ξ και βρίσκονται όλα στην δεξιά (αριστερή) μεριά του ξ.

Θα αποδείξουμε το περίπου προφανές:

Ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν είναι είτε από αριστερά του είτε από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.

Πράγματι, έστω ότι ο ξ δεν είναι από αριστερά του ούτε από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Επομένως, υπάρχει $\delta_0' > 0$ ώστε $A \cap N_\xi^-(\delta_0') = \emptyset$ και υπάρχει $\delta_0'' > 0$ ώστε $A \cap N_\xi^+(\delta_0'') = \emptyset$. Θεωρούμε τον

$$\delta_0 = \min\{\delta_0', \delta_0''\},$$

οπότε $\delta_0 \le \delta_0'$ και $\delta_0 \le \delta_0''$. Επειδή $A \cap N_\xi^-(\delta_0) \subseteq A \cap N_\xi^-(\delta_0')$, συνεπάγεται $A \cap N_\xi^-(\delta_0) = \emptyset$ και, επειδή $A \cap N_\xi^+(\delta_0) \subseteq A \cap N_\xi^+(\delta_0'')$, συνεπάγεται $A \cap N_\xi^+(\delta_0) = \emptyset$. Άρα

$$A \cap N_\xi^*(\delta_0) = (A \cap N_\xi^-(\delta_0)) \cup (A \cap N_\xi^+(\delta_0)) = \emptyset$$

και, επομένως, ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A.
Αντιστρόφως, έστω ότι ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε για κάθε $\delta > 0$ είναι $A \cap N_\xi^+(\delta) \neq \emptyset$ και, επειδή, $A \cap N_\xi^+(\delta) \subseteq A \cap N_\xi^*(\delta)$, συνεπάγεται $A \cap N_\xi^*(\delta) \neq \emptyset$. Άρα ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Ομοίως, αν ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A, συνεπάγεται ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Παραδείγματα. (1) Κάθε ξ στο $(a, b]$ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του (a, b) και κάθε ξ στο $[a, b)$ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του (a, b). Άρα κάθε ξ στο (a, b) είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του (a, b).
(2) Ο b είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $(a, b) \cup (b, c)$, είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του (a, b) και είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του (b, c).
(3) Ο 0 είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του $\{-\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ και είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $\{-\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Το Θεώρημα 3.2 χαρακτηρίζει τις έννοιες των "από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης" βάσει της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

Θεώρημα 3.2. *Έστω $\xi \in \mathbb{R}$.*
(1) Ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n > \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(2) Ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n < \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in A$ ώστε

$$\xi < x_n < \xi + \tfrac{1}{n}\,.$$

Άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n > \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n > \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $x_n \to \xi$, για κάθε $\delta > 0$ ισχύει τελικά

$$\xi - \delta < x_n < \xi + \delta$$

και, επειδή ισχύει $x_n > \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει τελικά

$$\xi < x_n < \xi + \delta.$$

Άρα για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\xi < x < \xi + \delta$ και, επομένως, ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.
(2) Ομοίως. □

3.1.2 "Κοντά στο ξ". "Σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ".

Έστω μια ιδιότητα η οποία ισχύει ή όχι ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή x σε κάποιο σύνολο A. Με άλλα λόγια, η συγκεκριμένη ιδιότητα *έχει νόημα* στο σύνολο A και για κάποιους $x \in A$ η ιδιότητα ισχύει ενώ για τους υπόλοιπους $x \in A$ η ιδιότητα δεν ισχύει. Για παράδειγμα, μια τέτοια ιδιότητα μπορεί να είναι η $f(x) > 0$ ή η $f(x) \neq -7$, όπου $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια συγκεκριμένη συνάρτηση. Σ' αυτήν την περίπτωση η ιδιότητα έχει νόημα ακριβώς για τους x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού A της f. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η $x_n < x_{n+1}$, όπου (x_n) είναι μια συγκεκριμένη ακολουθία. Σ' αυτήν την περίπτωση η ιδιότητα έχει νόημα ακριβώς για τους n που ανήκουν στο $\mathbb{N}$, δηλαδή στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Παράδειγμα. Η ιδιότητα $x \leq \sqrt{x}$ έχει νόημα στο διάστημα $[0, +\infty)$, ισχύει στο $[0, 1]$ και δεν ισχύει στο $(1, +\infty)$.

Ορισμός. Έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και μια ιδιότητα που έχει νόημα στο σύνολο A. Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει κοντά στο** ξ αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap N_\xi^*(\delta_0)$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $x \in N_\xi^*(\delta_0)$ στον οποίο έχει νόημα.

Πιο συγκεκριμένα: (i) αν $\xi \in \mathbb{R}$, η ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap ((\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0))$, (ii) η ιδιότητα ισχύει κοντά στο $+\infty$ αν το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap (N_0, +\infty)$, (iii) η ιδιότητα ισχύει κοντά στο $-\infty$ αν το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap (-\infty, -N_0)$.

Παραδείγματα. (1) Η ιδιότητα $x \leq \sqrt{x}$ ισχύει κοντά στον 0, διότι ο 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $[0, +\infty)$ και η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in (0, 1) = [0, +\infty) \cap N_0^*(1)$.
(2) Η ιδιότητα $\frac{1}{\sqrt{x}} > 7$ έχει νόημα στο $(0, +\infty)$ και ισχύει στο $(0, \frac{1}{49})$. Δεν είναι σωστό ότι η ιδιότητα ισχύει κοντά στον -1, αφού ο -1 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $(0, +\infty)$. Η ιδιότητα ισχύει κοντά στον 0 διότι ο 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $(0, +\infty)$ και η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in (0, +\infty) \cap N_0^*(\frac{1}{49})$. Δεν είναι σωστό ότι η ιδιότητα ισχύει κοντά στο $+\infty$ διότι, αν και το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $(0, +\infty)$, δεν υπάρχει κανένας $N_0 > 0$ ώστε να ισχύει η ιδιότητα για κάθε $x \in (0, +\infty) \cap (N_0, +\infty) = (N_0, +\infty)$.

Ορισμός. Έστω, πάλι, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και μια ιδιότητα που έχει νόημα στο σύνολο A. Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο** ξ αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap N_\xi^*(\delta)$ ή, ισοδύναμα, για τουλάχιστον έναν $x \in N_\xi^*(\delta)$ για τον οποίο έχει νόημα.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

Αν μια ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ, τότε αυτή ισχύει και σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

Πράγματι, έστω ξ σημείο συσσώρευσης του A και $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap N_\xi^*(\delta_0)$. Έστω $\delta > 0$. Θεωρούμε

$$\delta' = \min\{\delta, \delta_0\} > 0.$$

Τότε $\delta' \leq \delta_0$, οπότε $N_\xi^*(\delta') \subseteq N_\xi^*(\delta_0)$ και, επομένως, η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in A \cap N_\xi^*(\delta')$. Επειδή το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, υπάρχει $x' \in A \cap N_\xi^*(\delta')$ και, όπως μόλις είδαμε, η ιδιότητα ισχύει για τον x'. Τέλος, $\delta' \leq \delta$, οπότε $A \cap N_\xi^*(\delta') \subseteq A \cap N_\xi^*(\delta)$ και, επομένως, $x' \in A \cap N_\xi^*(\delta)$. Άρα για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap N_\xi^*(\delta)$ (τον x'), οπότε η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.

Παράδειγμα. Έστω η ιδιότητα $(-1)^{[x]} > 0$ η οποία έχει νόημα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η παράσταση $(-1)^{[x]}$ είναι σταθερή $(-1)^n$ στο $[n, n+1)$. Άρα το σύνολο στο οποίο η ιδιότητα ισχύει είναι το $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k, 2k+1)$ και το σύνολο στο οποίο η ιδιότητα δεν ισχύει είναι το $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k-1, 2k)$. Επομένως, η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ αλλά δεν είναι σωστό ότι ισχύει κοντά στο $+\infty$.

Έστω δυο ιδιότητες οι οποίες έχουν νόημα στο ίδιο σύνολο A αλλά ισχύουν σε, πιθανώς, διαφορετικά υποσύνολα του A και έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.

Αν η μια ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ και μια άλλη ιδιότητα ισχύει, επίσης, κοντά στο ξ, τότε ισχύουν και οι δυο, ταυτόχρονα, ιδιότητες κοντά στο ξ.

Πράγματι, υπάρχει ${\delta_0}' > 0$ ώστε η πρώτη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap N_\xi^*({\delta_0}')$ και υπάρχει ${\delta_0}'' > 0$ ώστε η δεύτερη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap N_\xi^*({\delta_0}'')$. Θεωρούμε

$$\delta_0 = \min\{{\delta_0}', {\delta_0}''\} > 0,$$

οπότε $\delta_0 \leq {\delta_0}'$ και $\delta_0 \leq {\delta_0}''$. Άρα $N_\xi^*(\delta_0) \subseteq N_\xi^*({\delta_0}')$ και $N_\xi^*(\delta_0) \subseteq N_\xi^*({\delta_0}'')$. Άρα ισχύουν και οι δυο ιδιότητες για κάθε $x \in A \cap N_\xi^*(\delta_0)$.

Το προηγούμενο συμπέρασμα ισχύει και για τρεις ή τέσσερις ή και για οποιονδήποτε *πεπερασμένο* αριθμό ιδιοτήτων.

Έστω, τώρα, μια ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο σύνολο A, οπότε και η αντίθετη ιδιότητα έχει νόημα στο ίδιο σύνολο A. Έστω, επίσης, ένα $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Τώρα, η ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ αν και μόνο αν υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap N_\xi^*(\delta_0)$ αν και μόνο αν υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η αντίθετη ιδιότητα να μην ισχύει για κανένα $x \in A \cap N_\xi^*(\delta_0)$ αν και μόνο αν είναι λάθος ότι η αντίθετη ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι

Μια ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ αν και μόνο αν είναι λάθος ότι η αντίθετη ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

Αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε και ως εξής:

Μια ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ αν και μόνο αν είναι λάθος ότι η αντίθετη ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ.

Στο επόμενο σημαντικό παράδειγμα θα δούμε μια σύνδεση ανάμεσα στις έννοιες της υποενότητας 2.1.2 και στις έννοιες αυτής της υποενότητας. Μέσω αυτής θα δούμε λίγο αργότερα τη σχέση ανάμεσα στις έννοιες του ορίου συνάρτησης και του ορίου ακολουθίας.

Παράδειγμα. Έστω μια ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο $\mathbb{N}$ - για παράδειγμα, μια ιδιότητα που μπορεί να έχουν ή όχι οι όροι μιας ακολουθίας. Γνωρίζουμε ότι το $+\infty$ είναι (το μοναδικό) σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$.

Έστω ότι η ιδιότητα ισχύει τελικά. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα υπάρχει $N_0 > 0$ (το $N_0 = n_0$) ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N} \cap (N_0, +\infty)$. Άρα η ιδιότητα ισχύει κοντά στο $+\infty$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η ιδιότητα ισχύει κοντά στο $+\infty$. Τότε υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N} \cap (N_0, +\infty)$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > N_0$ (για παράδειγμα, ο $n_0 = [N_0] + 1$). Τότε η ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα η ιδιότητα ισχύει τελικά.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι

Έστω μια ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο $\mathbb{N}$. Τότε αυτή ισχύει τελικά αν και μόνο αν ισχύει κοντά στο $+\infty$.

Ομοίως, αποδεικνύεται - δείτε την άσκηση 9 - ότι

Έστω μια ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο $\mathbb{N}$. Τότε αυτή ισχύει για άπειρους $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$.

Ορισμός. Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ και μια ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο σύνολο A.
Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει κοντά στον ξ από αριστερά του** αν ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi - \delta_0, \xi)$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $x \in (\xi - \delta_0, \xi)$ για τον οποίο έχει νόημα.
Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει κοντά στον ξ από δεξιά του**, αν ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi, \xi + \delta_0)$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $x \in (\xi, \xi + \delta_0)$ για τον οποίο έχει νόημα.

Ορισμός. Έστω, πάλι, $\xi \in \mathbb{R}$ και μια ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο σύνολο A.
Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από αριστερά του** αν ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap (\xi - \delta, \xi)$ ή, ισοδύναμα, για τουλάχιστον έναν $x \in (\xi - \delta, \xi)$ για τον οποίο έχει νόημα.
Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά του** αν ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap (\xi, \xi + \delta)$ ή, ισοδύναμα, για τουλάχιστον έναν $x \in (\xi, \xi + \delta)$ για τον οποίο έχει νόημα.

Όλα τα συμπεράσματα για το "κοντά στον ξ" και για το "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ" προσαρμόζονται κατά προφανή τρόπο και στο πλαίσιο των "κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του" και "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του". Δηλαδή:

Αν μια ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του, τότε αυτή ισχύει και σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του.

Αν μια ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του και μια άλλη ιδιότητα ισχύει, επίσης, κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του, τότε ισχύουν και οι δυο, ταυτόχρονα, ιδιότητες κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του.

Μια ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του αν και μόνο αν είναι λάθος ότι η αντίθετη ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του.

Μια ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του αν και μόνο αν είναι λάθος ότι η αντίθετη ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του.

Θα αποδείξουμε, τώρα, το εξής αποτέλεσμα.

Αν ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A και αν μια ιδιότητα έχει νόημα στο A, τότε η ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ αν και μόνο αν ισχύει κοντά στον ξ από αριστερά του και κοντά στον ξ από δεξιά του.

Πράγματι, έστω ότι η ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap ((\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0))$. Άρα η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi - \delta_0, \xi)$ και, επίσης, ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi, \xi + \delta_0)$. Άρα η ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ από αριστερά του και κοντά στον ξ από δεξιά του.
Αντιστρόφως, έστω ότι η ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ από αριστερά του και κοντά στον ξ από δεξιά του. Τότε υπάρχει ${\delta_0}' > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi - {\delta_0}', \xi)$ και ${\delta_0}'' > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi, \xi + {\delta_0}'')$. Θεωρούμε τον

$$\delta_0 = \min\{{\delta_0}', {\delta_0}''\} > 0,$$

οπότε $\delta_0 \leq {\delta_0}'$ και $\delta_0 \leq {\delta_0}''$. Άρα η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in A \cap ((\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0))$, οπότε ισχύει κοντά στον ξ.

Θα αποδείξουμε και το εξής.

Αν ο ξ είναι μόνο από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A και αν μια ιδιότητα έχει νόημα στο A, τότε η ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ αν και μόνο αν ισχύει κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του.

Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A.
Έστω ότι η ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap ((\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0))$. Άρα η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi, \xi + \delta_0)$. Άρα η ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ από δεξιά του.
Αντιστρόφως, έστω ότι η ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ από δεξιά του. Τότε υπάρχει $\delta_0{}' > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi, \xi + \delta_0{}')$. Ο ξ δεν είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A, οπότε υπάρχει $\delta_0{}'' > 0$ ώστε $A \cap (\xi - \delta_0{}'', \xi) = \emptyset$. Θεωρούμε τον

$$\delta_0 = \min\{\delta_0{}', \delta_0{}''\} > 0,$$

οπότε $\delta_0 \leq \delta_0{}'$ και $\delta_0 \leq \delta_0{}''$. Επομένως, $A \cap ((\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0)) = A \cap (\xi, \xi + \delta_0) \subseteq A \cap (\xi, \xi + \delta_0{}')$, οπότε η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in A \cap ((\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0))$. Άρα η ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ.
Η απόδειξη είναι όμοια αν ο ξ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A.

Με παρόμοια επιχειρήματα αποδεικνύονται και τα εξής.

Αν ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A και αν μια ιδιότητα έχει νόημα στο A, τότε η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ αν και μόνο αν ισχύει είτε σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από αριστερά του είτε σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά του.

Αν ο ξ είναι μόνο από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A και αν μια ιδιότητα έχει νόημα στο A, τότε η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ αν και μόνο αν ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του.

Το Θεώρημα 3.3 χαρακτηρίζει την έννοια του "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ" βάσει της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

Θεώρημα 3.3. *Έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και μια ιδιότητα που έχει νόημα στο σύνολο A. Τότε η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$, ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε x_n $(n \in \mathbb{N})$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Τότε για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap N_\xi^*(\delta)$. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει

$$x_n \in A \cap N_\xi^*(\tfrac{1}{n})$$

ώστε η ιδιότητα να ισχύει για τον x_n. Άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A για την οποία ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε x_n $(n \in \mathbb{N})$. Επίσης, έστω $\delta > 0$. Τότε ισχύει τελικά $\frac{1}{n} \leq \delta$, οπότε ισχύει τελικά $N_\xi(\frac{1}{n}) \subseteq N_\xi(\delta)$. Άρα ισχύει τελικά

$$x_n \in N_\xi(\delta)$$

και, επομένως, $x_n \to \xi$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$, ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε x_n $(n \in \mathbb{N})$. Επειδή $x_n \to \xi$, για κάθε $\delta > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\delta)$ και, επειδή ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi^*(\delta)$. Άρα για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap N_\xi^*(\delta)$ και, επομένως, η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. □

Υπάρχει παραλλαγή του Θεωρήματος 3.3 στην οποία το "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ" μετατρέπεται σε "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του" και το $x_n \neq \xi$ μετατρέπεται σε $x_n > \xi$ ($x_n < \xi$). Δείτε την άσκηση 1.

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε την απόδειξη της Πρότασης 3.1 και του Θεωρήματος 3.2 και προσαρμόστε το Θεώρημα 3.3 στο πλαίσιο των "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από τα δεξιά (αριστερά) του".

2. Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των συνόλων $(a,b)\cup(b,c)$, $(a,b)\cup\{b+\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, $\{a-\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}\cup(a,b)$, $\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\,|\,n,m\in\mathbb{N}\}$, $\{(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n})\,|\,n\in\mathbb{N}\}$.

3. Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο A δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.

4. Έστω $\xi\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν είναι σημείο συσσώρευσης του $A\setminus\{\xi\}$.

5. Αποδείξτε ότι το $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν κάθε περιοχή N_ξ του ξ περιέχει άπειρα στοιχεία του A. Βάσει αυτού, ξαναδείτε την άσκηση 2.

6. Έστω $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$, $A\subseteq B$. Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, αποδείξτε ότι είναι σημείο συσσώρευσης και του B.

7. (i) Αποδείξτε ότι κάθε $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης των συνόλων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
   (ii) Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των συνόλων $(a,b)\cap\mathbb{Q}$ και $(a,b)\setminus\mathbb{Q}$.

8. Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι, αν το $\sup A$ δεν ανήκει στο A, τότε είναι σημείο συσσώρευσης του A. Ομοίως, για το $\inf A$.

9. Έστω ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο $\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει για άπειρους $n\in\mathbb{N}$ αν και μόνο αν ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$.

10. (i) Ποιο είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιο το σύνολο στο οποίο ισχύει καθεμιά από τις: $\frac{1}{x^2}>100$, $\frac{x+2}{|x-1|}>1000$, $-\frac{1}{100}<\frac{1}{x+3}<\frac{1}{100}$; Αποδείξτε ότι η πρώτη ιδιότητα ισχύει κοντά στον 0, η δεύτερη κοντά στον 1 και η τρίτη κοντά στα $\pm\infty$.
    (ii) Ποιο είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιο το σύνολο στο οποίο ισχύει καθεμιά από τις: $(-1)^{[\frac{1}{x}]}<0$, $\sin x>\frac{1}{2}$, $\sin\frac{1}{x}<0$; Αποδείξτε ότι η πρώτη ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0, η δεύτερη σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και η τρίτη σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0. Αποδείξτε ότι είναι λάθος ότι η πρώτη ιδιότητα ισχύει κοντά στον 0, η δεύτερη κοντά στο $+\infty$, η τρίτη κοντά στον 0.

11. Ο ξ χαρακτηρίζεται **μεμονωμένο σημείο** του συνόλου A αν $\xi\in A$ και υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε το μοναδικό στοιχείο του A που ανήκει στην $N_\xi(\delta_0)$ είναι ο ξ, δηλαδή $(\xi-\delta_0,\xi+\delta_0)\cap A=\{\xi\}$.
    (i) Αποδείξτε ότι κάθε $\xi\in A$ είναι είτε σημείο συσσώρευσης του συνόλου A είτε μεμονωμένο σημείο του A και ότι κανένας $\xi\in A$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης *και* μεμονωμένο σημείο του A.
    (ii) Έστω $\xi\in A$. Αποδείξτε ότι ο ξ είναι μεμονωμένο σημείο του συνόλου A αν και μόνο αν κάθε ακολουθία (x_n) στο A με όριο ξ είναι τελικά σταθερή.

12. Έστω σύνολο A και $A_- = A\cap(-\infty,\xi]$, $A_+ = A\cap[\xi,+\infty)$. Αποδείξτε ότι ο ξ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν είναι σημείο συσσώρευσης του A_+ (A_-).

13. (i) Αποδείξτε ότι το $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης της ένωσης $A_1\cup\cdots\cup A_n$ αν και μόνο αν είναι σημείο συσσώρευσης ενός τουλάχιστον από τα σύνολα $A_1\,,\ldots\,,A_n\,.$
(ii) Αποδείξτε ότι, αν το $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης της τομής συνόλων, τότε είναι σημείο συσσώρευσης καθενός από αυτά. Ο 0 είναι σημείο συσσώρευσης των $[-1,0]$, $[0,1]$ αλλά όχι της $[-1,0]\cap[0,1]$.

14. (i) Αποδείξτε το : *Κάθε άπειρο και φραγμένο σύνολο έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο* $\mathbb{R}$.
Υπόδειξη: Έστω άπειρο και φραγμένο σύνολο A. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n\neq x_m$ για κάθε $n,m\in\mathbb{N}$, $n\neq m$. Σύμφωνα με το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει: έστω $x_{n_k}\to x$. Αποδείξτε ότι ο x είναι σημείο συσσώρευσης του A.
(ii) Αποδείξτε ότι κάθε άπειρο σύνολο έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο $\overline{\mathbb{R}}$.

15. Το σύνολο A χαρακτηρίζεται **κλειστό** αν περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του τα οποία είναι αριθμοί (και όχι $\pm\infty$).
(i) Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό διάστημα (φραγμένο ή όχι) και τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ και κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι κλειστά σύνολα και ότι τα σύνολα $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ και κάθε μη-κενό ανοικτό διάστημα $\neq\mathbb{R}$ δεν είναι κλειστά σύνολα.
(ii) Αποδείξτε ότι το σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνο αν το όριο κάθε ακολουθίας (x_n) στο A, η οποία συγκλίνει, ανήκει στο A.
(iii) Αποδείξτε ότι η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο και ότι η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.
(iv) Αν το μη-κενό κλειστό σύνολο A είναι άνω φραγμένο, αποδείξτε ότι έχει μέγιστο στοιχείο και, αν είναι κάτω φραγμένο, αποδείξτε ότι έχει ελάχιστο στοιχείο.
(v) Αποδείξτε την **Γενίκευση του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass**: *Έστω κλειστό και φραγμένο σύνολο* A*. Τότε κάθε ακολουθία στο* A *έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υποακολουθία με όριο στο* A.
(vi) Αποδείξτε το αντίστροφο του (v): αν κάθε ακολουθία στο σύνολο A έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υποακολουθία με όριο στο A, τότε το A είναι κλειστό και φραγμένο.

16. Το σύνολο A χαρακτηρίζεται **ανοικτό** αν για κάθε $x\in A$ υπάρχει περιοχή N_x του x ώστε $N_x\subseteq A$, δηλαδή υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε $(x-\delta_0,x+\delta_0)\subseteq A$.
(i) Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό διάστημα είναι ανοικτό σύνολο και ότι τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, κάθε μη-κενό κλειστό διάστημα $\neq\mathbb{R}$ και κάθε πεπερασμένο σύνολο δεν είναι ανοικτά σύνολα.
(ii) Αποδείξτε ότι η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο και ότι η ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.
(iii) Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό σύνολο δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.

17. (Συνέχεια των ασκήσεων 15, 16.) Αποδείξτε ότι το σύνολο A είναι ανοικτό σύνολο αν και μόνο αν το $\mathbb{R}\setminus A$ είναι κλειστό σύνολο.

18. (Συνέχεια των ασκήσεων 15 - 17.) Με τα παρακάτω επιχειρήματα, αποδείξτε ότι, αν ένα σύνολο είναι κλειστό και ανοικτό, τότε είναι είτε το $\emptyset$ είτε το $\mathbb{R}$.

Έστω $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{R}$ και έστω ότι το A είναι κλειστό και ανοικτό. Υπάρχουν $a \in A$, $b \notin A$ και έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι το μη-κενό $A \cap (-\infty, b] = A \cap (-\infty, b)$ είναι κλειστό, ανοικτό και άνω φραγμένο. Καταλήξτε σε αντίφαση. Ομοίως, αν $b < a$.

19. (Συνέχεια των ασκήσεων 15 - 18.) Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **συνεκτικό** αν έχει την εξής ιδιότητα: αν $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ και κανένα από τα A_1, A_2 δεν περιέχει σημείο συσσώρευσης του άλλου, τότε είτε $A_1 = A$, $A_2 = \emptyset$ είτε $A_1 = \emptyset$, $A_2 = A$.
Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.11, αποδείξτε ότι ένα σύνολο A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι διάστημα.

20. Αποδείξτε ότι, αν από τον ορισμό της έννοιας του "κοντά στο ξ" παραλείψουμε το ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε, στην περίπτωση που το ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, *κάθε* ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο A *ισχύει* κοντά στο ξ. Αντιθέτως, αποδείξτε ότι ο ορισμός της έννοιας του "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ" δεν αλλοιώνεται αν παραλείψουμε το ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

3.2 Όρια συναρτήσεων.

3.2.1 Όρια.

Θεωρούμε συναρτήσεις f με πεδία ορισμού και σύνολα τιμών τα οποία είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Θα χρησιμοποιούμε τον γνωστό συμβολισμό

$$f : A \to \mathbb{R},$$

όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι το πεδίο ορισμού της f. Αν γνωρίζουμε τον τύπο $f(x)$ της f και δεν αναφέρεται το πεδίο ορισμού της, θα γράφουμε "η συνάρτηση $f(x)$" και θα θεωρούμε ως πεδίο ορισμού το μέγιστο σύνολο το οποίο είναι συμβατό με τον τύπο της συνάρτησης, δηλαδή το σύνολο όλων των x για τους οποίους έχει νόημα ο τύπος $f(x)$.

Ας θυμηθούμε, παρεμπιπτόντως, μερικές από τις "στοιχειώδεις" συναρτήσεις. Οι ιδιότητες των δυνάμεων, των εκθετικών συναρτήσεων και των λογαριθμικών συναρτήσεων που θα αναφέρουμε παρακάτω έχουν ουσιαστικά αποδειχτεί στο κεφάλαιο 1.

(1) Συμβολίζουμε $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τη **σταθερή συνάρτηση** με τύπο $c(x) = c$.
Το σύνολο τιμών της c είναι το μονοσύνολο $\{c\}$.

(2) Συμβολίζουμε $p_a : A \to \mathbb{R}$ τη **συνάρτηση δύναμη** με τύπο $p_a(x) = x^a$.
(i) Αν $a \in \mathbb{N}$, τότε $A = (-\infty, +\infty)$. Αν ο a είναι περιττός, τότε η p_a είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Αν ο a είναι άρτιος, τότε η p_a είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.
(ii) Αν $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, τότε $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Αν $a = 0$, τότε η p_a είναι σταθερή 1 στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ και έχει σύνολο τιμών το $\{1\}$. Αν ο a είναι περιττός < 0, τότε η p_a είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Αν ο a είναι άρτιος < 0, τότε η p_a είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
(iii) Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $a > 0$, τότε $A = [0, +\infty)$. Η p_a είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.
(iv) Τέλος, αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $a < 0$, τότε $A = (0, +\infty)$. Η p_a είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

Προσέξτε: η $p_0 : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ενώ η σταθερή συνάρτηση $1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. *Εκτός από τον* $x = 0$, οι δυο συναρτήσεις έχουν τις ίδιες τιμές: $p_0(x) = x^0 = 1$, $1(x) = 1$. Στον 0 η p_0 δεν ορίζεται: το 0^0 είναι απροσδιόριστη μορφή.

(3) Έστω $a > 0$. Συμβολίζουμε $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ την **εκθετική συνάρτηση** με τύπο $\exp_a x = a^x$.
Αν $a > 1$, η $\exp_a$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Αν $0 < a < 1$, η $\exp_a$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Αν $a = 1$, η $\exp_a$ είναι σταθερή 1 στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\{1\}$.
Αν $a = e$, συνήθως συμβολίζουμε $\exp$ αντί $\exp_e$. Δηλαδή $\exp x = e^x$ για κάθε x.

(4) Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Η **λογαριθμική συνάρτηση** συμβολίζεται $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.
Αν $a > 1$, η $\log_a$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Αν $0 < a < 1$, η $\log_a$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
Αν $a = e$, συνήθως συμβολίζουμε $\log$ ή $\ln$ αντί $\log_e$.
Αν $a > 0$, $a \neq 1$, οι συναρτήσεις $\exp_a$, $\log_a$ είναι αντίστροφες. Δηλαδή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, +\infty)$ ισχύει: $y = \exp_a x$ αν και μόνο αν $x = \log_a y$.

(5) Υπάρχουν και οι τέσσερις **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ και $\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.
Οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές από το λύκειο και έχουν οριστεί με "γεωμετρικό τρόπο". Ο "γεωμετρικός" ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν θεωρείται αποδεκτός από την Ανάλυση και θα δούμε στο Κεφάλαιο 10 τον "αναλυτικό" ορισμό τους. Μέχρι τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε ως παραδείγματα τις συναρτήσεις αυτές με τις γνωστές από το λύκειο ιδιότητές τους. Στο Κεφάλαιο 10 θα αποδείξουμε και αυτές τις ιδιότητες.

Τώρα θα δούμε τον συνοπτικό και *ενιαίο* ορισμό του **ορίου συνάρτησης** και, κατόπιν, θα τον εξειδικεύσουμε στις διάφορες περιπτώσεις που παρουσιάζονται.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi, \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ εκ των οποίων το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η f **έχει όριο** η **στο** ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N^*_\xi(\delta_0)$. Πιο συνοπτικά: η f έχει όριο η στο ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στο ξ. Συμβολίζουμε

$$f(x) \xrightarrow[x\to\xi]{} \eta \qquad \text{ή} \qquad f(x) \to \eta \quad (x \to \xi) \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to\xi} f(x) = \eta.$$

Εκτός από την έκφραση "έχει όριο η", χρησιμοποιούμε την έκφραση "**τείνει στο** η" καθώς και τις εκφράσεις "**συγκλίνει στον** η", αν ο η είναι αριθμός, και "**αποκλίνει στο** η", αν $\eta = \pm\infty$.

Μπορούμε να εκφράσουμε τον ορισμό του ορίου με απλούστερα λόγια ως εξής: η f τείνει στο η στο ξ αν ο $f(x)$ πλησιάζει απεριόριστα το η όταν ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στο ξ παραμένοντας διαφορετικός από το ξ.

Ας δούμε, τώρα, τον ορισμό του ορίου συνάρτησης εξειδικευμένο στις διάφορες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.
Η f έχει όριο η στον ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$.

Περίπτωση 2: $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta = +\infty$.
Η f έχει όριο $+\infty$ στον ξ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$.

Περίπτωση 3: $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta = -\infty$.
Η f έχει όριο $-\infty$ στον ξ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$.

Περίπτωση 4: $\xi = +\infty$, $\eta \in \mathbb{R}$.

Η f έχει όριο η στο $+\infty$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $x > N_0$.

Περίπτωση 5: $\xi = +\infty$, $\eta = +\infty$.
Η f έχει όριο $+\infty$ στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$, $x > N_0$.

Περίπτωση 6: $\xi = +\infty$, $\eta = -\infty$.
Η f έχει όριο $-\infty$ στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$, $x > N_0$.

Περίπτωση 7: $\xi = -\infty$, $\eta \in \mathbb{R}$.
Η f έχει όριο η στο $-\infty$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $x < -N_0$.

Περίπτωση 8: $\xi = -\infty$, $\eta = +\infty$.
Η f έχει όριο $+\infty$ στο $-\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$, $x < -N_0$.

Περίπτωση 9: $\xi = -\infty$, $\eta = -\infty$.
Η f έχει όριο $-\infty$ στο $-\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$, $x < -N_0$.

Σημείωση. Όταν γράφουμε $\lim_{x\to\xi} f(x)$ χωρίς άλλη επισήμανση, εννοούμε ότι το όριο είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$. Όταν, όμως, γράφουμε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ (ή άλλο γράμμα), εννοούμε ότι το όριο είναι ο *αριθμός* η, εκτός αν γράψουμε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ ή κάτι ανάλογο.

Σχόλια. 1. Για να έχει νόημα η ύπαρξη ή η μη-ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to\xi} f(x)$ *προϋποτίθεται* ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f.
Πρέπει να πούμε ότι οι περισσότερες συναρτήσεις που εμφανίζονται στην πράξη έχουν ως πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα, το οποίο δεν είναι μονοσύνολο, ή κάποια πεπερασμένη ένωση τέτοιων διαστημάτων. Σε μια τέτοια περίπτωση ένας ξ αποτελεί σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού αν είναι εσωτερικό σημείο ή άκρο ένός τουλάχιστον από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το $(a, b]$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x\to\xi} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τους ξ που ανήκουν στο $[a, b]$. Ανάλογα, αν το πεδίο ορισμού μιας f είναι το $(a, b) \cup (b, +\infty)$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x\to\xi} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τα ξ που ανήκουν στο $[a, +\infty]$ - ειδικώτερα, ο b *είναι* σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Και, αν το πεδίο ορισμού μιας f είναι το $(-\infty, b] \cup \{c\} \cup (d, e]$, όπου $b < c < d$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x\to\xi} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τα ξ που ανήκουν στο $[-\infty, b] \cup [d, e]$ και όχι για τον c, ο οποίος δεν είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού.
2. Θα κάνουμε μια παρατήρηση ανάλογη εκείνης που είχαμε κάνει για τον ορισμό του ορίου ακολουθίας. Για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, θεωρούμε έναν τυχόντα $\varepsilon > 0$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός $\delta_0 > 0$ - ο οποίος εξαρτάται από τον ε - τέτοιου ώστε "*από* $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$ *να συνεπάγεται* $(\Rightarrow)$ $|f(x) - \eta| < \varepsilon$" ή, ισοδύναμα, ώστε "*να ισχύει* $|f(x) - \eta| < \varepsilon$ *αρκεί* $(\Leftarrow)$ *να ισχύει* $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$". Τα ανάλογα μπορούμε να πούμε και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου. Θυμηθείτε: το λογικό σχήμα

$$(x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \eta| < \varepsilon$$

είναι ταυτόσημο με το

$$|f(x) - \eta| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad (x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta_0).$$

Παραδείγματα. (1) Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 4}(3x + 2) = 14$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε x, $0 < |x - 4| < \delta_0$ να ισχύει $|(3x + 2) - 14| < \varepsilon$.

Ισχύει $|(3x+2)-14|<\varepsilon$ αρκεί να ισχύει $|3x-12|<\varepsilon$ αρκεί να ισχύει $|x-4|<\frac{\varepsilon}{3}$. Με σύμβολα:

$$|(3x+2)-14|<\varepsilon \quad \Leftarrow \quad |3x-12|<\varepsilon \quad \Leftarrow \quad |x-4|<\tfrac{\varepsilon}{3}\,.$$

Προφανώς, αν θεωρήσουμε $\delta_0=\frac{\varepsilon}{3}$, τότε για κάθε x, $0<|x-4|<\delta_0$ ισχύει $|x-4|<\frac{\varepsilon}{3}$ και, λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών, $|(3x+2)-14|<\varepsilon$. Με σύμβολα:

$$0<|x-4|<\delta_0 \quad \Rightarrow \quad |x-4|<\tfrac{\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad |3x-12|<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |(3x+2)-14|<\varepsilon.$$

(2) Έστω η σταθερή συνάρτηση c. Για κάθε $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x\to\xi} c=c.$$

Έστω $\varepsilon>0$. Βλέπουμε ότι για *κάθε* x ισχύει $|c-c|=0<\varepsilon$. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε οποιονδήποτε $\delta_0>0$ (για παράδειγμα, $\delta_0=1$) και τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}\cap N_\xi^*(\delta_0)=N_\xi^*(\delta_0)$ ισχύει $|c-c|=0<\varepsilon$.

(3) Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi}|x-\xi|^a=0 \qquad (a>0).$$

Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $\delta_0>0$ ώστε για κάθε x, $0<|x-\xi|<\delta_0$ να ισχύει $\big||x-\xi|^a-0\big|<\varepsilon$. Ισχύει $\big||x-\xi|^a-0\big|<\varepsilon$ αρκεί να ισχύει $|x-\xi|^a<\varepsilon$ αρκεί να ισχύει $|x-\xi|<\varepsilon^{\frac{1}{a}}$. Προφανώς, αν επιλέξουμε $\delta_0=\varepsilon^{\frac{1}{a}}$, τότε για κάθε x, $0<|x-\xi|<\delta_0$ ισχύει $|x-\xi|<\varepsilon^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $\big||x-\xi|^a-0\big|<\varepsilon$.

(4) Ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}\setminus\{\xi\}$ και θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi}|x-\xi|^{-a}=+\infty \qquad (a>0).$$

Έστω $M>0$. Θα βρούμε $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει $|x-\xi|^{-a}>M$ για κάθε x, $0<|x-\xi|<\delta_0$. Ισχύει $|x-\xi|^{-a}>M$ αρκεί να ισχύει $|x-\xi|<M^{-\frac{1}{a}}$. Άρα, παίρνοντας $\delta_0=M^{-\frac{1}{a}}$, τότε για κάθε x, $0<|x-\xi|<\delta_0$ ισχύει $|x-\xi|<M^{-\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $|x-\xi|^{-a}>M$.

(5) Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty}|x|^a=+\infty \qquad (a>0).$$

Έστω $M>0$. Θα βρούμε $N_0>0$ ώστε να ισχύει $|x|^a>M$ για κάθε $x>N_0$ και κάθε $x<-N_0$. Ισχύει $|x|^a>M$ αρκεί να ισχύει $|x|>M^{\frac{1}{a}}$. Άρα, αν επιλέξουμε $N_0=M^{\frac{1}{a}}$, τότε για κάθε $x>N_0$ και κάθε $x<-N_0$ ισχύει $|x|>M^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $|x|^a>M$.

(6) Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty}|x|^{-a}=0 \qquad (a>0).$$

Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $N_0>0$ ώστε να ισχύει $\big||x|^{-a}-0\big|<\varepsilon$ για κάθε $x>N_0$ και κάθε $x<-N_0$. Ισχύει $\big||x|^{-a}-0\big|<\varepsilon$ αρκεί να ισχύει $|x|>\varepsilon^{-\frac{1}{a}}$, οπότε, αν επιλέξουμε $N_0=\varepsilon^{-\frac{1}{a}}$, τότε για κάθε $x>N_0$ και κάθε $x<-N_0$ ισχύει $|x|>\varepsilon^{-\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $\big||x|^{-a}-0\big|<\varepsilon$.

(7) **Όρια ακολουθιών**. Κάθε ακολουθία (x_n) είναι, εξ ορισμού, συνάρτηση $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$, όπου, συμβατικά, γράφουμε x_n αντί $x(n)$. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι το $+\infty$ είναι (το μοναδικό) σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$.

Μπορούμε, λοιπόν, να διατυπώσουμε τον ορισμό του ορίου της *συνάρτησης* x στο $+\infty$ ως εξής: $\lim_{n\to+\infty}x(n)=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$ αν για κάθε $\varepsilon>0$ ισχύει $x(n)\in N_\eta(\varepsilon)$ *κοντά στο* $+\infty$. Από την άλλη μεριά, ο ορισμός του ορίου της *ακολουθίας* (x_n) διατυπώνεται ως εξής: $\lim_{n\to+\infty}x_n=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$ αν για

κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει *τελικά* $x_n \in N_\eta(\varepsilon)$.
Οι προτάσεις $x(n) \in N_\eta(\varepsilon)$ και $x_n \in N_\eta(\varepsilon)$ είναι, φυσικά, ταυτόσημες. Και στο τελευταίο παράδειγμα της υποενότητας 3.1.2 είδαμε για μια ιδιότητα που έχει νόημα στο $\mathbb{N}$ ότι το να ισχύει κοντά στο $+\infty$ είναι ισοδύναμο με το να ισχύει τελικά. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι
Η έννοια του ορίου ακολουθίας ως ακολουθία είναι ίδια με την έννοια του ορίου ακολουθίας ως συνάρτηση και, επομένως, *η έννοια του ορίου ακολουθίας περιλαμβάνεται, ως ειδική περίπτωση, στην έννοια του ορίου συνάρτησης.*

Παρατηρήστε ότι μια ακολουθία είναι παράδειγμα συνάρτησης της οποίας το πεδίο ορισμού, δηλαδή το $\mathbb{N}$, *δεν* περιέχει ολόκληρο διάστημα $(a, +\infty)$ μέχρι το $+\infty$, δηλαδή μέχρι το σημείο στο οποίο εξετάζουμε το όριο της συνάρτησης.

3.2.2 Πλευρικά όρια.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, ξ από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Λέμε ότι η f **έχει αριστερό πλευρικό όριο** η **στον** ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi^-(\delta_0)$. Πιο συνοπτικά: η f έχει αριστερό πλευρικό όριο η στον ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στον ξ από αριστερά του. Συμβολίζουμε

$$f(x) \xrightarrow[x \to \xi-]{} \eta \qquad \text{ή} \qquad f(x) \to \eta \quad (x \to \xi-) \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x \to \xi-} f(x) = \eta.$$

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, ξ από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Λέμε ότι η f **έχει δεξιό πλευρικό όριο** η **στον** ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi^+(\delta_0)$. Πιο συνοπτικά: η f έχει δεξιό πλευρικό όριο η στον ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στον ξ από δεξιά του. Συμβολίζουμε

$$f(x) \xrightarrow[x \to \xi+]{} \eta \qquad \text{ή} \qquad f(x) \to \eta \quad (x \to \xi+) \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x \to \xi+} f(x) = \eta.$$

Με άλλα λόγια: η f τείνει στο η στον ξ από τα δεξιά (αριστερά) του αν ο $f(x)$ πλησιάζει απεριόριστα το η όταν ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ παραμένοντας στην δεξιά (αριστερή) μεριά του ξ.

Σχόλιο. Για να έχει νόημα η ύπαρξη ή η μη-ύπαρξη του $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ *προϋποτίθεται* ότι ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f ενώ για την ύπαρξη ή την μη-ύπαρξη του $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ *προϋποτίθεται* ότι ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f.
Θα ξαναπούμε ότι οι περισσότερες συναρτήσεις που εμφανίζονται στην πράξη έχουν ως πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα, το οποίο δεν είναι μονοσύνολο, ή κάποια πεπερασμένη ένωση τέτοιων διαστημάτων. Σε μια τέτοια περίπτωση ένας ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού αν είναι *εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο* ενός τουλάχιστον από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού ενώ ένας ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού αν είναι *εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο* ενός τουλάχιστον από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού. Για παράδειγμα, αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το $(a, b]$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τους ξ που ανήκουν στο $[a, b)$ και η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τους ξ που ανήκουν στο $(a, b]$. Ανάλογα, αν το πεδίο ορισμού μιας f είναι το $(a, b) \cup (b, +\infty)$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τους ξ που ανήκουν στο $[a, +\infty)$ και η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τους ξ που ανήκουν στο $(a, +\infty)$ - ειδικώτερα, ο b είναι από δεξιά του *και* από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Και, αν το πεδίο ορισμού μιας f είναι το $(-\infty, b] \cup \{c\} \cup (d, e]$, όπου $b < c < d$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τους ξ που ανήκουν

στο $(-\infty, b)\cup[d,e)$ και η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τους ξ που ανήκουν στο $(-\infty, b]\cup(d,e]$.

Παραδείγματα. (1) Έστω η συνάρτηση $\frac{|x-\xi|}{x-\xi}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,\xi)\cup(\xi,+\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi-}\frac{|x-\xi|}{x-\xi}=-1, \qquad \lim_{x\to\xi+}\frac{|x-\xi|}{x-\xi}=1.$$

Έστω $\epsilon>0$. Θα βρούμε $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{|x-\xi|}{x-\xi}-(-1)\right|<\epsilon$ για κάθε x, $\xi-\delta_0<x<\xi$. Όμως, αν $x<\xi$, είναι $\frac{|x-\xi|}{x-\xi}=-1$, οπότε $\left|\frac{|x-\xi|}{x-\xi}+1\right|=0$. Επιλέγουμε *οποιονδήποτε* $\delta_0>0$ και τότε για κάθε x, $\xi-\delta_0<x<\xi$ ισχύει $\left|\frac{|x-\xi|}{x-\xi}+1\right|<\epsilon$.
Έστω $\epsilon>0$. Θα βρούμε $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{|x-\xi|}{x-\xi}-1\right|<\epsilon$ για κάθε x, $\xi<x<\xi+\delta_0$. Όμως, αν $x>\xi$, είναι $\frac{|x-\xi|}{x-\xi}=1$, οπότε $\left|\frac{|x-\xi|}{x-\xi}-1\right|=0$. Επιλέγουμε *οποιονδήποτε* $\delta_0>0$ και τότε για κάθε x, $\xi<x<\xi+\delta_0$ ισχύει $\left|\frac{|x-\xi|}{x-\xi}-1\right|<\epsilon$.
(2) Έστω η συνάρτηση $\frac{1}{(x-\xi)^n}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,\xi)\cup(\xi,+\infty)$, όπου ο $n\in\mathbb{N}$ είναι περιττός. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{(x-\xi)^n}=-\infty, \quad \lim_{x\to\xi+}\frac{1}{(x-\xi)^n}=+\infty \qquad (n\in\mathbb{N}, n \text{ περιττός}).$$

Έστω $M>0$. Θα βρούμε $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{(x-\xi)^n}<-M$ για κάθε x, $\xi-\delta_0<x<\xi$. Ισχύει $\frac{1}{(x-\xi)^n}<-M$ αρκεί να ισχύει $\xi-\frac{1}{\sqrt[n]{M}}<x<\xi$. Θεωρούμε $\delta_0=\frac{1}{\sqrt[n]{M}}$ και τότε για κάθε x, $\xi-\delta_0<x<\xi$ ισχύει $\xi-\frac{1}{\sqrt[n]{M}}<x<\xi$ και, επομένως, $\frac{1}{(x-\xi)^n}<-M$.
Έστω $M>0$. Θα βρούμε $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{(x-\xi)^n}>M$ για κάθε x, $\xi<x<\xi+\delta_0$. Ισχύει $\frac{1}{(x-\xi)^n}>M$ αρκεί να ισχύει $\xi<x<\xi+\frac{1}{\sqrt[n]{M}}$. Θεωρούμε $\delta_0=\frac{1}{\sqrt[n]{M}}$ και τότε για κάθε x, $\xi<x<\xi+\delta_0$ ισχύει $\xi<x<\xi+\frac{1}{\sqrt[n]{M}}$ και, επομένως, $\frac{1}{(x-\xi)^n}>M$.

Πρόταση 3.2. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\mathbb{R}$ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ αν και μόνο αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi-} f(x)$, $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και είναι ίσα. Επίσης, στην περίπτωση που υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$, τότε είναι*

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=\lim_{x\to\xi-} f(x)=\lim_{x\to\xi+} f(x).$$

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε ισχύει $f(x)\in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στον ξ. Άρα ισχύει $f(x)\in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στον ξ από αριστερά του και κοντά στον ξ από δεξιά του. Άρα $\lim_{x\to\xi-} f(x)=\eta$ και $\lim_{x\to\xi+} f(x)=\eta$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi-} f(x)=\lim_{x\to\xi+} f(x)=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε ισχύει $f(x)\in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στον ξ από αριστερά του και κοντά στον ξ από δεξιά του. Άρα ισχύει $f(x)\in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στον ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x)=\eta$. □

Παραδείγματα. (1) Το $\lim_{x\to\xi}\frac{|x-\xi|}{x-\xi}$ *δεν* υπάρχει, διότι, όπως είδαμε, τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά.
(2) Ομοίως, αν ο $n\in\mathbb{N}$ είναι περιττός, το $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{(x-\xi)^n}$ *δεν* υπάρχει.
(3) Αν ο $n\in\mathbb{N}$ είναι άρτιος, έχουμε αποδείξει ότι $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{(x-\xi)^n}=+\infty$. Άρα $\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{(x-\xi)^n}=\lim_{x\to\xi+}\frac{1}{(x-\xi)^n}=+\infty$.
(4) Αν $n\in\mathbb{N}$, είδαμε ότι $\lim_{x\to\xi}(x-\xi)^n=0$. Άρα $\lim_{x\to\xi-}(x-\xi)^n=\lim_{x\to\xi+}(x-\xi)^n=0$.

Πρόταση 3.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$.*
(1) Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και, σ' αυτήν την περίπτωση,

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x).$$

(2) Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και, σ' αυτήν την περίπτωση,

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi-} f(x).$$

Απόδειξη. (1) Έστω $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στον ξ από δεξιά του. Άρα ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στον ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στον ξ, οπότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στον ξ από δεξιά του. Άρα $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$.
(2) Ομοίως. $\square$

Παραδείγματα. (1) Αν $a > 0$, έχουμε δει ότι $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{|x-\xi|^a} = +\infty$. Συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi-} \frac{1}{|x-\xi|^a} = \lim_{x\to\xi+} \frac{1}{|x-\xi|^a} = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to\xi+} \frac{1}{(x-\xi)^a} = +\infty$. Επομένως, αν ο $a > 0$ δεν είναι ακέραιος, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{(x-\xi)^a} = 0$.
(2) Αν $a > 0$, είδαμε ότι $\lim_{x\to\xi} |x-\xi|^a = 0$. Άρα $\lim_{x\to\xi-} |x-\xi|^a = \lim_{x\to\xi+} |x-\xi|^a = 0$. Άρα, $\lim_{x\to\xi+}(x-\xi)^a = 0$, οπότε, αν ο $a > 0$ δεν είναι ακέραιος, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi}(x-\xi)^a = 0$.

3.2.3 Όρια, γραφήματα, ασύμπτωτες ευθείες.

Έστω ότι $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ και ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Τότε, καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ παραμένοντας διαφορετικός από τον ξ, το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f πλησιάζει απεριόριστα το σημείο (ξ, η), οπότε πλησιάζει απεριόριστα και σε ύψος η την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = \xi$, παραμένοντας εκτός της ευθείας αυτής.

Έστω ότι $\xi \in \mathbb{R}$ και ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Τότε, καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στο ξ παραμένοντας διαφορετικός από το ξ, το σημείο $(x, f(x))$ ανεβαίνει απεριόριστα ψηλά, οπότε πλησιάζει σε απεριόριστα μεγάλο θετικό ύψος την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = \xi$, παραμένοντας εκτός της ευθείας αυτής. Ομοίως, έστω ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$. Τότε, καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στο ξ παραμένοντας διαφορετικός από το ξ, το σημείο $(x, f(x))$ κατεβαίνει απεριόριστα χαμηλά, οπότε πλησιάζει σε απεριόριστα μεγάλο αρνητικό ύψος την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = \xi$, παραμένοντας εκτός της ευθείας αυτής.

Στις δυο τελευταίες περιπτώσεις, δηλαδή αν $\xi \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \pm\infty$, η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = \xi$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος της f.

Έχουμε ανάλογες διατυπώσεις για τα πλευρικά όρια στον ξ. Στην περίπτωση του $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ η μόνη αλλαγή στα προηγούμενα είναι ότι το σημείο $(x, f(x))$ παραμένει δεξιά της κατακόρυφης ευθείας με εξίσωση $x = \xi$ ενώ στην περίπτωση του $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ το σημείο $(x, f(x))$ παραμένει αριστερά της κατακόρυφης ευθείας με εξίσωση $x = \xi$. Γενικότερα:

Ορισμός. Η ευθεία με εξίσωση $x = \xi$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος της f σε οποιαδήποτε από τις τέσσερις περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi\pm} f(x) = \pm\infty$.

Παρεμπιπτόντως, μπορεί κανείς να δει στο γράφημα της συνάρτησης γιατί, όταν τα όρια $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ είναι διαφορετικά, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Έστω τώρα ότι $\eta \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$. Τότε, καθώς ο x απομακρύνεται κατάλληλα προς τα δεξιά, το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f απομακρύνεται απεριόριστα προς τα δεξιά και πλησιάζει απεριόριστα την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = \eta$. Ομοίως, αν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \eta$. Τότε, καθώς ο x απομακρύνεται κατάλληλα προς τα αριστερά, το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f απομακρύνεται απεριόριστα προς τα αριστερά και πλησιάζει απεριόριστα την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = \eta$.

Ορισμός. Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ ή $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \eta$, τότε η οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = \eta$ χαρακτηρίζεται **οριζόντια ασύμπτωτη στο** $+\infty$ ή **στο** $-\infty$, αντιστοίχως, του γραφήματος της f.

Τώρα, αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, τότε το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται απεριόριστα προς τα δεξιά και πάνω και, αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, τότε το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται απεριόριστα προς τα δεξιά και κάτω. Τέλος, αν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, τότε το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται απεριόριστα προς τα αριστερά και πάνω και, αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, τότε το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται απεριόριστα προς τα αριστερά και κάτω.

Ένας τρόπος να δούμε στο γράφημα της f την ποσοτική έκφραση - με τους ϵ και δ_0 - της έννοιας του ορίου $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ είναι ο εξής. Το όριο αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $\delta_0 > 0$ ώστε το μέρος του γραφήματος της f που αντιστοιχεί στο $A \cap ((\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0))$ να περιέχεται στην οριζόντια ζώνη που βρίσκεται ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες με εξισώσεις $y = \eta - \epsilon$ και $y = \eta + \epsilon$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δούμε κάθε άλλη περίπτωση ορίου. Για παράδειγμα, το $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει κάποιος $N_0 > 0$ ώστε το μέρος του γραφήματος της f που αντιστοιχεί στο $A \cap (N_0, +\infty)$ περιέχεται στο ημιεπίπεδο κάτω από την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = -M$.

Ορισμός. Μια ευθεία l με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται **(πλάγια) ασύμπτωτη ευθεία στο** $+\infty$ του γραφήματος της f αν

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \mu x - \nu) = 0.$$

Μια ευθεία l με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται **(πλάγια) ασύμπτωτη ευθεία στο** $-\infty$ του γραφήματος της f αν

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - \mu x - \nu) = 0.$$

Αυτά σημαίνουν ότι το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f και το αντίστοιχο σημείο $(x, \mu x + \nu)$ της l πλησιάζουν το ένα το άλλο καθώς κινούνται απεριόριστα προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά, αντιστοίχως. Πιο απλά: το γράφημα της συνάρτησης προσεγγίζει την ευθεία l κοντά στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Παρατηρήστε ότι οι οριζόντιες ασύμπτωτες ευθείες είναι, απλώς, πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες με συντελεστή μ ίσο με 0.

Στην επόμενη ενότητα θα μάθουμε έναν τρόπο να βρίσκουμε, αν υπάρχουν, τις πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης.

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε την απόδειξη της Πρότασης 3.3.

2. Έχουν νόημα τα όρια $\lim_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}$, $\lim_{x\to0} \sqrt{-x^2}$, $\lim_{x\to1-} \log(x^2-1)$, $\lim_{x\to1+} \sqrt{1-x^2}$, $\lim_{x\to0-} x^{-\frac{1}{2}}$, $\lim_{x\to-\infty}(x+2)^{\frac{6}{4}}$, $\lim_{x\to-1} x^{\sqrt{2}}$;

3. Έχουν νόημα τα όρια $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sin x}$, $\lim_{x\to0} \frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to+\infty} \log\sin x$, $\lim_{x\to0} \log\sin\frac{1}{x}$;

4. Αποδείξτε βάσει των ορισμών ότι $\lim_{x\to 2} 3x = 6$, $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x}+1) = 2$, $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$, $\lim_{x\to 1}\frac{3}{(x-1)^2} = +\infty$, $\lim_{x\to 2+}\frac{x}{2-x} = -\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-3}{2x+1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(3x^2+x) = +\infty$.

5. Έστω $A \subseteq B$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A, οπότε (άσκηση 6 της ενότητας 3.1) το ξ είναι σημείο συσσώρευσης και του B. Έστω $g : B \to \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ο περιορισμός της g στο A, δηλαδή $f(x) = g(x)$ $(x \in A)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

6. Αποδείξτε τις εξής "αρνήσεις" του ορίου:
(i) Το $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ είναι λάθος αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \notin N_\eta(\varepsilon)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.
(ii) Το $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ είναι λάθος αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta_0 > 0$ να υπάρχει $x \in A \cap N^*_\xi(\delta_0)$ ώστε $f(x) \notin N_\eta(\varepsilon)$.
(iii) Εξειδικεύστε (με ανισότητες κλπ) τα (i), (ii) στις εννέα περιπτώσεις ορίων.

7. Αποδείξτε τον εξής ισοδύναμο ορισμό του ορίου. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω $\varepsilon_0 > 0$. Τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ αν και μόνο αν για κάθε ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στο ξ.

8. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N^*_\xi(\delta_0)$. Τι συμπεραίνετε;

9. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $A_- = A \cap (-\infty, \xi]$, $A_+ = A \cap [\xi, +\infty)$ και $f_- : A_- \to \mathbb{R}$ και $f_+ : A_+ \to \mathbb{R}$ οι περιορισμοί της f στα A_- και A_+, αντιστοίχως. Έστω ότι ο ξ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του A ή, ισοδύναμα, σημείο συσσώρευσης του A_+ (A_-) (άσκηση 12 ενότητας 3.1). Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ ($\lim_{x\to\xi-} f(x)$) υπάρχει αν και μόνο αν το $\lim_{x\to\xi} f_+(x)$ ($\lim_{x\to\xi} f_-(x)$) υπάρχει και σ' αυτήν την περίπτωση τα δυο όρια είναι ίσα.

3.3 Ιδιότητες σχετικές με όρια συναρτήσεων.

Για όλες τις ιδιότητες ορίων ακολουθιών υπάρχουν αντίστοιχες ιδιότητες ορίων συναρτήσεων. Αυτό είναι φανερό με μια απλή αντιπαραβολή αυτής της ενότητας με την ενότητα 2.4 και δεν αποτελεί έκπληξη αφού, όπως είδαμε στην υποενότητα 3.2.1, η έννοια του ορίου συνάρτησης περιλαμβάνει ως ειδική περίπτωση την έννοια του ορίου ακολουθίας.

Πρόταση 3.4. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στο ξ. Αν υπάρχει ένα από τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$, τότε υπάρχει και το άλλο και τα δυο όρια είναι ίσα.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στο ξ. Επίσης, ισχύει $f(x) = g(x)$ κοντά στο ξ, οπότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ και $f(x) = g(x)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $g(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$. $\square$

Παραδείγματα. (1) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} |x|^{-\frac{1}{2}}, & \text{αν } 0 < |x| < \frac{1}{10} \\ x, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } |x| \geq \frac{1}{10} \end{cases}$ Θεωρούμε και την συνάρτηση $|x|^{-\frac{1}{2}}$. Επειδή $f(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}$ για κάθε $x \in (-\frac{1}{10}, 0) \cup (0, \frac{1}{10})$ και $\lim_{x\to 0} |x|^{-\frac{1}{2}} = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

(2) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & \text{αν } x > 4 \\ -x, & \text{αν } x \leq 4 \end{cases}$ Επειδή $f(x) = |x|^{-1}$ στο $(4, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty}|x|^{-1} = 0$, είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Επειδή $f(x) = |x|$ στο $(-\infty, 4)$ και $\lim_{x\to-\infty}|x| = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Οι Προτάσεις 3.5, 3.6 είναι από τις πιο σημαντικές για την ουσιαστική κατανόηση της έννοιας του ορίου. Η Πρόταση 3.5 λέει ότι, αν το όριο στο $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ μιας συνάρτησης ικανοποιεί μια (απλή) γνήσια ανισότητα, τότε και οι τιμές της συνάρτησης ικανοποιούν κοντά στο ξ την ίδια γνήσια ανισότητα.

Πρόταση 3.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.*
(1) Αν $\eta > u$, τότε ισχύει $f(x) > u$ κοντά στο ξ.
(2) Αν $\eta < l$, τότε ισχύει $f(x) < l$ κοντά στο ξ.

Απόδειξη. (1) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\eta > u$. Είναι $\eta - u > 0$, οπότε ισχύει

$$|f(x) - \eta| < \eta - u$$

κοντά στο ξ. Άρα ισχύει

$$f(x) > \eta - (\eta - u) = u$$

κοντά στο ξ.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $M > 0$ ώστε $M \geq u$. Τότε ισχύει $f(x) > M$ και, επομένως, $f(x) > u$ κοντά στο ξ.
(2) Ομοίως. □

Η Πρόταση 3.6 λέει ότι, αν οι τιμές μιας συνάρτησης ικανοποιούν μια μη-γνήσια (απλή) ανισότητα σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε και το όριο - αν υπάρχει - στο ξ της συνάρτησης ικανοποιεί την ίδια μη-γνήσια ανισότητα. Επίσης, υπάρχει ένα χρήσιμο κριτήριο μη-ύπαρξης ορίου: αν υπάρχουν δυο αριθμοί που χωρίζουν τις τιμές μιας συνάρτησης σε κάποια σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ από τις τιμές της συνάρτησης σε κάποια άλλα σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε η συνάρτηση δεν έχει όριο στο ξ.

Πρόταση 3.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.*
(1) Αν ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\eta \geq l$.
(2) Αν ισχύει $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\eta \leq u$.
(3) Αν $u < l$ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Απόδειξη. (1) Αν ήταν $\eta < l$, θα ίσχυε $f(x) < l$ κοντά στο ξ, οπότε δε θα μπορούσε να ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.
(2) Ομοίως.
(3) Αν υπήρχε το $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, θα ήταν $\eta \geq l$ και $\eta \leq u$ και, επομένως, $l \leq u$. □

Παραδείγματα. (1) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν ισχύει $f(x) \in [l, u]$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε $\eta \in [l, u]$.
(2) Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$. Πράγματι, όπως ουσιαστικά είχαμε δει και στην ενότητα 3.1.2, ισχύει $(-1)^{[x]} \geq 1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και, συγκεκριμένα, σε κάθε άρτιο $x \in \mathbb{N}$ και, επίσης, ισχύει $(-1)^{[x]} \leq -1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και, συγκεκριμένα, σε κάθε περιττό $x \in \mathbb{N}$.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to-\infty}(-1)^{[x]}$.
(3) Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \sin x$. Διότι ισχύει $\sin x \geq 1$ σε κάθε $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ και ισχύει $\sin x \leq -1$ σε κάθε $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to-\infty} \sin x$ και $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$.

Η Πρόταση 3.7 εκφράζει τη **μοναδικότητα του ορίου**.

Πρόταση 3.7. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$ *και* $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ *σημείο συσσώρευσης του* A. *Το* $\lim_{x\to\xi} f(x)$, *αν υπάρχει, είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν δυο διαφορετικά όρια $\lim_{x\to\xi} f(x)$. Θεωρούμε a γνησίως ανάμεσα στα δυο αυτά όρια. Τότε ισχύει $f(x) < a$ κοντά στο ξ και ισχύει $f(x) > a$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $f(x) < a$ και $f(x) > a$ κοντά στο ξ. Άτοπο. □

Η Πρόταση 3.8 λέει ότι αν οι τιμές δυο συναρτήσεων ικανοποιούν σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ μια μη-γνήσια μεταξύ τους ανισότητα, τότε και τα όριά τους στο ξ - αν υπάρχουν - ικανοποιούν την ίδια μη-γνήσια ανισότητα.

Πρόταση 3.8. *Έστω* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *και* $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ *σημείο συσσώρευσης του* A. *Αν ισχύει* $f(x) \leq g(x)$ *σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο* ξ *και* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, *τότε* $\eta \leq \zeta$.

Απόδειξη. Έστω $\zeta < \eta$. Θεωρούμε a ώστε $\zeta < a < \eta$. Τότε ισχύει $g(x) < a$ κοντά στο ξ και ισχύει $a < f(x)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $g(x) < a$ και $a < f(x)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $g(x) < f(x)$ κοντά στο ξ. Άτοπο. □

Οι επόμενες δυο προτάσεις περιγράφουν μια χρήσιμη μέθοδο απόδειξης ύπαρξης ορίου συνάρτησης και υπολογισμού της τιμής του: κατάλληλη σύγκριση της συνάρτησης με άλλες συναρτήσεις των οποίων γνωρίζουμε τα όρια.

Πρόταση 3.9. *Έστω* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *και* $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ *σημείο συσσώρευσης του* A. *Έστω, επίσης, ότι ισχύει* $f(x) \leq g(x)$ *κοντά στο* ξ.
(1) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, *τότε* $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$.
(2) Αν $\lim_{x\to\xi} g(x) = -\infty$, *τότε* $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$.

Απόδειξη. (1) Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει $f(x) > M$ κοντά στο ξ και, επειδή ισχύει $g(x) \geq f(x)$ κοντά στο ξ, ισχύει $f(x) > M$ και $g(x) \geq f(x)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $g(x) > M$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$.
(2) Ομοίως. □

Παραδείγματα. (1) Επειδή ισχύει $\frac{x^2+x-1}{x} \geq \frac{x^2}{x} = x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και επειδή $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{x} = +\infty$.
(2) Επειδή ισχύει $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \geq \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ και επειδή $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) = +\infty$.

Η Πρόταση 3.10 εκφράζει τη λεγόμενη **ιδιότητα παρεμβολής**.

Πρόταση 3.10. *Έστω* $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ *και* $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ *σημείο συσσώρευσης του* A *και έστω ότι ισχύει* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *κοντά στο* ξ. *Αν* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ *και* $\lim_{x\to\xi} h(x) = \eta$, *τότε* $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \varepsilon$ κοντά στο ξ και ισχύει $|h(x) - \eta| < \varepsilon$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει

$$|f(x) - \eta| < \varepsilon, \qquad |h(x) - \eta| < \varepsilon, \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

κοντά στο ξ. Άρα ισχύει

$$\eta - \varepsilon < f(x), \qquad h(x) < \eta + \varepsilon, \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

κοντά στο ξ. Επομένως, ισχύει $\eta - \varepsilon < g(x) < \eta + \varepsilon$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$. □

`Παραδείγματα.` (1) Έστω $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) < \frac{1}{x}$ για κάθε $x \geq 3$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x^2}) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
(2) Ισχύει $-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\big(-\frac{1}{|x|}\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ και $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Πρόταση 3.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι αριθμός, τότε η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < 1$ και, επομένως, $|f(x)| < |\eta| + 1$ κοντά στο ξ, οπότε η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ. □

`Παραδείγματα.` (1) Για την συνάρτηση $\frac{1}{x}$ ισχύει $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα η $\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Αυτό *δε* σημαίνει ότι η $\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη στο πεδίο ορισμού της; η $\frac{1}{x}$ δεν είναι φραγμένη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ούτε καν στο $(0, +\infty)$. Υπάρχει, όμως, διάστημα $(N_0, +\infty)$ στο οποίο η $\frac{1}{x}$ *είναι* φραγμένη. Για παράδειγμα, ισχύει $0 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.
(2) Έστω η συνάρτηση $\frac{x^5+1}{2x^5-x^3+x^2+8x+1}$. Θα μάθουμε λίγο αργότερα να υπολογίζουμε όρια όπως το $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+1}{2x^5-x^3+x^2+8x+1} = \frac{1}{2}$. Αν δεχτούμε αυτό το όριο, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη κοντά στο $-\infty$. Δηλαδή, υπάρχει διάστημα $(-\infty, -N_0)$ στο οποίο η συνάρτηση είναι φραγμένη. Όμως, το να βρεθεί συγκεκριμένο τέτοιο διάστημα καθώς και συγκεκριμένο άνω φράγμα και κάτω φράγμα στο διάστημα αυτό δεν είναι εύκολο αφού η συνάρτηση δεν έχει απλό τύπο!

Πρόταση 3.12. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.*
(1) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, τότε η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ αλλά είναι λάθος ότι είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ.
(2) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$, τότε η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ αλλά είναι λάθος ότι είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ.

Απόδειξη. (1) Ισχύει $f(x) > 1$ κοντά στο ξ, οπότε η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ.
Αν η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ, τότε υπάρχει $u \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq u$ κοντά στο ξ. Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, συνεπάγεται $+\infty \leq u$. Άτοπο.
(2) Ομοίως. □

`Παραδείγματα.` (1) Έστω η συνάρτηση $x - \frac{1}{x}$. Αν δεχτούμε ότι $\lim_{x\to+\infty}(x - \frac{1}{x}) = +\infty$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι κάτω φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Πράγματι, η συνάρτηση είναι κάτω φραγμένη στο $(1, +\infty)$, για παράδειγμα, και ισχύει $x - \frac{1}{x} \geq 0$ για κάθε $x > 1$.
(2) Έστω η συνάρτηση $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1$. Αν δεχτούμε ότι $\lim_{x\to1}\big(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1\big) = -\infty$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι άνω φραγμένη κοντά στον 1. Άρα υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η συνάρτηση να είναι άνω φραγμένη στο $(1, 1+\delta_0)$. Επειδή ο τύπος της συνάρτησης δεν είναι απλός, δεν είναι εύκολο να βρεθεί συγκεκριμένος δ_0 και συγκεκριμένο άνω φράγμα της στο $(1, 1+\delta_0)$.

Η **αντίθετη συνάρτηση** μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $-f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(-f)(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$. Η Πρόταση 3.13 λέει ότι το όριο του αντιθέτου είναι ίσο με το αντίθετο του ορίου.

Πρόταση 3.13. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to\xi}(-f(x)) = -\eta$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \varepsilon$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει

$$|(-f(x)) - (-\eta)| = |f(x) - \eta| < \varepsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi}(-f(x)) = -\eta$.
Έστω $\lim f(x) = +\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει $f(x) > M$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $-f(x) < -M$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi}(-f(x)) = -\infty = -(+\infty)$.
Ομοίως, αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to\xi}(-f(x)) = +\infty = -(-\infty)$. $\square$

Το **άθροισμα δυο συναρτήσεων** $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f + g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ για κάθε $x \in A$. Η Πρόταση 3.14 λέει ότι το όριο του αθροίσματος είναι ίσο με το άθροισμα των ορίων.

Πρόταση 3.14. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$ και το άθροισμα $\eta+\zeta$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x)) = \eta + \zeta$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}$ κοντά στο ξ και ισχύει $|g(x) - \zeta| < \frac{\varepsilon}{2}$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|g(x) - \zeta| < \frac{\varepsilon}{2}$ κοντά στο ξ. Επομένως, ισχύει

$$|(f(x) + g(x)) - (\eta + \zeta)| = |(f(x) - \eta) + (g(x) - \zeta)| \le |f(x) - \eta| + |g(x) - \zeta| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = \eta + \zeta$.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta$ ή $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$. Τότε η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει l ώστε να ισχύει $g(x) \ge l$ κοντά στο ξ. Έστω $M > 0$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $M' > 0$ ώστε $M' \ge M - l$. Τότε ισχύει $f(x) > M'$ και, επομένως, $f(x) > M - l$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $f(x) + g(x) > (M - l) + l = M$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = +\infty = \left\{\begin{matrix} (+\infty) + \zeta \\ (+\infty) + (+\infty) \end{matrix}\right\}$.
Οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν παρόμοια αιτιολόγηση. $\square$

Παραδείγματα. (1) $\lim_{x\to1} 1 = 1$ και $\lim_{x\to1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$, οπότε $\lim_{x\to1} \big(1 + \frac{1}{|x-1|}\big) = 1 + (+\infty) = +\infty$.
(2) $\lim_{x\to+\infty}(-1) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \big(-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\big) = -1 + 0 + 0 = -1$.

Ιδού μερικά παραδείγματα για την περίπτωση απροσδιόριστης μορφής.

Παραδείγματα. (1) $\lim_{x\to0}(\frac{1}{x^2} + c) = +\infty$, $\lim_{x\to0}(-\frac{1}{x^2}) = -\infty$ και $\lim_{x\to0} \big((\frac{1}{x^2} + c) + (-\frac{1}{x^2})\big) = \lim_{x\to0} c = c$.
(2) $\lim_{x\to0} \frac{2}{|x|} = +\infty$, $\lim_{x\to0} \frac{-1}{|x|} = -\infty$ και $\lim_{x\to0} \big(\frac{2}{|x|} + \frac{-1}{|x|}\big) = \lim_{x\to0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.
(3) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x\to0} \frac{-2}{x^2} = -\infty$ και $\lim_{x\to0}(\frac{1}{x^2} + \frac{-2}{x^2}) = \lim_{x\to0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$.
(4) $\lim_{x\to0}(-\frac{2}{x^2}) = -\infty$, $\lim_{x\to0}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) = +\infty$ και το $\lim_{x\to0} \big((\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) + (-\frac{2}{x^2})\big) = \lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Η **διαφορά δυο συναρτήσεων** $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f - g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ για κάθε $x \in A$. Η περίπτωση της $f - g$ ανάγεται στις περιπτώσεις του αθροίσματος συναρτήσεων και της αντίθετης συνάρτησης αφού $f - g = f + (-g)$. Η Πρόταση 3.15 λέει ότι το όριο της διαφοράς είναι ίσο με τη διαφορά των ορίων.

Πρόταση 3.15. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$ και η διαφορά $\eta-\zeta$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\lim_{x\to\xi}(f(x)-g(x)) = \eta - \zeta$.*

Το **γινόμενο δυο συναρτήσεων** $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $fg : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(fg)(x) = f(x)g(x)$ για κάθε $x \in A$. Η Πρόταση 3.16 λέει ότι το όριο του γινομένου είναι ίσο με το γινόμενο των ορίων.

Πρόταση 3.16. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$ και το γινόμενο $\eta\zeta$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = \eta\zeta$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\varepsilon}{3|\zeta|+1}$ κοντά στο ξ και ισχύει $|g(x) - \zeta| < \min\{\frac{\varepsilon}{3|\eta|+1}, \frac{1}{3}\}$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\varepsilon}{3|\zeta|+1}$ και $|g(x) - \zeta| < \min\{\frac{\varepsilon}{3|\eta|+1}, \frac{1}{3}\}$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - \eta\zeta| &= |(f(x) - \eta)(g(x) - \zeta) + \eta(g(x) - \zeta) + \zeta(f(x) - \eta)| \\ &\leq |f(x) - \eta||g(x) - \zeta| + |\eta||g(x) - \zeta| + |\zeta||f(x) - \eta| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{3|\zeta|+1}\tfrac{1}{3} + |\eta|\tfrac{\varepsilon}{3|\eta|+1} + |\zeta|\tfrac{\varepsilon}{3|\zeta|+1} < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = \eta\zeta$.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta > 0$ ή $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$. Θεωρούμε έναν l ώστε $0 < l < \lim_{x\to\xi} g(x)$. Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει $f(x) > \frac{M}{l}$ κοντά στο ξ και ισχύει $g(x) > l$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $f(x) > \frac{M}{l}$ και $g(x) > l$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $f(x)g(x) > \frac{M}{l}l = M$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = +\infty = \left\{\begin{matrix}(+\infty)\zeta \\ (+\infty)(+\infty)\end{matrix}\right\}$.
Όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν ουσιαστικά την ίδια αιτιολόγηση. □

Παραδείγματα. (1) $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$, οπότε $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$. Παρατηρήστε ότι η εφαρμογή του κανόνα διαφοράς στο $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x)$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.
(2) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και $\lim_{x\to0}(2 + x) = 2$, οπότε $\lim_{x\to0}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) = \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}(2 + x) = (+\infty)2 = +\infty$. Ο κανόνας αθροίσματος δεν εφαρμόζεται στο $\lim_{x\to0}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x})$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα για περιπτώσεις απροσδιόριστης μορφής.

Παραδείγματα. (1) $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x} = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} x\frac{c}{x} = \lim_{x\to+\infty} c = c$.
(2) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^4} = +\infty$, $\lim_{x\to0} x^2 = 0$ και $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^4}x^2 = \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
(3) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^4} = +\infty$, $\lim_{x\to0}(-x^2) = 0$ και $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^4}(-x^2) = \lim_{x\to0}(-\frac{1}{x^2}) = -\infty$.
(4) $\lim_{x\to0} \frac{1}{|x|} = +\infty$, $\lim_{x\to0} x^2 = 0$ και $\lim_{x\to0} \frac{1}{|x|}x^2 = \lim_{x\to0} |x| = 0$.
(5) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x\to0} x = 0$ και το $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}x = \lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Πρόταση 3.17. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και $k \in \mathbb{N}$, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x)^k = \eta^k$.*

Απόδειξη. $\lim_{x\to\xi} f(x)^k = \lim_{x\to\xi} f(x)\cdots f(x) = \eta\cdots\eta = \eta^k$. □

Παραδείγματα. (1) Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $\xi \in \mathbb{R}$. Επειδή $\lim_{x\to\xi} x = \xi$, είναι $\lim_{x\to\xi} x^k = \xi^k$.
(2) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} x^k = (+\infty)^k = +\infty$.
Επειδή $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, τότε, αν ο k είναι άρτιος, συνεπάγεται $\lim_{x\to-\infty} x^k = (-\infty)^k = +\infty$ και, αν ο k είναι περιττός, συνεπάγεται $\lim_{x\to-\infty} x^k = (-\infty)^k = -\infty$.

Το **αντίστροφο** μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ είναι η συνάρτηση $\frac{1}{f} : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in A$. Η Πρόταση 3.18 λέει ότι το όριο του αντιστρόφου είναι ίσο με το αντίστροφο του ορίου.

Πρόταση 3.18. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και το $\frac{1}{\eta}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή - δηλαδή, αν $\eta \neq 0$ - τότε $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\eta}$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta > 0$. Θεωρούμε έναν l ώστε $0 < l < \eta$, οπότε ισχύει $f(x) > l$ κοντά στο ξ. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει $|f(x) - \eta| < l\eta\varepsilon$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $f(x) > l$ και $|f(x) - \eta| < l\eta\varepsilon$ κοντά στο ξ. Επομένως, ισχύει

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\eta}\right| = \frac{|f(x)-\eta|}{f(x)\eta} < \frac{l\eta\varepsilon}{l\eta} = \varepsilon$$

κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\eta}$.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$ και, επομένως, $|\frac{1}{f(x)} - 0| = \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$ κοντά στο ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = 0 = \frac{1}{+\infty}$.
Οι περιπτώσεις που το όριο είναι αρνητικός αριθμός ή $-\infty$ είναι παρόμοιες. □

Παραδείγματα. (1) $\lim_{x\to 1}(x+1) = 2$, οπότε $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.
(2) $\lim_{x\to+\infty}(x^2 + x + 1) = +\infty$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$.
(3) Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$. Επειδή $\lim_{x\to\xi} x^k = \xi^k$, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{\xi^k}$.
(4) Ο κανόνας δεν ισχύει στην περίπτωση που το όριο μιας συνάρτησης είναι 0. Για παράδειγμα, $\lim_{x\to 0} x = 0$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

Το πρόβλημα στο τελευταίο παράδειγμα είναι ότι η συνάρτηση έχει και θετικές και αρνητικές τιμές σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0. Αν μια συνάρτηση έχει τιμές σταθερού προσήμου, τότε, όπως θα δούμε αμέσως, έχουμε θετικά αποτελέσματα.

Πρόταση 3.19. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$.*
(1) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο ξ, τότε $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
(2) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και ισχύει $f(x) < 0$ κοντά στο ξ, τότε $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Απόδειξη. (1) Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει $|f(x) - 0| < \frac{1}{M}$ κοντά στο ξ. Επειδή ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $|f(x) - 0| < \frac{1}{M}$ και $f(x) > 0$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $0 < f(x) < \frac{1}{M}$ και, επομένως, $\frac{1}{f(x)} > M$ κοντά στο ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
(2) Ομοίως. □

Παράδειγμα. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = 0 - 0 = 0$. Επίσης, ισχύει $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1/x)-(1/x^2)} = +\infty$.

Ο **λόγος δυο συναρτήσεων** $f, g : A \to \mathbb{R}$, όπου $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, είναι η συνάρτηση $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in A$. Τα αποτελέσματα για τη συνάρτηση $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ προκύπτουν από τον κανόνα γινομένου και τον κανόνα αντιστρόφου. Η Πρόταση 3.20 λέει ότι το όριο του λόγου είναι ίσο με τον λόγο των ορίων.

Πρόταση 3.20. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$ και ο λόγος $\frac{\eta}{\zeta}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\eta}{\zeta}$.*

Παραδείγματα. (1) $\lim_{x\to 1}(x^2 + x) = 1^2 + 1 = 2$ και $\lim_{x\to 1}(x - 2) = 1 - 2 = -1$, οπότε $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x}{x-2} = \frac{2}{-1} = -2$.

(2) $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})=1-0+0=1$ και $\lim_{x\to+\infty}(1+2\frac{1}{x})=1+0=1$, οπότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{1-(1/x)+(1/x^2)}{1+(2/x)}=(+\infty)\frac{1}{1}=+\infty$. Παρατηρήστε ότι η άμεση εφαρμογή του κανόνα λόγου στο $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2}$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

(3) **Πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες**. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y=\mu x+\nu$ είναι ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ του γραφήματος της f, οπότε $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x-\nu)=0$. Συνεπάγεται

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\mu x-\nu}{x}=\frac{0}{+\infty}=0$$

και, επομένως,

$$\mu=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι, αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ή αν υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$, τότε δεν υπάρχει ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το όριο αυτό και είναι αριθμός, οπότε η τιμή του είναι η ζητούμενη τιμή του μ. Τώρα, η ζητούμενη τιμή του ν δίνεται από την ισότητα

$$\nu=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x),$$

στην οποία χρησιμοποιούμε την τιμή του μ την οποία μόλις προσδιορίσαμε. Παρατηρούμε και πάλι ότι, αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x)$ ή αν υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$, τότε δεν υπάρχει ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$.
Με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε, αν υπάρχει, την πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$.
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $x+\frac{1}{x}$. Βρίσκουμε διαδοχικά τα $\mu=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})=1$ και $\nu=\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{x}-1x)=0$. Άρα η πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=1x+0=x$. Επίσης: $\mu=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})=1$ και $\nu=\lim_{x\to-\infty}(x+\frac{1}{x}-1x)=0$. Άρα η πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$ είναι πάλι η ευθεία με εξίσωση $y=1x+0=x$.

Ιδου μερικά παραδείγματα για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Παραδείγματα. (1) $\lim_{x\to0}cx=0$, $\lim_{x\to0}x=0$ και $\lim_{x\to0}\frac{cx}{x}=\lim_{x\to0}c=c$.
(2) $\lim_{x\to0}|x|=0$, $\lim_{x\to0}x^2=0$ και $\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}=+\infty$.
(3) $\lim_{x\to0}x^2=0$, $\lim_{x\to0}x=0$ και $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0}x=0$.
(4) $\lim_{x\to0}|x|=0$, $\lim_{x\to0}(-x^2)=0$ και $\lim_{x\to0}\frac{|x|}{-x^2}=\lim_{x\to0}(-\frac{1}{|x|})=-\infty$.
(5) $\lim_{x\to0}x=0$, $\lim_{x\to0}x^2=0$ και το $\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.
(6) Έστω $c>0$. $\lim_{x\to+\infty}cx=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{cx}{x}=\lim_{x\to+\infty}c=c$.
(7) $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$.
(8) $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.
(9) Ισχύει $(2+\sin x)x\geq x$ για κάθε $x>0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty}(2+\sin x)x=+\infty$. Επίσης, $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$. Όμως, το $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2+\sin x)x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2+\sin x)$ δεν υπάρχει, διότι ισχύει $2+\sin x\leq1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και ισχύει $2+\sin x\geq3$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$.

Η **απόλυτη τιμή μιας συνάρτησης** $f:A\to\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $|f|:A\to\mathbb{R}$ με τύπο $|f|(x)=|f(x)|$ για κάθε $x\in A$. Η Πρόταση 3.21 λέει ότι το όριο της απόλυτης τιμής είναι ίσο με την απόλυτη τιμή του ορίου.

Πρόταση 3.21. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to\xi}|f(x)|=|\eta|$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim f(x)=\eta$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε ισχύει $|f(x)-\eta|<\varepsilon$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει

$$\big||f(x)|-|\eta|\big|\leq|f(x)-\eta|<\varepsilon$$

κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi}|f(x)| = |\eta|$.
Έστω $\lim f(x) = +\infty$ ή $\lim f(x) = -\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει $f(x) > M$ ή $f(x) < -M$, αντιστοίχως, κοντά στο ξ. Και στις δυο περιπτώσεις, ισχύει $|f(x)| > M$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi}|f(x)| = +\infty = |\pm\infty|$. □

Παραδείγματα. (1) $\lim_{x\to 1}(x-2) = 1-2 = -1$, οπότε $\lim_{x\to 1}|x-2| = |-1| = 1$.
(2) $\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x^2}) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$, οπότε $\lim_{x\to 0}\left|-\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x^2}\right| = |-\infty| = +\infty$.
(3) Δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 3.21. Είναι $\lim_{x\to\xi}\left|\frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right| = \lim_{x\to\xi} 1 = 1$. Όμως, το $\lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{|x-\xi|}$ δεν υπάρχει.

Η **σύνθεση δυο συναρτήσεων** $f : A \to B$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $g\circ f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in A$. Η Πρόταση 3.22 εκφράζει τον λεγόμενο **κανόνα σύνθεσης** και λέει ότι το όριο της σύνθεσης δυο συναρτήσεων είναι ίσο με το όριο της τελευταίας συνάρτησης.

Πρόταση 3.22. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του B. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, αν ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ και αν $\lim_{y\to\eta} g(y) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to\xi}(g\circ f)(x) = \zeta$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{y\to\eta} g(y) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $g(y) \in N_\zeta(\varepsilon)$ για κάθε $y \in B \cap N^*_\eta(\delta_0)$. Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, ισχύει $f(x) \in N_\eta(\delta_0)$ κοντά στο ξ. Επειδή, επίσης, ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ και $f(x) \in B$ για κάθε $x \in A$, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) \in B \cap N^*_\eta(\delta_0)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $(g\circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \in N_\zeta(\varepsilon)$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi}(g\circ f)(x) = \zeta$. □

Για μια άλλη μορφή του κανόνα σύνθεσης δείτε την ενότητα 4.2.
Εφαρμόζοντας τον κανόνα σύνθεσης, συχνά χρησιμοποιούμε την έκφραση "κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = f(x)$" και γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to\eta} g(y).$$

Παραδείγματα. (1) Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{12}+5}$.
Είναι $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x}+1) = 1$ και $\sqrt{x}+1 \neq 1$ για κάθε $x > 0$. Άρα, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \sqrt{x}+1$, έχουμε $\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{12}+5} = \lim_{y\to 1}\frac{y^4}{y^8+y^{12}+5} = \frac{1}{7}$.
(2) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1\right)$.
Επειδή $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$, με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ είναι $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1\right) = \lim_{y\to+\infty}(y - y^6 + 1) = \lim_{y\to+\infty} y^6(-1 + y^{-5} + y^{-6}) = (+\infty)(-1+0+0) = -\infty$.
(3) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\left((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2} + (\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\right)$.
Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x})/(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}) = 0\frac{1-0}{1+0+0} = 0$ και $\frac{x-1}{x^2+x+1} \neq 0$ για κάθε $x > 1$. Με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$, είναι $\lim_{x\to+\infty}\left((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2} + (\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\right) = \lim_{y\to 0}(y^{-2} + y^{-4}) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
(4) Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε ότι στην Πρόταση 3.22 η υπόθεση ότι "ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ" είναι απαραίτητη. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ και $g(y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } y \neq 0 \\ 1, & \text{αν } y = 0 \end{cases}$
Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$. Δεν είναι σωστό ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ κοντά στο $+\infty$, διότι ισχύει $f(x) = 0$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και, συγκεκριμένα, σε κάθε

$x = n\pi \ \ (n \in \mathbb{N})$. Τώρα, είναι $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } y \neq n\pi \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{αν } y = n\pi \text{ για κάποιον } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$ Επομένως, το $\lim_{x \to +\infty}(g \circ f)(x)$ δεν υπάρχει, διότι ισχύει $(g \circ f)(x) = 0$ για κάθε $x = \frac{\pi}{2} + n\pi \ \ (n \in \mathbb{N})$ και ισχύει $(g \circ f)(x) = 1$ για κάθε $x = n\pi \ \ (n \in \mathbb{N})$.

Τέλος, θα διατυπώσουμε την Πρόταση 3.23, αλλά θα την αποδείξουμε στην ενότητα 4.2.

Η **δύναμη** μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, με εκθέτη την συνάρτηση $g : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f^g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(f^g)(x) = f(x)^{g(x)} \ \ (x \in A)$.

Πρόταση 3.23. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$ και η δύναμη η^ζ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = \eta^\zeta$. Ακόμη, αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = +\infty$.*

Σχόλιο. Θα κάνουμε μια τελευταία παρατήρηση για τα συμπεράσματα αυτής της ενότητας σε σχέση με πλευρικά όρια: όλες οι προτάσεις αυτής της ενότητας ισχύουν για πλευρικά όρια αφού διατυπωθούν κατάλληλα. Απλώς αλλάζουμε το "σημείο συσσώρευσης" σε "από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης", το $\lim_{x\to\xi}$ σε $\lim_{x\to\xi+}$ ($\lim_{x\to\xi-}$), το "κοντά στο ξ" σε "κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του" και το "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ" σε "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του". Ας δούμε δυο ενδεικτικά παραδείγματα. Η Πρόταση 3.6(3) γίνεται:

Αν $f : A \to \mathbb{R}$, αν ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A, αν $u < l$ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά του και $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά του, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$.

Επίσης, η Πρόταση 3.14 γίνεται:

Αν $f, g : A \to \mathbb{R}$, αν ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A, αν $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to\xi-} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$ και το άθροισμα $\eta + \zeta$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\lim_{x\to\xi-}(f(x) + g(x)) = \eta + \zeta$.

Μόνο μια επιπλέον επισήμανση χρειάζεται η Πρόταση 3.22. Οι αλλαγές σε σχέση με τον ξ γίνονται όπως περιγράψαμε παραπάνω. Όμως, σχετικά με τον η πρέπει να προσέξουμε το εξής. Αν υποθέσουμε ότι ο η είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του B, τότε, εκτός από το ότι η f συγκλίνει στον η, πρέπει να υποθέσουμε και ότι ισχύει $f(x) > \eta$ ($f(x) < \eta$) κοντά στο ξ. Για παράδειγμα:

Αν $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, αν ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και ο η είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του B, αν $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$, αν ισχύει $f(x) < \eta$ κοντά στον ξ από δεξιά του και αν $\lim_{y\to\eta-} g(y) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to\xi+}(g \circ f)(x) = \zeta$.

Αντιμετωπίστε πλήρως το πρόβλημα στην άσκηση 2.

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε τις αποδείξεις των Προτάσεων 3.5, 3.6, 3.9, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.18, 3.19 και 3.20.

2. Προσαρμόστε, διατυπώστε και αποδείξτε όλες τις προτάσεις αυτής της ενότητας για πλευρικά όρια συναρτήσεων. Δώστε μεγαλύτερη προσοχή στις διάφορες μορφές της Πρότασης 3.22.

3. Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x\to 0\pm} f(x)$, $\lim_{x\to 1\pm} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ για τις συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ και $f(x) = \begin{cases} |x-1|^{-\frac{1}{4}}, & \text{αν } x \leq 0 \text{ ή } x > 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

4. Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ υπολογίστε τα όρια $\lim_{x\to\xi\pm}[x]$. Για ποιους ξ υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}[x]$;

5. Υπολογίστε τα όρια: $\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x}\right]$, $\lim_{x\to\pm\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

6. Υπολογίστε τα όρια: $\lim_{x\to 2}\frac{1+x}{1-x+x^3}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{1-x^2}{1-x^3}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1+x^{-1}}{1+x^{-2}+x^{-3}}$, $\lim_{x\to 0\pm}\left(x^{-1}+|x|^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-|x|}$, $\lim_{x\to 1}\left((x-1)^{-1}+|x-1|^{-\frac{1}{2}}\right)^2$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x+\frac{3}{x})$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x+1)^3(3x^2+2)^2(x+4)^{13}}{x^{20}}$.

7. Αν $n \in \mathbb{Z}$ - και $\xi \neq 0$ όταν $n \leq 1$ - αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}\frac{x^n-\xi^n}{x-\xi} = n\xi^{n-1}$.

8. Βρείτε με τον κανόνα σύνθεσης τα $\lim_{x\to 0}\left((\frac{x^2+1}{x^5+2})^8 + 3(\frac{x^2+1}{x^5+2})^4 + 1\right)$, $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-\sqrt[4]{\frac{2x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}+\sqrt[4]{\frac{2x+1}{x-1}}+1}$, $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{2(\sqrt{|x|}+\frac{1}{x})^3-3(\sqrt{|x|}+\frac{1}{x})^2+17}$.

9. Υπολογίστε τις πιθανές τιμές του $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ αν γνωρίζουμε ότι το όριο αυτό υπάρχει και ότι ισχύει $f(\sqrt{x}) = -3(f(x))^2+1$ για κάθε $x>0$.

10. Υπολογίστε τα όρια:
(i) $\lim_{x\to 1} f(x)$, αν ισχύει $x-|x-1|^{\frac{1}{2}} < f(x) \leq x+|x-1|^{\frac{1}{2}}$ για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,\frac{3}{2})$.
(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, αν ισχύει $\frac{x+1}{2x-1} < f(x) < \frac{x-1}{2x+1}$ για κάθε $x \leq -7$.
(iii) $\lim_{x\to 1\pm} f(x)$, αν ισχύει $(x-1)f(x) \geq 1$ για κάθε x, $0<|x-1|<\frac{1}{4}$.

11. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $[a] \leq a < [a]+1$, υπολογίστε τα όρια: $\lim_{x\to\pm\infty}[x]$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{[x]}{x}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{[x^2]}{x}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{[\sqrt{x}]}{x}$, $\lim_{x\to 1\pm}\left[\frac{1}{x-1}\right]$.

12. Αν $a,b>0$, υπολογίστε τα όρια $\lim_{x\to 0\pm}\frac{x}{a}[\frac{b}{x}]$, $\lim_{x\to 0\pm}\frac{b}{x}[\frac{x}{a}]$.

13. Έστω $f,g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.
(i) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και έστω ότι η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x)) = +\infty$.
(ii) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ και έστω ότι η g είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x)) = -\infty$.
(iii) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και έστω ότι η g είναι φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = 0$.
(iv) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και έστω ότι η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.
(v) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και έστω ότι η g έχει αρνητικό άνω φράγμα κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = -\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

14. Υπολογίζοντας κατάλληλα όρια, δείτε:
(i) αν $\frac{3x^2+7x+1}{x^2-5x+1} < \frac{301}{100}$ κοντά στο $+\infty$.
(ii) αν $\frac{x^8+1}{4x^4-x^2+2x-1} \geq \frac{5}{8}$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 1.
(iii) αν $x^5-7x^3+x^2 \leq 10^7$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$.
(iv) αν $-10^{-8} < \frac{x^4+13x^3+25x^2+33}{x^5+2x+1} < 10^{-7}$ κοντά στο $-\infty$.

15. Έστω $f,g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x\to\xi} f(x) < \lim_{x\to\xi} g(x)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο ξ.

16. Υπολογίζοντας κατάλληλα όρια βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις $\frac{1}{x^3}$, $\frac{x^2-2x+2}{x^2+1}$, $-\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{|x|}}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x<0 \\ -\frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{αν } x>0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{αν } x<0 \\ x, & \text{αν } x>0 \end{cases}$ είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες κοντά στον 0.

17. Βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες - κατακόρυφες και πλάγιες - των γραφημάτων των συναρτήσεων $\frac{1}{x}$, x^2, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 1 \\ \frac{3x}{x-1}, & \text{αν } x<1 \end{cases}$

18. Έστω $f,g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} \max\{f(x),g(x)\} = \max\{\eta,\zeta\}$ και $\lim_{x\to\xi} \min\{f(x),g(x)\} = \min\{\eta,\zeta\}$.

19. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\eta}$.

20. (i) Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x))$ και όχι τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$.
(ii) Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x)$ και όχι τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$.

21. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A, $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $f(x) \leq \eta$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$. Αποδείξτε ότι $\sup\{f(x)\,|\,x \in A, x \neq \xi\} = \eta$.

22. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\delta > 0$, είναι $\inf\{f(x)\,|\,x \in A, 0<|x-\xi|<\delta\} \leq \eta \leq \sup\{f(x)\,|\,x \in A, 0<|x-\xi|<\delta\}$.

3.4 Όρια συναρτήσεων και ακολουθίες.

Θεώρημα 3.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Θεωρούμε και τις ακολουθίες (x_n) στο A με τις ιδιότητες: (i) ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και (ii) $x_n \to \xi$.*
(1) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) ισχύει $f(x_n) \to \eta$.
(2) Αντιστρόφως, αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))$ έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Απόδειξη. (1) *Πρώτος τρόπος:* Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Έστω ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii). Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N^*_\xi(\delta_0)$. Επειδή $x_n \to \xi$, ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\delta_0)$. Επειδή $x_n \in A$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n \in A \cap N^*_\xi(\delta_0)$. Άρα ισχύει τελικά $f(x_n) \in N_\eta(\varepsilon)$. Άρα $f(x_n) \to \eta$.
Δεύτερος τρόπος: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Έστω ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii). Θεωρούμε την (x_n) ως *συνάρτηση* $x : \mathbb{N} \to A$, οπότε ορίζεται η σύνθεση $f \circ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$(f \circ x)(n) = f(x(n)) = f(x_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε από την Πρόταση 3.22, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από n σε $x = x(n) = x_n$, συνεπάγεται

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}(f(x(n)) = \lim_{x\to\xi} f(x) = \eta.$$

(2) Έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))$ έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$. Έστω τυχούσες ακολουθίες $(x_n{}')$, $(x_n{}'')$ στο A με τις ιδιότητες (i), (ii), οπότε οι αντίστοιχες ακολουθίες $(f(x_n{}'))$, $(f(x_n{}''))$ έχουν όρια (*πιθανόν διαφορετικά*) στο $\overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε τη "μικτή" ακολουθία

$$(x_1{}', x_1{}'', x_2{}', x_2{}'', x_3{}', x_3{}'', \dots),$$

η οποία έχει τις ιδιότητες (i), (ii). Άρα η αντίστοιχη ακολουθία

$$\big(f(x_1{}'), f(x_1{}''), f(x_2{}'), f(x_2{}''), f(x_3{}'), f(x_3{}''), \dots\big)$$

έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$. Άρα οι $(f(x_n{}'))$, $(f(x_n{}''))$, ως υποακολουθίες της τελευταίας ακολουθίας, έχουν *το ίδιο όριο*. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$ ώστε για κάθε (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) να ισχύει $f(x_n) \to \eta$.

Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι *δεν* ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Τότε υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε να είναι λάθος το ότι ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon_0)$ κοντά στο ξ. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει $f(x) \notin N_\eta(\varepsilon_0)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A η οποία έχει τις ιδιότητες (i), (ii) και ώστε να ισχύει $f(x_n) \notin N_\eta(\varepsilon_0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, το τελευταίο συνεπάγεται ότι *δεν* ισχύει $f(x_n) \to \eta$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. $\square$

Παραδείγματα. (1) Από το $\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$ προκύπτει το $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Διότι η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sqrt{x}$, ισχύει $\frac{1}{n} \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\frac{1}{n} \to 0$.
(2) Από το $\lim_{x\to e}(1+x^2-3x^3) = 1+e^2-3e^3$ προκύπτει το $1+(1+\frac{1}{n})^{2n}-3(1+\frac{1}{n})^{3n} \to 1+e^2-3e^3$. Διότι η ακολουθία $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$ είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $1+x^2-3x^3$, ισχύει $(1+\frac{1}{n})^n \neq e$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $(1+\frac{1}{n})^n \to e$.
(3) Τώρα θα δούμε ότι στο Θεώρημα 3.4 η υπόθεση ότι "ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$" είναι απαραίτητη. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ και $x_n \to 0$. Δεν είναι σωστό ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, διότι ισχύει $x_n = 0$ για κάθε άρτιο n. Τώρα, ισχύει $f(x_n) = 0$ για κάθε περιττό n και $f(x_n) = 1$ για κάθε άρτιο n και, επομένως, η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν έχει όριο.

Υπάρχουν και οι παραλλαγές του Θεωρήματος 3.4 όπου το "σημείο συσσώρευσης" μετατρέπεται σε "από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης", το $x_n \neq \xi$ μετατρέπεται σε $x_n > \xi$ ($x_n < \xi$) και το $\lim_{x\to\xi}$ μετατρέπεται σε $\lim_{x\to\xi+}$ ($\lim_{x\to\xi-}$). Δείτε την άσκηση 1.

Το Θεώρημα 3.4 χρησιμοποιείται συνήθως με δυο τρόπους. Όπως κάναμε στα δυο προηγούμενα παραδείγματα, γνωρίζοντας ήδη κάποια όρια συναρτήσεων, βγάζουμε συμπεράσματα για όρια ακολουθιών. Επίσης, έστω ότι δε γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$. Αν βρούμε μια ακολουθία (x_n) στο πεδίο ορισμού της f η οποία έχει όριο ξ, όλοι οι όροι της είναι $\neq \xi$ και η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν έχει όριο, συμπεραίνουμε ότι ούτε το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει. Ή, αν βρούμε δυο ακολουθίες $(x_n{}')$, $(x_n{}'')$ στο πεδίο ορισμού της f οι οποίες έχουν όριο ξ, όλοι οι όροι τους είναι $\neq \xi$ και οι ακολουθίες $(f(x_n{}'))$ και $(f(x_n{}''))$ έχουν διαφορετικά όρια, συμπεραίνουμε ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παραδείγματα. (1) Θα ξαναποδείξουμε ότι το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ δεν υπάρχει.
Η ακολουθία (n) είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $(-1)^{[x]}$ και $n\to+\infty$ αλλά η ακολουθία $((-1)^{[n]})=((-1)^n)$ δεν έχει όριο. Άρα ούτε το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ υπάρχει.
Με την ακολουθία $(-n)$ αποδεικνύεται ότι το $\lim_{x\to-\infty}(-1)^{[x]}$ δεν υπάρχει.

(2) Θα ξαναποδείξουμε ότι το $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ δεν υπάρχει.
Η ακολουθία $(\frac{\pi}{2}+n\pi)$ είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sin x$ και $\frac{\pi}{2}+n\pi\to+\infty$ αλλά η ακολουθία $(\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi))=((-1)^n)$ δεν έχει όριο. Άρα ούτε το $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ υπάρχει.
Με την ακολουθία $(\frac{\pi}{2}-n\pi)$ αποδεικνύεται ότι το $\lim_{x\to-\infty}\sin x$ δεν υπάρχει και με τις ακολουθίες $(n\pi)$ και $(-n\pi)$ αποδεικνύεται ότι τα $\lim_{x\to\pm\infty}\cos x$ δεν υπάρχουν.

Ασκήσεις.

1. Προσαρμόστε το Θεώρημα 3.4 στο πλαίσιο του δεξιού (αριστερού) πλευρικού ορίου.

2. Με κατάλληλες ακολουθίες, αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to0\pm}(-1)^{[\frac{1}{x}]}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x-[x])$, $\lim_{x\to0\pm}\sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to0\pm}\cos\frac{1}{x}$.

3. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, ακολουθία (x_n) στο A ώστε να ισχύει $x_n\neq\xi$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x_n\to\xi$.
(i) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ και ισχύει $f(x_n)\geq l$ για άπειρους $n\in\mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}f(x)\geq l$.
(ii) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ και ισχύει $f(x_n)\leq u$ για άπειρους $n\in\mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}f(x)\leq u$.
(iii) Αν $u<l$ και ισχύει $f(x_n)\geq l$ για άπειρους $n\in\mathbb{N}$ και $f(x_n)\leq u$ για άπειρους $n\in\mathbb{N}$, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}f(x)$.

4. (i) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau>0$, δηλαδή έστω $f(x+\tau)=f(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει ένα από τα $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση. *Υπόδειξη:* Έστω $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$ και έστω ότι υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0)\neq\eta$. Θεωρώντας την ακολουθία $(x_0+n\tau)$, καταλήξτε σε αντίφαση. Συμπεράνατε ότι $\eta\in\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $f(x)=\eta$ για κάθε x. Ποιά ακολουθία θα χρησιμοποιήσετε στην περίπτωση του $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$;
(ii) Υπάρχουν τα $\lim_{x\to\pm\infty}\cos x$, $\lim_{x\to\pm\infty}\sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x-[x])$;

5. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.4 αλλά και τα Θεωρήματα 3.1 και 3.3, αποδείξτε όλες τις προτάσεις της ενότητας 3.3 βασισμένοι στις αντίστοιχες προτάσεις της ενότητας 2.4.

3.5 Παραδείγματα ορίων.

3.5.1 Ρητές συναρτήσεις.

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. Τότε $\lim_{x\to\xi}p(x)=\lim_{x\to\xi}(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n=p(\xi)$.

$$\lim_{x\to\xi}p(x)=p(\xi).$$

Έστω ότι η p είναι βαθμού ≥1, δηλαδή $n\geq1$, $a_n\neq0$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$p(x)=a_nx^n(\tfrac{a_0}{a_n}\tfrac{1}{x^n}+\cdots+\tfrac{a_{n-1}}{a_n}\tfrac{1}{x}+1),$$

οπότε $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$. Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = a_n(+\infty), \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} a_n(+\infty), & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ a_n(-\infty), & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases} \qquad (a_n \neq 0, n \geq 1).$$

Παρατηρήστε ότι τα $\lim_{x\to\pm\infty} p(x)$ εξαρτώνται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο. Για παράδειγμα: $\lim_{x\to+\infty}(-5x^3 + x^2 - 4x - 12) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(-5x^3 + x^2 - 4x - 12) = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty}(7x^4 + x^3 - x + 5) = +\infty$.

Έστω ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_n, b_m \neq 0$. Τότε γράφουμε

$$r(x) = \frac{a_nx^n}{b_mx^m} \frac{\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x}+1}{\frac{b_0}{b_m}\frac{1}{x^m}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{b_m}\frac{1}{x}+1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} r(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}(+\infty), & \text{αν } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n < m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}(+\infty), & \text{αν } n-m \text{ άρτιος} > 0 \\ \frac{a_n}{b_m}(-\infty), & \text{αν } n-m \text{ περιττός} > 0 \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n < m \end{cases}$$

Τα $\lim_{x\to\pm\infty} r(x)$ εξαρτώνται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή. Για παράδειγμα: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+4}{2x^3+1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+4}{2x^2+1} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2}{x^4+1} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+4}{2x^2-1} = \frac{3}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4}{-x^4+2} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3-1}{2x+1} = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4-2}{2x+1} = -\infty$.
Αν $\xi \in \mathbb{R}$, τότε για το $\lim_{x\to\xi} r(x)$, έχουμε τις εξής περιπτώσεις.
Αν $b_0 + b_1\xi + \cdots + b_m\xi^m \neq 0$, τότε $\lim_{x\to\xi} r(x) = \frac{a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n}{b_0+b_1\xi+\cdots+b_m\xi^m} = r(\xi)$. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to\xi} r(x) = r(\xi).$$

Για παράδειγμα: $\lim_{x\to1} \frac{3x-2}{x^4+2x^3-4} = \frac{3\cdot1-2}{1^4+2\cdot1^3-4} = -1$.
Αν $b_0 + b_1\xi + \cdots + b_m\xi^m = 0$, τότε το $x - \xi$ διαιρεί το $b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$. Αν $(x-\xi)^k$ είναι η μέγιστη δύναμη του $x - \xi$ η οποία διαιρεί το $b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m = (x-\xi)^k q(x),$$

όπου $q(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δε διαιρείται από το $x - \xi$ και, επομένως, $q(\xi) \neq 0$. Τώρα, είτε το $x - \xi$ διαιρεί το $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ είτε όχι, μπορούμε να γράψουμε

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = (x-\xi)^l p(x),$$

όπου $l \geq 0$ και $p(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δε διαιρείται από το $x - \xi$ και, επομένως, $p(\xi) \neq 0$. Συνολικά, λοιπόν, έχουμε ότι $r(x) = (x-\xi)^{l-k}\frac{p(x)}{q(x)}$ και, επειδή $\lim_{x\to\xi} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\xi)}{q(\xi)} \neq 0$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi} r(x) \begin{cases} = 0, & \text{αν } l > k \\ = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}, & \text{αν } l = k \\ = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}(+\infty), & \text{αν } k-l \text{ άρτιος} > 0 \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } k-l \text{ περιττός} > 0 \end{cases}$$

Ειδικώτερα, αν ο $k-l$ είναι περιττός >0, τότε

$$\lim_{x\to\xi-} r(x)=\frac{p(\xi)}{q(\xi)}(-\infty), \qquad \lim_{x\to\xi+} r(x)=\frac{p(\xi)}{q(\xi)}(+\infty).$$

Παραδείγματα. (1) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$. Ο 1 είναι ρίζα του x^4-2x^2+1, οπότε το x^4-2x^2+1 διαιρείται από το $x-1$. Παραγοντοποιούμε είτε με τον αλγόριθμο της ευκλείδειας διαίρεσης είτε, πιο απλά: $x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2$. Ο 1 είναι ρίζα και του x^3-x^2-x+1, οπότε: $x^3-x^2-x+1=(x-1)x^2-(x-1)=(x-1)^2(x+1)$. Άρα $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}$ για κάθε $x\neq 1,-1$. Επομένως, $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.
(2) Για το $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$ βλέπουμε ότι ο 1 είναι ρίζα του x^3-x^2-x+1 και, όπως πριν: $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$. Ο 1 είναι ρίζα και του x^3+4x^2+x-6, οπότε: $x^3+4x^2+x-6=x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6=(x-1)x^2+(x-1)5x+(x-1)6=(x-1)(x^2+5x+6)$. Το $x-1$ δε διαιρεί το x^2+5x+6 διότι ο 1 δεν είναι ρίζα του. Άρα $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=\frac{(x-1)(x^2+5x+6)}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{1}{x-1}\frac{x^2+5x+6}{x+1}$.
Άρα: $\lim_{x\to 1+}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=(+\infty)\frac{1^2+5\cdot 1+6}{1+1}=+\infty$ και $\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=(-\infty)\frac{1^2+5\cdot 1+6}{1+1}=-\infty$.
Επομένως, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$.

3.5.2 Δυνάμεις.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης p_a περιέχει το $(0,+\infty)$. Το πρώτο όριο που θα αποδείξουμε είναι το

$$\lim_{x\to\xi} x^a=\xi^a \quad (\xi>0).$$

Κατ' αρχάς έστω $a>0$. Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει $|x^a-\xi^a|<\varepsilon$ για κάθε $x>0$, $0<|x-\xi|<\delta_0$. Ορίζουμε τον

$$\varepsilon'=\min\{\varepsilon,\tfrac{\xi^a}{2}\}>0,$$

οπότε $\varepsilon'\leq\varepsilon$ και $\varepsilon'<\xi^a$. Ισχύει $|x^a-\xi^a|<\varepsilon$ αρκεί να ισχύει $|x^a-\xi^a|<\varepsilon'$ αρκεί να ισχύει $\xi^a-\varepsilon'<x^a<\xi^a+\varepsilon'$ αρκεί να ισχύει $(\xi^a-\varepsilon')^{\frac{1}{a}}<x<(\xi^a+\varepsilon')^{\frac{1}{a}}$. Παρατηρούμε ότι ο ξ βρίσκεται ανάμεσα στους $(\xi^a-\varepsilon')^{\frac{1}{a}}$, $(\xi^a+\varepsilon')^{\frac{1}{a}}$. Επιλέγουμε

$$\delta_0=\min\left\{\xi-(\xi^a-\varepsilon')^{\frac{1}{a}},(\xi^a+\varepsilon')^{\frac{1}{a}}-\xi\right\}.$$

Τότε για κάθε x, $0<|x-\xi|<\delta_0$ ισχύει $(\xi^a-\varepsilon')^{\frac{1}{a}}<x<(\xi^a+\varepsilon')^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $|x^a-\xi^a|<\varepsilon$.
Αν $a<0$, τότε $-a>0$ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi}x^a=\lim_{x\to\xi}(\frac{1}{x})^{-a}=(\frac{1}{\xi})^{-a}=\xi^a$.
Τέλος, αν $a=0$, τότε $\lim_{x\to\xi}x^0=\lim_{x\to\xi}1=1=\xi^0$.

Τα όρια

$$\lim_{x\to 0+}x^a=\begin{cases}0, & \text{αν } a>0\\ 1, & \text{αν } a=0\\ +\infty, & \text{αν } a<0\end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty}x^a=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } a>0\\ 1, & \text{αν } a=0\\ 0, & \text{αν } a<0\end{cases}$$

έχουν ήδη αποδειχθεί ως παραδείγματα.

Αν θέλουμε να μελετήσουμε το όριο $\lim_{x\to\xi}x^a$ με $\xi<0$ καθώς και τα όρια $\lim_{x\to-\infty}x^a$ και $\lim_{x\to 0-}x^a$, θα πρέπει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης p_a να περιέχει και το διάστημα $(-\infty,0)$, δηλαδή ο a να είναι ακέραιος. Σ' αυτήν την περίπτωση το όριο $\lim_{x\to\xi}x^a$ εμπίπτει στο πλαίσιο της προηγούμενης υποενότητας.

Παραδείγματα. (1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1} = \lim_{y\to+\infty}\sqrt{y} = +\infty$.
(2) Θα αποδείξουμε το $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = 0$. Από το αποτέλεσμα του (1) φαίνεται ότι το όριο αυτό εμπίπτει στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $(+\infty)-(+\infty)$. Χρησιμοποιώντας την $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{(+\infty)+(+\infty)} = 0.$$

(3) $\lim_{x\to3}\sqrt[5]{\frac{x+1}{x^2+1}} = \lim_{y\to\frac{2}{5}}\sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{\frac{2}{5}}$.

3.5.3 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.

Θα μελετήσουμε τα όρια της εκθετικής συνάρτησης $\exp_a$. Κατ' αρχάς:

$$\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi .$$

Έστω $a>1$. Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει $|a^x-a^\xi|<\varepsilon$ για κάθε x, $0<|x-\xi|<\delta_0$. Ορίζουμε τον

$$\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \tfrac{a^\xi}{2}\} > 0,$$

οπότε $\varepsilon'\le\varepsilon$ και $\varepsilon'<a^\xi$. Ισχύει $|a^x-a^\xi|<\varepsilon$ αρκεί να ισχύει $|a^x-a^\xi|<\varepsilon'$ αρκεί να ισχύει $a^\xi-\varepsilon'<a^x<a^\xi+\varepsilon'$ αρκεί να ισχύει $\log_a(a^\xi-\varepsilon')<x<\log_a(a^\xi+\varepsilon')$. O ξ βρίσκεται ανάμεσα στους $\log_a(a^\xi-\varepsilon')$, $\log_a(a^\xi+\varepsilon')$. Αν επιλέξουμε

$$\delta_0 = \min\left\{\xi-\log_a(a^\xi-\varepsilon'), \log_a(a^\xi+\varepsilon')-\xi\right\},$$

τότε για κάθε x, $0<|x-\xi|<\delta_0$ ισχύει $\log_a(a^\xi-\varepsilon')<x<\log_a(a^\xi+\varepsilon')$ και, επομένως, $|a^x-a^\xi|<\varepsilon$.
Αν $0<a<1$, τότε $\frac{1}{a}>1$, οπότε $\lim_{x\to\xi}a^x = \lim_{x\to\xi}\frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{(1/a)^\xi} = a^\xi$.
Τέλος, αν $a=1$, τότε $\lim_{x\to\xi}1^x = \lim_{x\to\xi}1 = 1 = 1^\xi$.
Το επόμενο όριο είναι το

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty\,, & \text{αν } a>1\\ 1\,, & \text{αν } a=1\\ 0\,, & \text{αν } 0<a<1\end{cases}$$

Έστω $a>1$. Έστω $M>0$. Θα βρούμε $N_0>0$ ώστε να ισχύει $a^x>M$ για κάθε $x>N_0$. Ισχύει $a^x>M$ αρκεί να ισχύει $x>\log_a M$. Επιλέγουμε οποιονδήποτε $N_0>0$ ώστε $N_0\ge\log_a M$. Τότε για κάθε $x>N_0$ ισχύει $x>\log_a M$ και, επομένως, $a^x>M$.
Αν $0<a<1$, τότε $\frac{1}{a}>1$ και, επομένως $\lim_{x\to+\infty}a^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$.
Τέλος, αν $a=1$, τότε $\lim_{x\to+\infty}1^x = \lim_{x\to+\infty}1 = 1$.
Ακόμη:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0\,, & \text{αν } a>1\\ 1\,, & \text{αν } a=1\\ +\infty\,, & \text{αν } 0<a<1\end{cases}$$

Τα όρια αυτά μπορούν να αποδειχθούν βάσει των ορισμών, αλλά και από τα προηγούμενα όρια με τον κανόνα σύνθεσης. Για παράδειγμα, αν $a>1$, τότε $\lim_{x\to-\infty}a^x = \lim_{y\to+\infty}a^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{a^y} = \frac{1}{+\infty} = 0$. Η απόδειξη είναι το ίδιο απλή αν $a=1$ ή $0<a<1$.
Τώρα θεωρούμε τη λογαριθμική συνάρτηση $\log_a$. Το πρώτο όριο είναι το:

$$\lim_{x\to\xi}\log_a x = \log_a\xi \quad (\xi>0).$$

Έστω $a > 1$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \varepsilon$ για κάθε $x > 0$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $\log_a \xi - \varepsilon < \log_a x < \log_a \xi + \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $\xi a^{-\varepsilon} < x < \xi a^{\varepsilon}$. Ο ξ είναι ανάμεσα στους $\xi a^{-\varepsilon}$, ξa^{ε}. Αν επιλέξουμε

$$\delta_0 = \min\left\{\xi - \xi a^{-\varepsilon}, \xi a^{\varepsilon} - \xi\right\},$$

τότε για κάθε $x > 0$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$ ισχύει $\xi a^{-\varepsilon} < x < \xi a^{\varepsilon}$, οπότε $|\log_a x - \log_a \xi| < \varepsilon$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to\xi} \log_a x = -\lim_{x\to\xi} \log_{1/a} x = -\log_{1/a} \xi = \log_a \xi$.

Κατόπιν,

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty\,, & \text{αν } a > 1 \\ -\infty\,, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Έστω $a > 1$. Έστω $M > 0$. Θα βρούμε $N_0 > 0$ ώστε να ισχύει $\log_a x > M$ για κάθε $x > N_0$. Ισχύει $\log_a x > M$ αρκεί να ισχύει $x > a^M$. Άρα, αν επιλέξουμε $N_0 = a^M$, τότε για κάθε $x > N_0$ ισχύει $x > a^M$ και, επομένως, $\log_a x > M$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\lim_{x\to+\infty} \log_{1/a} x = -\infty$.

Τέλος:

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty\,, & \text{αν } a > 1 \\ +\infty\,, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα, αν $a > 1$, τότε $\lim_{x\to 0+} \log_a x = \lim_{y\to+\infty} \log_a \frac{1}{y} = -\lim_{y\to+\infty} \log_a y = -(+\infty) = -\infty$. Ομοίως, αν $0 < a < 1$.

Αξίζει να γράψουμε ξεχωριστά τα όρια αυτής της ενότητας στην περίπτωση $a = e$, δηλαδή για τη συνήθη εκθετική και τη συνήθη λογαριθμική συνάρτηση:

$$\lim_{x\to\xi} e^x = e^{\xi}\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to\xi} \log x = \log \xi \quad (\xi > 0), \qquad \lim_{x\to 0} \log x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty.$$

Τέλος, θα δούμε ένα σημαντικό παράδειγμα.

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση $(1 + \frac{1}{x})^x$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Γνωρίζουμε ότι $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$. Συνεπάγεται

$$(1 + \tfrac{1}{n+1})^n = (1 + \tfrac{1}{n+1})^{n+1}/(1 + \tfrac{1}{n+1}) \to \tfrac{e}{1} = e$$

και

$$(1 + \tfrac{1}{n})^{n+1} = (1 + \tfrac{1}{n})^n (1 + \tfrac{1}{n}) \to e \cdot 1 = e.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$e - \varepsilon < (1 + \tfrac{1}{n+1})^n < e + \varepsilon, \qquad e - \varepsilon < (1 + \tfrac{1}{n})^{n+1} < e + \varepsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Τότε για κάθε (όχι κατ' ανάγκη φυσικό) $x > n_0$ συνεπάγεται $[x] \geq n_0$, οπότε

$$e - \varepsilon < \left(1 + \tfrac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq (1 + \tfrac{1}{x})^x \leq \left(1 + \tfrac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e + \varepsilon.$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 > 0$ ώστε να ισχύει $e - \varepsilon < (1 + \frac{1}{x})^x < e + \varepsilon$ ή, ισοδύναμα, $|(1 + \frac{1}{x})^x - e| < \varepsilon$ για κάθε $x > n_0$.

3.5.4 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Από την $|\sin x| \le |x|$ και την $\cos x - \cos\xi = -2\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{x+\xi}{2}$, βρίσκουμε

$$|\cos x - \cos\xi| = 2\big|\sin\tfrac{x-\xi}{2}\big|\big|\sin\tfrac{x+\xi}{2}\big| \le 2\big|\sin\tfrac{x-\xi}{2}\big| \le 2\big|\tfrac{x-\xi}{2}\big| = |x-\xi|.$$

Τώρα, έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta_0 = \varepsilon$ και, τότε, για κάθε x, $0 < |x-\xi| < \delta_0$ ισχύει $|\cos x - \cos\xi| \le |x-\xi| < \varepsilon$. Άρα

$$\lim_{x\to\xi}\cos x = \cos\xi.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, από την $\sin x - \sin\xi = 2\sin\frac{x-\xi}{2}\cos\frac{x+\xi}{2}$ αποδεικνύουμε ότι $|\sin x - \sin\xi| \le |x-\xi|$ και, επομένως,

$$\lim_{x\to\xi}\sin x = \sin\xi.$$

Από τον κανόνα λόγου:

$$\lim_{x\to\xi}\tan x = \tan\xi \quad \big(\xi \ne \tfrac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\big),$$
$$\lim_{x\to\xi}\cot x = \cot\xi \quad (\xi \ne k\pi, k\in\mathbb{Z}).$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί, επίσης, με τον κανόνα λόγου ότι:

$$\lim_{x\to\xi-}\tan x = +\infty, \quad \lim_{x\to\xi+}\tan x = -\infty \qquad \big(\xi = \tfrac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\big),$$
$$\lim_{x\to\xi-}\cot x = -\infty, \quad \lim_{x\to\xi+}\cot x = +\infty \qquad (\xi = k\pi, k\in\mathbb{Z}).$$

Παράδειγμα. Αξίζει να αποδείξουμε ακόμα δυο πολύ χρήσιμα όρια:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Και τα δυο όρια εντάσσονται στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $\frac{0}{0}$.
Συνδυάζοντας την ανισότητα $|\sin x| \le |x|$ και την $|x| \le |\tan x|$, η οποία ισχύει όταν $|x| < \frac{\pi}{2}$, βλέπουμε ότι

$$\cos x \le \tfrac{\sin x}{x} \le 1$$

για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Επειδή $\lim_{x\to0}\cos x = \cos 0 = 1$, με παρεμβολή συνεπάγεται $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$.
Για το δεύτερο όριο γράφουμε

$$\lim_{x\to0}\tfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{\sin(x/2)}{x/2}\Big)^2 = \lim_{y\to0}\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\sin y}{y}\big)^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Παραδείγματα. (1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$ και $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}$. Άρα $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x} = 1\cdot1 = 1$.
(2) Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ γράφουμε $\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(3x)/(3x)}{\sin(2x)/(2x)}$. Είναι $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y} = 1$ και $\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y} = 1$. Επομένως, $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{3}{2}$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty}(x^4 - 4x^3)$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x+1}{-3x^4+x^2+1}$, $\lim_{x\to1\pm}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^4-x^3+x^2-1}$, $\lim_{x\to1\pm}\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4+x^3-4x^2+x+1}$, $\lim_{x\to1\pm}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3}$.

2. Βρείτε τα $\lim_{x\to 1}(x^2-1)^{\sqrt{2}}$, $\lim_{x\to 0}(2x^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^{-2}+2x^{\frac{6}{5}}-4}{x^{\frac{6}{5}}-2x^{\frac{9}{8}}+2}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{6}{5}}}{4x^{\frac{4}{3}}+2}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{7}{4}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^2+3x^{\frac{15}{8}}}$.

3. Έστω $a\neq 0$. Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x\to 1\pm}\frac{1}{x^a-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^a-1)^2}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^{3a}-1}{x^a-1}$.

4. Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$, $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2\sqrt{x}}-x-\sqrt{x})$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$.

5. Με τον κανόνα σύνθεσης, βρείτε τα $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{3x^2-7x}{x^2+1}}$, $\lim_{x\to 0\pm}\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$, $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-3\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+7\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-3\sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+7\sqrt[7]{\frac{x+1}{x-1}}+1}$.

6. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\left((\frac{2^n}{4^n+1})^{\frac{3}{4}}\right)$, $\left((\frac{n^3+n+1}{2n^2-1})^{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\sqrt[4]{\frac{n^5+n^3+1}{2n^6+n^2+1}}\right)$, $\left(\sqrt[5]{\frac{2^n-4^n}{2^n-3^n+2}}\right)$.

7. Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty}(e^x-e^{2x}+1)$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{2x}+e^x+1}{2e^{2x}+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{2x}})$, $\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{e^x-1}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(e^x-1)^2}$, $\lim_{x\to+\infty}((\log x)^2-\log x)$, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(2x)}{\log(3x)}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\log|x|)^7-\log|x|}{(\log|x|)^5+1}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{1}{\log x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1+2(\log x)^2}{2+2(\log x)^3}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2(\log x)^2}{2+2(\log x)^3}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\log\frac{e^x}{e^{\frac{x}{2}}+1}$.

8. Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών $\left(e^{\frac{-n^3}{n+1}}\right)$, $\left(\log\frac{n+1}{n^2}\right)$, $\left(\log\frac{e^{2n}+1}{e^n+1}\right)$, $\left(\frac{(\log\frac{n}{n^2+1})^2-\log\frac{n}{n^2+1}+2}{-(\log\frac{n}{n^2+1})^2+4\log\frac{n}{n^2+1}-8}\right)$.

9. (i) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\frac{1}{e}$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{t}{x})^x=e^t$, διακρίνοντας περιπτώσεις $t>0$, $t=0$, $t<0$.

10. Βρείτε τα όρια $\lim_{x\to 0}x\cot x$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\sin x)^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(13x)+x^2}{(\sin(7x))^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x+\sin x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(8x)-\cos(15x)}{x^2}$, $\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(3x)}{\sin x}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

11. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+}x^a\sin x=\begin{cases}0, & \text{αν } a>-1\\ 1, & \text{αν } a=-1\\ +\infty, & \text{αν } a<-1\end{cases}$

12. Αν $a>0$, αποδείξτε με παρεμβολή ότι $\lim_{x\to 0+}x^a\sin\frac{1}{x}=0$.

13. Έστω $x_n\to 0$ και $x_n\neq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\frac{\sin x_n}{x_n}\to 1$ και $\frac{1-\cos x_n}{{x_n}^2}\to\frac{1}{2}$.
Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών: $(n\sin\frac{\pi}{n})$, $(\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n})$, $(n^2(1-\cos\frac{\pi}{n}))$, $(\frac{1}{n}\cot\frac{\pi}{2n})$.

14. (i) Θεωρήστε τη συνάρτηση $x\sin x$ και σχεδιάστε το γράφημά της. Παρατηρήστε ότι το γράφημα βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y=-x$ και $y=x$ και ότι στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x=1$ το γράφημα "ακουμπά" την ευθεία $y=x$ ενώ στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x=-1$ το γράφημα "ακουμπά" την ευθεία $y=-x$. Σε ποια σημεία το γράφημα τέμνει τον x-άξονα; Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\pm\infty}x\sin x$.
(ii) Θεωρήστε τη συνάρτηση $\sin\frac{1}{x}$ και σχεδιάστε το γράφημά της. Παρατηρήστε ότι το γράφημα βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y=-1$ και $y=1$. Βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων $\sin\frac{1}{x}=1$ και $\sin\frac{1}{x}=-1$. Παρατηρήστε ότι οι λύσεις των εξισώσεων αυτών καθορίζουν άπειρα

διαδοχικά υποδιαστήματα του $(0,+\infty)$ και του $(-\infty,0)$ τα οποία "συσσωρεύονται" στον 0 και στα οποία η $\sin\frac{1}{x}$ είναι εναλλάξ γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα. Παρατηρήστε, επίσης, ότι στις λύσεις της εξίσωσης $\sin\frac{1}{x}=1$ το γράφημα "ακουμπά" την ευθεία $y=1$ ενώ στις λύσεις της εξίσωσης $\sin\frac{1}{x}=-1$ το γράφημα "ακουμπά" την ευθεία $y=-1$. Σε ποια σημεία το γράφημα τέμνει τον x-άξονα; Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to 0\pm}\sin\frac{1}{x}$.
(iii) Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων $x^2\sin x$, $\sqrt{x}\sin x$, $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\pm\infty}x^2\sin x$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sin x$ και $\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

15. Αποδείξτε ότι, αν $a\leq 0$, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0+}x^a\sin\frac{1}{x}$. Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 12.

3.6 Μονότονες συναρτήσεις.

Το Θεώρημα 3.5 είναι ιδιαίτερα σημαντικό; τόσο όσο και το αντίστοιχο Θεώρημα 2.1 για μονότονες ακολουθίες. Το Θεώρημα 3.5 ουσιαστικά λέει ότι μια μονότονη συνάρτηση έχει οπωσδήποτε όριο και ότι, αν επιπλέον η συνάρτηση είναι φραγμένη, τότε το όριό της είναι αριθμός.

Θεώρημα 3.5. *(1) Έστω $\xi\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $A\subseteq(-\infty,\xi)$, $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι αύξουσα, τότε $\lim_{x\to\xi}f(x)=\sup\{f(x)\,|\,x\in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι άνω φραγμένη, είτε $+\infty$, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη.*
(2) Με τις υποθέσεις του (1), αν η f είναι φθίνουσα, τότε $\lim_{x\to\xi}f(x)=\inf\{f(x)\,|\,x\in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι κάτω φραγμένη, είτε $-\infty$, αν η f δεν είναι κάτω φραγμένη.
(3) Έστω $\xi\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $A\subseteq(\xi,+\infty)$, $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι αύξουσα, τότε $\lim_{x\to\xi}f(x)=\inf\{f(x)\,|\,x\in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι κάτω φραγμένη, είτε $-\infty$, αν η f δεν είναι κάτω φραγμένη.
(4) Με τις υποθέσεις του (3), αν η f είναι φθίνουσα, τότε $\lim_{x\to\xi}f(x)=\sup\{f(x)\,|\,x\in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι άνω φραγμένη, είτε $+\infty$, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η f είναι άνω φραγμένη. Τότε το μη-κενό σύνολο τιμών $\{f(x)\,|\,x\in A\}$ είναι άνω φραγμένο, οπότε το $\eta=\sup\{f(x)\,|\,x\in A\}$ είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$. Έστω $\varepsilon>0$. Ο $\eta-\varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x)\,|\,x\in A\}$, οπότε υπάρχει $x_0\in A$ ώστε $\eta-\varepsilon<f(x_0)$. Επειδή η f είναι αύξουσα, για κάθε $x\in A\cap(x_0,\xi)$ ισχύει

$$f(x)\geq f(x_0)>\eta-\varepsilon.$$

Επειδή ο η είναι άνω φράγμα του $\{f(x)\,|\,x\in A\}$, ισχύει

$$\eta-\varepsilon<f(x)\leq\eta<\eta+\varepsilon$$

για κάθε $x\in A\cap(x_0,\xi)$. Άρα ισχύει $|f(x)-\eta|<\varepsilon$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$.
Έστω ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε το μη-κενό $\{f(x)\,|\,x\in A\}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup\{f(x)\,|\,x\in A\}=+\infty$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi}f(x)=+\infty$. Έστω $M>0$. Ο M δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x)\,|\,x\in A\}$, οπότε υπάρχει $x_0\in A$ ώστε $f(x_0)>M$. Επειδή η f είναι αύξουσα, για κάθε $x\in A\cap(x_0,\xi)$ ισχύει

$$f(x)\geq f(x_0)>M.$$

Άρα ισχύει $f(x)>M$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi}f(x)=+\infty$.
$(2)-(4)$ Ομοίως. □

Μια επισήμανση. Στα (1) και (2) του Θεωρήματος 3.5, αν $\xi \in \mathbb{R}$, τότε μπορούμε να γράψουμε $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ αντί $\lim_{x\to\xi} f(x)$. Ομοίως, στα (3) και (4), αν $\xi \in \mathbb{R}$, τότε μπορούμε να γράψουμε $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ αντί $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Ας πούμε κάτι παραπάνω σχετικά με το Θεώρημα 3.5. Έστω ότι έχουμε την περίπτωση (1) του θεωρήματος. Είδαμε ότι το $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των τιμών της f, οπότε ισχύει $f(x) \leq \eta$ για κάθε $x \in A$. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι *γνησίως* αύξουσα στο A, τότε, επειδή το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, για κάθε $x < \xi$ μπορούμε να πάρουμε κάποιο $x' \in A$ ώστε $x < x' < \xi$ και τότε $f(x) < f(x') \leq \eta$. Άρα, αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, ισχύει $f(x) < \eta$ για κάθε $x \in A$. Παρόμοια συμπεράσματα έχουμε και στις άλλες περιπτώσεις του Θεωρήματος 3.5. Συνοψίζουμε:

Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο $A \subseteq (-\infty, \xi)$ και $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x)$, τότε $f(x) \leq \eta$ $(f(x) \geq \eta)$ για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, τότε $f(x) < \eta$ $(f(x) > \eta)$ για κάθε $x \in A$.

Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο $A \subseteq (\xi, +\infty)$ και $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x)$, τότε $f(x) \geq \eta$ $(f(x) \leq \eta)$ για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, τότε $f(x) > \eta$ $(f(x) < \eta)$ για κάθε $x \in A$.

Παράδειγμα. Αν $a > 0$, θα αποδείξουμε τα $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$, $\lim_{x\to 0+} x^a = 0$, γνωρίζοντας ότι η συνάρτηση x^a είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Η μονοτονία εγγυάται την ύπαρξη των δυο ορίων καθώς και ότι το πρώτο είναι αριθμός ή $+\infty$ και ότι το δεύτερο είναι αριθμός ή $-\infty$.
Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι $\lim_{x\to+\infty} x^a = \eta$. Συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}(2x)^a = \lim_{y\to+\infty} y^a = \eta$ και, επομένως,

$$\eta = \lim_{x\to+\infty}(2x)^a = \lim_{x\to+\infty} 2^a x^a = 2^a \lim_{x\to+\infty} x^a = 2^a \eta.$$

Άρα $\eta = 0$. Άτοπο, διότι ισχύει $x^a \geq 1^a = 1$ για κάθε $x \geq 1$, οπότε $\eta = \lim_{x\to+\infty} x^a \geq 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.
Επειδή $x^a > 0$ για κάθε $x > 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0+} x^a \geq 0$ και, επομένως, το δεύτερο όριο είναι αριθμός μη-αρνητικός: $\lim_{x\to 0+} x^a = \eta \geq 0$. Όπως πριν, $\lim_{x\to 0+}(2x)^a = \lim_{y\to 0+} y^a = \eta$. Άρα

$$\eta = \lim_{x\to 0+}(2x)^a = \lim_{x\to 0+} 2^a x^a = 2^a \eta$$

και, επομένως, $\eta = 0$.

Ασκήσεις.

1. Έστω $a > 1$.
   (i) Από την $\log_a(ax) = 1 + \log_a x$ και τη μονοτονία της $\log_a$ υπολογίστε τα $\lim_{x\to+\infty} \log_a x$, $\lim_{x\to 0} \log_a x$.
   (ii) Από την $a^{x+1} = aa^x$ και τη μονοτονία της $\exp_a$ υπολογίστε τα $\lim_{x\to\pm\infty} a^x$.

2. (i) Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο $[1, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(\sqrt{n}) \geq \log n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; αν ναι, υπολογίστε το.
   (ii) Έστω $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα στο $(0, 2)$ ώστε να ισχύει $f(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$; αν ναι, υπολογίστε το.
   Τι αλλάζει ως προς τα συμπεράσματα αν δεν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f στα (i) και (ii) είναι μονότονες;

3. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο A και $\xi \in \mathbb{R}$ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.
(i) Αποδείξτε ότι υπάρχουν τα $\eta = \lim_{x\to\xi-} f(x)$, $\zeta = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, ότι είναι αριθμοί και ότι $\eta \leq \zeta$.
(ii) Αποδείξτε ότι οι y με την ιδιότητα $f(x') \leq y \leq f(x'')$ για κάθε $x' \in A$, $x' < \xi$ και κάθε $x'' \in A$, $x'' > \xi$ είναι ακριβώς τα στοιχεία του διαστήματος $[\eta, \zeta]$.

4. Έστω $\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $A \subseteq (-\infty, \xi)$, $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $f(x) < \eta$ για κάθε $x \in A$. Επομένως, το σύνολο τιμών $B = \{f(x) \,|\, x \in A\}$ είναι $\subseteq (-\infty, \eta)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ και είναι γνησίως αύξουσα στο B.
(i) Αποδείξτε ότι το η είναι σημείο συσσώρευσης του B.
(ii) Αποδείξτε ότι $\lim_{y\to\eta} f^{-1}(y) = \xi$.
Προσαρμόστε τα προηγούμενα στην περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A καθώς και στην περίπτωση που είναι $A \subseteq (\xi, +\infty)$, το $\xi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και η f είναι γνησίως μονότονη στο A.

5. **limsup, liminf και οριακές τιμές συνάρτησης**. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.
(α) Έστω ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή ότι υπάρχει $\delta_0{}' > 0$ ώστε η f να είναι άνω φραγμένη στο $A \cap N_\xi^*(\delta_0{}')$. Ορίζουμε συνάρτηση $u : (0, \delta_0{}'] \to \mathbb{R}$, $u(\delta) = \sup\{f(x) \,|\, x \in A \cap N_\xi^*(\delta)\}$ $(0 < \delta \leq \delta_0{}')$. Τότε αποδείξτε ότι η u είναι αύξουσα στο $(0, \delta_0{}']$ και, επομένως, υπάρχει το $\lim_{\delta\to0} u(\delta)$. Ορίζουμε $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \lim_{\delta\to0} u(\delta)$.
Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή για κάθε $\delta > 0$ είναι $\sup\{f(x) \,|\, x \in A \cap N_\xi^*(\delta)\} = +\infty$. Τότε ορίζουμε $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.
(β) Έστω ότι η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή υπάρχει $\delta_0{}'' > 0$ ώστε η f να είναι κάτω φραγμένη στο $A \cap N_\xi^*(\delta_0{}'')$. Ορίζουμε συνάρτηση $l : (0, \delta_0{}''] \to \mathbb{R}$, $l(\delta) = \inf\{f(x) \,|\, x \in A \cap N_\xi^*(\delta)\}$ $(0 < \delta \leq \delta_0{}'')$. Αποδείξτε ότι η l είναι φθίνουσα στο $(0, \delta_0{}'']$ και, επομένως, υπάρχει το $\lim_{\delta\to0} l(\delta)$. Ορίζουμε $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \lim_{\delta\to0} l(\delta)$.
Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή για κάθε $\delta > 0$ είναι $\inf\{f(x) \,|\, x \in A \cap N_\xi^*(\delta)\} = -\infty$. Τότε ορίζουμε $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = -\infty$.
(i) Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ και ότι $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$. Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ και ότι $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) \leq \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$.
(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $y > \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ ισχύει $f(x) < y$ κοντά στο ξ και ότι, αν ισχύει $f(x) < y$ κοντά στο ξ, τότε $y \geq \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $y < \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ ισχύει $f(x) > y$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και ότι, αν ισχύει $f(x) > y$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε $y \leq \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $y < \underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ ισχύει $f(x) > y$ κοντά στο ξ και ότι, αν ισχύει $f(x) > y$ κοντά στο ξ, τότε $y \leq \underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $y > \underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ ισχύει $f(x) < y$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και ότι, αν ισχύει $f(x) < y$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε $y \geq \underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$.
(iii) Αποδείξτε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ αν και μόνο αν είναι $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ και ότι τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$.
(iv) Το $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$ χαρακτηρίζεται **οριακή τιμή** της f στο ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\varepsilon)$

σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι το η είναι οριακή τιμή της f στο ξ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to \xi$ και $f(x_n) \to \eta$. Αποδείξτε ότι το $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ είναι η μέγιστη και το $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ η ελάχιστη οριακή τιμή της f στο ξ.

(v) Αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta_+$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta_-$, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \min\{\eta_-, \eta_+\}$ και $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \max\{\eta_-, \eta_+\}$.

(vi) Υπολογίστε τα $\underline{\lim}_{x\to 0}[x]$, $\overline{\lim}_{x\to 0}[x]$, $\underline{\lim}_{x\to 0}\sqrt{x}$, $\overline{\lim}_{x\to 0}\sqrt{x}$, $\underline{\lim}_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, $\overline{\lim}_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, $\underline{\lim}_{x\to 0}(\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x})^2$, $\overline{\lim}_{x\to 0}(\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x})^2$.

3.7 Το κριτήριο του Cauchy.

Κριτήριο του Cauchy. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Τότε το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi^*(\delta_0)$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi^*(\delta_0)$. Άρα για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi^*(\delta_0)$ ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - \eta| + |f(x'') - \eta| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x')' - f(x'')| < \varepsilon$ για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi^*(\delta_0)$. Έστω ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες: (i) ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και (ii) $x_n \to \xi$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τον αντίστοιχο δ_0. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $x_n \in N_\xi^*(\delta_0) \cap A$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$ ισχύει

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Άρα η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy, οπότε συγκλίνει. Αποδείξαμε ότι για κάθε (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))$ έχει όριο στο $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. $\square$

Το "για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi^*(\delta_0)$" το εκφράζουμε και ως εξής:

$$\lim_{x', x'' \to \xi} (f(x') - f(x'')) = 0.$$

Η χρησιμότητα του Κριτηρίου του Cauchy, όπως και του ανάλογου Κριτηρίου του Cauchy για ακολουθίες, είναι ότι παρέχει έναν τρόπο απόδειξης της σύγκλισης μιας συνάρτησης όταν δε γνωρίζουμε εκ των προτέρων την τιμή του υποψήφιου ορίου της. Αντί να μελετήσουμε τις αποστάσεις $|f(x) - \eta|$ των τιμών της f από τον άγνωστο η, μελετάμε τις αποστάσεις $|f(x') - f(x'')|$ μεταξύ των τιμών της f.

Ασκήσεις.

1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\delta_0 > 0$, $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in A$, $0 < |x' - \xi| < \delta_0$, $0 < |x'' - \xi| < \delta_0$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός.

2. Αποδείξτε ότι το κριτήριο του Cauchy για ακολουθίες είναι ειδική περίπτωση του κριτηρίου του Cauchy για συναρτήσεις. Παρατηρήστε, επομένως, ότι τα δυο κριτήρια είναι ισοδύναμα.

3. Προσαρμόστε το Κριτήριο του Cauchy στο πλαίσιο του δεξιού (αριστερού) πλευρικού ορίου.

4. **Ταλάντωση συνάρτησης σε σημείο**. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.
(α) Έστω ότι η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $A \cap N_\xi^*(\delta_0)$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi^*(\delta)\} < +\infty$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$. Ορίζουμε συνάρτηση $\omega : (0, \delta_0] \to \mathbb{R}_0^+$ με τύπο $\omega(\delta) = \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi^*(\delta)\}$ $(0 < \delta \leq \delta_0)$. Αποδείξτε ότι η ω είναι αύξουσα στο $(0, \delta_0]$, οπότε υπάρχει το $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)$ και είναι αριθμός ≥ 0. Ορίζουμε $\omega(f; \xi) = \lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)$.
(β) Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι για κάθε $\delta > 0$ είναι $\sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi^*(\delta)\} = +\infty$. Τότε ορίζουμε $\omega(f; \xi) = +\infty$.
Σε κάθε περίπτωση, το $\omega(f; \xi)$ ονομάζεται **ταλάντωση** της f στο ξ.
(i) Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \to \xi} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\omega(f; \xi) = 0$.
(ii) Έστω ότι υπάρχουν τα $\lim_{x \to \xi\pm} f(x)$. Αποδείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x \to \xi\pm} f(x)$ δεν είναι αριθμός αν και μόνο αν $\omega(f; \xi) = +\infty$ και ότι τα $\lim_{x \to \xi\pm} f(x)$ είναι και τα δυο αριθμοί αν και μόνο αν $0 \leq \omega(f; \xi) < +\infty$ και τότε σ' αυτήν την περίπτωση είναι $\omega(f; \xi) = |\lim_{x \to \xi+} f(x) - \lim_{x \to \xi-} f(x)|$.
(iii) Αποδείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα $\overline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$, $\underline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$ (άσκηση 5 ενότητας 3.6) δεν είναι αριθμός αν και μόνο αν $\omega(f; \xi) = +\infty$ και ότι τα $\overline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$, $\underline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$ είναι και τα δυο αριθμοί αν και μόνο αν $0 \leq \omega(f; \xi) < +\infty$ και τότε σ' αυτήν την περίπτωση είναι $\omega(f; \xi) = |\overline{\lim}_{x \to \xi} f(x) - \underline{\lim}_{x \to \xi} f(x)|$.
(iv) Βρείτε τις ταλαντώσεις $\omega(f; 0)$ των συναρτήσεων $[x]$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\sin \frac{1}{x}$ και $(\sin \frac{1}{x})^2$.

Κεφάλαιο 4

Συνεχείς συναρτήσεις.

4.1 Συνεχείς συναρτήσεις.

4.1.1 Ορισμοί.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$. Η f χαρακτηρίζεται **συνεχής στον** ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

για κάθε $x \in A$, $|x-\xi| < \delta_0$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $f(x) \in N_{f(\xi)}(\varepsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta_0)$.

Με πιο απλά λόγια: η f είναι συνεχής στον ξ αν ο $f(x)$ πλησιάζει απεριόριστα τον $f(\xi)$ όταν ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ, χωρίς τον περιορισμό να παραμένει διαφορετικός από τον ξ. Ή, κοιτάζοντας το γράφημα της f, λέμε: η f είναι συνεχής στον ξ αν, καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ, το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f πλησιάζει απεριόριστα το σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: Ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A.
Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Προφανώς, συνεπάγεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Επομένως, $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Παρατηρούμε ότι, αν $x = \xi$, τότε ισχύει $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \varepsilon$. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Άρα η f είναι συνεχής στον ξ.
Δεύτερη περίπτωση: Ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A. Δηλαδή, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $A \cap (\xi - \delta_0, \xi + \delta_0) = \{\xi\}$. Με άλλα λόγια, ο ξ είναι **μεμονωμένο σημείο** του A. Δείτε την άσκηση 11 της ενότητας 3.1.
Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε τον συγκεκριμένο δ_0 και τότε, προφανώς, για κάθε $x \in A$, $|x-\xi| < \delta_0$ ισχύει $x = \xi$, οπότε ισχύει $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \varepsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στον ξ.
Συνοψίζουμε: αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$$

και, αν ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι, αυτομάτως, συνεχής στον ξ.

Σχόλιο. Πρέπει να τονιστεί ότι για να έχει νόημα η συνέχεια ή η μη-συνέχεια της f στον ξ *προϋποτίθεται* ότι ο ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή ότι ορίζεται ο $f(\xi)$.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$.
Η f χαρακτηρίζεται **αριστερά συνεχής στον** ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $\xi - \delta_0 < x \leq \xi$.
Η f χαρακτηρίζεται **δεξιά συνεχής στον** ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $\xi \leq x < \xi + \delta_0$.

Προσαρμόζοντας κατά προφανή τρόπο τα προηγούμενα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν ο ξ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι δεξιά (αριστερά) συνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\lim_{x \to \xi+} f(x) = f(\xi)$ ($\lim_{x \to \xi-} f(x) = f(\xi)$) και ότι, αν ο ξ δεν είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι, αυτομάτως, δεξιά (αριστερά) συνεχής στον ξ.

Από τις Προτάσεις 3.2 και 3.3 προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα. (i) Αν ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι αριστερά και δεξιά συνεχής στον ξ. (ii) Αν ο ξ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι αριστερά συνεχής στον ξ. (iii) Αν ο ξ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι δεξιά συνεχής στον ξ.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση x^2 είναι συνεχής στον 3, διότι $\lim_{x \to 3} x^2 = 9 = 3^2$.
(2) Η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι συνεχής στον 0, διότι $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$.
(3) Έστω η συνάρτηση $[x]$. Η συνάρτηση είναι σταθερή 0 στο διάστημα $(0,1)$ αριστερά του 1, οπότε $\lim_{x \to 1-}[x] = \lim_{x \to 1-} 0 = 0 \neq [1]$. Επίσης, είναι σταθερή 1 στο διάστημα $(1,2)$ δεξιά του 1, οπότε $\lim_{x \to 1+}[x] = \lim_{x \to 1+} 1 = 1 = [1]$. Άρα η $[x]$ είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον 1, οπότε δεν είναι συνεχής στον 1. Ακόμη, η συνάρτηση είναι σταθερή 0 στην ένωση $(0, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1)$, οπότε $\lim_{x \to \frac{2}{3}}[x] = \lim_{x \to \frac{2}{3}} 0 = 0 = [\frac{2}{3}]$. Άρα η $[x]$ είναι συνεχής στον $\frac{2}{3}$.
(4) Η συνάρτηση $\sqrt{-x^2(x+1)}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup \{0\}$. Ο 0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, οπότε η συνάρτηση είναι συνεχής στον 0.
(5) Η σταθερή συνάρτηση c είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Πράγματι, $\lim_{x \to \xi} c = c$.

Ορισμός. Η $f : A \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **συνεχής στο** A ή, απλώς, **συνεχής** αν είναι συνεχής σε *κάθε* ξ στο πεδίο ορισμού της A.

Παραδείγματα. (1) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x)$ είναι συνεχής, αφού, για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$, είναι $\lim_{x \to \xi} p(x) = p(\xi)$.
(2) Κάθε ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, δηλαδή για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ο οποίος δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $q(x)$, είναι $\lim_{x \to \xi} r(x) = r(\xi)$.
(3) Οι $\cos, \sin$ είναι συνεχείς, διότι $\lim_{x \to \xi} \cos x = \cos \xi$, $\lim_{x \to \xi} \sin x = \sin \xi$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Ομοίως, οι $\tan$, $\cot$ είναι συνεχείς. Για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού τους ισχύει $\lim_{x \to \xi} \tan x = \tan \xi$ και $\lim_{x \to \xi} \cot x = \cot \xi$.
(4) Η p_a είναι συνεχής: για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της ισχύει $\lim_{x \to \xi} x^a = \xi^a$.
(5) Αν $a > 0$, η $\exp_a$ είναι συνεχής, αφού είναι $\lim_{x \to \xi} a^x = a^\xi$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.
(6) Για κάθε $a > 0$, $a \neq 1$, η $\log_a$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε $\xi \in (0, +\infty)$ είναι $\lim_{x \to \xi} \log_a x = \log_a \xi$.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $B \subseteq A$. Η f χαρακτηρίζεται **συνεχής στο** B αν ο περιορισμός της f στο B, δηλαδή η $g : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x)$ $(x \in B)$ είναι συνεχής στο B.

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$ με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$. Η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αφού δεν είναι συνεχής στους 0 και 1. Πράγματι: $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 0 = 0 \neq 1 = f(0)$ και $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 1 = 1 = f(0)$. Δηλαδή η f είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον 0. Ομοίως, η f είναι αριστερά συνεχής αλλά όχι δεξιά συνεχής στον 1. Τώρα, θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $[0,1]$, δηλαδή την σταθερή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1$. Είναι σαφές ότι η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Άρα η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

4.1.2 Είδη ασυνεχειών.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο συνέχειας** της f. Αν η f δεν είναι συνεχής στον ξ, λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο ασυνέχειας** της f ή ότι η f **έχει (ή παρουσιάζει) ασυνέχεια** στον ξ.

Στην περίπτωση που ο ξ είναι *σημείο συσσώρευσης* του A *και σημείο ασυνέχειας* της f θα τον κατατάξουμε σε ακριβώς τρεις κατηγορίες με τρεις αντίστοιχους ορισμούς.

Ορισμός. Έστω ότι υπάρχει το $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x)$ και είναι αριθμός αλλά $\eta \neq f(\xi)$. Τότε λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο άρσιμης ασυνέχειας** της f ή ότι η f παρουσιάζει **άρσιμη ασυνέχεια** στον ξ.

Αν ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f, μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή της f στον ξ και μόνο στον ξ έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια νέα συνάρτηση συνεχής στον ξ. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε την $g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A,\ x \neq \xi \\ \eta, & \text{αν } x = \xi \end{cases}$$

Η g έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με την f και διαφέρει από την f μόνο στον ξ. Επειδή $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) = \eta.$$

Επομένως, επειδή $g(\xi) = \eta$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi),$$

οπότε η g είναι συνεχής στον ξ.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει άρσιμη ασυνέχεια στον 0, διότι το $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$ είναι αριθμός και $1 \neq 0 = f(0)$. Η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στον 0. Παρατηρήστε ότι η g ταυτίζεται με τη συνάρτηση $x+1$ στο $\mathbb{R}$, ενώ η f ταυτίζεται με τη συνάρτηση $x+1$ στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ το $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ είναι αριθμός και $0 \neq 1 = f(0)$. Άρα η f έχει άρσιμη ασυνέχεια στον 0. Η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στον 0 και ταυτίζεται με τη συνάρτηση $\sqrt{x}$ στο $[0,+\infty)$. Η f ταυτίζεται με τη συνάρτηση $\sqrt{x}$ στο $(0,+\infty)$.

Ορισμός. Έστω είτε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$ είτε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ αλλά είναι διαφορετικά. Τότε λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους** της f ή ότι η f παρουσιάζει **ασυνέχεια πρώτου είδους** στον ξ. Στη δεύτερη υποπερίπτωση η διαφορά $\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x)$, η οποία είναι $\neq 0$, ονομάζεται **άλμα** της f στον ξ.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Το ίδιο ισχύει για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

(2) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, με άλμα στον 0 ίσο με $+\infty - (-\infty) = +\infty$.

(3) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \geq 0 \\ x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, αφού $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$. Το άλμα στον 0 είναι ίσο με $1 - 0 = 1$. Η f είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον 0.

Ορισμός. Αν δεν υπάρχει ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$, $\lim_{x\to\xi-} f(x)$, τότε λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο ασυνέχειας δεύτερου είδους** ή **σημείο ουσιώδους ασυνέχειας** της f ή ότι η f παρουσιάζει **ασυνέχεια δεύτερου είδους** ή **ουσιώδη ασυνέχεια** στον ξ.

Σχετικά με τον τελευταίο ορισμό, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ x, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι το $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to+\infty} \sin t$ δεν υπάρχει. Επειδή $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x = 0 = f(0)$, η f είναι αριστερά συνεχής στον 0.

(2) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι δεν υπάρχει κανένα από τα πλευρικά όρια στον 0.

(3) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι δεν υπάρχει το δεξιό πλευρικό όριο στον 0.

Αν ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου ή δεύτερου είδους της f, τότε ο ξ δε μπορεί να μετατραπεί σε σημείο συνέχειας με απλή αλλαγή της τιμής $f(\xi)$. Αυτό γίνεται μόνο στην περίπτωση που ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας. Δείτε την άσκηση 7.

Για την καλύτερη κατανόηση των παρακάτω θα βοηθούσε ένα προσεκτικό σχέδιο του γραφήματος της f στις διάφορες περιπτώσεις.

Πρόταση 4.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μονότονη στο A και $\xi \in A$.*
(1) Έστω ότι ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε ο ξ είναι είτε σημείο συνέχειας είτε σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους της f. Στη δεύτερη περίπτωση η f έχει είτε θετικό άλμα στον ξ, αν είναι αύξουσα, είτε αρνητικό άλμα στον ξ, αν είναι φθίνουσα.
(2) Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από αριστερά του ή μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε ο ξ είναι είτε σημείο συνέχειας είτε σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f.

Απόδειξη. (1) Έστω f αύξουσα στο A.
Τότε η f είναι αύξουσα στο $A \cap (-\infty, \xi)$ και άνω φραγμένη στο σύνολο αυτό, αφού ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A \cap (-\infty, \xi)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5, υπάρχει το $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ και είναι αριθμός και, μάλιστα, $\lim_{x \to \xi-} f(x) \leq f(\xi)$. Ομοίως, η f είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη στο $A \cap (\xi, +\infty)$, αφού ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in A \cap (\xi, +\infty)$. Άρα υπάρχει το $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ και είναι αριθμός και $\lim_{x \to \xi+} f(x) \geq f(\xi)$.
Άρα υπάρχουν τα $\lim_{x \to \xi-} f(x)$, $\lim_{x \to \xi+} f(x)$, είναι αριθμοί και

$$\lim_{x \to \xi-} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim_{x \to \xi+} f(x).$$

Τώρα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση είναι $\lim_{x \to \xi-} f(x) = \lim_{x \to \xi+} f(x)$, οπότε $\lim_{x \to \xi-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \to \xi+} f(x)$ και, επομένως, η f είναι συνεχής στον ξ. Στη δεύτερη περίπτωση είναι $\lim_{x \to \xi-} f(x) < \lim_{x \to \xi+} f(x)$, οπότε η f παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον ξ με άλμα $\lim_{x \to \xi+} f(x) - \lim_{x \to \xi-} f(x) > 0$.
Η απόδειξη είναι ίδια αν η f είναι φθίνουσα στο A: απλώς, τότε όλες οι προηγούμενες ανισότητες αλλάζουν φορά και βρίσκουμε ότι $\lim_{x \to \xi-} f(x) \geq f(\xi) \geq \lim_{x \to \xi+} f(x)$.
(2) Έστω f αύξουσα στο A και ξ μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.
Όπως πριν, το $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και $\lim_{x \to \xi+} f(x) \geq f(\xi)$. Άρα το $\lim_{x \to \xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και

$$\lim_{x \to \xi} f(x) \geq f(\xi).$$

Πάλι έχουμε δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη είναι $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$ και, επομένως, η f είναι συνεχής στον ξ. Στη δεύτερη περίπτωση είναι $\lim_{x \to \xi} f(x) > f(\xi)$, οπότε ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f.
Η απόδειξη είναι ίδια σε κάθε άλλη περίπτωση. □

Ας μελετήσουμε λίγο παραπάνω την κατάσταση που περιγράφει η Πρόταση 4.1, επιμένοντας σε ένα προσεκτικό σχέδιο του γραφήματος της f.
(1) Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A, ο $\xi \in A$ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f *δεν* είναι συνεχής στον ξ, οπότε ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους. Αν $\eta_- = \lim_{x \to \xi-} f(x)$ και $\eta_+ = \lim_{x \to \xi+} f(x)$, τότε το άλμα της f στον ξ είναι ίσο με $\eta_+ - \eta_- > 0$. Είδαμε ότι $\eta_- \leq f(\xi) \leq \eta_+$. Επίσης, επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(x) \leq \eta_-$ για κάθε $x \in A \cap (-\infty, \xi)$ και $\eta_+ \leq f(x)$ για κάθε $x \in A \cap (\xi, +\infty)$. Άρα η μοναδική τιμή της f η οποία *ενδέχεται* να ανήκει στο ανοικτό διάστημα (η_-, η_+) είναι η $f(\xi)$. Πιο συγκεκριμένα, αν $f(\xi) = \eta_-$ ή $f(\xi) = \eta_+$, τότε το διάστημα

$$(\eta_-, \eta_+)$$

δεν περιέχει καμιά τιμή της f και, αν $\eta_- < f(\xi) < \eta_+$, τότε η ένωση

$$(\eta_-, f(\xi)) \cup (f(\xi), \eta_+)$$

δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Με τις ίδιες υποθέσεις αλλά με την f να είναι φθίνουσα αντί αύξουσα, τότε είναι $\eta_+ < \eta_-$ και $\eta_+ \leq f(\xi) \leq \eta_-$ και έχουμε όμοια αποτελέσματα: είτε το διάστημα (η_+, η_-) δεν περιέχει καμιά τιμή της f είτε η ένωση $(\eta_+, f(\xi)) \cup (f(\xi), \eta_-)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
(2) Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A, ο $\xi \in A$ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f *δεν* είναι συνεχής στον ξ, οπότε ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας. Αν $\eta_+ = \lim_{x \to \xi+} f(x)$, είδαμε ότι $f(\xi) < \eta_+$. Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A \cap (-\infty, \xi)$ και $\eta_+ \leq f(x)$ για κάθε $x \in A \cap (\xi, +\infty)$. Άρα το ανοικτό διάστημα

$$(f(\xi), \eta_+)$$

δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Με τις ίδιες υποθέσεις αλλά με την f να είναι φθίνουσα αντί αύξουσα, συνεπάγεται $\eta_+ < f(\xi)$ και το διάστημα $(\eta_+, f(\xi))$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Αν η f είναι μονότονη στο A και ο $\xi \in A$ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε με $\eta_- = \lim_{x\to\xi-} f(x)$ συμπεραίνουμε ότι, αν η f είναι αύξουσα, το διάστημα $(\eta_-, f(\xi)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f και, αν η f είναι φθίνουσα, τότε το διάστημα $\big(f(\xi), \eta_-\big)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Τελικό συμπέρασμα:
Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη στο A, ο ξ είναι τουλάχιστον από αριστερά του ή από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f δεν είναι συνεχής στον ξ. Τότε ανάμεσα στις τιμές της f παρεμβάλεται τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα - του οποίου ένα από τα άκρα είναι ο $f(\xi)$ - το οποίο δεν περιέχει καμιά τιμή της.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε βάσει του ορισμού ότι οι συναρτήσεις x, $2x-3$, x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\frac{x^2+1}{x+1}$ είναι συνεχείς στον 1.

2. Έστω οι $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$
$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{αν } x < 0 \\ \sqrt{x+1}, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{|x|}, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$ Ποιες από αυτές είναι συνεχείς ή δεξιά συνεχείς ή αριστερά συνεχείς στον 0;

3. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $[x]$, $x-[x]$, $x-[x]-\frac{1}{2}$, $\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|$. Σε ποια σημεία είναι συνεχείς ή δεξιά συνεχείς ή αριστερά συνεχείς; Σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

4. Έστω οι $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{αν } x \neq 0 \\ -1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$
$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Χαρακτηρίστε το είδος ασυνέχειας που παρουσιάζουν στον 0. Σε περίπτωση άρσιμης ασυνέχειας αλλάξτε την τιμή της f στον 0 ώστε να γίνει συνεχής στον 0. Σε περίπτωση άλματος υπολογίστε το.

5. Έστω $a < \xi < b$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.
(i) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε $\lim_{h\to 0}(f(\xi+h) - f(\xi-h)) = 0$.
(ii) Από την $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και τον $\xi = 0$ τί συμπέρασμα προκύπτει για την ισχύ του αντιστρόφου του (i);

6. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ και $\delta_0 > 0$, $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$, $|x-\xi| < \delta_0$. Έστω $g : A \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x-\xi)f(x)$. Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής στον ξ.

7. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας της f. Αν υπάρχει $\eta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A,\ x \neq \xi \\ \eta, & \text{αν } x = \xi \end{cases}$ να είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f.

8. Αποδείξτε ότι:

(i) η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{Z}$ και συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(ii) η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε x.

(iii) η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ x, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 1$ και συνεχής στον 1.

(iv) η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{αν } x = \frac{m}{n} \, (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \mathsf{gcd}(m,n) = 1) \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{Q}$ και συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

9. Έστω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ένα πεπερασμένο σύνολο A_n ώστε $A_m \cap A_n = \emptyset$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{αν } x \in A_n \, (n \in \mathbb{N}) \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ και ασυνεχής σε κάθε $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

10. Συνήθως, λέμε ότι το να είναι μια συνάρτηση f συνεχής στον ξ σημαίνει ότι το γράφημά της *"δεν διακόπτεται" ή "είναι συνεχές" στο σημείο* $(\xi, f(\xi))$. Αυτή η διατύπωση είναι ασαφής. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x(-1)^{[\frac{1}{x}]}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Σχεδιάστε το γράφημα της f, θεωρώντας τα διαστήματα $(1, +\infty)$ και $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ $(n \in \mathbb{N})$ και τα συμμετρικά τους ως προς τον 0. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον 0 και ασυνεχής σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0.

11. (i) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ και $\delta_0 > 0$, $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| \leq M|x - \xi|^\rho$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Αν η f ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις, τότε χαρακτηρίζεται **Hölder συνεχής** στον ξ με **εκθέτη Hölder** ρ. Στην ειδική περίπτωση $\rho = 1$, η f χαρακτηρίζεται **Lipschitz συνεχής** στον ξ.
(ii) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x, $|x|$, $\sqrt{|x|}$, $x\sqrt{|x|}$ είναι Hölder συνεχείς στον 0 και βρείτε τους αντίστοιχους εκθέτες Hölder. Αποδείξτε ότι οι ίδιες συναρτήσεις είναι Hölder συνεχείς σε κάθε $\xi \neq 0$ και βρείτε τους αντίστοιχους εκθέτες Hölder. Παρατηρήστε ότι για τις δυο τελευταίες συναρτήσεις είναι άλλος ο εκθέτης Hölder για τον $\xi = 0$ και άλλος για τον οποιονδήποτε $\xi \neq 0$.

12. Έστω $A \subseteq B$, $\xi \in A$, $g : B \to \mathbb{R}$ και έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ο περιορισμός της g στο A. Αποδείξτε ότι, αν η g είναι συνεχής στον ξ, τότε και η f είναι συνεχής στον ξ.

13. Έστω μη-κενό σύνολο B και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \mathsf{inf}\{|x - b| \,|\, b \in B\}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.
Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) - |x - y| \leq |x - b| - |x - y| \leq |y - b|$ για κάθε x, y και κάθε $b \in B$ και, επομένως, ότι ισχύει $f(x) - |x - y| \leq f(y)$ για κάθε x, y. Αποδείξτε ότι ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ για κάθε x, y.
Σχεδιάστε το γράφημα της f στις περιπτώσεις που το B είναι ένα από τα σύνολα $\{a\}$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, b] \cup [c, d]$.

14. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ και $A_- = A \cap (-\infty, \xi]$, $A_+ = A \cap [\xi, +\infty)$ και $f_- : A_- \to \mathbb{R}$ και $f_+ : A_+ \to \mathbb{R}$ οι περιορισμοί της f στα A_- και A_+, αντιστοίχως. Έστω ότι ο ξ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του A ή, ισοδύναμα, σημείο συσσώρευσης του A_+ (A_-) (άσκηση 12 ενότητας 3.1). Αποδείξτε ότι η f είναι δεξιά (αριστερά) συνεχής στον ξ αν και μόνο αν η f_+ (f_-) είναι συνεχής στον ξ.

15. (Συνέχεια της άσκησης 5 της ενότητας 3.6.) Έστω $\xi \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$.
(i) Η f χαρακτηρίζεται **άνω ημισυνεχής** στον ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < f(\xi) + \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Αποδείξτε ότι, αν ο ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι, αυτομάτως, άνω ημισυνεχής στον ξ και, αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι άνω ημισυνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) \le f(\xi)$.
(ii) Η f χαρακτηρίζεται **κάτω ημισυνεχής** στον ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > f(\xi) - \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Αποδείξτε ότι, αν ο ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι, αυτομάτως, κάτω ημισυνεχής στον ξ και, αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι κάτω ημισυνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) \ge f(\xi)$.
(iii) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \le 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ είναι κάτω ημισυνεχής στον 0, ενώ η $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x \ge 0 \end{cases}$ είναι άνω ημισυνεχής στον 0.
(iv) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι κάτω ημισυνεχής και άνω ημισυνεχής στον ξ.

16. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο I.
(i) Αν $a, b \in I$ και $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ και $j_k = \lim_{x\to x_k+} f(x) - \lim_{x\to x_k-} f(x)$ είναι το άλμα της f στον x_k $(k = 1, \ldots, n)$, αποδείξτε ότι $j_1 + \cdots + j_n \le \lim_{x\to b-} f(x) - \lim_{x\to a+} f(x)$.
(ii) Αν $a, b \in I$ και $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι το πλήθος των σημείων $x \in (a, b)$, σε καθένα από τα οποία το άλμα της f είναι $\ge \frac{1}{k}$, είναι $\le k(\lim_{x\to b-} f(x) - \lim_{x\to a+} f(x))$.
(iii) Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο I είναι αριθμήσιμο.
Υπόδειξη: Θεωρήστε ακολουθίες (a_m), (b_m) στο I ώστε η (a_m) να είναι γνησίως φθίνουσα με όριο το αριστερό άκρο του I, η (b_m) να είναι γνησίως αύξουσα με όριο το δεξιό άκρο του I και ώστε $a_1 < b_1$. Αριθμήστε τα σημεία του (a_1, b_1) στα οποία το άλμα της f είναι ≥ 1. Κατόπιν αριθμήστε τα σημεία του (a_2, b_2) στα οποία το άλμα της f είναι < 1 και $\ge \frac{1}{2}$, παραλείποντας τα σημεία που έχετε ήδη αριθμήσει. Κατόπιν αριθμήστε τα σημεία του (a_3, b_3) στα οποία το άλμα της f είναι $< \frac{1}{2}$ και $\ge \frac{1}{3}$, παραλείποντας τα σημεία που έχετε ήδη αριθμήσει. Συνεχίζοντας επ' άπειρον, αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f, τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του I, είναι αριθμήσιμο. Άρα το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο I είναι αριθμήσιμο.

4.2 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων.

Πρόταση 4.2. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $f(\xi) = g(\xi)$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ. Αν η μια από τις f, g είναι συνεχής στον ξ, το ίδιο ισχύει και για την άλλη.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Επειδή οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ, είναι $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x)$, οπότε $\lim_{x\to\xi} g(x) = f(\xi) = g(\xi)$. Άρα η g είναι συνεχής στον ξ. □

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{αν } x<1 \\ \log x, & \text{αν } 1\le x<4 \end{cases}$ και η log ταυτίζονται στο διάστημα $[1,4)$. Η log είναι συνεχής στον 2, οπότε και η f είναι συνεχής στον 2. Το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλο ξ στο ανοικτό διάστημα $(1,4)$. Επίσης, η f και η συνάρτηση $x+1$ ταυτίζονται στο $(-\infty,1)$. Η $x+1$ είναι συνεχής σε κάθε ξ στο $(-\infty,1)$, οπότε και η f είναι συνεχής σε κάθε τέτοιο ξ.

Η Πρόταση 4.3 λέει ότι, αν τιμή της f σε ένα σημείο συνέχειάς της ικανοποιεί μια γνήσια (απλή) ανισότητα, τότε η f ικανοποιεί κοντά στο σημείο αυτό την ίδια γνήσια ανισότητα.

Πρόταση 4.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ.*
(1) Αν $f(\xi) > u$, τότε ισχύει $f(x) > u$ κοντά στον ξ.
(2) Αν $f(\xi) < l$, τότε ισχύει $f(x) < l$ κοντά στον ξ.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.5 και από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. □

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $\frac{x^8+x^3+1}{x^5+3x^4-x^2+1}$ είναι συνεχής στον 1 και $\frac{1^8+1^3+1}{1^5+3\cdot1^4-1^2+1} = \frac{3}{4}$. Άρα υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{3}{5} < \frac{x^8+x^3+1}{x^5+3x^4-x^2+1} < \frac{7}{8}$ για κάθε $x \in (1-\delta_0, 1+\delta_0)$.

Η Πρόταση 4.4 λέει ότι, αν η f ικανοποιεί σε σημεία όσο θέλουμε κοντά σε ένα σημείο συνέχειάς της μια μη-γνήσια (απλή) ανισότητα, τότε και η τιμή της f στο σημείο αυτό ικανοποιεί την ίδια μη-γνήσια ανισότητα.

Πρόταση 4.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A.*
(1) Αν η f είναι συνεχής στον ξ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε $f(\xi) \geq l$.
(2) Αν η f είναι συνεχής στον ξ και ισχύει $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε $f(\xi) \leq u$.
(3) Αν $u < l$ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ και $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε η f είναι ασυνεχής στον ξ.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.6 και από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. □

Πρόταση 4.5. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, g είναι συνεχείς στον ξ και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε $f(\xi) \leq g(\xi)$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.8 και από τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$. □

Παράδειγμα. Έστω $f : [0, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R}$ συνεχής στον 0 και έστω $f(x) \leq \sin x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Τότε $f(0) \leq \sin 0 = 0$.

Πρόταση 4.6. *Έστω $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, h είναι συνεχείς στον ξ, αν ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ και αν $f(\xi) = g(\xi) = h(\xi)$, τότε και η g είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.10 και από τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, $\lim_{x\to\xi} h(x) = h(\xi)$. □

Πρόταση 4.7. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε είναι φραγμένη κοντά στον ξ.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.11 και από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. $\square$

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $\frac{1}{x(x-1)}$ είναι συνεχής στον $\frac{1}{2}$, οπότε είναι φραγμένη κοντά στον $\frac{1}{2}$, παρά το ότι δεν είναι φραγμένη στο πεδίο ορισμού της ούτε καν στο διάστημα $(0,1)$.

Πρόταση 4.8. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ και έστω ότι οι f, g είναι συνεχείς στον ξ. Τότε και οι $f+g, f-g, fg, |f| : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στον ξ. Αν, επιπλέον, ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη. Αν ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στον ξ. Αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε από την Πρόταση 3.14 και από τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$ συνεπάγεται ότι η $f+g$ είναι συνεχής στον ξ. Η απόδειξη είναι ίδια στις περιπτώσεις των $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$, $|f|$. $\square$

Παράδειγμα. Οι συναρτήσεις $\frac{\sqrt{x}+e^x}{(x-2x^2)\log x}$ και $\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sin x+\cos x}$ είναι συνεχείς.

Πρόταση 4.9. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ και η g είναι συνεχής στον $\eta = f(\xi)$, τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η g είναι συνεχής στον η, υπάρχει $\delta_0{}' > 0$ ώστε να ισχύει $|g(y) - g(\eta)| < \varepsilon$ για κάθε $y \in B$, $|y-\eta| < \delta_0{}'$. Επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| = |f(x) - f(\xi)| < \delta_0{}'$ για κάθε $x \in A$, $|x-\xi| < \delta_0$. Τώρα, για κάθε $x \in A$, $|x-\xi| < \delta_0$ συνεπάγεται $|f(x)-\eta| < \delta_0{}'$ και, επειδή $f(x) \in B$, συνεπάγεται $|(g\circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)| = \big|g\big(f(x)\big) - g(\eta)\big| < \varepsilon$. Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στον ξ. $\square$

Παράδειγμα. Οι συναρτήσεις $\sin\sqrt{x}$, $\sqrt{\sin x}$ είναι συνεχείς.

Ένα θέμα παρεμφερές με την Πρόταση 4.9 αλλά και - ίσως πιο πολύ - με την Πρόταση 3.22 είναι ο υπολογισμός του ορίου της σύθεσης $g \circ f$ στην περίπτωση που το $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι *αριθμός* και η g είναι *συνεχής* στον η.

Πρόταση 4.10. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ και ξ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in B$ και η g είναι συνεχής στον η, τότε*

$$\lim_{x\to\xi}(g \circ f)(x) = g(\eta).$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η g είναι συνεχής στον η, υπάρχει $\delta_0{}' > 0$ ώστε να ισχύει $|g(y) - g(\eta)| < \varepsilon$ για κάθε $y \in B$, $|y-\eta| < \delta_0{}'$. Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \delta_0{}'$ για κάθε $x \in A$, $0 < |x-\xi| < \delta_0$. Τώρα, για κάθε $x \in A$, $0 < |x-\xi| < \delta_0$ συνεπάγεται $|f(x)-\eta| < \delta_0{}'$ και, επειδή $f(x) \in B$, συνεπάγεται $|(g\circ f)(x) - g(\eta)| = \big|g\big(f(x)\big) - g(\eta)\big| < \varepsilon$. Άρα ισχύει $|(g\circ f)(x) - g(\eta)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $0 < |x-\xi| < \delta_0$ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi}(g\circ f)(x) = g(\eta)$. $\square$

Όταν εφαρμόζουμε τον κανόνα σύνθεσης, συχνά χρησιμοποιούμε την έκφραση "κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = f(x)$" και γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to\eta} g(y) = g(\eta).$$

Παραδείγματα. (1) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{12}+5}$.
Είναι $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x}+1) = 1$ και η συνάρτηση $\frac{y^4}{y^8+y^{12}+5}$ είναι συνεχής στον 1. Άρα, με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \sqrt{x}+1$, βρίσκουμε $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{12}+5} = \frac{1^4}{1^8+1^{12}+5} = \frac{1}{7}$.

(2) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{x-1}{x^2+x+1})^{\frac{1}{2}}+(\frac{x-1}{x^2+x+1})^2+\frac{x-1}{x^2+x+1}+1}{3(\frac{x-1}{x^2+x+1})^4+2(\frac{x-1}{x^2+x+1})^{\frac{1}{2}}+1}$. Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+x+1}=0$ και η συνάρτηση $\frac{y^{\frac{1}{2}}+y^2+y+1}{3y^4+2y^{\frac{1}{2}}+1}$ είναι συνεχής στον 0. Άρα, με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y=\frac{x-1}{x^2+x+1}$, έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{x-1}{x^2+x+1})^{\frac{1}{2}}+(\frac{x-1}{x^2+x+1})^2+\frac{x-1}{x^2+x+1}+1}{3(\frac{x-1}{x^2+x+1})^4+2(\frac{x-1}{x^2+x+1})^{\frac{1}{2}}+1}=\frac{0^{\frac{1}{2}}+0^2+0+1}{3\cdot 0^4+20^{\frac{1}{2}}+1}=1$.

(3) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{\sin x}{x})^3+\frac{\sin x}{x}\big)$.
Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ και η συνάρτηση y^3+y είναι συνεχής στον 0. Άρα, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y=\frac{\sin x}{x}$, βρίσκουμε $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{\sin x}{x})^3+\frac{\sin x}{x}\big)=0^3+0=0$.

Υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις Προτάσεις 3.22 και 4.10. (i) Στην Πρόταση 3.22 το όριο της f δε χρειάζεται να είναι αριθμός ενώ στην Πρόταση 4.10 το όριο της f πρέπει να είναι αριθμός. Άρα η Πρόταση 4.10 δεν εφαρμόζεται στο δεύτερο παράδειγμα μετά την Πρόταση 3.22. (ii) Αν $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$, μια από τις υποθέσεις της Πρότασης 3.22 είναι ότι ισχύει $f(x)\neq\eta$ κοντά στο ξ. Στην Πρόταση 4.10 υπάρχει η υπόθεση ότι η g είναι συνεχής στον η. Άρα η Πρόταση 4.10 δεν εφαρμόζεται στο τρίτο παράδειγμα μετά την Πρόταση 3.22, διότι η συνάρτηση $y^{-2}+y^{-4}$ δεν είναι συνεχής στον 0, και η Πρόταση 3.22 δεν εφαρμόζεται στο τρίτο παράδειγμα μετά την Πρόταση 4.10, διότι δεν υπάρχει κανένας N_0 ώστε να ισχύει $\frac{\sin x}{x}\neq 0$ για κάθε $x>N_0$. Τέλος καμιά από τις δυο προτάσεις δεν εφαρμόζεται στο τέταρτο παράδειγμα μετά την Πρόταση 3.22, διότι η g δεν είναι συνεχής στον 0 και διότι δεν υπάρχει κανένας N_0 ώστε να ισχύει $\frac{\sin x}{x}\neq 0$ για κάθε $x>N_0$.

Απόδειξη της Πρότασης 3.23. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)^{g(x)}$ και έστω $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$ και $\lim_{x\to\xi}g(x)=\zeta$.
Υποθέτουμε ότι $0<\eta<+\infty$, $-\infty<\zeta<+\infty$ και θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi}h(x)=\eta^\zeta$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.10, είναι $\lim_{x\to\xi}\log f(x)=\log\eta$ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi}\log h(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)\log f(x)=\zeta\log\eta$. Πάλι από την Πρόταση 4.10, είναι $\lim_{x\to\xi}h(x)=\lim_{x\to\xi}e^{\log h(x)}=e^{\zeta\log\eta}=\eta^\zeta$.
Για τις περιπτώσεις που απομένουν εφαρμόζουμε τις Προτάσεις 3.22 και 4.10.
$0<\eta<1$, $\zeta=-\infty$: τότε $\lim_{x\to\xi}\log f(x)=\log\eta$, $\lim_{x\to\xi}\log h(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)\log f(x)=+\infty$, οπότε $\lim_{x\to\xi}h(x)=\lim_{x\to\xi}e^{\log h(x)}=+\infty=\eta^\zeta$.
$0<\eta<1$, $\zeta=+\infty$: τότε $\lim_{x\to\xi}\log f(x)=\log\eta$, $\lim_{x\to\xi}\log h(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)\log f(x)=-\infty$, οπότε $\lim_{x\to\xi}h(x)=\lim_{x\to\xi}e^{\log h(x)}=0=\eta^\zeta$.
$\eta>1$, $\zeta=-\infty$: τότε $\lim_{x\to\xi}\log f(x)=\log\eta$, $\lim_{x\to\xi}\log h(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)\log f(x)=-\infty$, οπότε $\lim_{x\to\xi}h(x)=\lim_{x\to\xi}e^{\log h(x)}=0=\eta^\zeta$.
$\eta>1$, $\zeta=+\infty$: τότε $\lim_{x\to\xi}\log f(x)=\log\eta$, $\lim_{x\to\xi}\log h(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)\log f(x)=+\infty$, οπότε $\lim_{x\to\xi}h(x)=\lim_{x\to\xi}e^{\log h(x)}=+\infty=\eta^\zeta$.
$\eta=+\infty$, $0<\zeta\leq+\infty$: τότε $\lim_{x\to\xi}\log f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to\xi}\log h(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)\log f(x)=+\infty$, οπότε $\lim_{x\to\xi}h(x)=\lim_{x\to\xi}e^{\log h(x)}=+\infty=\eta^\zeta$.
$\eta=+\infty$, $-\infty\leq\zeta<0$: τότε $\lim_{x\to\xi}\log f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to\xi}\log h(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)\log f(x)=-\infty$, οπότε $\lim_{x\to\xi}h(x)=\lim_{x\to\xi}e^{\log h(x)}=0=\eta^\zeta$.
$\eta=0$, $\zeta=-\infty$: τότε $\lim_{x\to\xi}\log f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\xi}\log h(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)\log f(x)=+\infty$, οπότε $\lim_{x\to\xi}h(x)=\lim_{x\to\xi}e^{\log h(x)}=+\infty$. □

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τα σημεία συνέχειας των συναρτήσεων $\frac{x^2\log x+xe^x}{(\sin x-\cos x)^2}$, $x^{-\frac{3}{4}}(\log x)^2\frac{\tan x-\cot x}{(\sin x)^2-2\sin x+1}$, $\log(x^2+2)$, $\sqrt{[x]}$, $\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$, $\sin(\log x)$, $\sqrt{1-\cos x}$, $(x^2-5x+6)^{\sqrt{2}}$, $\log(x^2-5x+6)$, $e^{\frac{1}{\sin x}}$, $\log(\sin x)$, $\log(1-\cos x)$.

2. (i) Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στον $\xi \in A$ και έστω $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι η $f^g : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ.
(ii) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x^x, $(x^2-3)^{\frac{x-2}{x+2}}$, $(\log x)^{\log x}$ είναι συνεχείς. Ποια είναι τα πεδία ορισμού τους;

3. Βρείτε βάσει της Πρότασης 4.10 τα όρια: $\lim_{x\to+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x\to-\infty} \cos \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 1} e^{(x-1)\sin\frac{1}{x-1}}$. Σε ποια από αυτά εφαρμόζεται η Πρόταση 3.22;

4. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{2} < \frac{\log(1+x)+\cos\sqrt{x}}{e^x+\sin\sqrt{x}} < \frac{3}{2}$ για κάθε $x \in [0, \delta_0)$ και ότι υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{2} < \frac{x^8-x^5+3}{4x^4-1} < \frac{3}{2}$ και $\frac{1}{6} < \frac{e^x-2^x}{7x-3} < \frac{1}{4}$ για κάθε $x \in (1-\delta_0, 1+\delta_0)$.

5. Από τις $f, g : A \to \mathbb{R}$ ορίζουμε την $\max\{f,g\} : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ και την $\min\{f,g\} : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Αποδείξτε ότι, αν οι f, g είναι συνεχείς στον $\xi \in A$, τότε και οι $\max\{f,g\}$ και $\min\{f,g\}$ είναι συνεχείς στον ξ.

6. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ άνω φραγμένη στο A. Ορίζουμε $g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sup\{f(t) \,|\, t \in A, t \leq x\}$ $(x \in A)$.
(i) Αποδείξτε ότι η g είναι αύξουσα στο A και ότι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in A$.
(ii) Αποδείξτε ότι αν μια συνάρτηση $h : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A και ισχύει $f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε ισχύει $g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in A$.
(iii) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον $\xi \in A$, τότε και η g είναι συνεχής στον ξ.
Υπόδειξη: Αν $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, αποδείξτε ότι $0 \leq g(x_2) - g(x_1) \leq \sup\{f(x) - f(x_1) \,|\, x \in A, x_1 \leq x \leq x_2\}$.

4.3 Συνεχείς συναρτήσεις και ακολουθίες.

Το Θεώρημα 4.1 χαρακτηρίζει την έννοια της συνέχειας βάσει της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

Θεώρημα 4.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$. Η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$ ισχύει $f(x_n) \to f(\xi)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ και έστω ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Επειδή $x_n \to \xi$, ισχύει τελικά $|x_n - \xi| < \delta_0$. Άρα ισχύει τελικά $|f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon$ και, επομένως, $f(x_n) \to f(\xi)$.
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$ ισχύει $f(x_n) \to f(\xi)$. Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι η f δεν είναι συνεχής στον ξ. Τότε υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A$, $|x - \xi| < \delta$, ώστε $|f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon_0$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in A$, $|x_n - \xi| < \frac{1}{n}$ ώστε $|f(x_n) - f(\xi)| \geq \varepsilon_0$. Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$ για την οποία, όμως, δεν ισχύει $f(x_n) \to f(\xi)$. Άτοπο. $\square$

Παραδείγματα. (1) Αν $p(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση και $x_n \to \xi$, τότε $p(x_n) \to p(\xi)$.
(2) Αν η $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, αν $q(\xi) \neq 0$ και $q(x_n) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν $x_n \to \xi$, τότε $r(x_n) \to r(\xi)$.
(3) Αν $x_n \to \xi$, τότε $\cos x_n \to \cos \xi$ και $\sin x_n \to \sin \xi$.

(4) Αν ο ξ και όλοι οι όροι της (x_n) είναι θετικοί και αν $x_n \to \xi$, τότε ${x_n}^a \to \xi^a$.
(5) Αν $a > 0$ και $x_n \to \xi$, τότε $a^{x_n} \to a^{\xi}$.
(6) Αν ο ξ και όλοι οι όροι της (x_n) είναι θετικοί και αν $x_n \to \xi$, τότε $\log_a x_n \to \log_a \xi$.

Οι σχέσεις $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$ συνδυάζονται στην:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big).$$

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτή η "εναλλαγή" των συμβόλων $\lim_{n\to+\infty}$ και f ισχύει με την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στον ξ, δηλαδή στο όριο της (x_n).

Υπάρχει και η ανάλογη παραλλαγή του Θεωρήματος 4.1, όπου η συνέχεια αντικαθίσταται με την δεξιά (αριστερή) συνέχεια και υπάρχει η επιπλέον υπόθεση ότι $x_n \geq \xi$ ($x_n \leq \xi$) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείτε την άσκηση 1.

Το Θεώρημα 4.1 σχετίζεται με το Θεώρημα 3.4. Παρατηρήστε ότι, ενώ στο Θεώρημα 4.1 δε χρειάζεται να υποθέσουμε τίποτα για τους όρους της ακολουθίας - πέρα από το ότι ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης - στο Θεώρημα 3.4 πρέπει να υποθέσουμε, επιπλέον, ότι όλοι οι όροι της είναι $\neq \xi$.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{n\to+\infty} \sin \frac{1+(-1)^{n-1}}{n}$. Επειδή $\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} \to 0$ και η sin είναι συνεχής στον 0, συνεπάγεται $\sin \frac{1+(-1)^{n-1}}{n} \to \sin 0 = 0$. Δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.4, διότι ισχύει $\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} = 0$ για άπειρους $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη της Πρότασης 2.19. Ορίζουμε $z_n = {x_n}^{y_n}$ και έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$.
Υποθέτουμε ότι $0 < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ και θα αποδείξουμε ότι $z_n \to x^y$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1, είναι $\log x_n \to \log x$ και, επομένως, $\log z_n = y_n \log x_n \to y \log x$. Πάλι από το Θεώρημα 4.1, $z_n = e^{\log z_n} \to e^{y \log x} = x^y$.
Για τις περιπτώσεις που απομένουν εφαρμόζουμε τα Θεωρήματα 3.4 και 4.1.
$0 < x < 1$, $y = -\infty$: τότε $\log x_n \to \log x$, $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$, οπότε $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty = x^y$.
$0 < x < 1$, $y = +\infty$: τότε $\log x_n \to \log x$, $\log z_n = y_n \log x_n \to -\infty$, οπότε $z_n = e^{\log z_n} \to 0 = x^y$.
$x > 1$, $y = -\infty$: τότε $\log x_n \to \log x$, $\log z_n = y_n \log x_n \to -\infty$, οπότε $z_n = e^{\log z_n} \to 0 = x^y$.
$x > 1$, $y = +\infty$: τότε $\log x_n \to \log x$, $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$, οπότε $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty = x^y$.
$x = +\infty$, $0 < y \leq +\infty$: τότε $\log x_n \to +\infty$, $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$, οπότε $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty = x^y$.
$x = +\infty$, $-\infty \leq y < 0$: τότε $\log x_n \to +\infty$, $\log z_n = y_n \log x_n \to -\infty$, οπότε $z_n = e^{\log z_n} \to 0 = x^y$.
$x = 0$, $y = -\infty$: τότε $\log x_n \to -\infty$, $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$, οπότε $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty$. □

4.3.1 Δυνάμεις αρνητικών αριθμών.

Στο σημείο αυτό θα δούμε γιατί αποφεύγουμε να ορίσουμε τις δυνάμεις αρνητικών αριθμών με μη-ακέραιους εκθέτες. Θα δούμε ότι, για $a < 0$, δεν είναι δυνατό να ορίσουμε την δύναμη a^x για κάθε τιμή του x σε κάποιο σύνολο A, αν θέλουμε να ικανοποιούνται κάποια ελάχιστα "κριτήρια" και αν θέλουμε το σύνολο A να είναι στοιχειωδώς "μεγάλο". Θα θέλαμε, για παράδειγμα, το A να είναι μεγαλύτερο από το $\mathbb{Z}$ - διότι έχουμε ήδη ορίσει τον a^x για κάθε $x \in \mathbb{Z}$ - και το επιθυμητό θα ήταν το A να είναι τουλάχιστον το $\mathbb{Q}$ ή, ακόμη καλύτερα, να είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$.
Στα παρακάτω θα είναι $a < 0$.
Μια πρώτη λογική απαίτηση ώστε να ορίσουμε τον a^x για κάθε x στο σύνολο A είναι να

ικανοποιείται η συνήθης αλγεβρική ιδιότητα $a^x a^y = a^{x+y}$ για κάθε $x, y \in A$. Αυτό συνεπάγεται, ειδικώτερα, ότι το A πρέπει να έχει την ιδιότητα: $x + y \in A$ για κάθε $x, y \in A$.
Έστω $r \in \mathbb{Q}$. Τότε, όπως γνωρίζουμε, υπάρχουν μοναδικοί $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ με $\gcd(m,n) = 1$ ώστε $r = \frac{m}{n}$. Αυτή η γραφή του r ονομάζεται *ανάγωγη μορφή* του. Παρακάτω θα χρειαστούμε τα εξής δυο απλά αποτελέσματα: (i) Αν $r = \frac{m}{n}$ είναι η ανάγωγη μορφή του r και ο n είναι άρτιος, τότε ο m είναι περιττός. (ii) Αν $r = \frac{m'}{n'}$, όπου $m' \in \mathbb{Z}$ και $n' \in \mathbb{N}$, τότε η ανάγωγη μορφή $r = \frac{m}{n}$ του r προκύπτει με απλοποίηση του λόγου $\frac{m'}{n'}$. Άρα ο m είναι διαιρέτης του m' και ο n είναι διαιρέτης του n'. Άρα, αν ο m' είναι περιττός, τότε και ο m είναι περιττός και, αν ο n' είναι περιττός, τότε και ο n είναι περιττός.
Έστω, λοιπόν, $r \in \mathbb{Q}$ και $r = \frac{m}{n}$ η ανάγωγη μορφή του r. Όπως κι αν ορίσουμε τον a^r, πρέπει - λόγω της αναγκαίας αλγεβρικής ιδιότητας - να ισχύει

$$(a^r)^n = (a^r) \cdots (a^r) = a^{r+\cdots+r} = a^{nr} = a^m ,$$

οπότε ο a^r είναι λύση της εξίσωσης $x^n = a^m$. Παρατηρούμε ότι, αν ο n είναι άρτιος, τότε ο m είναι περιττός, οπότε $(a^r)^n = a^m < 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, αν η ανάγωγη μορφή του r έχει άρτιο παρονομαστή, τότε δεν είναι δυνατό να ορισθεί ο a^r. Κατόπιν, παρατηρούμε ότι αν ο n είναι περιττός, τότε η εξίσωση $x^n = a^m$ έχει ακριβώς μια λύση: η λύση αυτή είναι είτε η $\sqrt[n]{a^m}$, αν ο m είναι άρτιος διότι τότε $a^m > 0$, είτε η $-\sqrt[n]{-a^m}$, αν ο m είναι περιττός διότι τότε $a^m < 0$.
Συνοψίζουμε: *αν η ανάγωγη μορφή του r έχει άρτιο παρονομαστή, τότε δεν είναι δυνατό να ορισθεί ο a^r και, αν η ανάγωγη μορφή $r = \frac{m}{n}$ του r έχει περιττό παρονομαστή, τότε μπορεί να ορισθεί ο a^r ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^n = a^m$.*
Τώρα θεωρούμε ως A το σύνολο όλων των ρητών των οποίων η ανάγωγη μορφή έχει περιττό παρονομαστή. Το A περιέχει όλους τους ακεραίους, διότι αν $m \in \mathbb{Z}$, τότε είναι σαφές ότι η ανάγωγη μορφή του m είναι η $m = \frac{m}{1}$ και ο 1 είναι περιττός. Άρα $\mathbb{Z} \subseteq A$. Από την άλλη μεριά, το A είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, διότι, για παράδειγμα, ο ρητός $\frac{1}{2}$ δεν ανήκει στο A. Το A έχει και την ιδιότητα που επισημάναμε προηγουμένως. Δηλαδή, αν $r, s \in A$, τότε $r + s \in A$. Πράγματι, έστω $r, s \in A$ και έστω $r = \frac{m}{n}$ και $s = \frac{k}{l}$ οι ανάγωγες μορφές των r, s, οπότε οι n, l είναι περιττοί. Τότε $r + s = \frac{ml+kn}{nl}$ και ο nl είναι περιττός. Άρα, σύμφωνα με μια προηγούμενη παρατήρησή μας, η ανάγωγη μορφή του $r + s$ (που μπορεί να μην είναι η $r + s = \frac{ml+kn}{nl}$) έχει περιττό παρονομαστή, οπότε $r + s \in A$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι, αν ορίσουμε τον a^r για κάθε $r \in A$ με τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως, τότε *ισχύει* η αλγεβρική ιδιότητα $a^r a^s = a^{r+s}$ για κάθε $r, s \in A$. Θα παραλείψουμε την απόδειξη. Μάλιστα, μπορεί να αποδειχθεί σχετικά εύκολα ότι αν ορίσουμε, όπως παραπάνω, τον a^r *για κάθε* $a < 0$ *και κάθε* $r \in A$, τότε ισχύουν και οι τρεις αλγεβρικές ιδιότητες του μέρους 1 της Πρότασης 1.2.
Το σύνολο A δεν είναι βέβαια όσο "μεγάλο" θα θέλαμε: είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Πάντως, είναι γνήσιο υπερσύνολο του $\mathbb{Z}$ και θα προσέφερε μια ικανοποιητική επέκταση του ορισμού του a^x σε ένα σύνολο μεγαλύτερο του $\mathbb{Z}$ αν, εκτός από το "αλγεβρικό κριτήριο" ικανοποιούνταν και ένα απαραίτητο "αναλυτικό κριτήριο". Το κριτήριο αυτό είναι: η συνάρτηση a^x πρέπει να είναι *συνεχής* στο πεδίο ορισμού της A. Θα δούμε ότι η συνάρτηση a^x με πεδίο ορισμού το A δεν είναι συνεχής και, μάλιστα, είναι ασυνεχής σε *κάθε* σημείο του A.
Έστω $r \in A$ και έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι η a^x είναι συνεχής στον r. Έστω $r = \frac{m}{n}$ η ανάγωγη μορφή του r. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$t_k = \tfrac{2^k m}{2^k n+1} , \qquad s_k = \tfrac{2^k m+1}{2^k n+1} .$$

Επειδή ο παρονομαστής $2^k n + 1$ είναι περιττός, οι ανάγωγες μορφές των t_k, s_k έχουν περιττούς παρονομαστές, οπότε $t_k, s_k \in A$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$t_k \to r, \qquad s_k \to r.$$

Λόγω συνέχειας της a^x στον r, συνεπάγεται ότι

$$a^{t_k} \to a^r\,, \qquad a^{s_k} \to a^r\,.$$

Ο αριθμός a^{t_k} είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^{2^k n+1} = a^{2^k m} > 0$, οπότε $a^{t_k} > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται

$$a^r \geq 0.$$

Ο αριθμός a^{s_k} είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^{2^k n+1} = a^{2^k m+1} < 0$, οπότε $a^{s_k} < 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται

$$a^r \leq 0.$$

Επομένως, $a^r = 0$. Αυτό είναι αδύνατο διότι

$$a^r a^{-r} = a^{r+(-r)} = a^0 = 1.$$

Ίσως αναρωτηθεί κανείς αν είναι δυνατό (με $a < 0$) να ορισθεί ο a^x για κάθε x σε ένα σύνολο A το οποίο, εκτός, από τους ακεραίους, περιέχει και τους αρρήτους. Και πάλι, όμως, βλέπουμε ότι αυτό δεν γίνεται, διότι δεν θα ικανοποιείται τουλάχιστον το "αλγεβρικό κριτήριο": δηλαδή ότι, αν $x, y \in A$, τότε $x + y \in A$. Πράγματι, έστω ότι ισχύει: αν $x, y \in A$, τότε $x + y \in A$. Έστω οποιοσδήποτε ρητός r. Επειδή το A περιέχει τους αρρήτους, πρέπει να είναι $r - \sqrt{2} \in A$ και $\sqrt{2} \in A$, οπότε $r = (r - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \in A$. Άρα το A περιέχει όλους τους ρητούς. Αυτό είναι άτοπο, διότι είδαμε ότι δεν είναι δυνατό να ορισθεί ο a^x για κάθε $x \in \mathbb{Q}$.
Άρα, αφού δεν μπορεί να υπάρχει σύνολο A, το οποίο να είναι στοιχειωδώς "μεγάλο", στο οποίο να ορίζεται η δύναμη a^x, το μόνο που απομένει είναι να ορισθεί ο a^x για μεμονωμένους "λίγους" αριθμούς x πέραν των ακεραίων. Αυτό, όμως, θα ήταν ουσιαστικά άχρηστο, οπότε παραμένουμε στον ορισμό του a^x μόνο για ακέραιους x.

Ασκήσεις.

1. Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα 4.1 στο πλαίσιο της δεξιάς (αριστερής) συνέχειας στον ξ.

2. Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών: $\big((1+\frac{1}{n})^8+4(1+\frac{1}{n})^5+7\big)$, $\big(e^{\frac{1+(-1)^n}{n}}\big)$, $(\tan\frac{1}{2^n})$, $(\log(1+\frac{1}{n}))$, $\big(2^{\frac{3n^4+n-4}{n^4+n^3+4}}\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^2})\big)$, $(n\log(1+\frac{1}{n}))$, $\big((\frac{n^2+3}{4n^2-3})^{\frac{3}{2}}\log(\cos\frac{1}{n})\big)$.

3. Έστω διάστημα I το οποίο δεν είναι μονοσύνολο και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I.
(i) Αν $f(r) = 0$ για κάθε ρητό $r \in I$, αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$.
(ii) Αν $f(r) \geq 0$ για κάθε ρητό $r \in I$, αποδείξτε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$.

4. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Έστω ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $x' \in [a, b]$ ώστε $|f(x')| \leq \frac{|f(x)|}{2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = 0$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε οποιονδήποτε $x_1 \in [a, b]$ και έστω $x_2 = {x_1}'$, $x_3 = {x_2}'$ κλπ. Έτσι ορίζεται ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ ώστε $|f(x_{n+1})| \leq \frac{|f(x_n)|}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $f(x_n) \to 0$ και εφαρμόστε το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ για κάθε x_1, x_2. Αποδείξτε ότι, αν η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας, τότε ο τύπος της είναι $f(x) = cx$ για κάποια σταθερά c.
Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $f(0) = 0$ και ότι ισχύει $f(m) = f(1)m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε

ότι ισχύει $f(r) = f(1)r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Παρατηρήστε ότι ισχύει $f(x) = f(\xi) + f(x_0) - f(x_0 + \xi - x)$ και αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον x_0, τότε είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της άσκησης 3 στην συνάρτηση $f(x) - f(1)x$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = f(1)x$ για κάθε x.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ για κάθε x_1, x_2 και $f(0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι, αν η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας, τότε ο τύπος της είναι $f(x) = e^{cx}$ για κάποια σταθερά c.
   Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε x και εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 5.

7. Μια συνάρτηση $f : A \to A$ χαρακτηρίζεται **γνήσια συστολή** στο A αν υπάρχει ρ ώστε $0 \leq \rho < 1$ και ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq \rho |x' - x''|$ για κάθε $x', x'' \in A$. Βάσει της άσκησης 11 της ενότητας 4.1, μια γνήσια συστολή στο A είναι συνεχής στο A.
   Ένα σημείο $\xi \in A$ χαρακτηρίζεται **σταθερό σημείο** της f στο A αν είναι $f(\xi) = \xi$.
   Δείτε την άσκηση 15 της ενότητας 3.1 για τον ορισμό του κλειστού συνόλου. Στα παρακάτω μπορείτε να θεωρήσετε τις ειδικές περιπτώσεις $A = \mathbb{R}$ ή A να είναι οποιοδήποτε κλειστό διάστημα (ακόμη και μη-φραγμένο).
   Αποδείξτε το **Θεώρημα Σταθερού Σημείου**: *Αν η f είναι συστολή στο κλειστό σύνολο A, τότε έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο A.*
   Υπόδειξη: Θεωρήστε οποιονδήποτε $x_1 \in A$ και την ακολουθία (x_n) στο A που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 3(ii) της ενότητας 2.8 για να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in A$ ώστε $f(\xi) = \xi$. Τέλος, αποδείξτε ότι ο ξ είναι μοναδικός.
   Το προηγούμενο θεώρημα είναι μια από τις παραλλαγές θεωρημάτων σταθερού σημείου. Μια άλλη παραλλαγή είναι στην άσκηση 13 της ενότητας 4.4.

4.4 Τα τρία βασικά θεωρήματα.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις τρεις πιο σημαντικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων. Θα παρατηρήσετε ότι και οι τρεις ιδιότητες αναφέρονται σε συναρτήσεις συνεχείς σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα.

Το πρώτο θεώρημα λέει ότι συνάρτηση συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα έχει φραγμένο σύνολο τιμών.

Θεώρημα Φραγμένης Συνάρτησης. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [a, b]$ ώστε

$$|f(x_n)| > n.$$

Προκύπτει, λοιπόν, ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ ώστε $|f(x_n)| > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, επομένως,

$$|f(x_n)| \to +\infty.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \xi.$$

Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$. Επειδή $\xi \in [a,b]$, η f είναι συνεχής στον ξ, οπότε από το $x_{n_k} \to \xi$ συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to f(\xi)$$

και, επομένως, $|f(x_{n_k})| \to |f(\xi)|$. Όμως, $|f(x_{n_k})| \to +\infty$ και καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Για μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος Φραγμένης Συνάρτησης δείτε την άσκηση 24.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής ούτε φραγμένη στο $[0,1]$.

(2) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι ασυνεχής και φραγμένη στο $[0,1]$.

(3) Η συνάρτηση $\frac{1}{x(x-1)}$ είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη στο $(0,1)$.

(4) Η συνάρτηση x είναι συνεχής και φραγμένη στο $(-1,1)$.

(5) Η συνάρτηση x είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

(6) Η συνάρτηση $\frac{1}{x^2+1}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

(7) Η συνάρτηση $e^{9\sin(x^2)-\log(e^x-1)}$ είναι φραγμένη σε οποιοδήποτε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(0,+\infty)$, διότι είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

(8) Υπάρχει u ώστε να ορίζεται η συνάρτηση $\log\big(u - e^{9\sin(x^2)-\log(e^x-1)}\big)$ στο διάστημα $[\frac{1}{5},7]$. Πράγματι, η συνάρτηση $e^{9\sin(x^2)-\log(e^x-1)}$ ως συνεχής στο $[\frac{1}{5},7]$ είναι φραγμένη στο $[\frac{1}{5},7]$, οπότε υπάρχει u ώστε $e^{9\sin(x^2)-\log(e^x-1)} < u$ για κάθε $x \in [\frac{1}{5},7]$.

Το δεύτερο θεώρημα λέει ότι το σύνολο τιμών συνάρτησης συνεχούς σε κλειστό και φραγμένο διάστημα έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο ή, ισοδύναμα, ότι η συνάρτηση έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Με άλλα λόγια: στο γράφημα συνάρτησης συνεχούς σε κλειστό και φραγμένο διάστημα υπάρχει σημείο μέγιστου ύψους και σημείο ελάχιστου ύψους.

Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε υπάρχουν $\zeta, \eta \in [a,b]$ ώστε να ισχύει*

$$f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$$

για κάθε $x \in [a,b]$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα Φραγμένης Συνάρτησης, η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, δηλαδή το σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$ είναι φραγμένο. Άρα τα infimum και supremum του συνόλου $\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$ είναι αριθμοί. Έστω

$$u = \sup\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο $u - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$, οπότε υπάρχει $x_n \in [a,b]$ ώστε $u - \frac{1}{n} < f(x_n)$. Επειδή ο u είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$, συνεπάγεται

$$u - \tfrac{1}{n} < f(x_n) \leq u.$$

Άρα προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ ώστε $u - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$f(x_n) \to u.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \eta.$$

Επειδή $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $a \leq \eta \leq b$, οπότε η f είναι συνεχής στον η. Από το $x_{n_k} \to \eta$ συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to f(\eta).$$

Επειδή $f(x_{n_k}) \to u$, συνεπάγεται

$$f(\eta) = u$$

και, επειδή ο u είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$, συνεπάγεται

$$f(x) \leq f(\eta)$$

για κάθε $x \in [a, b]$.
Με τον ίδιο τρόπο, από το infimum του $\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$, προκύπτει ο ζ. $\square$

Μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος Μέγιστης - Ελάχιστης τιμής υπάρχει στην άσκηση 23 και μια κοινή απόδειξη των Θεωρημάτων Φραγμένης Συνάρτησης και Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής υπάρχει στην άσκηση 25.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι ζ, η στο Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής μπορεί να μην είναι μοναδικοί. Μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας ζ στους οποίους η f έχει την (ίδια) ελάχιστη τιμή της και περισσότεροι από ένας η στους οποίους η f έχει την (ίδια) μέγιστη τιμή της. Επίσης, το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης των ζ, η στους οποίους η f έχει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της ούτε τρόπο εύρεσης της ελάχιστης και μέγιστης τιμής της. Για τέτοιους υπολογισμούς θα γνωρίσουμε διάφορες μεθόδους στο Κεφάλαιο 5.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1\,, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ 0\,, & \text{αν } x = 0 \\ x-1\,, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή. Είναι, όμως, φραγμένη στο $[-1, 1]$.
(2) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ 1\,, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ αλλά έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
(3) Η συνάρτηση x είναι συνεχής (και φραγμένη) στό $(-1, 1)$ αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στό $(-1, 1)$.
(4) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+2\,, & \text{αν } -2 < x < -1 \\ -x\,, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ x-2\,, & \text{αν } 1 < x < 2 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $(-2, 2)$ και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
(5) Η συνάρτηση $\frac{x|x|}{x^2+1}$ είναι συνεχής (και φραγμένη) στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.
(6) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & \text{αν } |x| > 1 \\ x\,, & \text{αν } |x| \leq 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
(7) Ας δούμε πάλι το παράδειγμα (8) μετά το Θεώρημα Φραγμένης Συνάρτησης. Δεν υπάρχει ελάχιστος u ώστε να ορίζεται η συνάρτηση $\log\big(u - e^{9\sin(x^2) - \log(e^x - 1)}\big)$ στο διάστημα $[\frac{1}{5}, 7]$. Πράγματι, επειδή η συνάρτηση $e^{9\sin(x^2) - \log(e^x - 1)}$ είναι συνεχής στο $[\frac{1}{5}, 7]$, υπάρχει $\eta \in [\frac{1}{5}, 7]$ ώστε $f(x) \leq f(\eta)$

για κάθε $x \in [\frac{1}{5}, 7]$. Άρα ως u μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε αριθμό μεγαλύτερο του $f(\eta)$ αλλά όχι τον $f(\eta)$.

Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε, για κάθε λ με την ιδιότητα $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ ή $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$ υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.*

Απόδειξη. Έστω $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$.
Θεωρούμε τα ισομήκη διαστήματα $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ και παρατηρούμε ότι είτε $f(a) \leq \lambda \leq f(\frac{a+b}{2})$ είτε $f(\frac{a+b}{2}) \leq \lambda \leq f(b)$. Στην πρώτη περίπτωση συμβολίζουμε $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Στη δεύτερη περίπτωση συμβολίζουμε $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ και $f(a_1) \leq \lambda \leq f(b_1)$. Κατόπιν, θεωρούμε τα ισομήκη διαστήματα $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ και παρατηρούμε ότι είτε $f(a_1) \leq \lambda \leq f(\frac{a_1+b_1}{2})$ είτε $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \leq \lambda \leq f(b_1)$. Στην πρώτη περίπτωση συμβολίζουμε $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Στη δεύτερη περίπτωση συμβολίζουμε $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$, $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2}$ και $f(a_2) \leq \lambda \leq f(b_2)$.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον. Δημιουργούμε έτσι διαδοχικά διαστήματα $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε να ισχύει

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}, \qquad f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το ότι $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συνεπάγεται

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, επομένως,

$$b_n - a_n \to 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση για τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Έστω

$$a_n \to \xi, \qquad b_n \to \xi.$$

Επειδή $a_n, b_n \in [a,b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $\xi \in [a,b]$, οπότε η f είναι συνεχής στον ξ. Επομένως, από τα $a_n \to \xi$ και $b_n \to \xi$ συνεπάγεται

$$f(a_n) \to f(\xi), \qquad f(b_n) \to f(\xi).$$

Τέλος, επειδή $f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $f(\xi) \leq \lambda \leq f(\xi)$ και, επομένως,

$$f(\xi) = \lambda.$$

Αν $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$, η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Για δυο ακόμη αποδείξεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής δείτε την άσκηση 22 αυτής της ενότητας και την άσκηση 12 της ενότητας 4.6.

Παρατηρήστε τα εξής σε σχέση με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής. Αν $f(a) = f(b)$, τότε, αναγκαστικά, $\lambda = f(a) = f(b)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δυο προφανείς λύσεις: τις $\xi = a$, $\xi = b$. Επίσης, αν $f(a) \neq f(b)$ και $\lambda = f(a)$ ή $\lambda = f(b)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μια προφανή λύση: την $\xi = a$ ή την $\xi = b$, αντιστοίχως. Άρα, μόνο αν υποθέσουμε ότι $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(b) < \lambda < f(a)$, το συμπέρασμα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής αποκτά ενδιαφέρον. Φυσικά, τότε οι a, b δεν είναι λύσεις της $f(x) = \lambda$, οπότε το συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = \lambda$. Άρα έχουμε και την εξής ισοδύναμη διατύπωση του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής:

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε, για κάθε λ με την ιδιότητα $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(b) < \lambda < f(a)$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.

Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής δεν υποδεικνύει *πώς* υπολογίζουμε τον ξ. Επίσης, ο ξ μπορεί να μην είναι μοναδικός: μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας ξ στους οποίους η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή λ.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } 0 < x \le 1 \\ 0\,, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Κανένας λ στο διάστημα $(f(0), f(1)) = (0, 1)$ δεν είναι τιμή της f.
(2) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{αν } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & \text{αν } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$, αλλά κάθε λ στο διάστημα $(f(0), f(1)) = (0, \frac{1}{2})$ είναι τιμή της f.

Θα δούμε, τώρα, τρεις τυπικές εφαρμογές του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Παραδείγματα. (1) Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Η συνάρτηση $\cos x - x$ είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$. Είναι $\cos 0 - 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ και $-\frac{\pi}{2} < 0 < 1$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ώστε $\cos\xi - \xi = 0$.
(2) Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 - 5x^2 - 18x + 7 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση. Δε χρειάζεται να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση σε συγκεκριμένο διάστημα.
Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 5x^2 - 18x + 7$. Βρίσκουμε μόνοι μας a, b ώστε $a < b$ και ο 0 να είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a), f(b)$. Δοκιμάζουμε λίγο - πολύ στην τύχη: $f(0) = 7$, $f(1) = -15$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $\xi^3 - 5\xi^2 - 18\xi + 7 = f(\xi) = 0$.
Μάλιστα, δεν είναι ανάγκη ούτε καν να θεωρήσουμε συγκεκριμένο διάστημα. Αυτό γίνεται - όχι στην τύχη! - ως εξής. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος $a < 0$ - δεν είναι ανάγκη να βρούμε συγκεκριμένη τιμή - ώστε $f(a) < 0$. Επίσης, επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος $b > 0$ ώστε $f(b) > 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $\xi^3 - 5\xi^2 - 18\xi + 7 = f(\xi) = 0$.
(3) **Ύπαρξη n-οστής ρίζας** Θεωρούμε οποιονδήποτε $y > 0$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, υπάρχει $b > 0$ ώστε $b^n > y$. Αλλά και χωρίς αναφορά στο όριο, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε $b > 1 + \frac{y-1}{n}$ και τότε, βάσει της ανισότητας του Bernoulli, είναι

$$b^n > (1 + \tfrac{y-1}{n})^n \ge 1 + n\tfrac{y-1}{n} = y.$$

Η συνάρτηση x^n είναι συνεχής στο $[0, b]$ και είναι $0^n < y < b^n$. Άρα υπάρχει $x \in (0, b)$ ώστε $x^n = y$. Αποδείξαμε, λοιπόν, το ουσιαστικό μέρος του Θεωρήματος 1.2: για κάθε $y > 0$ υπάρχει $x > 0$ ώστε $x^n = y$.

Ιδού, τέλος, δυο πορίσματα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Θεώρημα του Bolzano. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Αν $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Από $f(a)f(b) < 0$ συνεπάγεται $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$. □

Ιδιότητα Σταθερού Προσήμου. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Αν ισχύει $f(x) \ne 0$ για κάθε $x \in I$, τότε είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το συμπέρασμα δεν είναι σωστό. Τότε υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$. Επειδή το I είναι διάστημα, το διάστημα $[a, b]$ ή $[b, a]$ είναι υποσύνολο του I, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ή $[b, a]$ και, επομένως, $\xi \in I$ ώστε $f(\xi) = 0$. Αυτό είναι άτοπο. □

Αποδείξαμε το Θεώρημα του Bolzano βάσει του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής. Μπορούμε, όμως, να κάνουμε και το αντίστροφο. Πράγματι, έστω ότι ισχύει το Θεώρημα του Bolzano και έστω

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και λ με την ιδιότητα $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ ή $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$. Αν $\lambda = f(a)$ ή $\lambda = f(b)$, τότε, προφανώς, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$: ο a ή ο b, αντιστοίχως. Έστω, λοιπόν, $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(b) < \lambda < f(a)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - \lambda \qquad (x \in [a, b]).$$

Τότε η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ και είναι $g(a)g(b) < 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $g(\xi) = 0$ και, επομένως, $f(\xi) = \lambda$. Άρα αποδείξαμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.

Επομένως, *το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής και το Θεώρημα του Bolzano είναι ισοδύναμα.*

Μπορεί, επίσης, να αποδειχτεί ότι *το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής είναι ισοδύναμο με την Ιδιότητα Σταθερού Προσήμου*. Δείτε την άσκηση 20.

Σχόλια. Θα κάνουμε κάποια σχόλια σχετικά με το εύρος εφαρμογής των τριών βασικών θεωρημάτων σε συναρτήσεις συνεχείς σε σύνολα τα οποία δεν είναι κλειστά και φραγμένα διαστήματα.

1. Σχετικά με τα Θεωρήματα Φραγμένης Συνάρτησης και Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής, υπάρχει μεγαλύτερη ελευθερία. Το πεδίο ορισμού A της συνεχούς συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ δεν είναι ανάγκη να είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα. Στην άσκηση 15 της ενότητας 3.1 ορίζεται η έννοια του *κλειστού συνόλου* και στην άσκηση 9 αυτής της ενότητας μπορείτε να αποδείξετε ότι, το A είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο αν και μόνο αν κάθε $f : A \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο A, είναι φραγμένη και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Πρέπει, επίσης, να πούμε ότι η συλλογή των κλειστών και φραγμένων συνόλων είναι πολύ πιο πλούσια από την συλλογή των κλειστών και φραγμένων διαστημάτων. Η βαθύτερη ιδιότητα των κλειστών και φραγμένων συνόλων, στην οποία οφείλεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση στα σύνολα αυτά είναι φραγμένη και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, ονομάζεται **συμπάγεια**. Η ιδιότητα αυτή είναι έξω από το πλαίσιο αυτού του βιβλίου.

2. Σχετικά με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, η ελευθερία είναι πολύ μικρότερη. Από τη μια μεριά μπορούμε να κάνουμε την εξής απλή και χρήσιμη γενίκευση:

Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Αν κάποιος λ είναι ανάμεσα σε δυο τιμές της f, τότε και ο λ είναι τιμή της f.

Πράγματι, έστω $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ για κάποιους $a, b \in I$. Επειδή το I είναι διάστημα, το διάστημα $[a, b]$ ή $[b, a]$ είναι υποσύνολο του I, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ή $[b, a]$ και, επομένως, $\xi \in I$ ώστε $f(\xi) = \lambda$ και ο λ είναι τιμή της f.

Από την άλλη μεριά, όμως, δεν υπάρχει άλλο περιθώριο γενίκευσης. Θεωρήστε οποιοδήποτε μη-κενό σύνολο A το οποίο *δεν* είναι διάστημα. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.11, υπάρχουν $a, b \in A$ ώστε $a < b$ και κάποιος $\xi \notin A$ ώστε $a < \xi < b$. Τώρα θεωρήστε την συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x$ $(x \in A)$. Η f είναι συνεχής στο A, οι a, b είναι τιμές της f, διότι $a = f(a)$ και $b = f(b)$, και ο ξ είναι ανάμεσα στις τιμές a, b, *αλλά* ο ξ *δεν* είναι τιμή της f.

Είδαμε, λοιπόν, ότι, αν ένα μη-κενό σύνολο A δεν είναι διάστημα, τότε υπάρχει $f : A \to \mathbb{R}$ στην οποία δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής ή η παραπάνω απλή γενίκευσή του. Η βαθύτερη ιδιότητα των διαστημάτων, στην οποία οφείλεται ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση στα σύνολα αυτά και για κάθε αριθμό ο οποίος είναι ανάμεσα σε δυο τιμές της συνάρτησης συνεπάγεται ότι ο αριθμός είναι κι αυτός τιμή της συνάρτησης, ονομάζεται **συνεκτικότητα**. Δείτε την άσκηση 19 της ενότητας 3.1 σχετικά με αυτήν την ιδιότητα. Στην ίδια άσκηση αποδεικνύεται ότι η συλλογή των συνεκτικών συνόλων ταυτίζεται με την συλλογή των διαστημάτων και αυτό - καθώς και το παράδειγμα που είδαμε - εξηγεί την αδυναμία εφαρμογής του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής σε γενικότερα σύνολα.

Ασκήσεις.

1. Συμπληρώστε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής και Ενδιάμεσης Τιμής.

2. Έχουν οι συναρτήσεις $x^2 - x + 1$, $\sin(\pi x)$, $\cot(\pi x)$, $\sin(2\pi x)$ μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0, 1)$;

3. Ξαναδείτε την άσκηση 14 της ενότητας 3.5.
(i) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\sin\frac{1}{x}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0, +\infty)$ και ότι παίρνει και τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της σε άπειρα σημεία του $(0, +\infty)$. Ποια είναι αυτά τα σημεία;
(ii) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $x\sin x$, $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ δεν είναι άνω φραγμένες ούτε κάτω φραγμένες στο $(0, +\infty)$.
(iii) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{1+x}\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0, +\infty)$.

4. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ και $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \geq g(x) + \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.

5. Θεωρώντας τη συνεχή συνάρτηση $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$, δώστε δεύτερη λύση της άσκησης 4 της ενότητας 4.3.

6. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a, b). Αποδείξτε ότι, αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to b} f(x)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) > \lim_{x\to a} f(x)$ και $f(x_0) > \lim_{x\to b} f(x)$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή στο $[a, b]$.
Υπόδειξη: Πρώτος τρόπος: Αποδείξτε ότι υπάρχουν a', b' ώστε $a < a' < b' < b$ και ώστε να ισχύει $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in (a, a')$ και για κάθε $x \in (b', b)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής στο $[a', b']$, αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή στο $[a, b]$.
Δεύτερος τρόπος: Έστω $u = \sup\{f(x) \,|\, x \in (a, b)\}$, όπου $u \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Τότε υπάρχει (x_n) στο (a, b) ώστε $f(x_n) \to u$. Βάσει της Πρότασης 2.26, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ ώστε $x_{n_k} \to \xi$. Τότε είναι $\xi \in [a, b]$ και αποδείξτε ότι $\xi \in (a, b)$. Τέλος, αποδείξτε ότι $f(\xi) = u$.

7. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι για κάθε $x \in I$, $\delta > 0$ υπάρχει $x' \in (x - \delta, x) \cap I$ ώστε $f(x') \leq f(x)$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I.
Υπόδειξη: Έστω $a, b \in I$ ώστε $a < b$ και $f(a) > f(b)$. Έστω $\xi = \inf\{x \in [a, b] \,|\, f(x) \leq f(b)\}$ οπότε υπάρχει (x_n) στο $[a, b]$ ώστε $x_n \to \xi$ και $f(x_n) \leq f(b)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $a < \xi \leq b$ και $f(x) > f(\xi) = f(b)$ για κάθε $x \in [a, \xi)$ και καταλήξτε σε αντίφαση.
Να αντιπαραβάλετε με το παράδειγμα της $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & \text{αν } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ καθώς και με την άσκηση 11 της ενότητας 2.5.

8. **Λήμμα του Ανατέλλοντος Ηλίου**. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$. Ο x χαρακτηρίζεται *σημείο σκιάς* της f αν υπάρχει $x' > x$ ώστε $f(x') > f(x)$. Έστω ότι κάθε $x \in (a, b)$ είναι σημείο σκιάς της f ενώ οι a, b δεν είναι σημεία σκιάς της f. Αποδείξτε ότι $f(x) < f(b)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και ότι $f(a) = f(b)$.

9. (Συνέχεια της άσκησης 15 της ενότητας 3.1.) (i) Έστω κλειστό και φραγμένο σύνολο A και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A.
(ii) Αν το A δεν είναι φραγμένο, αποδείξτε ότι η συνάρτηση x είναι συνεχής αλλά μη-φραγμένη στο A. Αν το A δεν είναι κλειστό, τότε υπάρχει $\xi \notin A$, το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, οπότε η συνάρτηση $\frac{1}{x-\xi}$ είναι συνεχής αλλά μη-φραγμένη στο A.

10. (Συνέχεια της άσκησης 15 της ενότητας 3.1 και της άσκησης 15 της ενότητας 4.1.) Έστω κλειστό και φραγμένο σύνολο A και $f : A \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι άνω (κάτω) ημισυνεχής στο A, τότε είναι άνω (κάτω) φραγμένη και έχει μέγιστη (ελάχιστη) τιμή στο A.

11. Αποδείξτε ότι:
(i) η $x^7 - 3x^6 + 5x^5 + 13x^4 - x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $[0, 1]$.
(ii) η $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον δυο λύσεις.
(iii) η $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3} = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.
(iv) η $\tan x = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση σε κάθε $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

12. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a, b) και έστω ότι ισχύει $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο (a, b).

13. (i) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$. Αν $f(a) \leq g(a)$ και $f(b) \geq g(b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.
(ii) Αποδείξτε το **Θεώρημα Σταθερού Σημείου**: *Αν η $f : [a, b] \to [a, b]$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f έχει σταθερό σημείο στο $[a, b]$, δηλαδή υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \xi$.*
(iii) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ότι *δεν ισχύει* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *ούτε* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

14. Έστω $f, g : [a, b] \to [a, b]$ συνεχείς στο $[a, b]$. Έστω ότι η g είναι αύξουσα και $f \circ g = g \circ f$. Αποδείξτε ότι οι f, g έχουν κοινό σταθερό σημείο.
Υπόδειξη: Σύμφωνα με την άσκηση 13, υπάρχει $x_1 \in [a, b]$ ώστε $f(x_1) = x_1$. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = g(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι μονότονη και ότι, αν ξ είναι το όριο της (x_n), τότε ισχύει $f(\xi) = g(\xi) = \xi$.

15. Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο I ώστε να ισχύει $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in I$.
(i) Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in I$.
(ii) Έστω και $h : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Αν ισχύει $h(x) = f(x)$ ή $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.

16. (i) Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο I. Αν ισχύει $g(x)^2 = f(x)^2 > 0$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι είτε ισχύει $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $g(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in I$.
(ii) Έστω διάστημα $I \subseteq [0, +\infty)$ ή $I \subseteq (-\infty, 0]$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι ισχύει $f(x)^2 = x^2$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in I$.
(iii) Πόσες συνεχείς $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ υπάρχουν ώστε να ισχύει $f(x)^2 = x^2$ για κάθε x;
(iv) Έστω διάστημα $I \subseteq [-1, 1]$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι ισχύει $x^2 + f(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in I$.

17. Γενικεύστε την άσκηση 15 ως εξής.

(i) Έστω διάστημα I και $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο I. Έστω ότι οι $f_1, \ldots, f_n$ σε κάθε $x \in I$ έχουν n *διαφορετικές* τιμές. Τι συμπεραίνετε σχετικά με τη διάταξη μεγέθους αυτών των συναρτήσεων;
(ii) Έστω, επιπλέον, ότι η $h : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι σε κάθε $x \in I$ η τιμή της είναι ίση με την τιμή (στον ίδιο x) μιας από τις n αρχικές συναρτήσεις ή, ισοδύναμα, ότι ισχύει $(h(x) - f_1(x)) \cdots (h(x) - f_n(x)) = 0$ για κάθε $x \in I$. Τι συμπεραίνετε για τη σχέση της h με τις $f_1, \ldots, f_n$;
(iii) Έστω διάστημα $I \subseteq [1, +\infty)$ ή $I \subseteq [0, 1]$ και $h : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι ισχύει $(h(x) - x)(h(x) - x^2)(h(x) - x^3) = 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x) = x$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = x^2$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = x^3$ για κάθε $x \in I$.
(iv) Αν $I = [0, +\infty)$, τότε - με τις ίδιες κατά τα άλλα υποθέσεις του (iii) - ποιες είναι οι δυνατότητες για την h;

18. Αποδείξτε ότι: *αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ένα-προς-ένα στο διάστημα I, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο I.*
Υπόδειξη: Έστω $a, b, c \in I$ ώστε $a < b < c$ και $f(a) < f(b)$ και $f(c) < f(b)$. Θεωρώντας οποιονδήποτε λ ώστε $f(a) < \lambda < f(b)$ και $f(c) < \lambda < f(b)$, καταλήξτε σε αντίφαση. Ομοίως, αν $f(b) < f(a)$ και $f(b) < f(c)$. Καταλήξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

19. Έστω διάστημα I (όχι μονοσύνολο) και $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε λ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είτε έχει ακριβώς δυο λύσεις είτε δεν έχει καμιά λύση. Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο I.

20. Αποδείξτε ότι η Ιδιότητα Σταθερού Προσήμου είναι ισοδύναμη με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.

21. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μονότονη στο $[a, b]$ και έστω ότι για την f ισχύει το συμπέρασμα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής, δηλαδή ότι για κάθε λ με την ιδιότητα $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ ή $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$ υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$.
Υπόδειξη: Δείτε την Πρόταση 4.1 και τη συζήτηση μετά από αυτήν.

22. Ακολουθώντας (αν θέλετε) την παρακάτω υπόδειξη, δώστε δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.
Υπόδειξη: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) < \lambda < f(b)$. Θεωρήστε το $A = \{x \in [a, b] \,|\, f(x) \leq \lambda\}$ και παρατηρήστε ότι το A είναι μη-κενό και άνω φραγμένο. Έστω $\xi = \sup A$, οπότε $\xi \in [a, b]$ και υπάρχει (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$. Αποδείξτε ότι $f(\xi) \leq \lambda$, οπότε $\xi < b$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > \lambda$ για κάθε $x \in (\xi, b]$ και, επομένως, ότι $f(\xi) \geq \lambda$. Άρα $f(\xi) = \lambda$.

23. Ακολουθώντας (αν θέλετε) την παρακάτω υπόδειξη, δώστε δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής.
Υπόδειξη: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Η f είναι φραγμένη, οπότε το σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$ είναι φραγμένο. Έστω $u = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$. Τότε υπάρχει (x_n) στο $[a, b]$ ώστε $f(x_n) \to u$. Αν $f(x) < u$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε η $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{1}{u - f(x)}$ είναι συνεχής και, επομένως, φραγμένη στο $[a, b]$. Καταλήξτε σε αντίφαση. Άρα υπάρχει $\eta \in [a, b]$ ώστε $f(\eta) = u$, οπότε ο u είναι η μέγιστη τιμή της f. Ομοίως, για την ελάχιστη τιμή.

24. Ακολουθώντας (αν θέλετε) την παρακάτω υπόδειξη, δώστε δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος Φραγμένης Συνάρτησης.
Υπόδειξη: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[a,b]$. Τότε η f δεν είναι φραγμένη στο $[a,\frac{a+b}{2}]$ ή στο $[\frac{a+b}{2},b]$. Έστω $[a_1,b_1]$ ένα από τα δυο υποδιαστήματα στο οποίο η f δεν είναι φραγμένη. Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργήστε μια ακολουθία διαστημάτων $[a_n,b_n]$ ώστε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, να είναι $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$, $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ και η f να μην είναι φραγμένη στο $[a_n,b_n]$. Επομένως, υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $a_n\to\xi$ και $b_n\to\xi$. Η f είναι συνεχής στον ξ, οπότε είναι φραγμένη κοντά στον ξ. Αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[a_{n_0},b_{n_0}]$. Άτοπο.

25. Ακολουθώντας (αν θέλετε) την παρακάτω υπόδειξη, δώστε ταυτόχρονη απόδειξη των Θεωρημάτων Φραγμένης Συνάρτησης και Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής.
Υπόδειξη: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Έστω $u=\sup\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$, όπου $u\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Τότε υπάρχει (x_n) στο $[a,b]$ ώστε $f(x_n)\to u$. Επίσης, υπάρχει συγκλίνουσα υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Έστω $x_{n_k}\to\eta$, οπότε $\eta\in[a,b]$ και η f είναι συνεχής στον η. Άρα $f(x_{n_k})\to f(\eta)$ και, επομένως, $f(\eta)=u$. Συμπεράνατε ότι $u\in\mathbb{R}$ και ότι ο u είναι η μέγιστη τιμή της f στο $[a,b]$.

4.5 Σύνολο τιμών. Αντίστροφη συνάρτηση.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f αφού αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως, για παράδειγμα, αν για συγκεκριμένο λ η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει λύση ή όχι.

Κατ' αρχάς ένα γενικό και απλό αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.11. *Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα, τότε το σύνολο τιμών της είναι κι αυτό διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω $A=\{f(x)\,|\,x\in I\}$ το σύνολο τιμών της f και έστω $y_1,y_2\in A$ και $y_1<y<y_2$. Τότε ο y είναι ανάμεσα στις τιμές y_1 και y_2 της f, οπότε και ο y είναι τιμή της f, δηλαδή $y\in A$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.11, το A είναι διάστημα. □

Ας δούμε λίγο πιο προσεκτικά την Πρόταση 4.11 σε συνδυασμό και με την Πρόταση 1.11. Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και $l=\inf\{f(x)\,|\,x\in I\}$ και $u=\sup\{f(x)\,|\,x\in I\}$. Τώρα έχουμε τις εξής τέσσερις περιπτώσεις. Είτε η f έχει ελάχιστη τιμή (δηλαδή ελάχιστο στοιχείο του συνόλου τιμών) και μέγιστη τιμή (δηλαδή μέγιστο στοιχείο του συνόλου τιμών) οπότε ο l είναι η ελάχιστη τιμή και ο u η μέγιστη τιμή της f και, επομένως, το σύνολο τιμών είναι ίσο με το $[l,u]$. Είτε η f δεν έχει ελάχιστη τιμή ούτε μέγιστη τιμή, οπότε το σύνολο τιμών είναι ίσο με το (l,u). Είτε η f έχει ελάχιστη τιμή αλλά όχι μέγιστη τιμή, οπότε ο l είναι η ελάχιστη τιμή της f και, επομένως, το σύνολο τιμών είναι ίσο με το $[l,u)$. Είτε η f έχει μέγιστη τιμή αλλά όχι ελάχιστη τιμή, οπότε ο u είναι η μέγιστη τιμή της f και, επομένως, το σύνολο τιμών είναι ίσο με το $(l,u]$.

Μπορεί να δοθεί πιο λεπτομερής περιγραφή του συνόλου τιμών συνάρτησης συνεχούς σε διάστημα οποιουδήποτε τύπου. Δείτε σχετικά την άσκηση 8. Στα επόμενα θα δούμε μερικές χρήσιμες χαρακτηριστικές περιπτώσεις στις οποίες το πρόβλημα του προσδιορισμού του συνόλου τιμών συνάρτησης έχει απλή - τουλάχιστο θεωρητικά - λύση.

Πρόταση 4.12. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε το σύνολο τιμών $\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$ είναι το κλειστό και φραγμένο διάστημα με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο I.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.11 και, φυσικά, του Θεωρήματος Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής. □

Άρα για να βρούμε το σύνολο τιμών συνάρτησης συνεχούς σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι αρκετό να υπολογίσουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό. Αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό. Στο Κεφάλαιο 5 θα γνωρίσουμε, με τη βοήθεια των παραγώγων, μερικές μεθόδους υπολογισμού αυτών των τιμών της συνάρτησης. Πάντως, σε μερικές απλές περιπτώσεις οι υπολογισμοί αυτοί είναι και τώρα εφικτοί.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση x^2 είναι αύξουσα στο διάστημα $[1, 4]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της στο $[1, 4]$ είναι ο $1^2 = 1$ και η μέγιστη τιμή της ο $4^2 = 16$. Άρα το σύνολο τιμών της που αντιστοιχεί στο $[1, 4]$ είναι το διάστημα $[1, 16]$.
(2) Η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της στο $[\frac{1}{2}, 3]$ είναι ο $\frac{1}{3}$ και η μέγιστη τιμή της ο 2. Άρα το σύνολο τιμών της που αντιστοιχεί στο $[\frac{1}{2}, 3]$ είναι το διάστημα $[\frac{1}{3}, 2]$.
(3) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$ στο διάστημα $[-1, 6]$. Η f είναι φθίνουσα στο $[-1, 3]$ και αύξουσα στο $[3, 6]$. Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[-1, 6]$ είναι ο $f(3) = -4$ και η μέγιστη τιμή της ο $\max\{f(-1), f(6)\} = 12$. Άρα το σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο $[-1, 6]$ είναι το διάστημα $[-4, 12]$.

Θα δούμε, τώρα, τη σημαντική περίπτωση υπολογισμού του συνόλου τιμών πολυωνυμικής συνάρτησης. Η περίπτωση αυτή δεν εμπίπτει στην Πρόταση 4.12.

Πρόταση 4.13. *Έστω η συνάρτηση $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.*
(1) Έστω ότι η p είναι περιττού βαθμού, δηλαδή $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Τότε το σύνολο τιμών της p είναι το $(-\infty, +\infty)$.
(2) Έστω ότι η p είναι άρτιου βαθμού, δηλαδή $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Αν $a_n > 0$, τότε η p έχει ελάχιστη τιμή, έστω l, και το σύνολο τιμών της είναι το $[l, +\infty)$. Αν $a_n < 0$, τότε η p έχει μέγιστη τιμή, έστω u, και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, u]$.

Απόδειξη. (1) Έστω $a_n > 0$, οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty.$$

Άρα η συνάρτηση p δεν είναι κάτω φραγμένη ούτε άνω φραγμένη, οπότε το σύνολο τιμών της p έχει ως infimum το $-\infty$ και ως supremum το $+\infty$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.11, το σύνολο τιμών της p είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Αν $a_n < 0$, τότε $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$ και η απόδειξη είναι ίδια.
(2) Έστω $a_n > 0$. Επειδή

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty,$$

υπάρχει $a < 0$ ώστε να ισχύει $p(x) > p(0)$ για κάθε $x \in (-\infty, a)$ και υπάρχει $b > 0$ ώστε να ισχύει $p(x) > p(0)$ για κάθε $x \in (b, +\infty)$. Η p είναι συνεχής στο $[a, b]$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή, έστω l, στο διάστημα αυτό. Επειδή $0 \in [a, b]$, είναι $l \leq p(0)$, οπότε ισχύει $l \leq p(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, a)$ και κάθε $x \in (b, +\infty)$. Άρα ο l είναι η ελάχιστη τιμή της p στο $\mathbb{R}$. Επίσης, πάλι από τα $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, η p δεν είναι άνω φραγμένη.
Άρα το σύνολο τιμών της p έχει ως ελάχιστο στοιχείο τον l και ως supremum το $+\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της p είναι το $[l, +\infty)$.
Αν $a_n < 0$, η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Για μια άμεση γενίκευση της Πρότασης 4.13 δείτε την άσκηση 7.

Παραδείγματα. (1) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $-2x^5+4x^4-3x^3-x^2-1$ είναι το $(-\infty,+\infty)$.
(2) Έστω η συνάρτηση $p(x)=x^4-4x^3+4x^2-7=x^2(x-2)^2-7$. Προφανώς, ισχύει $p(x)\geq -7$ για κάθε x και $-7=p(0)=p(2)$. Άρα ο -7 είναι η ελάχιστη τιμή της p και το σύνολο τιμών της είναι το $[-7,+\infty)$.

Τώρα θα εξετάσουμε τη σημαντική ειδική περίπτωση που η συνάρτηση εκτός από συνεχής είναι *και γνησίως μονότονη* σε διάστημα. Οι μέθοδοι του Κεφαλαίου 5 επιτρέπουν να χωρίζουμε τα πεδία ορισμού των περισσότερων συναρτήσεων που εμφανίζονται στην πράξη σε διαστήματα στα οποία αυτές είναι γνησίως μονότονες.

Πριν διατυπώσουμε την Πρόταση 4.14 ας θυμηθούμε ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5, αν μια συνάρτηση είναι μονότονη σε διάστημα, τότε υπάρχουν τα (πλευρικά) όριά της στα άκρα του διαστήματος.

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα. Ειδικώτερα, αν η $f:I\to J$ είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα I με σύνολο τιμών ένα διάστημα J, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:J\to I$ με πεδίο ορισμού το J και σύνολο τιμών το I. Μάλιστα, αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, τότε η f^{-1} είναι, αντιστοίχως, γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Το επιπλέον στοιχείο, το οποίο εισάγεται στην Πρόταση 4.14, είναι η *συνέχεια* της f και της f^{-1}.

Πρόταση 4.14. *(1) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a,b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[A,B]$, όπου $A=f(a)$, $B=f(b)$. Επίσης, η $f^{-1}:[A,B]\to[a,b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A,B]$.*
(2) Έστω $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ και $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (a,b). Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το (A,B), όπου $A=\lim_{x\to a}f(x)\in\overline{\mathbb{R}}$, $B=\lim_{x\to b}f(x)\in\overline{\mathbb{R}}$. Επίσης, η $f^{-1}:(A,B)\to(a,b)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (A,B).
(3) Έστω $a\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ και $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(a,b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $(A,B]$, όπου $A=\lim_{x\to a}f(x)\in\overline{\mathbb{R}}$, $B=f(b)$. Επίσης, η $f^{-1}:(A,B]\to(a,b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(A,B]$.
(4) Έστω $b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ και $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a,b)$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[A,B)$, όπου $A=f(a)$, $B=\lim_{x\to b}f(x)\in\overline{\mathbb{R}}$. Επίσης, η $f^{-1}:[A,B)\to[a,b)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A,B)$.
Τα συμπεράσματα των (1) - (4) ισχύουν και στην περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής. Η μόνη διαφορά είναι ότι τα άκρα A,B αλλάζουν διάταξη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση (1) πρέπει να είναι $[B,A]$ αντί $[A,B]$.

Απόδειξη. (1) Σύμφωνα με την Πρόταση 4.12, το σύνολο τιμών της f είναι το $[A,B]$, όπου $A=f(a)$, $B=f(b)$, οπότε η $f^{-1}:[A,B]\to[a,b]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[A,B]$ με σύνολο τιμών το $[a,b]$. Μένει να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής σε κάθε $\eta\in[A,B]$.
Έστω

$$A<\eta<B,\qquad \xi=f^{-1}(\eta),$$

οπότε $a<\xi<b$. Έστω $\varepsilon>0$. Θεωρούμε $x_1,x_2\in[a,b]$ ώστε

$$\xi-\varepsilon\leq x_1<\xi<x_2\leq\xi+\varepsilon.$$

Ορίζουμε τους

$$y_1=f(x_1),\qquad y_2=f(x_2)$$

στο $[A,B]$, οπότε

$$y_1<\eta<y_2\,.$$

Ορίζουμε και
$$\delta = \min\{\eta - y_1, y_2 - \eta\} > 0.$$
Τότε για κάθε y, $|y - \eta| < \delta$, συνεπάγεται
$$y_1 \leq \eta - \delta < y < \eta + \delta \leq y_2\,,$$
οπότε
$$\xi - \varepsilon \leq x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 \leq \xi + \varepsilon$$
και, επομένως, $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| = |f^{-1}(y) - \xi| < \varepsilon$. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στον η.
Έστω $\eta = A$, οπότε $\xi = f^{-1}(\eta) = a$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $x_2 \in [a, b]$ ώστε $a < x_2 \leq a + \varepsilon$. Ορίζουμε τον $y_2 = f(x_2)$ στο $[A, B]$, οπότε $A < y_2$. Ορίζουμε και $\delta = y_2 - A > 0$. Τότε για κάθε y, $A \leq y < A + \delta = y_2$, συνεπάγεται $a = f^{-1}(A) \leq f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 \leq a + \varepsilon$ και, επομένως, $|f^{-1}(y) - f^{-1}(A)| = |f^{-1}(y) - a| < \varepsilon$. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στον $\eta = A$.
Αν $\eta = B$, με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η f^{-1} είναι συνεχής στον η. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο $[A, B]$.
(2) Από το Θεώρημα 3.5 και τα σχόλια μετά από αυτό γνωρίζουμε ότι το infimum και το supremum του συνόλου τιμών της f είναι τα όρια $A = \lim_{x \to a} f(x)$ και $B = \lim_{x \to b} f(x)$, αντιστοίχως, και ότι $A < f(x) < B$ για κάθε $x \in (a, b)$. Άρα, βάσει της Πρότασης 4.11, το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το (A, B).
Για να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής σε κάθε $\eta \in (A, B)$ επαναλαμβάνουμε, απλώς, την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους του (1).
(3) Από το Θεώρημα 3.5 και τα σχόλια μετά από αυτό γνωρίζουμε ότι το infimum του συνόλου τιμών της f είναι το όριο $A = \lim_{x \to a} f(x)$ και ότι $A < f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Η τιμή $B = f(b)$ είναι το μέγιστο στοιχείο συνόλου τιμών. Άρα, από την Πρόταση 4.11, το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το $(A, B]$.
Για να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής σε κάθε $\eta \in (A, B]$ επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους του (1).
(4) Όπως στο (3).
Τέλος, οι αλλαγές που πρέπει να γίνουν στην περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι προφανείς.
Στο σημείο αυτό θα δούμε μια *δεύτερη απόδειξη* της συνέχειας της αντίστροφης συνάρτησης. Παρατηρήστε ότι σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα I και αποδεικνύουμε πρώτα ότι το σύνολο τιμών της είναι ένα διάστημα J (παρόμοιου τύπου με το I). Επομένως, η $f : I \to J$ είναι ένα-προς-ένα και επί, οπότε ορίζεται η $f^{-1} : J \to I$ και είναι κι αυτή γνησίως μονότονη στο J. Ας υποθέσουμε ότι η f^{-1} *δεν* είναι συνεχής σε κάποιο $\eta \in J$. Επειδή το J είναι διάστημα, το η είναι τουλάχιστον από αριστερά του ή από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του J. Επειδή η f^{-1} είναι μονότονη, τότε, σύμφωνα με την συζήτηση μετά από την Πρόταση 4.1, ανάμεσα στις τιμές της f^{-1} παρεμβάλλεται τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα το οποίο δεν περιέχει καμιά τιμή της f^{-1}. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι *ολόκληρο* το διάστημα I. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής σε κάθε $\eta \in J$. $\square$

Παραδείγματα. (1) Έστω $f : (1, 3) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^2 + 1$. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(1, 3)$ και $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 3} f(x) = 19$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(3, 19)$. Η $f^{-1} : (3, 19) \to (1, 3)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(3, 19)$. Επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(3, 19)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα $\lim_{y \to 3} f^{-1}(y)$ και $\lim_{y \to 19} f^{-1}(y)$. Όμως το σύνολο τιμών της είναι το $(1, 3)$. Άρα $\lim_{y \to 3} f^{-1}(y) = 1$ και $\lim_{y \to 19} f^{-1}(y) = 3$.
Είναι εύκολο να βρούμε τον τύπο της f^{-1}. Αυτός είναι: $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$. Από τον τύπο της f^{-1}

επιβεβαιώνεται η συνέχειά της καθώς και τα δυο όριά της στον 3 και στον 19.

(2) Έστω $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1,+\infty)$ και $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(1,+\infty)$. Η $f^{-1} : (1,+\infty) \to (1,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1,+\infty)$. Επειδή η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1,+\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα $\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y)$ και $\lim_{y\to 1} f^{-1}(y)$. Επειδή το σύνολο τιμών της είναι το $(1,+\infty)$, συνεπάγεται $\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = 1$ και $\lim_{y\to 1} f^{-1}(y) = +\infty$.
Ο τύπος της f^{-1} είναι $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$. Άρα επιβεβαιώνεται η συνέχεια της f^{-1} και τα δυο όριά της στον 1 και στο $+\infty$.

(3) Έστω η $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \log\frac{1}{x}$. Υπολογίζουμε: $f(1) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[1,+\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty,0]$. Η $f^{-1} : (-\infty,0] \to [1,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty,0]$ και, όπως στα δυο προηγούμενα παραδείγματα, βρίσκουμε από το σύνολο τιμών της ότι $\lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y) = +\infty$.
Ο τύπος της f^{-1} είναι $f^{-1}(y) = e^{-y}$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα ο υπολογισμός του τύπου της f^{-1} είναι απλός. Από τον τύπο της f^{-1} προκύπτει αμέσως ότι αυτή είναι συνεχής. Όμως, η συνέχεια της f^{-1} προκύπτει και από την Πρόταση 4.14 και αυτό είναι χρήσιμο σε περιπτώσεις που δεν μπορεί να υπολογιστεί ο τύπος της f^{-1}.

(4) Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ - το γνωρίζαμε, διότι η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού. Άρα η $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $\mathbb{R}$. Επίσης, από το σύνολο τιμών της f^{-1} υπολογίζουμε τα όρια $\lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y) = -\infty$ και $\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = +\infty$.
Μπορείτε να δείτε ότι δεν είναι εύκολο να βρεθεί ο τύπος της f^{-1}.

(5) Η $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -xe^x + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$. Είναι $f(0) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,1]$ και η $f^{-1} : (-\infty,1] \to [0,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και *συνεχής* στο $(-\infty,1]$. Τέλος, από το σύνολο τιμών της f^{-1} υπολογίζουμε το όριο $\lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y) = +\infty$.
Είναι αδύνατο να βρεθεί ο τύπος της f^{-1}, αφού δεν υπάρχει τύπος για τη λύση x της $-xe^x+1 = y$.

Ιδού μερικά πιο σημαντικά παραδείγματα.

Παραδείγματα. (1) **Η λογαριθμική συνάρτηση**. Η εκθετική συνάρτηση $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της $\exp$ είναι το $(0,+\infty)$. Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή η $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $(0,+\infty)$.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η log είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. Είναι, όμως, ενδιαφέρον ότι η συνέχεια της log προκύπτει και ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.14. Επίσης, ήδη γνωρίζουμε τα όρια $\lim_{y\to 0} \log y = -\infty$, $\lim_{y\to+\infty} \log y = +\infty$. Κι αυτά, όμως, όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, προκύπτουν ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.14. Πράγματι, επειδή η log είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα τα $\lim_{y\to 0} \log y$ και $\lim_{y\to+\infty} \log y$. Επειδή το σύνολο τιμών της log, δηλαδή το πεδίο ορισμού της exp, είναι το $\mathbb{R}$, συνεπάγεται $\lim_{y\to 0} \log y = -\infty$ και $\lim_{y\to+\infty} \log y = +\infty$.

(2) **Οι n-οστές ρίζες**. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Η $p_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$. Είναι $0^n = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της p_n είναι το $[0,+\infty)$ και η αντίστροφη συνάρτηση $p_{\frac{1}{n}} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $[0,+\infty)$. Επίσης, επειδή το σύνολο τιμών της $p_{\frac{1}{n}}$ είναι το $[0,+\infty)$, συνεπάγεται $\lim_{y\to+\infty} \sqrt[n]{y} = +\infty$.

(3) **Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις**. (i) Έστω ο περιορισμός της cos στο $[0,\pi]$. Η

cos : $[0,\pi] \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0,\pi]$. Επειδή $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, το σύνολο τιμών είναι το $[-1,1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο-συνημίτονο**, την οποία συμβολίζουμε

$$\text{arccos} : [-1,1] \to [0,\pi]$$

και είναι *συνεχής* και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$ με σύνολο τιμών το $[0,\pi]$.
(ii) Έστω ο περιορισμός της sin στο $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Η sin : $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Επειδή $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, το σύνολο τιμών είναι το $[-1,1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο-ημίτονο**, την οποία συμβολίζουμε

$$\text{arcsin} : [-1,1] \to \Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big]$$

και είναι *συνεχής* και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
(iii) Έστω ο περιορισμός της tan στο $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Η tan : $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Επειδή $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}\tan x = -\infty$ και $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x = +\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο-εφαπτόμενη**, την οποία συμβολίζουμε

$$\text{arctan} : \mathbb{R} \to \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)$$

και είναι *συνεχής* και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Βρίσκουμε, επίσης, τα όρια:

$$\lim_{y\to-\infty}\arctan y = -\tfrac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{y\to+\infty}\arctan y = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

(iv) Τέλος, θεωρούμε τον περιορισμό της cot στο $(0,\pi)$. Η cot : $(0,\pi) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0,\pi)$. Επειδή $\lim_{x\to0+}\cot x = +\infty$ και $\lim_{x\to\pi-}\cot x = -\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο-συνεφαπτόμενη**, την οποία συμβολίζουμε

$$\text{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$$

και είναι *συνεχής* και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(0,\pi)$. Επίσης, είναι

$$\lim_{y\to-\infty}\text{arccot}\, y = \pi, \qquad \lim_{y\to+\infty}\text{arccot}\, y = 0.$$

Ασκήσεις.

1. Ποια είναι τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων $-2x^3+x^2-5x+6$, x^4-2x^2+7, $x^6-3x^4+3x^2-1$;

2. Βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:
   (i) $\sin x$ και $\cos(5x)$ στο $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$.
   (ii) $x+\frac{1}{x}$ στα $(-\infty,-1]$, $[-1,0)$, $(0,1]$, $[1,+\infty)$.
   (iii) e^x+x και $\frac{1}{1+e^{2x}}$ στο $\mathbb{R}$.

3. Πόσες *ακριβώς* λύσεις έχει η εξίσωση $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{5}{x-3}=c$; Η απάντηση πιθανόν να εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου c.

4. Έστω οι συναρτήσεις x^2+2x στο $[0,1]$, $\frac{1}{x}$ στο $(0,1]$ και $\frac{1}{x^2+1}$ στο $[0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι είναι γνησίως μονότονες και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τι συμπεραίνετε για τις αντίστροφες συναρτήσεις; Τέλος, βρείτε τους τύπους των αντίστροφων συναρτήσεων και ελέγξτε τα προηγούμενα συμπεράσματά σας.

5. Έστω η συνάρτηση $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Αν $a_0 a_n < 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $p(\xi) = 0$.

6. Έστω οι $f_1 : (-\infty, -1] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_3 : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τον ίδιο τύπο $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = x^3 - 3x$.
(i) Αποδείξτε ότι οι f_1 , f_3 είναι γνησίως αύξουσες και η f_2 γνησίως φθίνουσα και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τι συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τη μονοτονία και τη συνέχεια των ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$;
(ii) Αποδείξτε ότι, αν η g είναι οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$, τότε ισχύει $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της.
(iii) Έστω διάστημα I και $g : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I ώστε να ισχύει $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε $y \in I$. Αν $I = [-2, +\infty)$, αποδείξτε ότι $g = {f_3}^{-1}$. Αν $I = (-\infty, 2]$, αποδείξτε ότι $g = {f_1}^{-1}$. Αν, όμως, $I = [-2, 2]$, αποδείξτε ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$ είτε $g = {f_3}^{-1}$.
(iv) Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

7. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a, b).
(i) Έστω $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = -\infty$. Σύμφωνα με την άσκηση 6 της ενότητας 4.4, η f έχει μέγιστη τιμή στο (a, b). Αν u είναι η μέγιστη τιμή της f, αποδείξτε ότι $\{f(x) \,|\, x \in (a, b)\} = (-\infty, u]$.
(ii) Ποιο είναι το συμπέρασμα αν $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = +\infty$;

8. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a, b). Έστω ότι υπάρχουν τα $A = \lim_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, $B = \lim_{x\to b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ και $A < B$.
(i) Αν ισχύει $A < f(x) < B$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι $\{f(x) \,|\, a < x < b\} = (A, B)$.
(ii) Αν ισχύει $f(x) < B$ για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) \leq A$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή στο (a, b). Αν l είναι η ελάχιστη τιμή, αποδείξτε ότι $\{f(x) \,|\, a < x < b\} = [l, B)$.
(iii) Αν ισχύει $A < f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $B \leq f(x_0)$, αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή στο (a, b). Αν u είναι η μέγιστη τιμή, αποδείξτε ότι $\{f(x) \,|\, a < x < b\} = (A, u]$.
(iv) Αν υπάρχουν ${x_0}', {x_0}'' \in (a, b)$ ώστε $f({x_0}') \leq A$ και $B \leq f({x_0}'')$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο (a, b). Αν l είναι η ελάχιστη και u η μέγιστη τιμή, αποδείξτε ότι $\{f(x) \,|\, a < x < b\} = [l, u]$.
(v) Ποια είναι τα αντίστοιχα συμπεράσματα αν $A > B$ ή $A = B$; Τι γίνεται αν το διάστημα είναι $(a, b]$ ή $[a, b)$ αντί (a, b);

4.6 Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Κατ' αρχάς ας θυμηθούμε τον ορισμό της συνέχειας της f στον $\xi \in A$. Η f χαρακτηρίζεται **συνεχής στον** ξ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι *ο* δ_0 *εξαρτάται από τον* ε ***και*** *από τον* ξ. Αυτό το εκφράζουμε συμβολικά ως εξής: $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \xi)$. Πράγματι: (i) επιλέγουμε τον ξ, στον οποίο θέλουμε να εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής, επιλέγουμε τον ε και, μετά από τις συγκεκριμένες επιλογές των ξ, ε, επιλέγουμε τον κατάλληλο δ_0 , (ii) αν επιλέξουμε διαφορετικό ξ ή ε, τότε μπορεί να πρέπει να επιλέξουμε διαφορετικό δ_0 από τον προηγούμενο.

Στην παρούσα ενότητα μας ενδιαφέρει η εξάρτηση του δ_0 από τον ξ.

Παράδειγμα. Έστω η $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{1}{x}$.
Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $\xi\in(0,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $\xi\in(0,+\infty)$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}|<\varepsilon$ για κάθε $x>0$, $|x-\xi|<\delta_0$. Θα δούμε ότι *δεν* υπάρχει επιλογή του δ_0 ανεξάρτητη του ξ.
Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι, με προεπιλεγμένο και *σταθεροποιημένο* $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε για *κάθε* $\xi\in(0,+\infty)$ να ισχύει $|\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}|<\varepsilon$ για κάθε $x>0$, $|x-\xi|<\delta_0$. Τότε, για *κάθε* $\xi\in(0,+\infty)$, ο $x=\xi+\frac{\delta_0}{2}$ ικανοποιεί τις $x>0$, $|x-\xi|<\delta_0$ και, επομένως, πρέπει να ικανοποιεί και την $|\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}|<\varepsilon$. Άρα (μετά από πράξεις)

$$\tfrac{\delta_0}{(2\xi+\delta_0)\xi}<\varepsilon.$$

Συνοψίζουμε: για *κάθε* $\xi\in(0,+\infty)$ πρέπει να ισχύει $\frac{\delta_0}{(2\xi+\delta_0)\xi}<\varepsilon$ *με τους ίδιους* δ_0, ε. Αυτό είναι αδύνατο!! Αν ο ξ πλησιάζει τον 0, ο $\frac{\delta_0}{(2\xi+\delta_0)\xi}$ αυξάνει απεριόριστα: πράγματι,

$$\lim_{\xi\to0+}\tfrac{\delta_0}{(2\xi+\delta_0)\xi}=+\infty.$$

Επομένως, δε μπορεί να ισχύει $\frac{\delta_0}{(2\xi+\delta_0)\xi}<\varepsilon$ για κάθε $\xi\in(0,+\infty)$.

Θα προσπαθήσουμε, τώρα, να κωδικοποιήσουμε σε μορφή ορισμού την κατάσταση που μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi\in A$ και, επιπλέον, στον ορισμό της συνέχειας ο δ_0 δεν εξαρτάται από τον ξ αλλά μόνο από τον ϵ. Η κατάσταση αυτή πρέπει να διατυπωθεί ως εξής: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε για κάθε $\xi\in A$ να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$ για κάθε $x\in A$, $|x-\xi|<\delta_0$. Πράγματι, από τη διατύπωση αυτή προκύπτει ότι ο δ_0 εξαρτάται μόνο από τον ε: επιλέγουμε $\varepsilon>0$ και κατόπιν βρίσκουμε κατάλληλο $\delta_0>0$ ώστε η ανισότητα $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$ να ισχύει, με τον ίδιο δ_0, για κάθε $\xi\in A$ και κάθε $x\in A$, $|x-\xi|<\delta_0$. Ιδού μια μικρή απλοποίηση στη διατύπωση: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$ για κάθε $x,\xi\in A$, $|x-\xi|<\delta_0$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο για τις τιμές x,ξ της ανεξάρτητης μεταβλητής, διατυπώνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **ομοιόμορφα συνεχής στο** A αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

για κάθε $x',x''\in A$, $|x'-x''|<\delta_0$.

Είναι σαφές ότι, αν η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, τότε είναι συνεχής σε κάθε $\xi\in A$. Όμως, δεν ισχύει το αντίστροφο.

Παραδείγματα. (1) Η $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$.
(2) Έστω η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=3x-2$. Έστω $\varepsilon>0$. Ισχύει $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ αρκεί να ισχύει $|(3x'-2)-(3x''-2)|<\varepsilon$ αρκεί να ισχύει $3|x'-x''|<\varepsilon$ αρκεί να ισχύει $|x'-x''|<\frac{\varepsilon}{3}$. Με σύμβολα:

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\;\Leftarrow\;|(3x'-2)-(3x''-2)|<\varepsilon\;\Leftarrow\;3|x'-x''|<\varepsilon\;\Leftarrow\;|x'-x''|<\tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Ορίζουμε $\delta_0=\frac{\varepsilon}{3}>0$. Τότε, για κάθε $x',x''\in\mathbb{R}$, $|x'-x''|<\delta_0$ ισχύει $|x'-x''|<\frac{\varepsilon}{3}$ και, επομένως, $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Με σύμβολα:

$$\begin{aligned}|x'-x''|<\delta_0\;&\Rightarrow\;|x'-x''|<\tfrac{\varepsilon}{3}\;\Rightarrow\;3|x'-x''|<\varepsilon\;\Rightarrow\;|(3x'-2)-(3x''-2)|<\varepsilon\\&\Rightarrow\;|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Θεώρημα 4.2. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$. Άρα υπάρχει $\varepsilon_0>0$ ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχουν $x',x''\in[a,b]$, $|x'-x''|<\delta$ ώστε $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$. Άρα για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχουν ${x_n}',{x_n}''\in[a,b]$ ώστε

$$|{x_n}'-{x_n}''|<\tfrac{1}{n}\,,\qquad |f({x_n}')-f({x_n}'')|\geq\varepsilon_0\,.$$

Η ακολουθία $({x_n}')$ είναι φραγμένη, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία $({x_{n_k}}')$ που συγκλίνει. Έστω

$${x_{n_k}}'\to\xi.$$

Επειδή ισχύει $a\leq{x_{n_k}}'\leq b$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$, συνεπάγεται $a\leq\xi\leq b$. Επειδή ισχύει $|{x_{n_k}}'-{x_{n_k}}''|<\frac{1}{n_k}\leq\frac{1}{k}$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$, συνεπάγεται

$${x_{n_k}}'-{x_{n_k}}''\to 0.$$

Σε συνδυασμό με το ${x_{n_k}}'\to\xi$, προκύπτει

$${x_{n_k}}''=({x_{n_k}}''-{x_{n_k}}')+{x_{n_k}}'\to 0+\xi=\xi.$$

Επειδή $\xi\in[a,b]$, η f είναι συνεχής στον ξ. Άρα, από τα ${x_{n_k}}'\to\xi$ και ${x_{n_k}}''\to\xi$, συνεπάγεται

$$f({x_{n_k}}')\to f(\xi),\qquad f({x_{n_k}}'')\to f(\xi).$$

Επομένως,

$$f({x_{n_k}}')-f({x_{n_k}}'')\to 0.$$

Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ισχύει $|f({x_{n_k}}')-f({x_{n_k}}'')|\geq\varepsilon_0$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. □

Το Θεώρημα 4.2 θα παίξει σημαντικό ρόλο στο κεφάλαιο 6 σε σχέση με το ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης. Πέρα από το Θεώρημα 4.2, ένα χρήσιμο κριτήριο ομοιόμορφης συνέχειας - αλλά με χρήση παραγώγων - εμφανίζεται στην άσκηση 20 της ενότητας 5.5. Επίσης, μερικά ενδιαφέροντα κριτήρια υπάρχουν στις ασκήσεις 3, 7, 8, 10, 11 και 16.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x, $|x|$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$, ότι η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$ και ότι η x^2 δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in[0,1)\\ 1, & \text{αν } x\in(1,2]\end{cases}$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1)\cup(1,2]$.

3. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\rho>0$, $M\geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x')-f(x'')|\leq M|x'-x''|^\rho$ για κάθε $x',x''\in A$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αν η f ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις, χαρακτηρίζεται **Hölder συνεχής** στο A με **εκθέτη Hölder** ρ. Ειδικά, αν $\rho=1$, η f χαρακτηρίζεται **Lipschitz συνεχής** στο A.

4. Έστω $A\subseteq B$, $f:B\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο A.

5. Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και η g ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

6. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς στο A.
(i) Αποδείξτε ότι η $f + g : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.
(ii) Αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι οι f, g είναι φραγμένες, αποδείξτε ότι η $fg : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.
(iii) Βρείτε A και $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς στο A ώστε η fg να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

7. Έστω $a < b < c$, $f : (a, c) \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στα $(a, b]$ και $[b, c)$, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο (a, c).

8. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε δυο ακολουθίες $(x_n{}')$, $(x_n{}'')$ στο A με την ιδιότητα $x_n{}' - x_n{}'' \to 0$ ισχύει $f(x_n{}') - f(x_n{}'') \to 0$.

9. (i) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αν η (x_n) στο A είναι ακολουθία Cauchy, αποδείξτε ότι η $(f(x_n))$ είναι κι αυτή ακολουθία Cauchy.
(ii) Τι μπορούμε να συμπεράνουμε από τη συνάρτηση x^2 σχετικά με το αντίστροφο του (i);

10. Έστω $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b)$.
(i) Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει το $\lim_{x \to b} f(x)$ και είναι αριθμός, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$.
Υπόδειξη: Έστω $\lim_{x \to b} f(x) = \eta$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $c \in (a, b)$ ώστε $|f(x) - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x \in [c, b)$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, c]$ οπότε θεωρήστε έναν $\delta_0 > 0$ που να αντιστοιχεί στον $\frac{\varepsilon}{2}$ βάσει του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας στο $[a, c]$. Αποδείξτε ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ για κάθε $x', x'' \in [a, b)$, $|x' - x''| < \delta_0$. Προσέξτε την περίπτωση που ο ένας από τους x', x'' είναι στο $[a, c]$ και ο άλλος στο $[c, b)$.
(ii) Αποδείξτε ότι, αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$ και αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$, τότε υπάρχει το $\lim_{x \to b} f(x)$ και είναι αριθμός.
Υπόδειξη: Θεώρημα 3.4 και άσκηση 9(i).
(iii) Αποδείξτε ότι, αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$ αν και μόνο αν υπάρχει $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ ώστε $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b)$.
Υπόδειξη: Έστω ότι υπάρχει $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ ώστε $g = f$ στο $[a, b)$. Βάσει της άσκησης 4, η g και, επομένως, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$. Αντιστρόφως, έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$. Βάσει του (ii) υπάρχει το $\lim_{x \to b} f(x)$ και είναι αριθμός. Να ορίσετε $g = f$ στο $[a, b)$ και $g(b) = \lim_{x \to b} f(x)$ και να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $[a, b]$.
Τι γίνεται αν έχουμε διάστημα $(a, b]$ ή (a, b) αντί $[a, b)$.

11. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιοδική. Δηλαδή υπάρχει $\tau > 0$ ώστε να ισχύει $f(x + \tau) = f(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Υπόδειξη: Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 2\tau]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρήστε έναν $\delta_0 > 0$ που να αντιστοιχεί στον ε βάσει του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας στο $[0, 2\tau]$. Αποδείξτε ότι για κάθε x', x'', $|x' - x''| < \delta_0$ υπάρχουν $t', t'' \in [0, 2\tau]$ ώστε $|t' - t''| < \delta_0$ και $f(x') = f(t')$, $f(x'') = f(t'')$.

12. Ακολουθώντας (αν θέλετε) την παρακάτω υπόδειξη, δώστε τρίτη απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Υπόδειξη: Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) < \lambda < f(b)$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρήστε έναν $\delta_0 > 0$ που να αντιστοιχεί στον $\varepsilon = \frac{1}{k}$ βάσει του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας. Χωρίστε το $[a,b]$ με σημεία $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ σε διαστήματα μήκους $< \delta_0$. Έστω n_k ο μεγαλύτερος από τους $1, \ldots, n-1$ ώστε $f(x_{n_k}) \leq \lambda$. Τότε $f(x_{n_k}) \leq \lambda < f(x_{n_k+1})$. Άρα $|f(x_{n_k}) - \lambda| < \frac{1}{k}$ και, επομένως, $f(x_{n_k}) \to \lambda$. Εφαρμόστε το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass στην (x_{n_k}) και αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.

13. (Συνέχεια της άσκησης 15 της ενότητας 3.1.) Έστω κλειστό και φραγμένο σύνολο A και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A. Προσαρμόζοντας την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

14. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a, b \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq a|x| + b$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε έναν $\delta_0 > 0$ που να αντιστοιχεί στον $\varepsilon = 1$ βάσει του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας. Για κάθε x υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $n\delta_0 \leq x < (n+1)\delta_0$ και τότε αποδείξτε ότι $|f(x)| < |f(n\delta_0)| + 1 \leq |n| + |f(0)| + 1 \leq \frac{1}{\delta_0}|x| + |f(0)| + 2$.

15. Έστω φραγμένο σύνολο A και $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη.
Υπόδειξη: Θεωρήστε έναν $\delta_0 > 0$ που να αντιστοιχεί στον $\varepsilon = 1$ βάσει του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας. Αποδείξτε ότι υπάρχουν πεπερασμένα σημεία $x_1, \ldots, x_n \in A$ ώστε: για κάθε $x \in A$ υπάρχει $k \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $|x - x_k| < \delta_0$. Θεωρήστε τον $M = \max\{|f(x_1)|, \ldots, |f(x_n)|\}$ και αποδείξτε ότι $|f(x)| \leq M + 1$ για κάθε $x \in A$.

Μέρος II

Η έννοια του ορίου: παράγωγοι και ολοκληρώματα.

Κεφάλαιο 5

Παράγωγοι συναρτήσεων.

5.1 Παράγωγοι συναρτήσεων.

5.1.1 Παράγωγοι.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$. Τότε ορίζεται η συνάρτηση $g : A \setminus \{\xi\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Υποθέτουμε ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, δηλαδή ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$, $0 < |x-\xi| < \delta$. Επειδή, προφανέστατα, κάθε τέτοιος x είναι $\neq \xi$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A \setminus \{\xi\}$, $0 < |x-\xi| < \delta$. Άρα ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης και του $A \setminus \{\xi\}$. Επομένως, έχει νόημα να εξετάσουμε την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to\xi} g(x)$, δηλαδή του $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Το όριο αυτό, αν υπάρχει, ονομάζεται **παράγωγος της f στον** ξ και συμβολίζεται

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Από τον ορισμό της ως όριο, η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$. Αν $f'(\xi) \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσιμη στον** ξ.

Σημείωση. Όταν γράφουμε $f'(\xi)$ χωρίς άλλη επεξήγηση, θα εννοούμε ότι η $f'(\xi)$ είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$. Όταν, όμως, γράφουμε $f'(\xi) = \eta$ (ή άλλο γράμμα) θα εννοούμε ότι η $f'(\xi)$ είναι αριθμός εκτός αν δηλώσουμε διαφορετικά, όπως για παράδειγμα $f'(\xi) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.

Εκτός από το σύμβολο $f'(\xi)$ χρησιμοποιούνται και τα σύμβολα

$$D_x f(\xi), \qquad \frac{df}{dx}(\xi), \qquad \frac{dy}{dx}(\xi).$$

Στο τρίτο σύμβολο εννοείται ότι ισχύει η σχέση $y = f(x)$ ανάμεσα στην ανεξάρτητη μεταβλητή x και στην εξαρτημένη μεταβλητή y. Αν, αντί της τιμής της παραγώγου στον ξ, θεωρήσουμε την τιμή της σε έναν γενικό x, τότε, αντί των συμβόλων $D_x f(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$ και $\frac{dy}{dx}(x)$, χρησιμοποιούμε τα απλούστερα

$$D_x f, \qquad \frac{df}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx},$$

επειδή ήδη εμφανίζεται σ' αυτά το σύμβολο x της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Παραδείγματα. (1) Είναι ${p_2}'(1) = \lim_{x\to1} \frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 2$. Άρα η p_2 είναι παραγωγίσιμη στον 1.
(2) Είναι ${p_{\frac{1}{3}}}'(0) = \lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$. Άρα η $p_{\frac{1}{3}}$ έχει παράγωγο στον 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στον 0.

Μερικές φορές το όριο $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ το γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\,,$$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $h=x-\xi$.

Παρατηρήστε ότι το $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι πάντοτε απροσδιόριστη μορφή διότι το όριο του παρονομαστή είναι 0. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε το όριο του αριθμητή είναι κι αυτό 0 και προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Ορισμός. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $\xi\in A$. Αν ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε αυτό ονομάζεται **αριστερή (πλευρική) παράγωγος της f στον** ξ. Ομοίως, αν ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε αυτό ονομάζεται **δεξιά (πλευρική) παράγωγος της f στον** ξ. Συμβολίζουμε

$$f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,,\qquad f'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,.$$

Τα παρακάτω είναι προφανή. (i) Έστω ότι ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχουν οι $f'_-(\xi)$, $f'_+(\xi)$ και είναι ίσες και, σ' αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi)=f'_-(\xi)=f'_+(\xi)$. (ii) Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και, σ' αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi)=f'_-(\xi)$. (iii) Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και, σ' αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi)=f'_+(\xi)$.

Παραδείγματα. (1) Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Είναι $f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$ και $f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$. Άρα η f δεν έχει παράγωγο στον 0.

(2) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{|x|}$. Τώρα $f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ και $f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{-\sqrt{|x|}}=-\infty$ και, επομένως, η f δεν έχει παράγωγο στον 0.

(3) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,, & \text{αν } x>0\\ 0\,, & \text{αν } x=0\\ -\sqrt{-x}\,, & \text{αν } x<0\end{cases}$ Βρίσκουμε $f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$. Επίσης, $f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{-\sqrt{-x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\sqrt{-x}}=+\infty$. Άρα η f έχει παράγωγο στον 0 ίση με $f'(0)=f'_+(0)=f'_-(0)=+\infty$.

(4) Έστω η $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}\,, & \text{αν } x\neq 0\\ 0\,, & \text{αν } x=0\end{cases}$ Τώρα, η $f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. Η $f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\sin\frac{1}{x}$, επίσης, δεν υπάρχει. Άρα η f δεν έχει δεξιά ούτε αριστερή παράγωγο στον 0.

(5) Η $p_{\frac{1}{2}}$ ορίζεται στο $[0,+\infty)$. Άρα $p_{\frac{1}{2}}{}'(0)=p_{\frac{1}{2}}{}'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

Ορισμός. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $B\subseteq A$. Αν για κάθε $\xi\in B$ υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε λέμε ότι η f **έχει παράγωγο στο** B. Αν για κάθε $\xi\in B$ υπάρχει η $f'(\xi)$ και είναι αριθμός, τότε λέμε ότι η f **είναι παραγωγίσιμη στο** B.

Ορισμός. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $B=\{\xi\in A\,|\,f'(\xi)\in\mathbb{R}\}$, δηλαδή το σύνολο όλων των ξ στο πεδίο ορισμού της f στους οποίους αυτή είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται η **παράγωγος συνάρτηση** της f με πεδίο ορισμού το B και συμβολίζεται

$$f':B\to\mathbb{R}.$$

5.1.2 Εφαπτόμενες ευθείες.

Στην υποενότητα αυτή θα δούμε κάπως προσεκτικά το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας της παραγώγου. Η προσεκτική σχεδίαση σχημάτων θα βοηθήσει σημαντικά στην κατανόηση των επιχειρημάτων.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι το υποσύνολο

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}$$

του καρτεσιανού επιπέδου ονομάζεται **γράφημα** ή **γραφική παράσταση** της f.

Αν $\xi \in A$, τότε το σημείο $(\xi, f(\xi))$ χωρίζει το Γ σε δυο μέρη, τα

$$\Gamma_- = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A, x \leq \xi\}, \qquad \Gamma_+ = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A, x \geq \xi\}.$$

Το Γ_- είναι το μέρος του γραφήματος της f το οποίο έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και βρίσκεται αριστερά του $(\xi, f(\xi))$ ενώ το Γ_+ είναι το μέρος του γραφήματος της f το οποίο έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και βρίσκεται δεξιά του $(\xi, f(\xi))$.

Έστω ότι ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι δεξιά συνεχής στον ξ, δηλαδή ότι, καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, το σημείο $(x, f(x))$ πλησιάζει απεριόριστα το σταθερό σημείο $(\xi, f(\xi))$. Για κάθε $x \in A$, $x > \xi$ θεωρούμε την *ημιευθεία* $l_{x,+}$ με άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$, η οποία διέρχεται από το σημείο $(x, f(x))$. Αυτή η ημιευθεία βρίσκεται δεξιά του $(\xi, f(\xi))$ και καθορίζεται από το άκρο της και από την κλίση της, δηλαδή από το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και από τον λόγο $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Τώρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.
(i) Αν η $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός, τότε θεωρούμε την ημιευθεία l_+, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$, κλίση $f'_+(\xi)$ και βρίσκεται δεξιά του $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, τότε η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την κλίση της σταθερής ημιευθείας l_+ και, επειδή οι ημιευθείες έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_+. Θα δούμε τώρα ότι η ημιευθεία l_+ ***εφάπτεται*** στο μέρος Γ_+ του γραφήματος της f. Θα δούμε, δηλαδή, ότι ο λόγος της απόστασης του σημείου $(x, f(x))$ από την ημιευθεία l_+ προς την απόστασή του από το σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει δεξιό πλευρικό όριο 0 στον ξ. Πράγματι, υπολογίζεται εύκολα με απλές μεθόδους αναλυτικής γεωμετρίας ότι, αν ο x είναι κοντά στον ξ από δεξιά του, τότε αυτός ο λόγος αποστάσεων είναι ίσος με

$$\frac{\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - f'_+(\xi)\right|}{\sqrt{\left(1+(f_+(\xi))^2\right)\left(1+\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right)^2\right)}},$$

οπότε το όριό του είναι ίσο με

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - f'_+(\xi)\right|}{\sqrt{\left(1+(f_+(\xi))^2\right)\left(1+\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right)^2\right)}} = \frac{|f'_+(\xi)-f'_+(\xi)|}{1+(f_+(\xi))^2} = 0.$$

(ii) Αν $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = +\infty$, τότε θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_+, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και βρίσκεται πάνω από το $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, τότε η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη θετική και, επειδή οι ημιευθείες $l_{x,+}$ και l_+ έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_+. Η ημιευθεία l_+ ***εφάπτεται*** στο Γ_+. Δηλαδή, ο λόγος της απόστασης του σημείου $(x, f(x))$ από την ημιευθεία l_+ προς την απόστασή του από το σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει δεξιό πλευρικό όριο 0 στον ξ. Πράγματι, όπως πριν, υπολογίζουμε ότι, αν ο x είναι κοντά στον ξ από δεξιά του, τότε αυτός ο λόγος αποστάσεων είναι ίσος με

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right)^2}},$$

οπότε το όριό του είναι ίσο με

$$\lim_{x\to\xi+}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right)^2}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

(iii) Αν $f'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=-\infty$, τότε θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_+, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi,f(\xi))$ και βρίσκεται κάτω από το $(\xi,f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, τότε η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική και, επειδή, οι ημιευθείες $l_{x,+}$ και l_+ έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_+ . Η ημιευθεία l_+ *εφάπτεται* στο Γ_+ . Δηλαδή, ο λόγος της απόστασης του σημείου $(x,f(x))$ από την ημιευθεία l_+ προς την απόστασή του από το σημείο $(\xi,f(\xi))$ έχει δεξιό πλευρικό όριο 0 στον ξ. Οι υπολογισμοί είναι ακριβώς ίδιοι όπως στην περίπτωση (ii).
Φυσικά, στις περιπτώσεις (i) - (iii) αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία στο Γ_+ .

Ας εξετάσουμε συνοπτικά και τη "συμμετρική" κατάσταση από την αριστερή μεριά του ξ.

Έστω ότι ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι αριστερά συνεχής στον ξ. Για κάθε $x\in A$, $x<\xi$ θεωρούμε την *ημιευθεία* $l_{x,-}$ με άκρο το σημείο $(\xi,f(\xi))$, η οποία διέρχεται από το σημείο $(x,f(x))$, οπότε η κλίση της είναι ίση με τον λόγο $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Διακρίνουμε πάλι τρεις περιπτώσεις.
(i) Αν η $f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός, τότε θεωρούμε την ημιευθεία l_- , η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi,f(\xi))$, κλίση $f'_-(\xi)$ και βρίσκεται αριστερά του $(\xi,f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από αριστερά του, τότε η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την κλίση της σταθερής ημιευθείας l_- και, επειδή οι ημιευθείες έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_- . Η ημιευθεία l_- *εφάπτεται* στο μέρος Γ_- του γραφήματος της f. Δηλαδή, ο λόγος της απόστασης του σημείου $(x,f(x))$ από την ημιευθεία l_- προς την απόστασή του από το σημείο $(\xi,f(\xi))$ έχει αριστερό πλευρικό όριο 0 στον ξ. Οι υπολογισμοί αυτού του λόγου αποστάσεων και του ορίου του είναι ακριβώς ίδιοι όπως στην προηγούμενη περίπτωση (i) και δεν είναι ανάγκη να τους επαναλάβουμε.
(ii) Αν $f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=+\infty$, τότε θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_- , η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi,f(\xi))$ και βρίσκεται κάτω από το $(\xi,f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από αριστερά του, τότε η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,-}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη θετική και, επειδή, οι ημιευθείες $l_{x,-}$ και l_- έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_- . Η ημιευθεία l_- *εφάπτεται* στο Γ_- . Δηλαδή, ο λόγος της απόστασης του σημείου $(x,f(x))$ από την ημιευθεία l_- προς την απόστασή του από το σημείο $(\xi,f(\xi))$ έχει αριστερό πλευρικό όριο 0 στον ξ. Οι υπολογισμοί είναι ίδιοι όπως στην προηγούμενη περίπτωση (ii).
(iii) Αν $f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=-\infty$, τότε θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_- , η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi,f(\xi))$ και βρίσκεται πάνω από το $(\xi,f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ, τότε η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,-}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική και, επειδή, οι ημιευθείες $l_{x,-}$ και l_- έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_- . Η ημιευθεία l_- *εφάπτεται* στο Γ_- . Δηλαδή, ο λόγος της απόστασης του σημείου $(x,f(x))$ από την ημιευθεία l_- προς την απόστασή του από το σημείο $(\xi,f(\xi))$ έχει αριστερό πλευρικό όριο 0 στον ξ. Οι υπολογισμοί είναι ίδιοι όπως στην προηγούμενη περίπτωση (iii).

Αν, στις περιπτώσεις (i) - (iii), δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία στο Γ_-.

Έστω, τώρα, ότι ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, αν οι δυο πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες, τότε οι εφαπτόμενες ημιευθείες l_- και l_+ στα μέρη Γ_- και Γ_+ του γραφήματος Γ είναι αντίθετες και, επομένως, σχηματίζουν μια ευθεία, την ευθεία l η οποία εφάπτεται στο γράφημα Γ της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν οι δυο πλευρικές παράγωγοι υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσες, τότε οι δυο εφαπτόμενες ημιευθείες δεν είναι αντίθετες και, επομένως, δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία. Φυσικά, αν μια από τις δυο πλευρικές παραγώγους δεν υπάρχει, τότε ούτε η αντίστοιχη εφαπτόμενη ημιευθεία υπάρχει και, επομένως, δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία.

Παραδείγματα. (1) Το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=|x|$ έχει δυο εφαπτόμενες ημιευθείες στο σημείο $(0,0)$. Η μια έχει άκρο το $(0,0)$, κλίση $f'_+(0)=1$ και βρίσκεται δεξιά του σημείου $(0,0)$. Η άλλη έχει άκρο το $(0,0)$, κλίση $f'_-(0)=-1$ και βρίσκεται αριστερά του $(0,0)$. Οι δυο αυτές ημιευθείες δεν είναι αντίθετες, οπότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(0,0)$.
(2) Το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x|}$ έχει κι αυτό δυο εφαπτόμενες ημιευθείες στο σημείο $(0,0)$. Επειδή $f'_+(0)=+\infty$, η μια έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται πάνω από το $(0,0)$. Ομοίως, επειδή $f'_-(0)=-\infty$, η άλλη ημιευθεία έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται κι αυτή πάνω από το $(0,0)$. Οι δυο εφαπτόμενες ημιευθείες ταυτίζονται, οπότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(0,0)$. Μπορούμε, βέβαια, να πούμε ότι το γράφημα έχει εφαπτόμενη *ημιευθεία* στο σημείο $(0,0)$.
(3) Το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,, & \text{αν } 0\le x\\ -\sqrt{-x}\,, & \text{αν } x\le 0\end{cases}$ έχει δυο εφαπτόμενες ημιευθείες στο $(0,0)$. Επειδή $f'_+(0)=+\infty$, η μια έχει άκρο το σημείο $(0,0)$ και βρίσκεται πάνω από το $(0,0)$. Ομοίως, επειδή $f'_-(0)=+\infty$, η άλλη ημιευθεία έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται κάτω από το $(0,0)$. Οι δυο ημιευθείες είναι αντίθετες και σχηματίζουν την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0,0)$, η οποία είναι, προφανώς, κατακόρυφη: είναι η ευθεία με εξίσωση $x=0$.

Στην περίπτωση που ο ξ είναι μόνο από δεξιά του ή μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και η f είναι, αντιστοίχως, δεξιά συνεχής ή αριστερά συνεχής στον ξ, μπορούμε να μιλάμε μόνο για μια εφαπτόμενη ημιευθεία στο γράφημά της στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Παράδειγμα. Το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ έχει μόνο μια εφαπτόμενη ημιευθεία στο σημείο $(0,0)$. Επειδή $f'_+(0)=+\infty$, η ημιευθεία αυτή έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται πάνω από το $(0,0)$.

Έστω $f: A\to\mathbb{R}$ και ξ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στον ξ - σε λίγο, στην Πρόταση 5.3, θα αποδείξουμε ότι το δεύτερο συνεπάγεται το πρώτο. Όπως είδαμε, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας l στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με $f'(\xi)$, οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η

$$y=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi).$$

Τέλος, αν η f είναι συνεχής στον ξ και $f'(\xi)=+\infty$ ή $f'(\xi)=-\infty$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο $(\xi, f(\xi))$ είναι κατακόρυφη και έχει εξίσωση

$$x=\xi.$$

Παραδείγματα. (1) Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης x^2 στο σημείο (ξ,ξ^2) είναι η $y=2\xi(x-\xi)+\xi^2$.

(2) Αν $\xi > 0$, η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης $x^{\frac{1}{3}}$ στο σημείο $(\xi, \xi^{\frac{1}{3}})$ είναι η $y = \frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}(x-\xi) + \xi^{\frac{1}{3}}$. Για να βρούμε σε ποιο σημείο $(\xi, \xi^{\frac{1}{3}})$ η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, εξισώνουμε τις κλίσεις των δυο αυτών ευθειών, $\frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}} = 1$, και προκύπτει $\xi = \frac{1}{\sqrt{27}}$.

5.1.3 Απειροστά, διαφορικά.

Ας κάνουμε τώρα ένα σχόλιο για το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ της παραγώγου. Αν συμβολίσουμε

$$\Delta x = x - \xi$$

τη διαφορά δυο τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής και

$$\Delta y = y - \eta = f(x) - f(\xi)$$

τη διαφορά των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, τότε ο λόγος διαφορών $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ γράφεται

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Όταν μελετάμε την παράγωγο $f'(\xi)$, τότε στην παράσταση $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ο παρονομαστής είναι μια μη-μηδενική ποσότητα η οποία πλησιάζει τον 0 διότι ο x είναι $\neq \xi$ και πλησιάζει τον ξ.

Ορισμός. Τα παλιότερα χρόνια οι μαθηματικοί, οι οποίοι πολύ συχνά ήταν και φιλόσοφοι, συνήθιζαν να θεωρούν μια - ανύπαρκτη στην πραγματικότητα - ποσότητα η οποία είναι μικρότερη σε μέγεθος από κάθε μη-μηδενικό αριθμό αλλά όχι κατ' ανάγκη ίση με μηδέν και την ονόμαζαν **απειροστό** (μέγεθος).

Στην κατάσταση που μελετάμε θεωρούσαν παλιότερα ότι η μεταβλητή ποσότητα Δx προσεγγίζει όχι κατ' ανάγκη τον 0 αλλά ένα απειροστό που το συμβόλιζαν dx και, στην περίπτωση που η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ, ότι και η αντίστοιχη διαφορά $\Delta y = f(x) - f(\xi)$ προσεγγίζει το απειροστό dy. Επομένως, θεωρούσαν ότι ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ προσεγγίζει τον λόγο $\frac{dy}{dx}$. Πρέπει να τονιστεί ότι, αν δε δεχτούμε την αυτόνομη μη-μηδενική ύπαρξη των απειροστών, ο λόγος $\frac{dy}{dx}$ είναι *συμβολικός* και ότι δεν έχει πραγματική υπόσταση *λόγου αριθμών* διότι η μόνη τέτοια υπόσταση θα ήταν μια απροσδιόριστη μορφή με τον 0 ως παρονομαστή. Θα δούμε, όμως, στα επόμενα ότι σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να χειριστούμε τον συμβολικό λόγο $\frac{dy}{dx}$ *σαν να ήταν* λόγος αριθμών έχοντας έτσι την ευχέρεια να χρησιμοποιήσουμε απλές ιδιότητες των λόγων.

Ας δούμε, όμως, λίγο πιο προσεκτικά το σύμβολο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ και το όριό του, το $f'(\xi) = \frac{dy}{dx}$, στην περίπτωση που $f'(\xi) \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στον ξ. Είπαμε ότι οι Δx και Δy προσεγγίζουν τα απειροστά dx και dy. Αυτά, όμως, τα απειροστά είναι σκέτα σύμβολα και στην πραγματικότητα οι Δx και Δy προσεγγίζουν και οι δυο τον 0. Άρα, αν θέλουμε να δώσουμε κάποιο πραγματικό νόημα στα σύμβολα dx και dy, θα πρέπει να δεχτούμε ότι $dx = dy = 0$. Με αυτήν την παραδοχή, η σχέση

$$\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$$

δεν έχει νόημα, διότι $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Όμως, η σχέση

$$dy = f'(\xi)dx$$

έχει νόημα, διότι είναι η σχέση $0 = f'(\xi)0$, δηλαδή η $0 = 0$, η οποία *είναι* σωστή. Παρατηρήστε ότι η σχέση $0 = f'(\xi)0$ ισχύει όποιος κι αν είναι ο αριθμός $f'(\xi)$, πράγμα το οποίο αντανακλά και το ότι ο "λόγος" $\frac{0}{0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή, δηλαδή μπορεί να έχει οποιαδήποτε "τιμή".

Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι η σχέση $dy = f'(\xi)dx$ δεν είναι, απλώς, ίδια με τη σχέση $0 = f'(\xi)0$. Δηλαδή, τα σύμβολα dx και dy δεν είναι, απλώς, δυο μηδενικές ποσότητες αλλά έχουν και ένα επιπλέον νόημα, αυτό που δηλώνεται από τα συγκεκριμένα σύμβολα: το dx είναι το απειροστό *της μεταβλητής* x και το dy είναι το απειροστό *της μεταβλητής* y. Αυτό το νόημα καθορίζει και ένα δεύτερο πιο σημαντικό νόημα μέσω της σχέσης $dy = f'(\xi)dx$: το απειροστό της y είναι $f'(\xi)$ φορές το απειροστό της x. Και από αυτό προκύπτει το τρίτο και *ουσιαστικό* νόημα των δυο απειροστών: το ότι το dy είναι $f'(\xi)$ φορές το dx σημαίνει ότι *η διαφορά Δy είναι περίπου $f'(\xi)$ φορές η διαφορά* Δx ή, ισοδύναμα, *ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ των διαφορών Δy και Δx είναι περίπου $f'(\xi)$*. Πράγματι, όλα αρχίζουν από το $\lim_{x\to\xi} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi)$. Συνοψίζουμε:

Η σχέση $dy = f'(\xi)dx$ ανάμεσα στα απειροστά των συγκεκριμένων μεταβλητών x και y δηλώνει - πέρα από το προφανές $0 = 0$ - αφ' ενός τη συμβολική ισότητα $\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$, αφ' ετέρου την πραγματική ισότητα $\lim_{x\to\xi} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi)$.

Προσέξτε τη συμβολική "απλοποίηση" η οποία ενυπάρχει στην ισότητα

$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

που προκύπτει από τις δυο σχέσεις $\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$ και $dy = f'(\xi)dx$.

Αν αντί της τιμής της παραγώγου στον ξ θεωρήσουμε την τιμή της στον γενικό x, δηλαδή την $f'(x)$, τότε γράφουμε

$$dy = f'(x)dx$$

για τη σχέση ανάμεσα στα απειροστά της μεταβλητής x και της μεταβλητής y - όπου $y = f(x)$ είναι η σχέση που συνδέει τις δυο μεταβλητές.

Ορισμός. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση το πολύ πρώτου βαθμού ονομάζεται και **αφφινική συνάρτηση**.

Επομένως, οι αφφινικές συναρτήσεις είναι αυτές που έχουν τύπο

$$l(x) = \mu x + \nu.$$

Γνωρίζουμε πολύ καλά ότι οι αφφινικές συναρτήσεις είναι ακριβώς οι συναρτήσεις των οποίων τα γραφήματα είναι μη-κατακόρυφες ευθείες.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει αφφινική συνάρτηση l ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - l(x)}{x - \xi} = 0,$$

τότε η l ονομάζεται **διαφορικό της** f στον ξ.

Πρόταση 5.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και f συνεχής στον ξ. Υπάρχει διαφορικό της f στον ξ αν και μόνο αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Επίσης, το διαφορικό της f στον ξ, αν υπάρχει, είναι μοναδικό και είναι εκείνη η αφφινική συνάρτηση της οποίας το γράφημα είναι η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Τότε $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi)$ και $f'(\xi) \in \mathbb{R}$. Συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)(x-\xi)}{x-\xi} = 0.$$

Άρα αν θεωρήσουμε την αφφινική συνάρτηση

$$l(x) = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi),$$

τότε έχουμε ότι $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-l(x)}{x-\xi}=0$ και, επομένως, η l είναι διαφορικό της f στον ξ.
Αντιστρόφως, έστω ότι μια αφφινική συνάρτηση $l(x)=\mu x+\nu$ είναι διαφορικό της f στον ξ, οπότε

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-\mu x-\nu}{x-\xi}=0.$$

Επειδή $\lim_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$, συνεπάγεται

$$f(\xi)-\mu\xi-\nu=0.$$

Άρα ο τύπος της l γράφεται $l(x)=\mu(x-\xi)+f(\xi)$ και τότε

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\mu.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $f'(\xi)=\mu$, οπότε ο τύπος της l είναι

$$l(x)=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi).$$

Αυτό αποδεικνύει και τη μοναδικότητα του διαφορικού της f στον ξ. □

Η Πρόταση 5.1 λέει ότι το διαφορικό της f στον ξ είναι εκείνη ακριβώς η αφφινική συνάρτηση l με την ιδιότητα: τα γραφήματα των f και l διέρχονται και τα δυο από το σημείο $(\xi,f(\xi))$ και εφάπτονται στο σημείο αυτό.

Αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα $\Delta x=x-\xi$ και $\Delta y=y-\eta=y-f(\xi)$, τότε μπορούμε να κάνουμε τις αλλαγές μεταβλητής από x σε Δx και από y σε Δy. Αυτό σημαίνει ότι κάνουμε παράλληλη μεταφορά των αξόνων από το σημείο $(0,0)$ στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ και ότι μεταβαίνουμε από το καρτεσιανό σύστημα με τον x-άξονα και τον y-άξονα στο καρτεσιανό σύστημα με τον Δx-άξονα και τον Δy-άξονα. Τότε η εξίσωση $y_1=f(x)$ του γραφήματος της f γράφεται $\Delta y_1=y_1-\eta=f(x)-f(\xi)=f(\xi+\Delta x)-f(\xi)$ και η εξίσωση $y_2=l(x)$ του γραφήματος του διαφορικού της f στον ξ γράφεται $\Delta y_2=y_2-\eta=l(x)-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)=f'(\xi)\Delta x$. Δηλαδή στις νέες συντεταγμένες οι εξισώσεις των γραφημάτων των δυο συναρτήσεων γράφονται

$$\Delta y_1=f(\xi+\Delta x)-f(\xi),\qquad \Delta y_2=f'(\xi)\Delta x.$$

Θα συνεχίσουμε αυτήν τη συζήτηση στην υποενότητα 5.9.2.

Ασκήσεις.

1. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=2$, $f(x)=3x^2-5x+3$, $f(x)=\sqrt[5]{x}$, $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$, $f(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\neq 0\\ 1, & \text{αν } x=0\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}2x\,, & \text{αν } x\leq 0\\ -3x\,, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}2x^2\,, & \text{αν } x\leq 0\\ -3x^2\,, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\,, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}-2\sqrt{-x}\,, & \text{αν } x\leq 0\\ \sqrt[3]{x}\,, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,, & \text{αν } x\geq 0\\ -1, & \text{αν } x<0\end{cases}$ Βρείτε, αν υπάρχουν, τις $f'(0)$, $f'_+(0)$, $f'_-(0)$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+1, & \text{αν } x\leq 0\\ ax+b, & \text{αν } x>0\end{cases}$ Βρείτε τους a, b ώστε να υπάρχει η $f'(0)$. Κάντε το ίδιο για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+1, & \text{αν } x<0\\ ax+b, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$

3. Έστω $g : (a, \xi] \to \mathbb{R}$, $h : [\xi, b) \to \mathbb{R}$ ώστε $g(\xi) = h(\xi)$ και $g'(\xi) = h'(\xi)$ και έστω η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } a < x \leq \xi \\ h(x), & \text{αν } \xi \leq x < b \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(\xi) = g'(\xi) = h'(\xi)$.

4. Σε ποιά σημεία είναι παραγωγίσιμες οι συναρτήσεις $[x]$, $x - [x]$, $\left|x - [x] - \frac{1}{2}\right|$, $\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)^2$;

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 (-1)^{[\frac{1}{|x|}]-1}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0) = 0$. Σχεδιάστε το γράφημα της f.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στον 0 και $0 < \mu < 1$ και $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(\mu x)}{x} = b \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f'(0) = \frac{b}{1 - \mu}$.
Υπόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{f(x) - f(\mu x)}{x} - b\right| < (1 - \mu)\frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε x, $0 < |x| < \delta_0$. Άρα ισχύει $|f(x) - f(\mu x) - bx| < (1 - \mu)\frac{\varepsilon}{2}|x|$ για κάθε x, $0 < |x| < \delta_0$. Έστω $0 < |x| < \delta_0$. Τότε $0 < |\mu x| < \delta_0$, οπότε $|f(\mu x) - f(\mu^2 x) - b\mu x| < (1 - \mu)\frac{\varepsilon}{2}\mu|x|$. Ομοίως, $|f(\mu^{k-1}x) - f(\mu^k x) - b\mu^{k-1}x| < (1 - \mu)\frac{\varepsilon}{2}\mu^{k-1}|x|$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται ότι $\left|f(x) - f(\mu^n x) - b\frac{1 - \mu^n}{1 - \mu}x\right| < (1 - \mu^n)\frac{\varepsilon}{2}|x|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τη συνέχεια της f στον 0, συνεπάγεται $\left|f(x) - f(0) - \frac{b}{1 - \mu}x\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|x|$, οπότε $\left|\frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{b}{1 - \mu}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Επομένως, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{b}{1 - \mu}$.

5.2 Παραδείγματα παραγώγων, Ι.

Ας θυμηθούμε ότι δυο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζονται *ίσες* και γράφουμε $f = g$ αν $A = B$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A = B$.

(1) Για τη σταθερή συνάρτηση c είναι

$$c'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{c(x) - c(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{c - c}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} 0 = 0$$

για κάθε ξ. Επομένως, η παράγωγος συνάρτηση είναι η σταθερή 0:

$$c' = 0.$$

Με τα σύμβολα των απειροστών, είναι $\frac{dc}{dx} = 0$.

(2) Η παράγωγος της p_1 σε κάθε ξ είναι

$$p_1{}'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{p_1(x) - p_1(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{x - \xi}{x - \xi} = 1.$$

Δηλαδή, η παράγωγος συνάρτηση είναι η σταθερή 1:

$$p_1{}' = 1.$$

Με τα σύμβολα των απειροστών, είναι $\frac{dx}{dx} = 1$.

(3) Θα αποδείξουμε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 1$,

$$p_a{}' = a p_{a-1} \qquad (a \in \mathbb{Q}, a \neq 1).$$

Προσέξτε: αποφεύγουμε να γράψουμε τον τύπο $p_a{}' = a p_{a-1}$ στην περίπτωση $a = 1$. Ο τύπος $p_1{}' = 1 p_0$ δεν είναι ακριβώς σωστός. Το αριστερό μέλος είναι η σταθερή συνάρτηση 1 και ορίζεται

στο $\mathbb{R}$ ενώ το δεξιό μέλος είναι η συνάρτηση p_0 και ορίζεται στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται στο κοινό μέρος των πεδίων ορισμού τους αλλά δεν έχουν ίδιο πεδίο ορισμού.
Έστω, κατ' αρχάς, $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$. Τότε $a-1 \in \mathbb{N}$, οπότε και οι δυο συναρτήσεις p_a και p_{a-1} έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε ξ, είναι

$$p_a{}'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{x^a-\xi^a}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}(x^{a-1} + x^{a-2}\xi + \cdots + x\xi^{a-2} + \xi^{a-1}) = a\xi^{a-1}\,.$$

Άρα η συνάρτηση p_a είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ξ, οπότε το πεδίο ορισμού της $p_a{}'$ είναι το $\mathbb{R}$. Άρα οι συναρτήσεις $p_a{}'$ και ap_{a-1} έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και τις ίδιες τιμές $a\xi^{a-1}$ σε κάθε ξ, οπότε είναι ίσες.
Αν $a = 0$, τότε οι συναρτήσεις p_0 και p_{-1} έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Για κάθε $\xi \neq 0$, είναι

$$p_0{}'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{x^0-\xi^0}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \tfrac{1-1}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} 0 = 0.$$

Άρα η συνάρτηση $p_0{}'$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, δηλαδή το ίδιο με το πεδίο ορισμού της $0p_{-1}$ και οι δυο συναρτήσεις έχουν τις ίδιες τιμές 0 σε κάθε $\xi \neq 0$, οπότε είναι ίσες.
Κατόπιν, έστω $a \in \mathbb{Z}$, $a \leq -1$. Τώρα οι συναρτήσεις p_a και p_{a-1} έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Γράφουμε $b = -a \in \mathbb{N}$ και τώρα, για κάθε $\xi \neq 0$, είναι

$$\begin{aligned} p_a{}'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{x^a-\xi^a}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \tfrac{x^{-b}-\xi^{-b}}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \tfrac{x^b-\xi^b}{-x^b\xi^b(x-\xi)} \\ &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{x^{b-1}+x^{b-2}\xi+\cdots+x\xi^{b-2}+\xi^{b-1}}{-x^b\xi^b} = \tfrac{b\xi^{b-1}}{-\xi^{2b}} = -b\xi^{b-1} = a\xi^{a-1}\,. \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση $p_a{}'$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, δηλαδή το ίδιο με το πεδίο ορισμού της ap_{a-1} και οι δυο συναρτήσεις έχουν τις ίδιες τιμές $a\xi^{a-1}$ σε κάθε $\xi \neq 0$ και, επομένως, είναι ίσες.
Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση που ο a είναι ρητός αλλά όχι ακέραιος. Τότε το πεδίο ορισμού της p_a είναι είτε το $[0, +\infty)$, αν $a > 0$, είτε το $(0, +\infty)$, αν $a < 0$.
Έστω, κατ' αρχάς, $0 < a < 1$, οπότε το πεδίο ορισμού της p_a είναι το $[0, +\infty)$ και της p_{a-1} είναι το $(0, +\infty)$. Τότε

$$p_a{}'(0) = \lim_{x\to 0} \tfrac{x^a-0^a}{x-0} = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x^{1-a}} = +\infty,$$

οπότε η p_a δεν είναι παραγωγίσιμη στον 0. Κατόπιν, γράφουμε $a = \frac{m}{n}$ όπου $m, n \in \mathbb{N}$ και $m < n$. Θεωρούμε $\xi > 0$ και χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \sqrt[n]{x}$. Τότε $x^a = y^m$ και ορίζουμε $\eta = \sqrt[n]{\xi}$, οπότε $\xi^a = \eta^m$. Τότε

$$\begin{aligned} p_a{}'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{x^a-\xi^a}{x-\xi} = \lim_{y\to\eta} \tfrac{y^m-\eta^m}{y^n-\eta^n} = \lim_{y\to\eta} \tfrac{y^{m-1}+y^{m-2}\eta+\cdots+y\eta^{m-2}+\eta^{m-1}}{y^{n-1}+y^{n-2}\eta+\cdots+y\eta^{n-2}+\eta^{n-1}} \\ &= \tfrac{m\eta^{m-1}}{n\eta^{n-1}} = \tfrac{m}{n}\eta^{m-n} = \tfrac{m}{n}\big(\sqrt[n]{\xi}\big)^{m-n} = a\xi^{a-1}\,. \end{aligned}$$

Άρα οι συναρτήσεις $p_a{}'$ και ap_{a-1} έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και τις ίδιες τιμές $a\xi^{a-1}$ σε κάθε $\xi > 0$ και, επομένως, είναι ίσες.
Αν $a > 1$, το πεδίο ορισμού της p_a και της p_{a-1} είναι το $[0, +\infty)$. Τότε

$$p_a{}'(0) = \lim_{x\to 0} \tfrac{x^a-0^a}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^{a-1} = 0,$$

οπότε η p_a είναι παραγωγίσιμη στον 0. Κατόπιν, γράφουμε $a = \frac{m}{n}$ όπου $m, n \in \mathbb{N}$ και $m > n$. Θεωρούμε $\xi > 0$ και, κάνοντας τον ίδιο με πριν υπολογισμό, βρίσκουμε ότι $p_a{}'(\xi) = a\xi^{a-1}$. Άρα οι συναρτήσεις $p_a{}'$ και ap_{a-1} έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και τις ίδιες τιμές $a\xi^{a-1}$ σε κάθε $\xi \geq 0$, οπότε είναι ίσες.
Τέλος, αν $a < 0$, το πεδίο ορισμού της p_a και της p_{a-1} είναι το $(0, +\infty)$. Κατόπιν, γράφουμε $a = \frac{m}{n}$ όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ και $m < 0$. Ορίζουμε $k = -m \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $\xi > 0$ και χρησιμοποιούμε

την αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \sqrt[n]{x}$. Τότε $x^a = y^m = y^{-k}$ και ορίζουμε $\eta = \sqrt[n]{\xi}$, οπότε $\xi^a = \eta^m = \eta^{-k}$. Τότε

$$\begin{aligned} {p_a}'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{x^a-\xi^a}{x-\xi} = \lim_{y\to\eta} \tfrac{y^{-k}-\eta^{-k}}{y^n-\eta^n} = \lim_{y\to\eta} \tfrac{y^k-\eta^k}{-y^k\eta^k(y^n-\eta^n)} \\ &= \lim_{y\to\eta} \tfrac{y^{k-1}+y^{k-2}\eta+\cdots+y\eta^{k-2}+\eta^{k-1}}{-y^k\eta^k(y^{n-1}+y^{n-2}\eta+\cdots+y\eta^{n-2}+\eta^{n-1})} \\ &= \tfrac{k\eta^{k-1}}{-\eta^{2k}n\eta^{n-1}} = -\tfrac{k}{n}\eta^{-k-n} = \tfrac{m}{n}\eta^{m-n} = \tfrac{m}{n}\big(\sqrt[n]{\xi}\big)^{m-n} = a\xi^{a-1}\,. \end{aligned}$$

Άρα οι συναρτήσεις ${p_a}'$ και ap_{a-1} έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και τις ίδιες τιμές $a\xi^{a-1}$ σε κάθε $\xi > 0$ και, επομένως, είναι ίσες.
Με τα σύμβολα των απειροστών, είναι $\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}$. Η σχέση αυτή ισχύει είτε για $x \in \mathbb{R}$, αν $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, είτε για $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, αν $a \in \mathbb{Z}$, $a \leq 0$, είτε για $x \in [0,+\infty)$, αν $a \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $a > 1$, είτε για $x \in (0,+\infty)$, αν $a \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $a < 1$.
(4) Θα υπολογίσουμε τις παραγώγους συναρτήσεις των $\sin x$, $\cos x$.
Είναι

$$\cos' \xi = \lim_{x\to\xi} \tfrac{\cos x - \cos\xi}{x-\xi} = -\lim_{x\to\xi} \tfrac{\sin\frac{x-\xi}{2}}{\frac{x-\xi}{2}} \sin\tfrac{x+\xi}{2} = -\sin\xi$$

και

$$\sin' \xi = \lim_{x\to\xi} \tfrac{\sin x - \sin\xi}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \tfrac{\sin\frac{x-\xi}{2}}{\frac{x-\xi}{2}} \cos\tfrac{x+\xi}{2} = \cos\xi$$

για κάθε ξ. Άρα

$$\cos' = -\sin, \qquad \sin' = \cos\,.$$

Με τα σύμβολα των απειροστών, είναι $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$ και $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$.

Ασκήσεις.

1. Λύστε τις: $\sin' x = -1$, $\sin' x + \sin x = \sqrt{2}$, $\cos x \sin' x - \sin x \cos' x = 1$.

2. Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των συναρτήσεων $x^5 + 3x^2 - 4$, $\frac{x+1}{x-1}$, $(\sin x)^2$, $(\cos x)^3$, $\sin(2x)$, $\cos(7x)$.

5.3 Ιδιότητες των παραγώγων.

Πρόταση 5.2. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, $f(\xi) = g(\xi)$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ. Αν υπάρχει η μια από τις παραγώγους $f'(\xi)$, $g'(\xi)$, τότε υπάρχει και η άλλη και $f'(\xi) = g'(\xi)$.*

Απόδειξη. Επειδή οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$ κοντά στον ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$. □

Στην Πρόταση 5.2, αν υποθέσουμε ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ από δεξιά του ή από αριστερά του, τότε ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα για τις αντίστοιχες πλευρικές παραγώγους. Όλες οι επόμενες προτάσεις μπορούν να διατυπωθούν με τρόπο ώστε να ισχύουν και για πλευρικές παραγώγους. Θα παραλείψουμε, ως προφανείς, τις σχετικές διατυπώσεις.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\,, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και η σταθερή συνάρτηση 1 ταυτίζονται στο $(0,+\infty)$. Άρα $f'(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (0,+\infty)$. Ομοίως, η f και η σταθερή συνάρτηση -1 ταυτίζονται στο $(-\infty,0)$. Άρα $f'(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (-\infty,0)$.
(2) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|}$ ταυτίζεται στο $[0,+\infty)$ με τη συνάρτηση $p_{\frac{1}{2}}$. Άρα $f'(\xi) = {p_{\frac{1}{2}}}'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$ για κάθε $\xi \in (0,+\infty)$ και $f'_+(0) = {p_{\frac{1}{2}}}'(0) = +\infty$.

Πρόταση 5.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, δηλαδή αν $f'(\xi) \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη. Επειδή ισχύει

$$f(x) = \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x-\xi) + f(\xi)$$

για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$, είναι

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f'(\xi)0 + f(\xi) = f(\xi).$$

□

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $|x|$ είναι συνεχής στον 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στον 0. Άρα το αντίστροφο της Πρότασης 5.3 δεν ισχύει εν γένει.
(2) Στην Πρόταση 5.3 υποθέτουμε ότι $f'(\xi) \in \mathbb{R}$. Αν $f'(\xi) = \pm\infty$, η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής στον ξ. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν είναι ούτε δεξιά ούτε αριστερά συνεχής στον 0. Όμως, $f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{1-0}{x-0} = +\infty$ και $f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{-1-0}{x-0} = +\infty$, οπότε $f'(0) = +\infty$.

Πρόταση 5.4. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στον ξ, τότε οι $f+g, f-g, fg : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στον ξ. Αν, επιπλέον, $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Επίσης:*

$$(f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi), \qquad (f-g)'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi),$$
$$(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi), \qquad \Big(\frac{f}{g}\Big)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}\,.$$

Απόδειξη. Για την $f+g$ έχουμε

$$(f+g)'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{(f(x)+g(x))-(f(\xi)+g(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \big(\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + \tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\big) = f'(\xi) + g'(\xi).$$

Ομοίως για την $f-g$.
Για την fg είναι:

$$\begin{aligned}(fg)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)g(x)-f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \big(\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} g(x) + f(\xi)\tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\big) \\ &= f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi).\end{aligned}$$

Τέλος, για την $\frac{f}{g}$ είναι:

$$\begin{aligned}\big(\tfrac{f}{g}\big)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(\xi)}{g(\xi)}}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \big(\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\tfrac{1}{g(x)} - \tfrac{f(\xi)}{g(\xi)g(x)}\tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\big) \\ &= f'(\xi)\tfrac{1}{g(\xi)} - \tfrac{f(\xi)}{(g(\xi))^2}g'(\xi) = \tfrac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}\,.\end{aligned}$$

□

Με τα σύμβολα των απειροστών και αφού συμβολίσουμε $y_1 = f(x)$ και $y_2 = g(x)$, γράφουμε:

$$\frac{d(y_1+y_2)}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\,, \qquad \frac{d(y_1-y_2)}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_2}{dx}\,,$$
$$\frac{d(y_1y_2)}{dx} = \frac{dy_1}{dx}y_2 + y_1\frac{dy_2}{dx}\,, \qquad \frac{d(y_1/y_2)}{dx} = \frac{\frac{dy_1}{dx}y_2 - y_1\frac{dy_2}{dx}}{{y_2}^2}\,.$$

Οι συμβολικές αυτές σχέσεις με "απαλοιφή" του dx συνεπάγονται τις

$$d(y_1+y_2) = dy_1 + dy_2\,, \qquad d(y_1-y_2) = dy_1 - dy_2\,,$$
$$d(y_1y_2) = y_2dy_1 + y_1dy_2\,, \qquad d\Big(\frac{y_1}{y_2}\Big) = \frac{1}{y_2}dy_1 - \frac{y_1}{{y_2}^2}dy_2\,.$$

Παραδείγματα. (1) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $c \in \mathbb{R}$, τότε και η $cf : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και

$$(cf)'(\xi) = cf'(\xi).$$

Πράγματι, επειδή η σταθερή συνάρτηση c έχει παράγωγο μηδέν, $(cf)'(\xi) = c'(\xi)f(\xi)+c(\xi)f'(\xi) = 0f(\xi) + cf'(\xi) = cf'(\xi)$.

(2) Έστω η συνάρτηση $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Τότε $p'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$ για κάθε x. Άρα η παράγωγος πολυωνυμικής συνάρτησης βαθμού $n \geq 1$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n - 1$.

(3) Έστω ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Τότε, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της r, δηλαδή για κάθε x ώστε $q(x) \neq 0$, είναι $r'(x) = \frac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{(q(x))^2}$. Άρα η παράγωγος ρητής συνάρτησης είναι ρητή συνάρτηση.

(4) Είναι

$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

για κάθε $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$. Επίσης, είναι

$$\cot' x = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2}$$

για κάθε $x \neq k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$. Άρα

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2}\,, \qquad \cot' = -\frac{1}{\sin^2}\,.$$

Με τα σύμβολα των απειροστών, είναι $\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2}$ και $\frac{d\cot x}{dx} = -\frac{1}{(\sin x)^2}$.

Η επόμενη ιδιότητα είναι ιδιαιτέρως σημαντική για τον υπολογισμό παραγώγων. Λέει ότι η παράγωγος της σύνθεσης δυο συναρτήσεων είναι ίση με το γινόμενο των παραγώγων τους.

Κανόνας Αλυσίδας. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $\eta = f(\xi) \in B$ σημείο συσσώρευσης του B. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και η g παραγωγίσιμη στον η, τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και*

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi) = g'(f(\xi))f'(\xi).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $G : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}\,, & \text{αν } y \in B,\ y \neq \eta \\ g'(\eta)\,, & \text{αν } y = \eta \end{cases}$ Η G είναι συνεχής στον η διότι

$$\lim_{y\to\eta} G(y) = \lim_{y\to\eta} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} = g'(\eta) = G(\eta).$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, είναι συνεχής στον ξ, οπότε και η $G \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ. Άρα

$$\lim_{x\to\xi} G(f(x)) = G(f(\xi)) = G(\eta) = g'(\eta).$$

Επίσης,

$$g(y) - g(\eta) = G(y)(y - \eta)$$

για κάθε $y \in B$. Πράγματι, αν $y \in B$, $y \neq \eta$, τότε η ισότητα ισχύει λόγω του ορισμού του $G(y)$ και, αν $y = \eta$, τότε και τα δυο μέλη της ισότητας είναι ίσα με 0.

Άρα

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{G(f(x))(f(x)-f(\xi))}{x-\xi} \\ &= \lim_{x\to\xi} G(f(x)) \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = g'(\eta)f'(\xi).\end{aligned}$$

□

Συμβολίζοντας $y = f(x)$ και $z = g(y)$, γράφουμε με τα σύμβολα των απειροστών: $\frac{dz}{dy} = g'(\eta)$ και $\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$. Επίσης, επειδή $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, είναι $\frac{dz}{dx} = (g \circ f)'(\xi)$. Επομένως, η σχέση $(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi)$ γράφεται, με τα σύμβολα των απειροστών:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,.$$

Προσέξτε την "απλοποίηση" που ενυπάρχει στον τύπο $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$. Προσέξτε και την "απαλοιφή" του dx που καταλήγει στον τύπο $dz = \frac{dz}{dy}dy$.

Παραδείγματα. (1) Έστω η συνάρτηση $h(x) = \sin(x^2+3)$. Θα υπολογίσουμε την $h'(2)$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2+3$ και $g(y) = \sin y$. Τότε $h = g\circ f$ και, επομένως, $h'(2) = g'(f(2))f'(2) = g'(7)f'(2) = 4\cos 7$.
Γενικά: $h'(x) = g'(f(x))f'(x) = \cos(f(x))f'(x) = 2x\cos(x^2+3)$ για κάθε x.
Προσέξτε πώς εργαζόμαστε με τα απειροστά: γράφουμε $y = x^2+3$ και $z = \sin(x^2+3) = \sin y$ και τότε $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \cos y \cdot 2x = 2x\cos(x^2+3)$.
(2) Έστω η συνάρτηση $h(x) = (\sin x)^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sin x$ και $g(y) = y^n$. Τότε $h = g \circ f$ και, επομένως, $h'(x) = g'(f(x))f'(x) = n(\sin x)^{n-1}\cos x$ για κάθε x.
Πάλι με τα απειροστά, γράφουμε $y = \sin x$ και $z = (\sin x)^n = y^n$ και τότε $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}\cos x = n(\sin x)^{n-1}\cos x$.

Θα κάνουμε μια παρατήρηση σχετικά με τον Κανόνα Αλυσίδας. Θα υποθέσουμε *επιπλέον* ότι η f είναι ένα-προς-ένα και θα δούμε μια *δεύτερη απόδειξη* του κανόνα. Αν η f είναι ένα-προς-ένα, τότε, αν $x \neq \xi$, συνεπάγεται $f(x) \neq f(\xi)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} = \frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)}\,\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}\,\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,.$$

Τώρα, επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, οπότε, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = f(x)$, υπολογίζουμε το όριο

$$(g \circ f)'(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} = \lim_{y\to\eta}\frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = g'(\eta)f'(\xi).$$

Θα παρατηρήσουμε, ότι με τα σύμβολα $y = f(x)$ και $z = g(y)$ η σχέση $\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} = \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ γράφεται

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\,,$$

οπότε, παίρνοντας όρια, καταλήγουμε στη συμβολική σχέση με τα απειροστά:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,.$$

Αυτή η απόδειξη είναι τελείως "διαφανής" ως προς την πραγματική σχέση ανάμεσα στις διαφορές των τριών μεταβλητών x, y και z και την συνεπαγόμενη σχέση ανάμεσα στα αντίστοιχα απειροστά των τριών μεταβλητών. Δυστυχώς, η απλή αυτή απόδειξη δε λειτουργεί στη γενική περίπτωση, διότι, αν η f δεν είναι ένα-προς-ένα, τότε η διαφορά $\Delta y = y - \eta = f(x) - f(\xi)$ μπορεί να είναι ίση με 0.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι *αύξουσα στο* A και ότι υπάρχει η $f'(\xi)$. Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$$

για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$ και, επομένως,

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0.$$

Ομοίως, αν η f είναι φθίνουσα στο A και υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε είναι $f'(\xi) \leq 0$.

Αν η συνάρτηση είναι μονότονη στο $A \cap (-\infty, \xi]$ ή στο $A \cap [\xi, +\infty)$, τότε έχουμε ανάλογα συμπεράσματα για το πρόσημο των αντίστοιχων $f'_-(\xi)$ ή $f'_+(\xi)$.

Η επόμενη ιδιότητα λέει ότι η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης είναι ίση με το αντίστροφο της παραγώγου της συνάρτησης.

Κανόνας Αντίστροφης Συνάρτησης. *Έστω διάστημα I, $\xi \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο I και $\eta = f(\xi)$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα, έστω J, ότι, φυσικά, $\eta \in J$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο J. Αν υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε υπάρχει και η $(f^{-1})'(\eta)$ και*

$$(f^{-1})'(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{f'(\xi)}, & \text{αν } f'(\xi) \in \mathbb{R},\ f'(\xi) > 0 \\ 0, & \text{αν } f'(\xi) = +\infty \\ +\infty, & \text{αν } f'(\xi) = 0 \end{cases}$$

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύουν τα ίδια με < 0 αντί > 0 και $-\infty$ αντί $+\infty$.

Απόδειξη. Έστω $f'(\xi) \in \mathbb{R}$, $f'(\xi) > 0$. Από τη συνέχεια της f^{-1} στον η, είναι $\lim_{y\to\eta} f^{-1}(y) = \xi$, οπότε, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από y σε $x = f^{-1}(y)$, βρίσκουμε

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y\to\eta} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)}{y-\eta} = \lim_{x\to\xi} \frac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)} = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}} = \frac{1}{f'(\xi)}\,.$$

Αν $f'(\xi) = +\infty$, τότε το τελευταίο όριο είναι ίσο με $\frac{1}{+\infty} = 0$, οπότε $(f^{-1})'(\eta) = 0$.
Τέλος, αν $f'(\xi) = 0$, τότε, επειδή ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > 0$ για κάθε $x \in I$, $x \neq \xi$, το τελευταίο όριο είναι ίσο με $+\infty$, οπότε $(f^{-1})'(\eta) = +\infty$. □

Στην άσκηση 10 υπάρχει μια άλλη μορφή του κανόνα αντίστροφης συνάρτησης.

Θα διατυπώσουμε τη σχέση $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$ με τα σύμβολα των απειροστών. Γράφουμε $y = f(x)$ και $x = f^{-1}(y)$. Τότε είναι $\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$ και $\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(\eta)$. Επομένως, η σχέση $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$ γράφεται

$$\frac{dx}{dy} = 1\Big/\Big(\frac{dy}{dx}\Big).$$

Παρατηρήστε ότι η σχέση αυτή δεν είναι τίποτε άλλο από το όριο της προφανούς σχέσης

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1\big/\big(\frac{\Delta y}{\Delta x}\big),$$

η οποία χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Κανόνα Αντίστροφης Συνάρτησης. Παρατηρήστε, επίσης, την "απλοποίηση" που ενυπάρχει στον τύπο $\frac{dx}{dy} = 1/(\frac{dy}{dx})$.

Παραδείγματα. (1) Η $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Θα υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση της arcsin.
Έστω $\xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\eta \in [-1, 1]$, $\eta = \sin\xi$, $\xi = \arcsin\eta$.
Αν $\sqrt{1-\eta^2} > 0$, τότε

$$\arcsin'\eta = \frac{1}{\sin'\xi} = \frac{1}{\cos\xi} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin\xi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\,.$$

Παρατηρήστε ότι από τις τιμές $\cos\xi = \pm\sqrt{1-(\sin\xi)^2}$ επιλέξαμε αυτήν με το $+$ διότι $\cos\xi \geq 0$ για κάθε $\xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Αν $\sqrt{1-\eta^2} = 0$, τότε $\arcsin'\eta = +\infty$. Άρα

$$\arcsin'\eta = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\,, & \text{αν } -1 < \eta < 1 \\ +\infty, & \text{αν } \eta = \pm 1 \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού της $\arcsin'$ είναι το $(-1,1)$ και ο τύπος της είναι

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad (-1 < y < 1).$$

Εργαζόμενοι με τα απειροστά, γράφουμε $y = \sin x$ και $x = \arcsin y$, οπότε

$$\frac{d\arcsin y}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

(2) Η $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0,\pi]$ με σύνολο τιμών το $[-1,1]$ και η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[-1,1]$ με σύνολο τιμών το $[0,\pi]$.
Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε ότι

$$\arccos'\eta = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\,, & \text{αν } -1 < \eta < 1 \\ -\infty, & \text{αν } \eta = \pm 1 \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού της $\arccos'$ είναι το $(-1,1)$ και ο τύπος της είναι

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad (-1 < y < 1).$$

Εργαζόμενοι με τα απειροστά, γράφουμε $y = \cos x$ και $x = \arccos y$, οπότε

$$\frac{d\arccos y}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

(3) Η $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Έστω $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta = \tan\xi$, $\xi = \arctan\eta$. Είναι $\tan'\xi = \frac{1}{(\cos\xi)^2} \neq 0, +\infty$, οπότε

$$\arctan'\eta = \frac{1}{\tan'\xi} = (\cos\xi)^2 = \frac{1}{1+(\tan\xi)^2} = \frac{1}{1+\eta^2}\,.$$

Άρα

$$\arctan'\eta = \frac{1}{1+\eta^2}\,.$$

Το πεδίο ορισμού της $\arctan'$ είναι το $\mathbb{R}$ και ο τύπος της είναι

$$\arctan' y = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

Εργαζόμενοι και πάλι με τα απειροστά, γράφουμε $y = \tan x$ και $x = \arctan y$, οπότε

$$\frac{d\arctan y}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = (\cos x)^2 = \frac{1}{1+(\tan x)^2} = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των $\sin(\sin x)$, $\arcsin(\cos x)$, $\arcsin(\sin x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\sin(\arcsin x)$;

2. (i) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Βρείτε την f'.

   (ii) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Βρείτε την f' και δείτε αν είναι συνεχής.

   (iii) Γενικεύστε. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Για ποιές τιμές του a είναι η f συνεχής; είναι η f παραγωγίσιμη; είναι η f' συνεχής;

3. Από την ισότητα $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} - 1$ βρείτε ανάλογες ισότητες για τα αθροίσματα $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$, $x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^2x^n$.

4. Έστω $f_1, \ldots, f_n : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι $f_1, \ldots, f_n$ είναι παραγωγίσιμες στον ξ, $f_1(\xi) \neq 0, \ldots, f_n(\xi) \neq 0$ και $g = f_1 \cdots f_n : A \to \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f_1{}'(\xi)}{f_1(\xi)} + \cdots + \frac{f_n{}'(\xi)}{f_n(\xi)}$.

5. Για ποιες ρητές συναρτήσεις r ισχύει $\lim_{x \to +\infty} \frac{xr'(x)}{r(x)} = 0$;

6. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα διάστημα (a, b) και καμιά ρητή συνάρτηση r ώστε να ισχύει $r'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (a, b)$.

7. (i) Αποδείξτε ότι η παράγωγος άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση και η παράγωγος περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση.

   (ii) Αποδείξτε ότι η παράγωγος περιοδικής συνάρτησης είναι περιοδική συνάρτηση.

8. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A ώστε να ισχύει $(f(x))^2 + 4f(x) = x^3 - 5x^2 - 5x + 21$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι ισχύει $(2f(x) + 4)f'(x) = 3x^2 - 10x - 5$ για κάθε $x \in A$ στον οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Βρείτε το μέγιστο δυνατό σύνολο A, αποδείξτε ότι υπάρχουν τέσσερις τέτοιες f και βρείτε τους τύπους τους και τους τύπους των αντίστοιχων f'.

9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 7$. Αποδείξτε (με στοιχειώδη τρόπο) ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f; Χωρίς να βρείτε τον τύπο της f^{-1}, αποδείξτε ότι $\left(f^{-1}\right)'(y) = \begin{cases} \frac{1}{3(f^{-1}(y)+1)^2}, & \text{αν } y \neq 6 \\ +\infty, & \text{αν } y = 6 \end{cases}$ Τέλος, βρείτε τον τύπο της f^{-1}, το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της και επαληθεύστε την παραπάνω ισότητα.

10. Έστω $f : A \to B$ ένα-προς-ένα στο A και επί του B και η αντίστροφη $f^{-1} : B \to A$. Έστω $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Τέλος, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, $f'(\xi) \neq 0$ και ότι η f^{-1} είναι συνεχής στον η.

    (i) Αποδείξτε ότι ο $\eta = f(\xi)$ είναι σημείο συσσώρευσης του B και ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στον η και $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$.

    (ii) Μερικές φορές συναντά κανείς την εξής "απόδειξη" του $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$. *Από το ότι ισχύει $f^{-1}(f(x))) = x$ για κάθε $x \in A$ και από τον Κανόνα Αλυσίδας συνεπάγεται $(f^{-1})'(\eta)f'(\xi) = 1$.*

Άρα υπάρχει η $(f^{-1})'(\eta)$ και $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$. Πεισθήτε ότι υπάρχει λογικό λάθος στην απόδειξη αυτή. Η αποτυχημένη αυτή απόδειξη λειτουργεί μόνον αν *υποθέσουμε* την ύπαρξη της $(f^{-1})'(\eta)$ και, τότε, αποδεικνύει την ισότητα $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$.

5.4 Παραδείγματα παραγώγων, ΙΙ.

Θα βρούμε τις παραγώγους συναρτήσεις τριών σημαντικών συναρτήσεων.

(1) Έστω $a > 0$, $a \neq 1$ και η συνάρτηση $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\log_a{}' x = \frac{1}{x \log a} \qquad (x > 0).$$

Εκτός από το γνωστό όριο $\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$, θα μας χρειαστεί και το

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t-1})^t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})} = \frac{1}{e\cdot 1} = \frac{1}{e}.$$

Επειδή η $\log_a$ είναι συνεχής, συνεπάγεται

$$\lim_{t\to+\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \log_a e = \frac{1}{\log a}$$

καθώς και

$$\lim_{t\to+\infty}\log_a\left(1-\frac{1}{t}\right)^t = \log_a\frac{1}{e} = -\log_a e = -\frac{1}{\log a}.$$

Τώρα, αλλάζοντας μεταβλητή από h σε $t = \frac{x}{h}$ και από h σε $t = -\frac{x}{h}$, υπολογίζουμε, αντιστοίχως,

$$\lim_{h\to0+}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = \frac{1}{x}\lim_{t\to+\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x\log a}$$

και

$$\lim_{h\to0-}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to0-}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = -\frac{1}{x}\lim_{t\to+\infty}\log_a\left(1-\frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x\log a}.$$

Άρα

$$\log_a{}' x = \lim_{h\to0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \frac{1}{x\log a}.$$

Ειδική περίπτωση:

$$\log' x = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

Με τα σύμβολα των απειροστών, είναι $\frac{d\log_a x}{dx} = \frac{1}{x\log a}$ και $\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}$ για $x > 0$.

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \log|x|$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Θα αποδείξουμε ότι $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$. Πράγματι στο $(0,+\infty)$ είναι $f(x) = \log x$, οπότε $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Στο $(-\infty, 0)$ είναι $f(x) = \log(-x)$ και, επομένως, $f'(x) = -\log'(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$. Με τα σύμβολα των απειροστών, είναι $\frac{d\log|x|}{dx} = \frac{1}{x}$ για $x \neq 0$.

(2) Έστω $a > 0$, $a \neq 1$, η $\exp_a : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ και η αντίστροφη $\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Γράφουμε $y = \exp_a x$ και $x = \log_a y$ και από τον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης:

$$\exp_a{}' x = \frac{1}{\log_a{}' y} = y\log a = \log a\ \exp_a x$$

για κάθε x. Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση $a = 1$, διότι η συνάρτηση $\exp_1$ είναι σταθερή 1 και έχει παράγωγο συνάρτηση τη σταθερή 0 και διότι $\log 1 = 0$. Με άλλα λόγια:

$$\exp_a{}' = \log a\ \exp_a \qquad (a > 0).$$

Ειδική περίπτωση:
$$\exp' = \exp .$$
Με τα σύμβολα των απειροστών, είναι $\frac{da^x}{dx} = a^x \log a$ και $\frac{de^x}{dx} = e^x$.

(3) Τέλος, έστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και η συνάρτηση p_a. Θα αποδείξουμε ότι
$$p_a{}' = a p_{a-1} .$$
Η ίδια ισότητα έχει ήδη αποδειχθεί στην περίπτωση $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 1$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας και την ισότητα $p_a(x) = x^a = \exp(\log(x^a)) = \exp(a \log x)$ για $x > 0$.

Έστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 1$, οπότε οι συναρτήσεις p_a και p_{a-1} έχουν πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Αν $x > 0$, τότε
$$p_a{}'(x) = \exp'(a \log x) \cdot a \cdot \log' x = \exp(a \log x) a \tfrac{1}{x} = x^a a \tfrac{1}{x} = a x^{a-1} .$$
Αν $x = 0$, είναι
$$p_a{}'(0) = \lim_{h \to 0} \tfrac{h^a - 0}{h - 0} = \lim_{h \to 0} h^{a-1} = 0.$$
Άρα οι συναρτήσεις $p_a{}'$ και $a p_{a-1}$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ και ίσες τιμές $a x^{a-1}$ για κάθε $x \geq 0$ και, επομένως, είναι ίσες.

Έστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $0 < a < 1$, οπότε η p_a έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και η p_{a-1} το $(0, +\infty)$. Αν $x > 0$, τότε, όπως πριν, βρίσκουμε $p_a{}'(x) = a x^{a-1}$. Αν $x = 0$, είναι
$$p_a{}'(0) = \lim_{h \to 0} \tfrac{h^a - 0}{h - 0} = \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h^{1-a}} = +\infty.$$
Άρα οι συναρτήσεις $p_a{}'$ και $a p_{a-1}$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $(0, +\infty)$ και ίσες τιμές $a x^{a-1}$ για κάθε $x > 0$ και, επομένως, είναι ίσες.

Τέλος, έστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a < 0$, οπότε οι p_a και p_{a-1} έχουν πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Αν $x > 0$, τότε, όπως πριν, $p_a{}'(x) = a x^{a-1}$. Άρα οι $p_a{}'$ και $a p_{a-1}$ έχουν πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και ίσες τιμές $a x^{a-1}$ για κάθε $x > 0$ και, επομένως, είναι ίσες.

Με τα σύμβολα των απειροστών, είναι $\frac{dx^a}{dx} = a x^{a-1}$ είτε για $x \in [0, +\infty)$, αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 1$, είτε για $x \in (0, +\infty)$, αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a < 1$.

Μια δεύτερη - και πιο στοιχειώδης - απόδειξη της $p_a{}' = a p_{a-1}$ υπάρχει στην άσκηση 4.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των $x \log(x \log(x \log(x \log x)))$, $\log\left(e^{3x^2+4} + \sin\left(x^{-\frac{5}{4}}\right)\right)$, $2^{x^2+1} \log_3(\sin x)$, $3^{-\sin(\log x)}$, $\sin\left(e^{\sqrt{\log(x^2+1)}}\right)$.

2. (i) Παρατηρήστε ότι τα όρια $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1}$, $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$, $\lim_{x \to 1} \frac{x^a - 1}{x-1}$ είναι γνωστές παράγωγοι συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και *ως τέτοιες* υπολογίστε τα.
   (ii) Βάσει των προηγούμενων ορίων βρείτε τα όρια $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x^a - 1}$, $\lim_{x \to 1} \frac{x^a - x^b}{x-1}$, $\lim_{x \to 1} \frac{x^a - x^b}{\log x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{x(e^{ax} + e^{-ax})}$.

3. (i) Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στον ξ, αποδείξτε ότι και η $f^g : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και υπολογίστε την $(f^g)'(\xi)$.
   (ii) Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των x^x, $(x^2+1)^{\sin x}$, $|x-1|^{x-2} |x-2|^{x-1}$.

4. Αποδείξτε με στοιχειώδη μέθοδο ότι ${p_a}' = ap_{a-1}$ στην περίπτωση άρρητου a, χρησιμοποιώντας την ίδια σχέση για ρητό a.
Υπόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Έστω $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $a_1 < a < a_2$ και $a_2 - a_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Επειδή ${p_{a_1}}'(1) = a_1 p_{a_1-1}(1) = a_1$ και ${p_{a_2}}'(1) = a_2 p_{a_2-1}(1) = a_2$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{x^{a_1}-1}{x-1} - a_1| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|\frac{x^{a_2}-1}{x-1} - a_2| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x > 0$, $0 < |x-1| < \delta$. Άρα, αν $x > 0$, $0 < |x-1| < \delta$, τότε $a - \epsilon < a_1 - \frac{\epsilon}{2} < \frac{x^{a_1}-1}{x-1} < \frac{x^{a}-1}{x-1} < \frac{x^{a_2}-1}{x-1} < a_2 + \frac{\epsilon}{2} < a + \epsilon$, οπότε $|\frac{x^{a}-1}{x-1} - a| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x-1} = a$. Τέλος, αν $\xi > 0$, τότε $\lim_{x\to\xi} \frac{x^a-\xi^a}{x-\xi} = \xi^{a-1} \lim_{x\to\xi} \frac{(x/\xi)^a-1}{(x/\xi)-1} = \xi^{a-1} \lim_{t\to 1} \frac{t^a-1}{t-1} = a\xi^{a-1}$.

5.5 Τέσσερα σημαντικά θεωρήματα.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$. Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού μεγίστου** της f αν υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$, $|x-\xi| < \delta_0$. Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ελαχίστου** της f αν υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$, $|x-\xi| < \delta_0$. Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ακροτάτου** της f αν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου.

Είναι προφανές ότι, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) μεγίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού μεγίστου. Ομοίως, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) ελαχίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού ελαχίστου.

Θεώρημα του Fermat. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'(\xi)$ είτε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Δηλαδή ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ κοντά στον ξ.
Έστω ότι υπάρχει η $f'(\xi)$, οπότε $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$. Επειδή ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ κοντά στον ξ από δεξιά του, είναι
$$f'(\xi) = f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0.$$
Επίσης, επειδή ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ κοντά στον ξ από αριστερά του, είναι
$$f'(\xi) = f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0.$$
Άρα $f'(\xi) = 0$.
Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, τότε επαναλαμβάνουμε τους ίδιους συλλογισμούς με ≥ 0 αντί ≤ 0 και αντιστρόφως. □

Το Θεώρημα του Fermat λέει ότι, αν η f έχει παράγωγο σε σημείο τοπικού ακροτάτου της το οποίο είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο αντίστοιχο σημείο του γραφήματός της είναι οριζόντια.

Επισημαίνουμε ότι, στο Θεώρημα του Fermat αλλά και παντού αλλού, όταν γράφουμε $f'(\xi)$ ή όταν λέμε ότι η $f'(\xi)$ υπάρχει εννοούμε ότι η τιμή της μπορεί να είναι και $\pm\infty$.

Συνήθως, το Θεώρημα του Fermat εφαρμόζεται με συνάρτηση f ορισμένη σε *διάστημα* A. Τότε ο ξ πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος ώστε να είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του διαστήματος.

Παραδείγματα. (1) Ο 0 είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $f(x) = |x|$ αλλά δεν υπάρχει η $f'(0)$.
(2) Ο 0 είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου της p_2 και ${p_2}'(0) = 0$.

Το Θεώρημα του Fermat μας δίνει το εξής πρακτικό πόρισμα. Αν θέλουμε να βρούμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να τα ψάξουμε ανάμεσα στα παρακάτω σημεία: τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος, τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο και τα σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0. Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα. Έστω η $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$. Τότε $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$, οπότε τα μόνα υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου της f είναι τα άκρα 0, 4 του $[0,4]$ καθώς και οι 1, 2 στους οποίους μηδενίζεται η f'. Οι τιμές της f στα σημεία αυτά είναι 5, 37, 10, 9, αντιστοίχως.
Η f είναι συνεχής στο $[0,4]$, οπότε έχει οπωσδήποτε σημεία ολικού μεγίστου και ελαχίστου. Αυτά είναι οπωσδήποτε κάποια από τα παραπάνω τέσσερα σημεία και, επομένως, ο 0 είναι το σημείο ολικού ελαχίστου, οπότε η ελάχιστη τιμή της f είναι 5, και ο 4 είναι το σημείο ολικού μεγίστου, οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι 37. Μένει να δούμε αν οι 1, 2 είναι σημεία τοπικού ακροτάτου ή όχι.
Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, οπότε έχει σημεία ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου στο $[0,2]$. Αυτά είναι κάποια από τα τρία σημεία 0, 1, 2 - τα άκρα και το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η f'. Οι αντίστοιχες τιμές της f είναι 5, 10, 9, οπότε ο 1 είναι το σημείο ολικού μεγίστου στο $[0,2]$ και, επομένως, είναι και σημείο τοπικού μεγίστου στο $[0,4]$.
Ομοίως, επειδή οι τιμές στους 1, 2, 4 είναι 10, 9, 37, αντιστοίχως, ο 2 είναι σημείο ολικού ελαχίστου στο $[1,4]$ και, επομένως, είναι σημείο τοπικού ελαχίστου στο $[0,4]$.
Το παράδειγμα αυτό θα το ξαναδούμε λίγο παρακάτω με απλούστερο τρόπο.

Το Θεώρημα του Fermat έχει το εξής χρήσιμο συμπλήρωμα.

Πρόταση 5.5. *(1) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, αντιστοίχως.*
(2) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'_-(\xi)$ είτε $f'_-(\xi) \geq 0$ ή $f'_-(\xi) \leq 0$, αντιστοίχως.

Απόδειξη. (1) Έστω ξ σημείο τοπικού μεγίστου της f, οπότε ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ κοντά στον ξ. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η $f'_+(\xi)$. Επειδή ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ κοντά στον ξ από τα δεξιά του, είναι

$$f'_+(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0.$$

Η περίπτωση τοπικού ελαχίστου στο (1) καθώς και το (2) έχουν ίδια απόδειξη. □

Υπενθυμίζουμε ότι, γράφοντας $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, περιλαμβάνουμε την περίπτωση $f'_+(\xi) = -\infty$ ή $f'_+(\xi) = +\infty$, αντιστοίχως. Ομοίως για την $f'_-(\xi)$.

Παραδείγματα. (1) Η $p_1 : [0,2] \to \mathbb{R}$ έχει σημείο τοπικού ελαχίστου τον 0 και ${p_1}'_+(0) = 1 \geq 0$. Η p_1 έχει σημείο τοπικού μεγίστου τον 2 και ${p_1}'_-(2) = 1 \geq 0$.
(2) Η $p_{\frac{1}{2}} : [0,2] \to \mathbb{R}$ έχει σημείο τοπικού ελαχίστου τον 0 και ${p_{\frac{1}{2}}}'_+(0) = +\infty \geq 0$.

Θεώρημα του Rolle. *Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο στο (a,b). Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι σταθερή στο $[a,b]$, δηλαδή $f(x)=f(a)=f(b)$ για κάθε $x\in(a,b)$. Τότε $f'(\xi)=0$ για κάθε $\xi\in(a,b)$.
Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο $[a,b]$. Τότε είτε (i) η f έχει μια τουλάχιστον τιμή $> f(a)=f(b)$ είτε (ii) η f έχει μια τουλάχιστον τιμή $< f(a)=f(b)$. Εξετάζουμε τις δυο περιπτώσεις ξεχωριστά.
(i) Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής, υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ο οποίος είναι σημείο ολικού μεγίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μεγαλύτερη από $f(a)=f(b)$, είναι $f(\xi)>f(a)=f(b)$, οπότε $\xi\in(a,b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, $f'(\xi)=0$.
(ii) Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής, υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ο οποίος είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μικρότερη από $f(a)=f(b)$, είναι $f(\xi)<f(a)=f(b)$, οπότε $\xi\in(a,b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, $f'(\xi)=0$. □

Το Θεώρημα του Rolle λέει ότι, με τις κατάλληλες υποθέσεις, αν $f(a)=f(b)$, τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ να είναι οριζόντια.

Παράδειγμα. Η $f:[-2,\sqrt{3}]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3+2x^2-3x-5$ είναι συνεχής στο $[-2,\sqrt{3}]$, υπάρχει η $f'(x)=3x^2+4x-3$ για κάθε $x\in(-2,\sqrt{3})$ και $f(-2)=f(\sqrt{3})=1$. Άρα υπάρχει $\xi\in(-2,\sqrt{3})$ ώστε $3\xi^2+4\xi-3=0$. Για να βρούμε τον ξ λύνουμε την εξίσωση $3x^2+4x-3=0$. Οι λύσεις είναι οι $\frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$ και ανήκουν και οι δυο στο $(-2,\sqrt{3})$.

Σε σχέση με το Θεώρημα του Rolle παρατηρούμε τα εξής. Κατ' αρχάς το θεώρημα δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης του ξ για τον οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$. Κατόπιν, αν η f δεν έχει παράγωγο έστω και σε ένα μόνο σημείο του (a,b), τότε μπορεί να μην υπάρχει κανένας $\xi\in(a,b)$ ωστε $f'(\xi)=0$. Τέλος, οι υποθέσεις του θεωρήματος επιτρέπουν να είναι η παράγωγος ίση με $\pm\infty$ σε σημεία του (a,b). Το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει.

Παραδείγματα. (1) Η $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=f(1)=1$. Όμως, δεν υπάρχει κανένας $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

(2) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-x, & \text{αν } 0<x\le 1\\ 0, & \text{αν } x=0\\ -\sqrt{-x}-x\,, & \text{αν } -1\le x<0\end{cases}$ οπότε $f(-1)=f(1)=0$. Η παράγωγος είναι $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}}-1, & \text{αν } 0<x\le 1\\ +\infty, & \text{αν } x=0\\ \frac{1}{2\sqrt{-x}}-1\,, & \text{αν } -1\le x<0\end{cases}$ οπότε $f'(\xi)=0$ για $\xi=\pm\frac{1}{4}$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange). *Έστω ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο στο (a,b). Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=(b-a)f(x)-(f(b)-f(a))x \qquad (x\in[a,b]).$$

Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο στο (a,b). Επίσης, $h(a)=h(b)$. Άρα υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $h'(\xi)=0$. Συνεπάγεται

$$(b-a)f'(\xi)-(f(b)-f(a))=0$$

και, επομένως, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$. □

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange) λέει ότι, με τις κατάλληλες υποθέσεις, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να έχει την ίδια κλίση - και, επομένως, να είναι παράλληλη - με την ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy). *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε*

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(\xi).$$

Απόδειξη. Έστω $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) και $h(a) = h(b)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $h'(\xi) = 0$, οπότε $(g(b) - g(a))f'(\xi) - (f(b) - f(a))g'(\xi) = 0$. □

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα του Rolle είναι απλή εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange) και ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) είναι απλή εφαρμογή - με τη συνάρτηση $g(x) = x$ - του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Cauchy). Από την άλλη μεριά, το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy) αποδείχτηκε ως εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle. Συμπεραίνουμε ότι *τα τρία θεωρήματα είναι ισοδύναμα*.

Πολλές φορές το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy) εφαρμόζεται με κάποιες επιπλέον υποθέσεις. Συγκεκριμένα, αν $g(a) \neq g(b)$ και αν δεν ισχύει $f'(x) = g'(x) = 0$ για κανένα $x \in (a,b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Πράγματι, από $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$ προκύπτει $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = f'(\xi)$. Από αυτήν συνεπάγεται ότι, αν $g'(\xi) = 0$, τότε $f'(\xi) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $g'(\xi) \neq 0$, οπότε $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Με αυτές τις επιπλέον υποθέσεις, μπορούμε να γράψουμε την ισότητα $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ ως

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{(f(b)-f(a))/(b-a)}{(g(b)-g(a))/(b-a)},$$

οπότε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy) λέει ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε ο λόγος των κλίσεων των εφαπτόμενων ευθειών στα γραφήματα των f και g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ να είναι ίσος με τον λόγο των κλίσεων των ευθειών οι οποίες διέρχονται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ και από τα σημεία $(a, g(a))$ και $(b, g(b))$.

Ασκήσεις.

1. Έχει η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ τον 0 ως σημείο τοπικού ακροτάτου;

2. (i) Βρείτε απλή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f'(0) = 0$ και ο 0 να μην είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f.
   (ii) Το (i) είναι πιο δύσκολο αν θέλουμε η f να είναι και *άρτια*. Δείτε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

3. Έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $\frac{\sin b - \sin a}{b-a} = \cos\xi$ και $\xi \in (a,b)$ ώστε $\frac{\sin b - \sin a}{e^b - e^a} = e^{-\xi}\cos\xi$.

4. Μπορεί η $x^3 - 12x = c$ να έχει δυο λύσεις στο $[-2,2]$; στο $(-\infty,-2]$; στο $[2,+\infty)$;

5. (i) Με το Θεώρημα του Rolle και την αρχή της επαγωγής, αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες.
(ii) Έστω $a_1 < \cdots < a_n$ και η συνάρτηση $p(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)$. Αποδείξτε ότι η p' έχει ακριβώς $n-1$ ρίζες. Προσδιορίστε τη θέση των ριζών της p' σε σχέση με τους $a_1, \ldots, a_n$.

6. Αποδείξτε ότι η $x^2 = x\sin x + \cos x$ έχει ακριβώς δυο λύσεις και προσδιορίστε τη θέση τους σε σχέση με τον 0.

7. Πόσες λύσεις έχει η $e^x = 1$; η $e^x = 1+x$; η $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$; Γενικεύστε με την αρχή της επαγωγής: πόσες λύσεις έχει η $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$;

8. Αποδείξτε ότι η $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0$ έχει είτε ακριβώς μια λύση, αν ο n είναι περιττός, είτε καμιά λύση, αν ο n είναι άρτιος.

9. Αν $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$, αποδείξτε ότι η $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0,1)$.

10. Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και $f'(x) \neq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I.

11. Έστω $m > 0$, διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και έστω ότι υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$ και $|f(x_2) - f(x_1)| = d$.
(i) Αν $|f'(x)| \geq m$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I, αποδείξτε ότι $|x_2 - x_1| \leq \frac{d}{m}$.
(ii) Αν $|f'(x)| \leq m$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I, αποδείξτε ότι $|x_2 - x_1| \geq \frac{d}{m}$.

12. Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο στο (a,b) και $f(a) = f(b) = 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε λ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

13. (i) Έστω διάστημα I, $f, g : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο I και $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε δυο οποιεσδήποτε λύσεις της $f(x) = 0$ βρίσκεται τουλάχιστον μια λύση της $g(x) = 0$ και αντιστρόφως.
Υπόδειξη: Έστω $a, b \in I$, $a < b$ και $f(a) = f(b) = 0$. Υποθέστε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Μπορεί να είναι $g(a) = 0$ ή $g(b) = 0$; Κατόπιν, θεωρήστε την $\frac{f}{g} : [a,b] \to \mathbb{R}$ και καταλήξτε σε άτοπο.
(ii) Ταιριάζει το συμπέρασμα του (i) με το ζευγάρι των $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

14. (i) Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και αν $f'(a) < 0 < f'(b)$, αποδείξτε ότι οποιοδήποτε σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο $[a,b]$ (την ύπαρξη ενός τέτοιου εγγυάται το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής) ανήκει οπωσδήποτε στο (a,b). Ποιο είναι το συμπέρασμα αν $f'(a) > 0 > f'(b)$;
(ii) Αποδείξτε το **Θεώρημα του Darboux**: *Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει παράγωγο στο $[a,b]$ και $f'(a) < \lambda < f'(b)$ ή $f'(a) > \lambda > f'(b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi) = \lambda$.*

Το αποτέλεσμα αυτό είναι κάτι σαν "θεώρημα ενδιάμεσης τιμής" για την παράγωγο χωρίς, όμως, να προϋποτίθεται η συνέχεια της παραγώγου.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το αποτέλεσμα του (i) στην $g(x) = f(x) - \lambda x$.
(iii) Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο I. Αν η f' είναι μονότονη στο I, αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο I.

15. Έστω $f : [\xi - h, \xi + h] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\xi - h, \xi + h]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi - h, \xi) \cup (\xi, \xi + h)$.
(i) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\zeta \in (0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) + f'(\xi - \zeta)$.
(ii) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\zeta \in (0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) - f'(\xi - \zeta)$.

16. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x + \sqrt{x}) - f(x)) = 0$.

17. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x + 1) - f(x)) = 0$.

18. Έστω $f : [\xi, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\xi, b)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, b). Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f'(x)$, αποδείξτε ότι υπάρχει και η $f'_+(\xi)$ και είναι ίση με την τιμή του ορίου. Ποιο είναι το ανάλογο αποτέλεσμα για το $\lim_{x\to\xi-} f'(x)$ και την $f'_-(\xi)$;

19. Έστω $M \geq 0$, διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι, αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στο I, τότε η $\big(f(x_n)\big)$ είναι ακολουθία Cauchy.

20. (i) **Κριτήριο ομοιόμορφης συνέχειας**. Έστω $M \geq 0$, διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.
(ii) Εφαρμόζεται το προηγούμενο κριτήριο στη συνάρτηση $\sqrt{x}$ στο διάστημα $[0, 1]$; Είναι η συνάρτηση αυτή ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1]$; Τι γίνεται με τα διαστήματα $(0, 1]$ και $[1, +\infty)$;

21. Έστω $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $M \geq 0$ και $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b)$.
(i) Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to b} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός.
(ii) Αποδείξτε ότι υπάρχει $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ ώστε $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b)$.
Τι γίνεται αν έχουμε διάστημα $(a, b]$ ή (a, b) αντί $[a, b)$.

22. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι η f' είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(y)\right| < \varepsilon$ για κάθε $x, y \in [a, b]$, $0 < |x - y| < \delta_0$.

23. (i) Αποδείξτε την **Γενίκευση του Θεωρήματος του Rolle**: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$, $f(a) = f(b)$ και έστω ότι οι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε είτε $f'_-(\xi) \leq 0 \leq f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq 0 \leq f'_-(\xi)$.
(ii) Αποδείξτε την **Γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής**: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και έστω ότι οι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε είτε $f'_-(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_-(\xi)$.

5.6 Εφαρμογές.

Έστω διάστημα I οποιουδήποτε τύπου. Το διάστημα το οποίο προκύπτει αν από το I αφαιρέσουμε τα άκρα του - όποια ανήκουν στο I - δηλαδή το σύνολο των εσωτερικών σημείων του I, ονομάζεται **εσωτερικό του** I.

5.6.1 Ακρότατα και μονοτονία.

Η Πρόταση 5.6 λέει - το καθόλου προφανές - ότι, αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα είναι οριζόντιες, τότε το γράφημα της συνάρτησης είναι οριζόντιο, δηλαδή η συνάρτηση είναι σταθερή. Επίσης, λέει ότι αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα έχουν μη-αρνητική (μη-θετική) κλίση, τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα (φθίνουσα).

Πρόταση 5.6. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*
(1) Η f είναι σταθερή αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
(2) Η f είναι αύξουσα αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
(3) Η f είναι φθίνουσα αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.

Απόδειξη. (1) Αν η f είναι σταθερή, γνωρίζουμε ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
Αντιστρόφως, έστω $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, όπου κάποιος από τους x_1, x_2 μπορεί να είναι άκρο του I. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ και, επομένως, ξ στο εσωτερικό του I, ώστε

$$\tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) = 0.$$

Άρα $f(x_1) = f(x_2)$. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι τιμές της f είναι ίσες μεταξύ τους, οπότε η f είναι σταθερή.
(2) Αν η f είναι αύξουσα, τότε, όπως αποδείξαμε πριν από τον Κανόνα Αντίστροφης Συνάρτησης, ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
Αντιστρόφως, έστω $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Όπως πριν, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ και, επομένως, ξ στο εσωτερικό του I, ώστε

$$\tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0.$$

Άρα $f(x_1) \leq f(x_2)$ και, επομένως, η f είναι αύξουσα.
(3) Όπως στο (2). □

Πριν από την Πρόταση 5.6 είπαμε ότι τα συμπεράσματά της δεν είναι προφανή. Ας πούμε δυο λόγια γι αυτό. Αν γνωρίζουμε ότι η f είναι σταθερή στο διάστημα I, τότε το γράφημά της είναι οριζόντιο και, επομένως, είναι σαφές ότι οι εφαπτόμενες ευθείες στα διάφορα σημεία του είναι όλες οριζόντιες, δηλαδή οι κλίσεις τους είναι όλες 0. Βλέπουμε ότι, γνωρίζοντας την συνάρτηση, έχουμε άμεση και απτή πληροφορία για τις κλίσεις της. Όμως, το αντίστροφο δεν είναι απολύτως σαφές. Αν γνωρίζουμε ότι οι εφαπτόμενες ευθείες στα διάφορα σημεία του γραφήματος της συνάρτησης είναι όλες οριζόντιες - χωρίς να έχουμε καμιά άλλη πληροφορία για την ίδια τη συνάρτηση - δεν είναι τόσο ξεκάθαρο ότι το γράφημά της είναι οριζόντιο. Είναι μεν αναμενόμενο αλλά όχι προφανές. Η ουσία του προβλήματος είναι η εξής: μπορούμε να καθορίσουμε τις κλίσεις (δηλαδή, την παράγωγο) μιας συνάρτησης από την συνάρτηση, αλλά δεν είναι σαφής ο καθορισμός της συνάρτησης από τις κλίσεις της. Στο πρόβλημα αυτό απαντά σε πρώτη απλή μορφή το *Θεμελιώδες Θεώρημα του*

Απειροστικού Λογισμού που θα δούμε στο κεφάλαιο 7 και σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις ο κλάδος των Διαφορικών Εξισώσεων. Σε όλα αυτά η Πρόταση 5.6 παίζει ιδιαίτερο ρόλο.

Αξίζει να διατυπώσουμε μια παραλλαγή της Πρότασης 5.6. Η Πρόταση 5.7 λέει ότι, αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα έχουν θετική (αρνητική) κλίση, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα).

Πρόταση 5.7. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*
(1) Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.
(2) Αν ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη. Ίδια με την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους της Πρότασης 5.6. □

Στις Προτάσεις 5.6, 5.7 και 5.8 όταν γράφουμε $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) > 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = +\infty$. Ομοίως, όταν γράφουμε $f'(x) \leq 0$ ή $f'(x) < 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = -\infty$.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν ισχύουν τα αντίστροφα των (1), (2) της Πρότασης 5.7. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε το μόνο γενικό συμπέρασμα είναι αυτό που ισχύει επειδή η f είναι αύξουσα, δηλαδή $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει αν η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης, στις Προτάσεις 5.6 και 5.7 οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα ισχύουν σε διάστημα. Αν οι υποθέσεις ισχύουν σε ενώσεις διαστημάτων, τότε τα συμπεράσματα μπορεί να μην ισχύουν κι αυτά στις ενώσεις διαστημάτων.

Παραδείγματα. (1) Η p_3 είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι σωστό ότι ισχύει ${p_3}'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, είναι ${p_3}'(x) = 3x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ αλλά ${p_3}'(0) = 0$.
(2) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά η f *δεν* είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι σταθερή -1 στο *διάστημα* $(-\infty, 0)$ και σταθερή 1 στο *διάστημα* $(0, +\infty)$.
(3) Είναι ${p_{-1}}'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Όμως η p_{-1} *δεν* είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο *διάστημα* $(-\infty, 0)$ και στο *διάστημα* $(0, +\infty)$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι χρήσιμο για την αναγνώριση των σημείων τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης.

Πρόταση 5.8. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $(a, b) \subseteq A$, $a < \xi < b$ και έστω ότι η f είναι συνεχής στο (a, b).*
(1) Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.
(2) Αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.

Απόδειξη. (1) Η f είναι αύξουσα στο $(a, \xi]$ και φθίνουσα στο $[\xi, b)$, οπότε ο $f(\xi)$ είναι η μέγιστη τιμή της στο διάστημα (a, b).
(2) Ομοίως. □

Παρατηρήστε ότι, στην Πρόταση 5.8, δε χρειάζεται να έχει παράγωγο η f στον ξ; αρκεί μόνο να είναι συνεχής στον ξ.

Ιδού μια συνηθισμένη περίπτωση εφαρμογής της Πρότασης 5.8. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα και έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ στα οποία περιλαμβάνονται τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος ώστε σε καθένα από τα ενδιάμεσα ανοικτά υποδιαστήματα η f' έχει σταθερό πρόσημο. Τότε (i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος είναι σημεία τοπικού ακροτάτου, (ii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η f' έχει διαφορετικό πρόσημο είναι σημείο τοπικού ακροτάτου και (iii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η f' έχει ίδιο πρόσημο δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παραδείγματα. (1) Ένα από τα παραδείγματα της ενότητας 5.5. Η $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^3-9x^2+12x+5$ είναι συνεχής στο $[0,4]$ και είναι $f'(x) = 6x^2-18x+12 = 6(x-1)(x-2)$ για κάθε $x \in (0,4)$. Ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και κάθε $x \in (2,4)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και στο $[2,4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ και, επομένως, οι 0, 2 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της f και οι 1, 4 σημεία τοπικού μεγίστου.
(2) Η συνάρτηση $f(x) = x^4(x-1)^4$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επίσης, $f'(x) = 4x^3(x-1)^4+4x^4(x-1)^3 = 8x^3(x-1)^3(x-\frac{1}{2})$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,\frac{1}{2})$ και κάθε $x \in (1,+\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)$ και κάθε $x \in (\frac{1}{2},1)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[0,\frac{1}{2}]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,0]$, $[\frac{1}{2},1]$. Επομένως, οι 0, 1 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και ο $\frac{1}{2}$ σημείο τοπικού μεγίστου. Είναι $f(0) = f(1) = 0$ και, επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε x, οι 0, 1 είναι σημεία ολικού ελαχίστου. Ο $\frac{1}{2}$ δεν είναι σημείο ολικού μεγίστου, διότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.
(3) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Επίσης, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty,-1)$ και κάθε $x \in (1,+\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$ και κάθε $x \in (0,1)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-1,0)$, $(0,1]$ και, επομένως, ο -1 είναι σημείο τοπικού μεγίστου και ο 1 σημείο τοπικού ελαχίστου. Μάλιστα, ο -1 είναι σημείο ολικού μεγίστου για το διάστημα $(-\infty,0)$ και ο 1 είναι σημείο ολικού ελαχίστου για το διάστημα $(0,+\infty)$.
(4) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ x-2, & \text{αν } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ και είναι $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $x \in (2,3)$ και $f'(x) = -1$ για κάθε $x \in (1,2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[0,1]$, $[2,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$. Επομένως, οι 0, 2 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και οι $1,3$ σημεία τοπικού μεγίστου. Επειδή $f(0) = f(2) = 0$, $f(1) = f(3) = 1$ και $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,3]$, τα $0,2$ είναι σημεία ολικού ελαχίστου και τα $1,3$ σημεία ολικού μεγίστου.
Παρεμπιπτόντως, η f δεν έχει παράγωγο στους 1 και 2.

5.6.2 Ισότητες, ανισότητες.

Με τη βοήθεια των Θεωρημάτων Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού ή των Προτάσεων 5.6 και 5.7 αποδεικνύονται διάφορες ισότητες και ανισότητες με μεταβλητές σε διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Παραδείγματα. (1) Χρησιμοποιώντας τις παραγώγους $\cos' x = -\sin x$ και $\sin' x = \cos x$ θα αποδείξουμε ότι είναι $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ για κάθε x.
Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 .$$
Είναι
$$f'(x) = -2\cos x \sin x + 2\sin x \cos x = 0$$
για κάθε x. Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι
$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = (\cos 0)^2 + (\sin 0)^2 = 1$$
για κάθε x.

(2) Θα αποδείξουμε ότι είναι $e^x > x+1$ για κάθε $x \neq 0$.
Πρώτη απόδειξη: Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

Έστω $x > 0$. Υπάρχει $\xi \in (0, x)$ ώστε

$$\tfrac{e^x - x - 1}{x} = \tfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) = e^\xi - 1.$$

Επειδή $\xi > 0$, συνεπάγεται $e^\xi - 1 > 0$ και, επομένως, $e^x - x - 1 > 0$. Κατόπιν, έστω $x < 0$. Υπάρχει $\xi \in (x, 0)$ ώστε

$$\tfrac{e^x - x - 1}{x} = \tfrac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(\xi) = e^\xi - 1.$$

Επειδή $\xi < 0$, συνεπάγεται $e^\xi - 1 < 0$, οπότε, και πάλι, $e^x - x - 1 > 0$. Άρα για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $e^x > x + 1$.
Δεύτερη απόδειξη: Έστω η ίδια f. Είναι $f'(x) = e^x - 1 > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f'(x) = e^x - 1 < 0$ για κάθε $x < 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Άρα

$$e^x - x - 1 = f(x) > f(0) = 0$$

για κάθε $x \neq 0$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικού και ολικού ακροτάτου των συναρτήσεων $x^2 - x - 1$, $x^3 - 15x^2 + 72x + 7$, $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 3}$, $\frac{\sqrt{x}}{x + 4}$, $x^2 e^{-x}$, $\sin x - \cos x$, $\frac{\sin(3x)}{3} - \cos x$, $x + \sin x$, $x + |\sin x|$, $\frac{\log x}{x}$, $|x| e^{-|x-1|}$, $\arctan x - \log(1 + x^2)$.

2. Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου
   (i) της συνάρτησης $(x - 1)|x|$ στο $[-1, 3]$.
   (ii) της $|x^2 - 3x + 2|$ στο $[-3, 10]$.
   (iii) της $\frac{(\log x)^2}{x}$ στο $[1, 3]$.
   (iv) της $x + \frac{1}{x}$ στο $[\frac{1}{3}, 3]$.
   (v) της $e^x \sin x$ στο $[0, 2\pi]$.

3. Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου των συναρτήσεων $(x - a_1)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$, $|x - a_1| + \cdots + |x - a_n|$.

4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $(1 + \frac{1}{x})^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

5. Βρείτε την τιμή του $a > 0$ για την οποία η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $x^a e^{2a - x}$ στο $[0, +\infty)$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

6. (i) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $f'(\xi) > 0$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $f'(\xi)$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ κοντά στον ξ από δεξιά του και $f(x) < f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ κοντά στον ξ από αριστερά του. Μπορεί να είναι ο ξ σημείο τοπικού ακροτάτου της f; Τι γίνεται αν $f'(\xi) < 0$;
   (ii) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0) = 1$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένας $a > 0$ ώστε η f να είναι αύξουσα στο διάστημα $(-a, a)$.

7. (i) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι Hölder συνεχής στον ξ με εκθέτη Hölder $\rho > 1$ (δείτε την άσκηση 11 της ενότητας 4.1). Αποδείξτε ότι $f'(\xi) = 0$.
(ii) Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι η f είναι Hölder συνεχής στο I με εκθέτη Hölder $\rho > 1$ (δείτε την άσκηση 3 της ενότητας 4.6). Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I.

8. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I. Αν κανένα εσωτερικό σημείο του I δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

9. Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και $f'(x) \neq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Από την άσκηση 10 της ενότητας 5.5 γνωρίζουμε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.
Υπόδειξη: Πρώτος τρόπος: Δείτε την άσκηση 18 της ενότητας 4.4. *Δεύτερος τρόπος:* Από το Θεώρημα του Fermat και την υπόθεση, αποδείξτε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ τα μοναδικά σημεία μεγίστου και ελαχίστου της f στο $[x_1, x_2]$ είναι τα x_1, x_2. *Τρίτος τρόπος:* Συνέπεια του (ii) που ακολουθεί.
(ii) Αποδείξτε ότι είτε $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I είτε $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
Υπόδειξη: Πρώτος τρόπος: Συνέπεια του (i). *Δεύτερος τρόπος:* Δείτε την άσκηση 14 της ενότητας 5.5.

10. (i) Έστω $f, g : [0, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[0, b]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, b)$, $f(0) = g(0) = 0$ και $f'(x), g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, b)$. Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0, b)$, αποδείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0, b]$.
(ii) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\frac{x}{\sin x}$, $\frac{(1/2)x^2}{1-\cos x}$, $\frac{(1/6)x^3}{x-\sin x}$, $\cdots$ είναι αύξουσες στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

11. (i) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. Αποδείξτε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αποδείξτε ότι $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.
(ii) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Αποδείξτε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x > 0$ και $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ για κάθε $x < 0$.

12. Έστω $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο (a, b), $a < 0 < b$. Έστω, επίσης, $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Γνωρίζετε κάποιο ζευγάρι τέτοιων συναρτήσεων;
(i) Αποδείξτε ότι $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in (a, b)$.
(ii) Αν οι F, G έχουν τις ίδιες ιδιότητες, αποδείξτε ότι $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση $(F(x) - f(x))^2 + (G(x) - g(x))^2$.

13. Αποδείξτε ότι:
(i) $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
(ii) $\log \frac{1+x}{1-x} > 2x + \frac{2x^3}{3}$ για κάθε $x \in (0, 1)$.
(iii) $\log \frac{1+x}{1-x} < 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2}$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2}]$.
(iv) $e^{\frac{x}{x+1}} < 1 + x$ για κάθε $x > -1$.
(v) $x > \arctan x > x - \frac{x^3}{3}$ για κάθε $x > 0$.

14. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b).
(i) Αν $f'(x) \geq \mu$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι $f(a) + \mu(x - a) \leq f(x) \leq f(b) + \mu(x - b)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
(ii) Αν $f'(x) \leq \mu$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι $f(b) + \mu(x - b) \leq f(x) \leq f(a) + \mu(x - a)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

15. Έστω $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1, 4]$, $f(1) = -7$ και $f'(x) \geq 3$ για κάθε $x \in (1, 4)$. Αποδείξτε ότι $f(4) \geq 2$. Για κάθε $\mu \geq 2$ βρείτε συγκεκριμένη f με όλες τις παραπάνω ιδιότητες ώστε $f(4) = \mu$.

16. (i) Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι είτε $ax^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y - x} < ay^{a-1}$, αν $a > 1$, είτε $ay^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y - x} < ax^{a-1}$, αν $0 < a < 1$.
(ii) Έστω $x < y$, $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $a^x \log a < \frac{a^y - a^x}{y - x} < a^y \log a$.
(iii) Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{y} < \frac{1}{y - x} \log(\frac{y}{x}) < \frac{1}{x}$.
(iv) Αποδείξτε ότι $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.

17. Αποδείξτε ότι $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!}$, $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$, $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ για κάθε $x \geq 0$. Ποια είναι η γενική μορφή αυτών των ανισοτήτων; Κατόπιν, αποδείξτε ότι για $x \leq 0$ ισχύει η πρώτη, η τρίτη, η πέμπτη κλπ ανισότητα καθώς και η αντίστροφη της δεύτερης, της τέταρτης κλπ ανισότητας.

18. (i) Αποδείξτε ότι $\sin x \leq \frac{x}{1!}$, $\sin x \geq \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}$, $\sin x \leq \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ για κάθε $x \geq 0$ και ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται για $x \leq 0$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}$, $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$ για κάθε x. Ποια είναι η γενική μορφή αυτών των ανισοτήτων;

19. Έστω $M \geq 0$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$, $f(a) = 0$ και $|f'(x)| \leq M|f(x)|$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

20. (i) Έστω $a_1, \ldots, a_n > 0$ και η $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{a_1 + \cdots + a_n + x}{(n+1)\sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n x}}$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή και όλα τα σημεία ολικού ελαχίστου της f.
(ii) Αποδείξτε την **Ανισότητα του Cauchy**: Αν $a_1, \ldots, a_n > 0$, τότε

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το (i) και την αρχή της επαγωγής.

21. Έστω $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \mu_1, \ldots, \mu_n > 0$ και $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$. Επίσης, έστω $0 < t < 1$ και $a, b > 0$.
(i) Αποδείξτε την **Ανισότητα του Young**:

$$a^{1-t} b^t \leq (1 - t)a + tb$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν $a = b$.
Υπόδειξη: Μελετήστε την $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^t - tx + t$ και θεωρήστε $x = \frac{b}{a}$.
(ii) Αποδείξτε την **Ανισότητα του Hölder**:

$$a_1{}^{1-t} b_1{}^t + \cdots + a_n{}^{1-t} b_n{}^t \leq \big(a_1 + \cdots + a_n\big)^{1-t} \big(b_1 + \cdots + b_n\big)^t$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν $\frac{a_k}{A}=\frac{b_k}{B}$ για κάθε k, όπου $A=a_1+\cdots+a_n$ και $B=b_1+\cdots+b_n$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε την ανισότητα του Young σε κάθε ζεύγος $\frac{a_k}{A}$, $\frac{b_k}{B}$.
(iii) Αποδείξτε ότι η $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(\mu_1{a_1}^x+\cdots+\mu_n{a_n}^x)^{\frac{1}{x}}$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε κατάλληλα την ανισότητα του Hölder.
(iv) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0}(\mu_1{a_1}^x+\cdots+\mu_n{a_n}^x)^{\frac{1}{x}}={a_1}^{\mu_1}\cdots{a_n}^{\mu_n}\,.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g(x)=\mu_1{a_1}^x+\cdots+\mu_n{a_n}^x$ και γράψτε $\log(g(x))^{\frac{1}{x}}=\frac{\log g(x)}{g(x)-1}\frac{g(x)-1}{x}$.
(v) Αν $x<0<x'$, αποδείξτε ότι

$$(\mu_1{a_1}^x+\cdots+\mu_n{a_n}^x)^{\frac{1}{x}}\le{a_1}^{\mu_1}\cdots{a_n}^{\mu_n}\le(\mu_1{a_1}^{x'}+\cdots+\mu_n{a_n}^{x'})^{\frac{1}{x'}}\,.$$

Δείτε ότι η ανισότητα του Cauchy της άσκησης 20 είναι ειδική περίπτωση.

5.7 Δεύτερη παράγωγος και εφαρμογές.

Ορισμός. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $B=\{x\in A\,|\,f'(x)\in\mathbb{R}\}$. Όπως έχουμε ήδη πει, ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $f':B\to\mathbb{R}$. Θεωρούμε, τώρα, $\xi\in B$ σημείο συσσώρευσης του B και εξετάζουμε αν υπάρχει η $(f')'(\xi)$, δηλαδή το όριο $\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$. Αν υπάρχει η $(f')'(\xi)$ τη συμβολίζουμε, πιο απλά,

$$f''(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}\,,$$

και την ονομάζουμε **δεύτερη παράγωγο της f στον** ξ.
Ομοίως, ορίζεται η τρίτη παράγωγος ως η πρώτη παράγωγος της δεύτερης παραγώγου και, επαγωγικά, μπορούμε να ορίσουμε την n-οστή παράγωγο ως την πρώτη παράγωγο της $(n-1)$-οστής παραγώγου. Η πρώτη παράγωγος της f στον ξ συμβολίζεται και $f^{(1)}(\xi)$ και η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται και $f^{(2)}(\xi)$. Για την τρίτη παράγωγο χρησιμοποιούμε και τα δυο σύμβολα $f'''(\xi)$, $f^{(3)}(\xi)$ και για μεγαλύτερης τάξης παραγώγους χρησιμοποιούμε το σύμβολο $f^{(n)}(\xi)$.

Τονίζουμε ότι, βάσει του ορισμού, η n-οστή παράγωγος της f στον ξ είναι το όριο

$$f^{(n)}(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(\xi)}{x-\xi}\,.$$

Τέλος, αναφέρουμε ότι μερικές φορές το $f(\xi)$ συμβολίζεται $f^{(0)}(\xi)$.

Παραδείγματα. (1) Αν $n\in\mathbb{N}$, τότε οι παράγωγοι συναρτήσεις της p_n είναι: ${p_n}^{(1)}=np_{n-1}$, ${p_n}^{(2)}=n(n-1)p_{n-2}$, ${p_n}^{(3)}=n(n-1)(n-2)p_{n-3}$, $\ldots$, ${p_n}^{(n-1)}=n(n-1)\cdots 2p_1$ και ${p_n}^{(n)}=n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$. Επειδή η ${p_n}^{(n)}$ είναι σταθερή, κάθε παράγωγος μεγαλύτερης τάξης είναι σταθερή 0, δηλαδή ${p_n}^{(m)}=0$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$, $m>n$.
(2) Αν $a\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$, οι παράγωγοι συναρτήσεις της p_a είναι: ${p_a}^{(1)}=ap_{a-1}$, ${p_a}^{(2)}=a(a-1)p_{a-2}$ και, γενικά,

$${p_a}^{(m)}=a(a-1)\cdots(a-m+1)p_{a-m}\qquad(m\in\mathbb{N}).$$

Παρατηρήστε ότι ο συντελεστής της p_{a-m} είναι $\neq 0$ και, επομένως, καμιά παράγωγος συνάρτηση δεν είναι σταθερή 0.

(3) Αν $a > 0$, οι παράγωγοι συναρτήσεις της exp_a είναι ${\mathrm{exp}_a}^{(1)} = \log a\ \mathrm{exp}_a$, ${\mathrm{exp}_a}^{(2)} = (\log a)^2\,\mathrm{exp}_a$ και, γενικά,

$${\mathrm{exp}_a}^{(m)} = (\log a)^m\,\mathrm{exp}_a \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Ειδικότερα: $\mathrm{exp}^{(m)} = \mathrm{exp}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

(4) Οι παράγωγοι συναρτήσεις της sin είναι: $\sin^{(1)} = \cos$, $\sin^{(2)} = -\sin$, $\sin^{(3)} = -\cos$, $\sin^{(4)} = \sin$. Από το σημείο αυτό και πέρα οι διαδοχικές παράγωγοι συναρτήσεις επαναλαμβάνουν τον "κύκλο": $\sin$, $\cos$, $-\sin$, $-\cos$. Μπορούμε, επίσης, να γράψουμε

$$\sin^{(2k)} = (-1)^k \sin, \quad \sin^{(2k-1)} = (-1)^{k-1}\cos \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ομοίως,

$$\cos^{(2k)} = (-1)^k \cos, \quad \cos^{(2k-1)} = (-1)^k \sin \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Υπάρχει και εναλλακτικό σύμβολο με απειροστά για τις παραγώγους ανώτερης τάξης:

$$\frac{d^n y}{dx^n}\,.$$

Θα αιτιολογήσουμε αυτό το σύμβολο στην περίπτωση της δεύτερης παραγώγου. Στην άσκηση $11(iii)$ της ενότητας 5.8 εμφανίζεται το όριο

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{f(\xi+2h)-2f(\xi+h)+f(\xi)}{h^2} = f''(\xi).$$

Αν γράψουμε $y = f(\xi+h)$, $\eta = f(\xi)$ και $\Delta x = h$, τότε είναι $\Delta y = y - \eta = f(\xi+h) - f(\xi)$. Τώρα, εκτός από τη διαφορά $f(\xi+h) - f(\xi)$ θεωρούμε και την ίδια διαφορά αλλά στον $\xi + h$ αντί στον ξ, δηλαδή την $f(\xi+2h) - f(\xi+h)$. Για να καταλάβουμε καλύτερα την κατάσταση, ας θέσουμε

$$g(\xi) = f(\xi+h) - f(\xi) = (\Delta y)(\xi).$$

Τότε είναι

$$g(\xi+h) = f(\xi+2h) - f(\xi+h) = (\Delta y)(\xi+h)$$

και μπορούμε να γράψουμε

$$f(\xi+2h) - 2f(\xi+h) + f(\xi) = g(\xi+h) - g(\xi) = (\Delta y)(\xi+h) - (\Delta y)(\xi) = \Delta(\Delta y).$$

Δηλαδή η παράσταση $f(\xi+2h) - 2f(\xi+h) + f(\xi)$ προκύπτει από δυο διαδοχικές εφαρμογές της "πράξης" της διαφοράς. Γι αυτό η παράσταση αυτή ονομάζεται **δεύτερη διαφορά** της f και συμβολίζεται, $\Delta(\Delta y)$ ή, πιο σύντομα, $\Delta^2 y$. Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε το παραπάνω όριο ως εξής:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = f''(\xi).$$

Από αυτό το όριο προκύπτει το σύμβολο

$$\tfrac{d^2 y}{dx^2} = f''(\xi),$$

όπως από το $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi)$ προκύπτει το $\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$.

Θα δούμε τώρα μερικές εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου.

5.7.1 Τοπικά ακρότατα.

Η πρώτη εφαρμογή είναι ένα απλό κριτήριο τοπικού ακροτάτου.

Πρόταση 5.9. *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$, έστω ότι η f είναι συνεχής και έχει παράγωγο στο I και έστω ότι υπάρχει η $f''(\xi)$ σε κάποιον ξ στο εσωτερικό του I.*
(1) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.
(2) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.

Απόδειξη. (1) Επειδή ο ξ είναι στο εσωτερικό του I, υπάρχει $\delta_0{}' > 0$ ώστε $(\xi - \delta_0{}', \xi + \delta_0{}') \subseteq I$. Επίσης, επειδή $f''(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$, ισχύει

$$\tfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} > 0$$

κοντά στον ξ, οπότε υπάρχει $\delta_0{}'' > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} > 0$ για κάθε $x \in I$, $0 < |x - \xi| < \delta_0{}''$. Ορίζουμε $\delta_0 = \min\{\delta_0{}', \delta_0{}''\}$. Τότε είναι $\delta_0 \leq \delta_0{}'$ και $\delta_0 \leq \delta_0{}''$. Άρα $(\xi - \delta_0, \xi + \delta_0) \subseteq I$ και ισχύει $\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} > 0$ για κάθε $x \in I$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$ και, επομένως, ισχύει $\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} > 0$ για κάθε $x \in (\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0)$.
Άρα ισχύει $f'(x) < f'(\xi) = 0$ για κάθε $x \in (\xi-\delta_0, \xi)$ και $f'(x) > f'(\xi) = 0$ για κάθε $x \in (\xi, \xi+\delta_0)$.
Η f είναι συνεχής στο $(\xi - \delta_0, \xi]$ και στο $[\xi, \xi + \delta_0)$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\xi - \delta_0, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, \xi + \delta_0)$. Άρα ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.
(2) Ομοίως. □

Μια γενίκευση της Πρότασης 5.9 υπάρχει στην άσκηση 10 της ενότητας 5.8.

Παραδείγματα. (1) Είναι $p_2{}'(0) = 0$, $p_2{}''(0) = 2$. Άρα ο 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της p_2.
(2) Είναι $p_4{}'(0) = 0$, $p_4{}''(0) = 0$. Όμως, ο 0 *είναι* σημείο τοπικού ελαχίστου της p_4. Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 5.9.

5.7.2 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις.

Ορισμός. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **κυρτή στο** I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει

$$f((1 - t)x_1 + tx_2) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Αν η ανισότητα αυτή είναι γνήσια, τότε η f χαρακτηρίζεται **γνησίως κυρτή στο** I.
Ομοίως, η f χαρακτηρίζεται **κοίλη στο** I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει

$$f((1 - t)x_1 + tx_2) \geq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Και, αν αυτή η ανισότητα είναι γνήσια, τότε η f χαρακτηρίζεται **γνησίως κοίλη στο** I.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $\mu x + \nu$ είναι κυρτή και κοίλη στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, ισχύει

$$\mu((1 - t)x_1 + tx_2) + \nu = (1 - t)(\mu x_1 + \nu) + t(\mu x_2 + \nu)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ και κάθε $t \in (0, 1)$.
(2) Η συνάρτηση x^2 είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Διότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ και κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει

$$\begin{aligned}((1 - t)x_1 + tx_2)^2 &= (1 - t)^2x_1^2 + 2t(1 - t)x_1x_2 + t^2x_2^2 \\ &< (1 - t)^2x_1^2 + t(1 - t)(x_1^2 + x_2^2) + t^2x_2^2 = (1 - t)x_1^2 + tx_2^2 .\end{aligned}$$

(3) Η συνάρτηση $|x|$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Διότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ και κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει

$$|(1-t)x_1 + tx_2| \leq |(1-t)x_1| + |tx_2| = (1-t)|x_1| + t|x_2|.$$

Θα δούμε ότι η ανισότητα $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ γράφεται με έναν διαφορετικό - αλλά ισοδύναμο - τρόπο.

Έστω $x_1 < x_2$ και $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ για κάθε $t \in (0,1)$. Για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ ορίζουμε

$$t = \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\,,$$

οπότε $t \in (0,1)$, $1-t = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}$ και $(1-t)x_1 + tx_2 = x$. Άρα

$$f(x) = f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) = \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

Αντιστρόφως, έστω $f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Για κάθε $t \in (0,1)$ ορίζουμε

$$x = (1-t)x_1 + tx_2\,,$$

οπότε $x \in (x_1, x_2)$, $\frac{x_2-x}{x_2-x_1} = 1-t$ και $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = t$. Άρα

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = f(x) \leq \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και κάθε $x \in (x_1, x_2)$ ισχύει

$$f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως κυρτή στο διάστημα I αν και μόνο αν ισχύει η ίδια ανισότητα ως γνήσια ανισότητα.

Ομοίως, η f είναι κοίλη στο διάστημα I αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και κάθε $x \in (x_1, x_2)$ ισχύει

$$f(x) \geq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

Και η f είναι γνησίως κοίλη στο διάστημα I αν και μόνο αν ισχύει η ίδια ανισότητα ως γνήσια ανισότητα.

Από αυτές τις ανισότητες προκύπτει το γεωμετρικό περιεχόμενο των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας συναρτήσεων. Παρατηρήστε ότι η

$$y = \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) = \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x + \tfrac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_2-x_1}$$

είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Επομένως, το ότι η f είναι κυρτή (κοίλη) στο διάστημα I σημαίνει ότι για κάθε $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της f που είναι ανάμεσα στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται κάτω (πάνω) από ή επί του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα αυτά τα δυο σημεία. Το ότι η f είναι γνησίως κυρτή (κοίλη) στο διάστημα I σημαίνει ότι για κάθε $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της f που είναι ανάμεσα στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται κάτω (πάνω) από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα αυτά τα δυο σημεία.

Πρόταση 5.10. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή ή κοίλη στο I. Τότε η f είναι συνεχής στο εσωτερικό του I.*

Απόδειξη. Έστω ξ στο εσωτερικό του I, οπότε υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $a < \xi < b$. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I.
Έστω $x \in (a, \xi)$. Τότε είναι

$$f(x) \leq \tfrac{\xi-x}{\xi-a} f(a) + \tfrac{x-a}{\xi-a} f(\xi), \qquad f(\xi) \leq \tfrac{b-\xi}{b-x} f(x) + \tfrac{\xi-x}{b-x} f(b).$$

Συνεπάγεται

$$\tfrac{b-x}{b-\xi} f(\xi) + \tfrac{x-\xi}{b-\xi} f(b) \leq f(x) \leq \tfrac{\xi-x}{\xi-a} f(a) + \tfrac{x-a}{\xi-a} f(\xi).$$

Με παρεμβολή, συνεπάγεται $\lim_{x \to \xi-} f(x) = f(\xi)$.
Έστω $x \in (\xi, b)$. Τότε είναι

$$f(x) \leq \tfrac{b-x}{b-\xi} f(\xi) + \tfrac{x-\xi}{b-\xi} f(b), \qquad f(\xi) \leq \tfrac{x-\xi}{x-a} f(a) + \tfrac{\xi-a}{x-a} f(x).$$

Συνεπάγεται

$$\tfrac{\xi-x}{\xi-a} f(a) + \tfrac{x-a}{\xi-a} f(\xi) \leq f(x) \leq \tfrac{b-x}{b-\xi} f(\xi) + \tfrac{x-\xi}{b-\xi} f(b).$$

Με παρεμβολή, συνεπάγεται $\lim_{x \to \xi+} f(x) = f(\xi)$.
Άρα $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$ και η f είναι συνεχής στον ξ.
Η απόδειξη είναι ίδια αν η f είναι κοίλη στο I. □

Πρόταση 5.11. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$*
(1) Αν η f είναι κυρτή στο I, τότε (i) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή αριστερό άκρο του I υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και ισχύει $f'_+(\xi) \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$ και (ii) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή δεξιό άκρο του I υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'_-(\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x < \xi$.
Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε οι δυο παραπάνω ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες.
Τέλος, είναι $-\infty < f'_-(\xi) \leq f'_+(\xi) < +\infty$ για κάθε ξ στο εσωτερικό του I.
(2) Αν η f είναι κοίλη στο I, τότε (i) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή αριστερό άκρο του I υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και ισχύει $f'_+(\xi) \geq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$ και (ii) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή δεξιό άκρο του I υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq f'_-(\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x < \xi$.
Αν η f είναι γνησίως κοίλη στο I, τότε οι δυο παραπάνω ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες.
Τέλος, είναι $-\infty < f'_+(\xi) \leq f'_-(\xi) < +\infty$ για κάθε ξ στο εσωτερικό του I.

Απόδειξη. (1) Έστω f κυρτή στο I.
Έστω ξ εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $\xi < x_1 < x_2$. Τότε $f(x_1) \leq \frac{x_2-x_1}{x_2-\xi} f(\xi) + \frac{x_1-\xi}{x_2-\xi} f(x_2)$ και, επομένως,

$$\tfrac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi} \leq \tfrac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}\,.$$

Άρα η συνάρτηση $h : \{x \in I \,|\, x > \xi\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αύξουσα. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5 και τα σχόλια μετά από αυτό, υπάρχει το

$$\lim_{x \to \xi+} h(x) = \lim_{x \to \xi+} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'_+(\xi)$$

και είναι $< +\infty$ και, επίσης, ισχύει

$$f'_+(\xi) \leq h(x) = \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

για κάθε $x \in I$, $x > \xi$.
Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε, όπως πριν, η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε ισχύει $f'_+(\xi) < h(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$.

Έστω ξ εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 < \xi$. Τότε $f(x_2) \leq \frac{\xi-x_2}{\xi-x_1}f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{\xi-x_1}f(\xi)$, οπότε

$$\frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi} \leq \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}.$$

Άρα η $g : \{x \in I \,|\, x < \xi\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αύξουσα. Επομένως, υπάρχει το

$$\lim_{x\to\xi-} g(x) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'_-(\xi)$$

και είναι $> -\infty$ και, επίσης, ισχύει

$$f'_-(\xi) \geq g(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

για κάθε $x \in I$, $x < \xi$.

Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε, όπως πριν, η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε ισχύει $f'_-(\xi) > g(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x < \xi$.

Τέλος, έστω ξ στο εσωτερικό του I. Έστω $a, b \in I$, $a < \xi < b$. Από την $f(\xi) \leq \frac{b-\xi}{b-a}f(a) + \frac{\xi-a}{b-a}f(b)$ συνεπάγεται

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{a-\xi} \leq \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}.$$

Άρα

$$f'_-(\xi) = \lim_{a\to\xi-} \frac{f(a)-f(\xi)}{a-\xi} \leq \lim_{b\to\xi+} \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi} = f'_+(\xi).$$

(2) Ομοίως. □

Παρατηρήστε μια συνέπεια της Πρότασης 5.11. Αν η f είναι κυρτή ή κοίλη στο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάποιον ξ στο εσωτερικό του I, τότε είναι $f'(\xi) \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ.

Στη συνέχεια θα δούμε δυο βασικά κριτήρια με τα οποία μπορούμε να αποφασίσουμε αν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα.

Πρόταση 5.12. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*
(1) Η f είναι (γνησίως) κυρτή στο I αν και μόνο αν η f' είναι (γνησίως) αύξουσα στο εσωτερικό του I.
(2) Η f είναι (γνησίως) κοίλη στο I αν και μόνο αν η f' είναι (γνησίως) φθίνουσα στο εσωτερικό του I.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Έστω x_1, x_2 στο εσωτερικό του I, $x_1 < x_2$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.11,

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2).$$

Άρα $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, οπότε η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I. Αν η f είναι γνησίως κυρτή, τότε οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Αντιστρόφως, έστω ότι η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και $x_1 < x < x_2$. Υπάρχουν ξ_1, ξ_2 ώστε $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$ και

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2).$$

Είναι $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, οπότε

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Άρα
$$f(x) \leq \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2).$$
Άρα η f είναι κυρτή στο I. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή.
(2) Ομοίως. $\square$

Από την Πρόταση 5.12 προκύπτει ένας ακόμη γεωμετρικός χαρακτηρισμός των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας για συναρτήσεις f οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I και παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του I. Το ότι η f είναι κυρτή (κοίλη) στο I σημαίνει ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της f σε ένα εσωτερικό του σημείο - δηλαδή όχι άκρο του - αυξάνεται (μειώνεται) όταν το σημείο επαφής κινείται προς τα δεξιά. Ομοίως, το ότι η f είναι γνησίως κυρτή (κοίλη) στο I σημαίνει ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της f σε ένα εσωτερικό του σημείο αυξάνεται (μειώνεται) γνησίως όταν το σημείο επαφής κινείται προς τα δεξιά.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2\,, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2\,, & \text{αν } 0 \leq x \end{cases}$ έχει $f'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{αν } x \leq 0 \\ 2x, & \text{αν } 0 \leq x \end{cases}$ Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Παρατηρήστε, εν όψει της Πρότασης 5.13, ότι δεν υπάρχει η $f''(0)$.
(2) Είναι ${p_n}' = np_{n-1}$ στο $\mathbb{R}$. Άρα, αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, η p_{n-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η p_n είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Βάσει της σχέσης ανάμεσα στη μονοτονία συνάρτησης και στο πρόσημο της παραγώγου της, έχουμε την εξής παραλλαγή της Πρότασης 5.12.

Πρόταση 5.13. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει δεύτερη παράγωγο στο εσωτερικό του I.*
(1) Η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν $f''(x) \geq 0$ στο εσωτερικό του I. Αν ισχύει $f''(x) > 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως κυρτή στο I.
(2) Η f είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν $f''(x) \leq 0$ στο εσωτερικό του I. Αν ισχύει $f''(x) < 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως κοίλη στο I.

Παραδείγματα. (1) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x(x-1)(x-2)$. Είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ και $f''(x) = 6x - 6$ για κάθε x. Άρα ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$, οπότε η f είναι γνησίως κοίλη στο $(-\infty, 1]$. Επίσης, ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή στο $[1, +\infty)$.
(2) Είναι ${p_n}'' = n(n-1)p_{n-2}$ στο $\mathbb{R}$. Άρα, αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, η p_n είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$.
(3) Είναι ${p_a}''(x) = a(a-1)x^{a-2}$ για κάθε $x > 0$. Άρα η p_a είναι είτε γνησίως κυρτή στο $(0, +\infty)$, αν $a < 0$, είτε γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$, αν $0 < a < 1$, είτε γνησίως κυρτή στο $[0, +\infty)$, αν $a > 1$.
(4) Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Η $\exp_a$ είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$ διότι ισχύει ${\exp_a}'' x = (\log a)^2 \exp_a x > 0$ για κάθε x.
(5) Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Είναι ${\log_a}'' x = -\frac{1}{x^2 \log a}$ για κάθε $x > 0$. Άρα η $\log_a$ είναι είτε γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$, αν $a > 1$, είτε γνησίως κυρτή στο $(0, +\infty)$, αν $0 < a < 1$.
(6) Η συνάρτηση x^4 είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$ διότι η παράγωγος συνάρτηση $4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Όμως, είναι λάθος ότι η δεύτερη παράγωγος συνάρτηση είναι θετική σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$: ισχύει $12x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$, αλλά $12 \cdot 0^2 = 0$.

5.7.3 Σημεία καμπής.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και ξ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο καμπής** της f αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και είτε ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από αριστερά του και $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από δεξιά του είτε, αντιθέτως, ισχύει $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από αριστερά του και $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από δεξιά του.
Αν οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, τότε ο ξ χαρακτηρίζεται **γνήσιο σημείο καμπής** της f. Επίσης, ο ξ χαρακτηρίζεται **γνήσιο σημείο καμπής** της f και στις περιπτώσεις $f'(\xi) = \pm\infty$.
Σε κάθε περίπτωση, το $(\xi, f(\xi))$ χαρακτηρίζεται **σημείο καμπής** του γραφήματος της f.

Μπορούμε να πούμε ότι το $(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής του γραφήματος της f αν κατ' αρχάς υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και κατόπιν τα μέρη του γραφήματος, τα οποία είναι κοντά στο σημείο αυτό και στις δυο διαφορετικές μεριές του, βρίσκονται το ένα στο ένα και το άλλο στο άλλο από τα δυο ημιεπίπεδα που ορίζονται από την εφαπτόμενη ευθεία.

Πρόταση 5.14. *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$, ξ στο εσωτερικό του I και $f'(\xi) \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $a < \xi < b$ και ώστε η f να είναι κυρτή στο $(a, \xi]$ και κοίλη στο $[\xi, b)$ ή, αντιθέτως, κοίλη στο $(a, \xi]$ και κυρτή στο $[\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της f.*
Αν το "κυρτή" γίνει "γνησίως κυρτή" και το "κοίλη" γίνει "γνησίως κοίλη", τότε ο ξ είναι γνήσιο σημείο καμπής.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο $(a, \xi]$ και κοίλη στο $[\xi, b)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.11, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, \xi)$. Ομοίως, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. Άρα ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. □

Εφαρμόζουμε τα διάφορα κριτήρια κυρτότητας ή κοιλότητας σε διαστήματα σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.14 για να διακρίνουμε αν κάποιος αριθμός είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης.

Πρόταση 5.15. *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$, ξ στο εσωτερικό του I και $f'(\xi) \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει είτε $f''(x) \geq 0$ κοντά στον ξ από αριστερά του και $f''(x) \leq 0$ κοντά στον ξ από δεξιά του είτε $f''(x) \leq 0$ κοντά στον ξ από αριστερά του και $f''(x) \geq 0$ κοντά στον ξ από δεξιά του, τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της f.*
Αν οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, τότε ο ξ είναι γνήσιο σημείο καμπής.

Παράδειγμα. Είναι ${p_3}'(0) = 0 \in \mathbb{R}$. Επίσης, ισχύει ${p_3}''(x) = 6x < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και ${p_3}''(x) = 6x > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Άρα ο 0 είναι γνήσιο σημείο καμπής της p_3.

5.7.4 Ευθείες στήριξης.

Ορισμός. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Μια ευθεία l χαρακτηρίζεται **ευθεία στήριξης από κάτω** του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν η l διέρχεται από το σημείο αυτό και δεν υπάρχει κανένα σημείο του γραφήματος κάτω από την l. Δηλαδή, αν $y = \mu x + \nu$ είναι η εξίσωση της l, τότε ισχύει $f(\xi) = \mu\xi + \nu$ και $f(x) \geq \mu x + \nu$ για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, ισχύει $f(x) > \mu x + \nu$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$, τότε η ευθεία στήριξης από κάτω χαρακτηρίζεται **γνήσια**.
Ομοίως, η ευθεία l χαρακτηρίζεται **ευθεία στήριξης από πάνω** του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν η l διέρχεται από το σημείο αυτό και δεν υπάρχει κανένα σημείο του γραφήματος

πάνω από την l. Δηλαδή, αν $y = \mu x + \nu$ είναι η εξίσωση της l, τότε ισχύει $f(\xi) = \mu\xi + \nu$ και $f(x) \leq \mu x + \nu$ για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, ισχύει $f(x) < \mu x + \nu$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$, τότε η ευθεία στήριξης από πάνω χαρακτηρίζεται **γνήσια**.

Βάσει της $f(\xi) = \mu\xi + \nu$ η εξίσωση της ευθείας στήριξης l γράφεται $y = \mu x + f(\xi) - \mu\xi$ ή, ισοδύναμα, $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$. Άρα μια ευθεία l είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν έχει εξίσωση $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ και για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$f(x) \geq \mu(x - \xi) + f(\xi).$$

Ομοίως, μια ευθεία l είναι ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν έχει εξίσωση $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ και για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$f(x) \leq \mu(x - \xi) + f(\xi).$$

Επομένως, το να βρούμε αν υπάρχει και ποια είναι η ευθεία στήριξης είναι το ίδιο με το να προσδιορίσουμε τον συντελεστή μ.

Πρόταση 5.16. *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$ και $\xi \in I$.*
(1) Αν η f είναι (γνησίως) κυρτή στο I, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ είναι (γνήσια) ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν και μόνο αν είτε $\mu \leq f'_+(\xi)$, αν ο ξ είναι αριστερό άκρο του I, είτε $f'_-(\xi) \leq \mu$, αν ο ξ είναι δεξιό άκρο του I, είτε $f'_-(\xi) \leq \mu \leq f'_+(\xi)$, αν ο ξ είναι στο εσωτερικό του I.
(2) Αν η f είναι (γνησίως) κοίλη στο I, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ είναι (γνήσια) ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν και μόνο αν είτε $f'_+(\xi) \leq \mu$, αν ο ξ είναι αριστερό άκρο του I, είτε $\mu \leq f'_-(\xi)$, αν ο ξ είναι δεξιό άκρο του I, είτε $f'_+(\xi) \leq \mu \leq f'_-(\xi)$, αν ο ξ είναι στο εσωτερικό του I.
(3) Επομένως, αν η f είναι κυρτή ή κοίλη στο I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο ξ του I, τότε η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω ή από πάνω, αντιστοίχως, του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$, δηλαδή η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.11, η $f'_+(\xi)$ υπάρχει για κάθε εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο ξ του I και η $f'_-(\xi)$ υπάρχει για κάθε εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο ξ του I.
Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο του I, ισχύει $f(x) \geq \mu(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$, οπότε ισχύει

$$\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq \mu$$

για κάθε x κοντά στον ξ από δεξιά του και, επομένως,

$$f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq \mu.$$

Ομοίως, αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο του I, ισχύει $f(x) \geq \mu(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x < \xi$, οπότε ισχύει

$$\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq \mu$$

για κάθε x κοντά στον ξ από αριστερά του και, επομένως,

$$f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq \mu.$$

Τώρα θα δούμε το αντίστροφο. Έστω ότι ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I και έστω $f'_-(\xi) \leq \mu \leq f'_+(\xi)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.11, ισχύει

$$\mu \leq f'_+(\xi) \leq \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

για κάθε $x \in I$, $x > \xi$ και

$$\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'_-(\xi) \leq \mu$$

για κάθε $x \in I$, $x < \xi$. Άρα ισχύει $f(x) - f(\xi) \geq \mu(x-\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x \neq \xi$. Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi) + f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε οι ανισότητες αυτές ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες και η ευθεία είναι γνήσια ευθεία στήριξης.
Έστω ότι ο ξ είναι αριστερό άκρο του I και έστω $\mu \leq f'_+(\xi)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.11, ισχύει $\mu \leq f'_+(\xi) \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$. Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi) + f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε οι ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες και η ευθεία είναι γνήσια ευθεία στήριξης.
Η απόδειξη είναι ίδια στην περίπτωση που ο ξ είναι δεξιό άκρο του I.
(2) Ομοίως.
(3) Έστω ότι η f είναι κυρτή ή κοίλη στο I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο ξ του I, οπότε είναι $f'_-(\xi) = f'_+(\xi) = f'(\xi)$. Από τα προηγούμενα συνεπάγεται ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi) + f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω ή από πάνω, αντιστοίχως, του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν και μόνο αν $\mu = f'(\xi)$. □

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι κυρτή. Είναι $f'_-(0) = -1$ και $f'_+(0) = 1$. Μια ευθεία είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(0,0)$ αν και μόνο αν έχει εξίσωση $y = \mu x$, όπου $-1 \leq \mu \leq 1$. Επίσης, είναι $f'(2) = 1$, οπότε η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(2,2)$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = (x-2) + 2$, δηλαδή $y = x$. Τέλος, είναι $f'(-3) = -1$, οπότε η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(-3,3)$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = -(x+3) + 3$, δηλαδή $y = -x$.
(2) Η p_2 είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Άρα, για κάθε ξ, η ευθεία με εξίσωση $y = 2\xi(x-\xi) + \xi^2$ είναι η μοναδική ευθεία στήριξής από κάτω του γραφήματος της p_2 στο σημείο (ξ, ξ^2). Μάλιστα, η ευθεία αυτή είναι γνήσια ευθεία στήριξης. Δηλαδή, ισχύει $x^2 > 2\xi(x-\xi) + \xi^2$ για κάθε $x \neq \xi$. Αυτό είναι απλό να επιβεβαιωθεί με αλγεβρικό τρόπο.
(3) Η συνάρτηση e^x είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Επομένως, το γράφημα της e^x έχει μοναδική ευθεία στήριξής του από κάτω στο σημείο $(0, e^0) = (0,1)$ την ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$. Μάλιστα, η ευθεία αυτή είναι γνήσια ευθεία στήριξης. Δηλαδή, ισχύει $e^x > x + 1$ για κάθε $x \neq 0$.

Η Πρόταση 5.17 δίνει έναν ακόμη γεωμετρικό χαρακτηρισμό των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας βάσει της έννοιας της ευθείας στήριξης.

Πρόταση 5.17. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$.*
(1) Η f είναι (γνησίως) κυρτή στο I αν και μόνο αν για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει (γνήσια) ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.
(2) Η f είναι (γνησίως) κοίλη στο I αν και μόνο αν για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει (γνήσια) ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Απόδειξη. (1) Αν η f είναι (γνησίως) κυρτή στο I, τότε από την Πρόταση 5.16 συνεπάγεται ότι για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει (γνήσια) ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και έστω $\xi \in (x_1, x_2)$. Τότε ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I, οπότε υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και έστω $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ η εξίσωση μιας τέτοιας ευθείας. Τότε είναι

$$f(x_1) \geq \mu(x_1 - \xi) + f(\xi), \qquad f(x_2) \geq \mu(x_2 - \xi) + f(\xi).$$

Συνεπάγεται

$$\tfrac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi - x_1} \leq \mu \leq \tfrac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2 - \xi}$$

και, επομένως,

$$f(\xi) \leq \tfrac{x_2-\xi}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{\xi - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Άρα η f είναι κυρτή στο I. Αν η ευθεία είναι γνήσια ευθεία στήριξης, τότε οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή στο I.
(2) Ομοίως. □

5.7.5 Ανισότητες.

Θα δούμε τώρα κάποιες εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου σε αποδείξεις ανισοτήτων. Οι εφαρμογές αυτές είναι, ουσιαστικά, απλές εφαρμογές των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας σε αποδείξεις ανισοτήτων.

Παραδείγματα. (1) Ισχύει

$$e^{(1-t)x_1 + t x_2} < (1-t)e^{x_1} + t e^{x_2}$$

για κάθε x_1, x_2, $x_1 < x_2$ και κάθε $t \in (0,1)$. Αυτό είναι απλή εφαρμογή της γνήσιας κυρτότητας της exp στο $\mathbb{R}$. Ειδικότερα, με $t = \frac{1}{2}$ η ανισότητα γίνεται $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$.
(2) Ισχύει

$$((1-t)x_1 + t x_2) \log((1-t)x_1 + t x_2) < (1-t)x_1 \log x_1 + t x_2 \log x_2$$

για κάθε $x_1, x_2 > 0$, $x_1 < x_2$ και κάθε $t \in (0,1)$. Πράγματι, η $f(x) = x \log x$ είναι γνησίως κυρτή στο $(0, +\infty)$, διότι είναι $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.
(3) Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $x^{\frac{3}{4}} < \frac{3}{4}(x-1) + 1$ για κάθε $x \geq 0$, $x \neq 1$. Πράγματι, η $p_{\frac{3}{4}}$ είναι γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 5.16, είναι $x^{\frac{3}{4}} = p_{\frac{3}{4}}(x) < p_{\frac{3}{4}}{}'(1)(x-1) + p_{\frac{3}{4}}(1) = \frac{3}{4}(x-1) + 1$ για κάθε $x \geq 0$, $x \neq 1$.

Ασκήσεις.

1. Έστω η $f(x) = \begin{cases} x^k, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^k, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ όπου $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, βρείτε την $f^{(n)}$.

2. (i) Έστω η συνάρτηση $p(x) = a_0 + a_1(x-\xi) + \cdots + a_n(x-\xi)^n$. Αποδείξτε ότι $p^{(k)}(\xi) = k! a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$ και $p^{(k)}(\xi) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq n+1$.
(ii) Έστω αριθμοί $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x)$ βαθμού $\leq n$ ώστε $p^{(k)}(\xi) = y_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$. Πόσες τέτοιες πολυωνυμικές συναρτήσεις υπάρχουν;

3. (i) Έστω $g : (a, \xi] \to \mathbb{R}$ n φορές παραγωγίσιμη στο $(a, \xi]$ και $h : [\xi, b) \to \mathbb{R}$ n φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi, b)$ και έστω $g^{(k)}(\xi) = h^{(k)}(\xi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$. Αποδείξτε ότι η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } a < x \leq \xi \\ h(x), & \text{αν } \xi \leq x < b \end{cases}$ είναι n φορές παραγωγίσιμη

στο (a,b) και ότι $f^{(k)}(\xi)=g^{(k)}(\xi)=h^{(k)}(\xi)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, $0\le k\le n$.
(ii) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ n φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Χρησιμοποιώντας την άσκηση $2(ii)$, βρείτε πολυωνυμικές συναρτήσεις $g:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ και $h:[b,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $k(x)=\begin{cases} g(x), & \text{αν } x\le a\\ f(x), & \text{αν } a\le x\le b\\ h(x), & \text{αν } b\le x\end{cases}$ να είναι n φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

4. Έστω $n\in\mathbb{N}$, διάστημα I, $f:I\to\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f^{(n)}(x)=0$ για κάθε $x\in I$ αν και μόνο αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\le n-1$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\log x}{x}$. Αποδείξτε ότι $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\big(\log x-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\big)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

6. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και $f(x)f''(x)\ge 0$ για κάθε $x\in(a,b)$. Αν στο (a,b) περιέχονται δυο λύσεις της εξίσωσης $f(x)f'(x)=0$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα στις δυο αυτές λύσεις.

7. Έστω $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[-1,1]$, τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και $f(-1)=f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f^{(3)}(\xi)=3$.
Υπόδειξη: Βρείτε πολυώνυμο p τρίτου βαθμού ώστε $p(-1)=p(0)=0$, $p(1)=1$ και $p'(0)=0$. Θεωρήστε την $g=f-p$.

8. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $(a,f(a))$ και $(b,f(b))$ τέμνει το γράφημα της f σε κάποιο σημείο διαφορετικό από αυτά τα δυο σημεία, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

9. Έστω ανοικτό διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη στο I. Αν $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in I$ και ισχύει $f(x)=0$ για τουλάχιστον δυο διαφορετικές τιμές του $x\in I$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in I$ ώστε $f'''(\xi)=0$.

10. (i) Έστω $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$. Αποδείξτε ότι, αν ένα πολυώνυμο $p(x)$ διαιρείται από το $(x-\xi)^k$, τότε το πολυώνυμο $p'(x)$ διαιρείται από το $(x-\xi)^{k-1}$.
(ii) Έστω $n\in\mathbb{N}$ και η συνάρτηση $f(x)=(x^2-1)^n$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x)=0$ έχει ακριβώς n λύσεις και ότι όλες ανήκουν στο $(-1,1)$.

11. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, $u_0=\sup\{|f(x)|\,|\,0<x<+\infty\}$, $u_1=\sup\{|f'(x)|\,|\,0<x<+\infty\}$, $u_2=\sup\{|f''(x)|\,|\,0<x<+\infty\}$. Αποδείξτε ότι $u_1^2\le 4u_0u_2$.
Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας δύο φορές το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy, αποδείξτε ότι για κάθε $x,h>0$ υπάρχει $\xi\in(0,h)$ ώστε $\frac{f(x+h)-f(x)-hf'(x)}{h^2}=\frac{1}{2}f''(x+\xi)$. Συνεπάγεται $|f'(x)|h\le|f(x+h)|+|f(x)|+\frac{1}{2}|f''(x+\xi)|h^2\le 2u_0+\frac{1}{2}u_2h^2$, οπότε $u_1h\le 2u_0+\frac{1}{2}u_2h^2$ για κάθε $h>0$. Αποδείξτε ότι $u_1^2\le 4u_0u_2$.

12. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $u_0=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in\mathbb{R}\}$, $u_1=\sup\{|f'(x)|\,|\,x\in\mathbb{R}\}$, $u_2=\sup\{|f''(x)|\,|\,x\in\mathbb{R}\}$. Αποδείξτε ότι $u_1^2\le 2u_0u_2$.
Υπόδειξη: Προσαρμόστε την υπόδειξη της άσκησης 11.

13. Αποδείξτε τον **τύπο του Leibniz**:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \,.$$

14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.
(i) Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $f^{(n)}(x) = x^{-2n}p_n(x)e^{-\frac{1}{x}}$ για κάθε $x > 0$, όπου $p_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Για παράδειγμα: $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1-2x$, $p_3(x) = 1-6x+6x^2$ κλπ.
(ii) Παραγωγίστε την $f^{(n)}(x) = x^{-2n}p_n(x)e^{-\frac{1}{x}}$ και αποδείξτε ότι ισχύει ο αναδρομικός τύπος $p_{n+1}(x) = x^2{p_n}'(x) + (1-2nx)p_n(x)$ για κάθε $x > 0$.
(iii) Αποδείξτε ότι $x^2 f'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$ και παραγωγίζοντας n φορές με τον τύπο του Leibniz της άσκησης 13, αποδείξτε ότι $p_{n+2}(x) = (1-2(n+1)x)p_{n+1}(x) - n(n+1)x^2 p_n(x)$ για κάθε $x > 0$.
(iv) Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^{n-1} στο $p_n(x)$ είναι ο $(-1)^{n-1}n!$.
(v) Αποδείξτε ότι $x^2{p_n}''(x) - (2nx-2x-1){p_n}'(x) + n(n-1)p_n(x) = 0$ για κάθε $x > 0$.

15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.
(i) Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ για κάθε x, όπου $p_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n. Για παράδειγμα: $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 1+x^2$, $p_3(x) = 3x+x^3$ κλπ.
(ii) Αποδείξτε ότι $p_{n+1}(x) = {p_n}'(x) + xp_n(x)$ για κάθε x.
(iii) Αποδείξτε ότι $f'(x) = xf(x)$ για κάθε x και παραγωγίστε n φορές με τον τύπο του Leibniz της άσκησης 13 για να αποδείξετε ότι $p_{n+1}(x) = xp_n(x) + np_{n-1}(x)$ για κάθε x.
(iv) Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^n στο $p_n(x)$ είναι ο 1.
(v) Αποδείξτε ότι ${p_n}''(x) + x{p_n}'(x) - np_n(x) = 0$ για κάθε x.

16. Θεωρήστε τις συναρτήσεις: $\frac{x^3}{(x+1)^2}$, $x^2(x-1)^2$, $x+\frac{1}{x}$, $\frac{x}{x^2+1}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$, e^{-x^2} , $e^{\frac{1}{x}}$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$, $\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$, $\sin x+\cos x$, $e^{-x}\sin x$, $\frac{1}{\log x}$. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι μονότονες, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες, τα σημεία τοπικού ακροτάτου και τα σημεία καμπής τους.

17. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\big(\frac{|x|}{x}+\sin\frac{1}{x}\big), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι ο 0 είναι σημείο καμπής της f. Μπορούν να εφαρμοστούν οι Προτάσεις 5.14 και 5.15;

18. (i) Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν η $-f$ είναι κοίλη στο ίδιο διάστημα.
(ii) Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή και κοίλη σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν έχει τύπο $f(x) = ax+b$ στο διάστημα αυτό.

19. Έστω f κυρτή στο διάστημα I και $x_1, x_0, x_2 \in I$, $x_1 < x_0 < x_2$. Αν $f(x_0) = \frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$, αποδείξτε ότι $f(x) = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$ για κάθε x, $x_1 < x < x_2$.

20. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν για κάθε $\xi \in I$ η συνάρτηση $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x στο $I \setminus \{\xi\}$.

21. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν $\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ για κάθε $a, a', b, b' \in I$, $a' \leq a$, $b' \leq b$ και, φυσικά, $a \neq b$ και $a' \neq b'$.

22. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (a,b), $a < \xi < b$. Αν $f'(x) \geq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a,b)$ ή $f'(x) \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a,b)$, αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο καμπής της f.

23. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο I. Αποδείξτε ότι, αν κάποιο εσωτερικό σημείο του I είναι σημείο μεγίστου της f, τότε η f είναι σταθερή στο I.

24. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ με $a < b$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή στο (a,b). Αποδείξτε ότι υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις. Είτε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b) είτε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a,b) είτε υπάρχει $c \in (a,b)$ ώστε η f να είναι σταθερή στο $(a,c]$ και γνησίως αύξουσα στο $[c,b)$ είτε υπάρχει $c \in (a,b)$ ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a,c]$ και σταθερή στο $[c,b)$ είτε υπάρχουν $c, d \in (a,b)$ με $c \leq d$ ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a,c]$, σταθερή στο $[c,d]$ και γνησίως αύξουσα στο $[d,b)$.

25. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ με $a < b$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή στο (a,b).
(i) Αποδείξτε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x \to b-} f(x)$, $\lim_{x \to a+} f(x)$.
(ii) Αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$ και η f είναι ορισμένη στο b, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $(a,b]$ αν και μόνο αν $\lim_{x \to b-} f(x) \leq f(b)$.
(iii) Αν, επιπλέον, $a \in \mathbb{R}$ και η f είναι ορισμένη στο a, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $[a,b)$ αν και μόνο αν $\lim_{x \to a+} f(x) \leq f(a)$.

26. (i) Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ κυρτές στο I. Αποδείξτε ότι οι $f + g : I \to \mathbb{R}$, $\max\{f, g\} : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτές στο I.
(ii) Έστω διαστήματα I, J και $f : I \to J$ κυρτή στο I και $g : J \to \mathbb{R}$ κυρτή στο J. Αν η g είναι αυξουσα στο J, αποδείξτε ότι η $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή το I.
(iii) Έστω διάστημα I και $\mathcal{F}$ ένα σύνολο, κάθε στοιχείο του οποίου είναι συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο I. Για κάθε $x \in I$ ορίζουμε $F(x) = \sup\{f(x) \,|\, f \in \mathcal{F}\}$. Αν υποθέσουμε ότι $F(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι η $F : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο I.

27. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Αποδείξτε ότι, αν για κάθε $a, b \in I$, $a < b$ υπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$, τότε η f είναι κυρτή στο I.

28. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι κυρτή και άνω φραγμένη στο $\mathbb{R}$, τότε είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
Υπόδειξη: Έστω $f(x) \leq u$ για κάθε x. Έστω $x_1 < x_2$. Αν $x > x_2$ συνδυάστε μια ανισότητα σχετική με την τριάδα x_1, x_2, x με την $f(x) \leq u$, πάρτε όριο καθώς $x \to +\infty$ και αποδείξτε ότι $f(x_2) \leq f(x_1)$. Παρομοίως, εργαστείτε με $x < x_1$ και αποδείξτε ότι $f(x_2) \geq f(x_1)$.

29. Έστω $a < 0$ ή $a > 1$.
(i) Αποδείξτε ότι $((1-t)x_1 + tx_2)^a < (1-t){x_1}^a + t{x_2}^a$ για κάθε $x_1, x_2 > 0$, $x_1 < x_2$ και κάθε $t \in (0,1)$.
(ii) Αποδείξτε ότι $x^a > a\xi^{a-1}(x - \xi) + \xi^a$ για κάθε $x, \xi > 0$, $x \neq \xi$.
Αποδείξτε ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται αν $0 < a < 1$.

30. Έστω $a > 0$.
(i) Αποδείξτε ότι $a^{(1-t)x_1 + tx_2} < (1-t)a^{x_1} + ta^{x_2}$ για κάθε x_1, x_2, $x_1 < x_2$ και κάθε $t \in (0,1)$.
(ii) Αποδείξτε ότι $a^x > a^\xi \log a\, (x - \xi) + a^\xi$ για κάθε x, ξ, $x \neq \xi$.

31. (i) Αποδείξτε ότι $\log\big((1-t)x_1+tx_2\big) > (1-t)\log x_1 + t\log x_2$ για κάθε $x_1, x_2 > 0$, $x_1 < x_2$ και κάθε $t \in (0,1)$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\log x < \frac{1}{\xi}(x-\xi) + \log\xi$ για κάθε $x, \xi > 0$, $x \neq \xi$.

32. Αποδείξτε την ανισότητα του Young στην άσκηση 21 της ενότητας 5.6 με δυο τρόπους: χρησιμοποιώντας το ότι η log είναι γνησίως κοίλη στο $(0,+\infty)$ και το ότι η p_t είναι γνησίως κοίλη στο $(0,+\infty)$ όταν $0 < t < 1$.

33. (i) Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο I. Με την αρχή της επαγωγής ως προς τον n, αποδείξτε ότι
$$f(\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n) \leq \mu_1 f(x_1) + \cdots + \mu_n f(x_n)$$
αν $x_1, \ldots, x_n \in I$ και $\mu_1, \ldots, \mu_n > 0$, $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$.
(ii) Χρησιμοποιώντας το ότι η p_t είναι γνησίως κοίλη στο $(0,+\infty)$ όταν $0 < t < 1$ και θεωρώντας $x_1 = \frac{b_1}{a_1}, \ldots, x_n = \frac{b_n}{a_n}$ και $\mu_1 = \frac{a_1}{A}, \ldots, \mu_n = \frac{a_n}{A}$, όπου $A = a_1 + \cdots + a_n$, αποδείξτε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση 21 της ενότητας 5.6.
(iii) Αποδείξτε την ανισότητα στην άσκηση 21(v) της ενότητας 5.6 χρησιμοποιώντας το ότι η log είναι γνησίως κοίλη στο $(0,+\infty)$.

34. Αν $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n > 0$, αποδείξτε ότι $\big(\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}\big)^{\sum_{k=1}^n a_k} \leq \prod_{k=1}^n a_k^{a_k}$.

35. Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ή κοίλη στο διάστημα I, αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη είναι αριθμήσιμο.

36. Σχολιάστε λεπτομερώς το γεωμετρικό περιεχόμενο της Πρότασης 5.11.

5.8 Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε εφαρμογές των παραγώγων στον υπολογισμό ορίων που καταλήγουν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Οι εφαρμογές αυτές εκφράζονται μέσω των δυο Κανόνων του l' Hopitâl.

5.8.1 Όρια συναρτήσεων.

Ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl. *Έστω $f, g : (\xi, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο (ξ, b) και $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. Έστω, επίσης, $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια είναι ίσα:*
$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$
Όλα τα προηγούμενα ισχύουν με τις προφανείς προσαρμογές και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to \xi-$, $x \to \xi$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Απόδειξη. Οι f, g δε θεωρούνται κατ' αρχάς ορισμένες στον ξ, αλλά τώρα τις ορίζουμε και στον ξ:
$$f(\xi) = g(\xi) = 0.$$

Επειδή $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0$, οι f, g είναι, τώρα, συνεχείς στο $[\xi, b)$.
Έστω
$$\lim_{x\to\xi+} \tfrac{f'(x)}{g'(x)} = \eta.$$
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει
$$\left|\tfrac{f'(x)}{g'(x)} - \eta\right| < \varepsilon$$
για κάθε $x \in (\xi, b)$, $\xi < x < \xi + \delta_0$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy) συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in (\xi, b)$ υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε
$$\tfrac{f(x)}{g(x)} = \tfrac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \tfrac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}\,.$$
Τώρα, για κάθε $x \in (\xi, b)$, $\xi < x < \xi + \delta_0$ συνεπάγεται $\zeta \in (\xi, b)$, $\xi < \zeta < \xi + \delta_0$, οπότε $\left|\tfrac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta\right| < \varepsilon$ και, επομένως,
$$\left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \varepsilon.$$
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι ισχύει $\left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \varepsilon$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, $\xi < x < \xi + \delta_0$. Άρα
$$\lim_{x\to\xi+} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \eta.$$
Η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi+} \tfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$. Επίσης, η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις $x \to \xi-$ και $x \to \xi$.
Τώρα ανάγουμε την περίπτωση $x \to +\infty$ στην περίπτωση $x \to 0+$.
Έστω $a > 0$, $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $(a, +\infty)$, $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει. Θα αποδείξουμε ότι και το $\lim_{x\to+\infty} \tfrac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και ότι τα δυο όρια είναι ίσα. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής από x σε $t = \tfrac{1}{x}$, ορίζουμε $F, G : (0, \tfrac{1}{a}) \to \mathbb{R}$ με τύπους
$$F(t) = f(\tfrac{1}{t}) = f(x), \quad G(t) = g(\tfrac{1}{t}) = g(x) \qquad (t \in (0, \tfrac{1}{a})).$$
Τότε
$$G(t) = g(x) \neq 0, \qquad G'(t) = -\tfrac{1}{t^2} g'(\tfrac{1}{t}) = -x^2 g'(x) \neq 0$$
για κάθε $t \in (0, \tfrac{1}{a})$. Επίσης, το
$$\lim_{t\to0+} \tfrac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{-x^2 f'(x)}{-x^2 g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}$$
υπάρχει. Άρα και το
$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0+} \tfrac{F(t)}{G(t)}$$
υπάρχει και είναι ίσο με το προηγούμενο. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
Ομοίως, η περίπτωση $x \to -\infty$ ανάγεται στην περίπτωση $x \to 0-$. □

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to0} \tfrac{e^x-1}{\sin x}$.
Ισχύει $\sin x \neq 0$, $\sin' x = \cos x \neq 0$ για κάθε $x \in (-\tfrac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \tfrac{\pi}{2})$. Επίσης,
$$\lim_{x\to0}(e^x - 1) = \lim_{x\to0} \sin x = 0.$$
Υπολογίζουμε το όριο του λόγου των παραγώγων:
$$\lim_{x\to0} \tfrac{e^x}{\cos x} = \tfrac{1}{1} = 1.$$

Επομένως,
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x} = 1.$$
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αλλά και σε άλλα παρόμοια, μπορούμε να λειτουργήσουμε και με άλλο τρόπο, στον οποίο, όμως, και πάλι ανακατεύεται η έννοια της παραγώγου. Η παράγωγος της συνάρτησης e^x στον 0 είναι $e^0 = 1$. Άρα
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = 1.$$
Επίσης, το ότι η παράγωγος της συνάρτησης $\sin x$ στον 0 είναι $\cos 0 = 1$ προκύπτει από το
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x-\sin 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Άρα
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)/x}{(\sin x)/x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ο Δεύτερος Κανόνας του l' Hopitâl που ακολουθεί αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή, καλύτερα, σε μια γενίκευσή της.

Δεύτερος Κανόνας του l' Hopitâl. *Έστω $f, g : (\xi, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο (ξ, b) και $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. Έστω, επίσης, $\lim_{x\to\xi+} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια είναι ίσα:*
$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$
Όλα τα προηγούμενα ισχύουν με τις προφανείς προσαρμογές και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to \xi-$, $x \to \xi$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Απόδειξη. Έστω
$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta.$$
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει ${\delta_0}' > 0$ ώστε να ισχύει
$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \eta\right| < \frac{\varepsilon}{6}$$
για κάθε $x \in (\xi, b)$, $\xi < x < \xi + {\delta_0}'$.
Επιλέγουμε
$$x_0 \in (\xi, b), \quad \xi < x_0 < \xi + {\delta_0}'.$$
Επειδή $\lim_{x\to\xi+} |g(x)| = +\infty$, υπάρχει ${\delta_0}'' > 0$ ώστε να ισχύει
$$|g(x)| > \max\left\{|g(x_0)|, \tfrac{3}{\varepsilon}|f(x_0)|, \tfrac{3|\eta|}{\varepsilon}|g(x_0)|\right\}$$
για κάθε $x \in (\xi, b)$, $\xi < x < \xi + {\delta_0}''$.
Τώρα ορίζουμε
$$\delta_0 = \min\{x_0 - \xi, {\delta_0}''\}.$$
Κάθε $x \in (\xi, b)$, $\xi < x < \xi + \delta_0$ ικανοποιεί τις $\xi < x < x_0 < \xi + {\delta_0}'$ και $\xi < x < \xi + {\delta_0}''$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy), για κάθε τέτοιον x υπάρχει $\zeta \in (x, x_0)$ ώστε
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}\,.$$

Άρα $\zeta \in (\xi, b)$, $\xi < \zeta < \xi + \delta_0{}'$, οπότε

$$\left|\tfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - \eta\right| = \left|\tfrac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta\right| < \tfrac{\varepsilon}{6}\,.$$

Συνεπάγεται

$$\big|f(x) - f(x_0) - \eta\big(g(x) - g(x_0)\big)\big| < \tfrac{\varepsilon}{6}|g(x) - g(x_0)|,$$

οπότε

$$|f(x) - \eta g(x)| < \tfrac{\varepsilon}{6}\big(|g(x)| + |g(x_0)|\big) + |f(x_0)| + |\eta||g(x_0)|$$

και, επομένως,

$$\left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \tfrac{\varepsilon}{6}\big(1 + \tfrac{|g(x_0)|}{|g(x)|}\big) + \tfrac{|f(x_0)|}{|g(x)|} + |\eta|\tfrac{|g(x_0)|}{|g(x)|} < \tfrac{\varepsilon}{6}(1+1) + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \varepsilon$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, $\xi < x < \xi + \delta_0$. Άρα $\lim_{x\to\xi+} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \eta$.
Οι περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi+} \tfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ καθώς και οι περιπτώσεις $x \to \xi-$ και $x \to \xi$ αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο. Οι περιπτώσεις $x \to \pm\infty$ ανάγονται στις $x \to 0\pm$ όπως στην απόδειξη της Πρώτου Κανόνα. $\square$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στις υποθέσεις του Δεύτερου Κανόνα του l' Hopitâl δεν αναφέρεται αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ ούτε - αν αυτό υπάρχει - το ποια ακριβώς είναι η τιμή του. Επομένως, οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι ειδικές περιπτώσεις του Δεύτερου Κανόνα του l' Hopitâl, όπως τον έχουμε διατυπώσει.

Παραδείγματα. (1) Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \qquad (a > 1, b > 0).$$

Έστω, κατ' αρχάς, $a > 1$, $b = 1$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} = 0$. Για τη συνάρτηση στον παρονομαστή και την παράγωγό της είναι

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

και $a^x \neq 0$ και $a^x \log a \neq 0$ για κάθε x. Το όριο του λόγου των παραγώγων είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{a^x \log a} = 0\,.$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{x}{a^x} = 0.$$

Τέλος, έστω $a > 1$, $b > 0$. Επειδή $a^{1/b} > 1$, είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(a^{1/b})^x} = 0$. Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{x^b}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \big(\tfrac{x}{(a^{1/b})^x}\big)^b = 0^b = 0.$$

(2) Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^b}{x^a} = 0 \qquad (a > 0, b > 0).$$

Έστω $a > 0$, $b = 1$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$. Για τη συνάρτηση στον παρονομαστή και την παράγωγό της είναι

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$$

και $x^a \neq 0$ και $ax^{a-1} \neq 0$ για κάθε $x > 0$. Το όριο του λόγου των παραγώγων είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{ax^a} = 0\,.$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0.$$

Τώρα, έστω $a > 0$, $b > 0$. Επειδή $\frac{a}{b} > 0$, είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{a/b}} = 0$. Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^b}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log x}{x^{a/b}}\right)^b = 0^b = 0.$$

(3) Το $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x}$ αποτελεί περίπτωση απροσδιόριστης μορφής $\frac{\pm\infty}{+\infty}$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Επίσης, επειδή ισχύει $x - \cos x \geq x - 1$ για κάθε x, είναι

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \cos x) = +\infty.$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το αρχικό όριο υπολογίζεται πολύ εύκολα χωρίς καταφυγή στον Δεύτερο Κανόνα του l' Hopitâl: επειδή ισχύει $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\cos x}{x}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Εδώ, μάλιστα, *ο Δεύτερος Κανόνας δεν εφαρμόζεται καν!* Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sin x}{1}$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \sin x$.
Το παράδειγμα αυτό δείχνει, επίσης, ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του Κανόνα του l' Hopitâl. Πράγματι, στο παράδειγμα αυτό υπάρχει το όριο του λόγου των συναρτήσεων αλλά δεν υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων τους.

Υπάρχουν, όμως, και άλλες απροσδιόριστες μορφές πέραν των $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Σε κάθε περίπτωση μετασχηματίζουμε την απροσδιόριστη μορφή που αντιμετωπίζουμε σε μια από τις βασικές αυτές απροσδιόριστες μορφές και κατόπιν εφαρμόζουμε τον κατάλληλο Κανόνα του l' Hopitâl. Θα περιγράψουμε, τελείως σχηματικά, πώς περίπου χειριζόμαστε τις διάφορες περιπτώσεις.
(1) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \pm\infty$ και ότι πρέπει να βρούμε το $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x)$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $0(\pm\infty)$. Τότε μετατρέπουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{1/g(x)}\,,$$

δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Μπορούμε, επίσης, να μετατρέψουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{g(x)}{1/f(x)}\,,$$

δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Βέβαια, στην δεύτερη περίπτωση χρειάζεται κάποια επιπλέον υπόθεση για το πρόσημο της f.
(2) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = -\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x))$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) + (-\infty)$. Τότε μετατρέπουμε

$$\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\xi} \left(\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}\right) f(x)g(x),$$

δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Έτσι αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.

(3) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=0$, όπου $f(x)>0$, και $\lim_{x\to\xi} g(x)=0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή 0^0. Τότε μετατρέπουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\xi} e^{g(x)\log f(x)}\,.$$

δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$.
(4) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to\xi} g(x)=0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$. Μετατρέπουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\xi} e^{g(x)\log f(x)}\,,$$

δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$.
(5) Τέλος, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=1$ και $\lim_{x\to\xi} g(x)=\pm\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $1^{\pm\infty}$. Μετατρέπουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\xi} e^{g(x)\log f(x)}\,,$$

δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty)0$.

Παραδείγματα. (1) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0+} x\log x$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Μετασχηματίζουμε σε $\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{1/x}$, όπου $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$. Είναι $\frac{1}{x}\neq 0$ και $-\frac{1}{x^2}\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Επίσης, $\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$. Άρα $\lim_{x\to 0+} x\log x = \lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{1/x} = 0$.
(2) Το $\lim_{x\to 0+} x^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή 0^0. Γράφουμε $x^x=e^{x\log x}$, οπότε το όριο μετασχηματίζεται στο προηγούμενο όριο. Άρα $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = 1$ διότι η exp είναι συνεχής στον 0.
(3) Το $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή $1^{+\infty}$. Είναι $\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)^x = e^{x\log(1+\frac{x}{1+x^2})}$ και αναγόμαστε στο $\lim_{x\to+\infty} x\log\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$. Γράφουμε $x\log\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big) = \frac{\log(1+x/(1+x^2))}{1/x}$ και έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Είναι $\frac{1}{x}\neq 0$ και $-\frac{1}{x^2}\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Το όριο του λόγου των παραγώγων είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x^2-1)}{(1+x^2)(1+x+x^2)} = 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} x\log\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x/(1+x^2))}{1/x} = 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log(1+\frac{x}{1+x^2})} = e$ αφού η exp είναι συνεχής στον 1.

5.8.2 Όρια ακολουθιών.

Θα εφαρμόσουμε τους Κανόνες του l' Hopitâl στον υπολογισμό ορίων ακολουθιών.
Πρώτη εφαρμογή. Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) ώστε $b_n\neq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και έστω $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Στόχος είναι ο υπολογισμός του $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$, αν αυτό υπάρχει.
Για να εφαρμόσουμε τον Πρώτο Κανόνα του l' Hopitâl, πρέπει να βρούμε συναρτήσεις

$$f,g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$$

ώστε να ισχύει

$$f(n)=a_n\,,\quad g(n)=b_n\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Οι f,g πρέπει να είναι παραγωγίσιμες στο $[1,+\infty)$, πρέπει να ισχύει $g(x),g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί τις f, g και αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο. Τώρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4 στην $\frac{f}{g}$ και στην ακολουθία (n), συμπεραίνουμε ότι και το

$$\lim_{n\to+\infty}\tfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\tfrac{f(n)}{g(n)}$$

υπάρχει και έχει την ίδια τιμή με τα προηγούμενα δυο όρια.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{n\to+\infty}\arctan\frac{1}{n}\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})$.
Επειδή $\lim_{n\to+\infty}\arctan\frac{1}{n}=0$ και $\lim_{n\to+\infty}\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})=+\infty$, το όριο εμπίπτει στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $0(+\infty)$.
Γράφουμε $\arctan\frac{1}{n}\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}) = \arctan\frac{1}{n}\cot\frac{1}{n} = \frac{\arctan(1/n)}{\tan(1/n)}$ και μεταθέτουμε το όριο στην κατηγορία $\frac{0}{0}$. Ορίζουμε $f, g : (\frac{2}{\pi}, +\infty)$ με τύπους

$$f(x) = \arctan\tfrac{1}{x}\,, \qquad g(x) = \tan\tfrac{1}{x}\,.$$

Οι f, g έχουν όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες, οπότε υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\tfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\tfrac{x^2(\cos\frac{1}{x})^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\tfrac{x^2}{x^2+1}\lim_{x\to+\infty}(\cos\tfrac{1}{x})^2 = 1.$$

Θεωρώντας την ακολουθία (n) με όριο $+\infty$, βρίσκουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\tfrac{\arctan(1/n)}{\tan(1/n)} = \lim_{x\to+\infty}\tfrac{\arctan(1/x)}{\tan(1/x)} = 1.$$

Δεύτερη εφαρμογή. Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) ώστε $b_n \neq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και έστω $\lim_{n\to+\infty}b_n = +\infty$ ή $-\infty$. Στόχος, όπως και πριν, είναι ο υπολογισμός του $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$, αν αυτό υπάρχει.

Για να εφαρμόσουμε τον Δεύτερο Κανόνα του l' Hopitâl, εργαζόμαστε όπως και στην πρώτη εφαρμογή. Βρίσκουμε συναρτήσεις $f, g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(n) = a_n$ και $g(n) = b_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Οι f, g πρέπει να είναι παραγωγίσιμες στο $[1, +\infty)$, πρέπει να ισχύει $g(x), g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty}g(x) = +\infty$ ή $-\infty$. Αν, τώρα, υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο, οπότε υπάρχει και το $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ και έχει την ίδια τιμή με τα προηγούμενα δυο όρια.

Παραδείγματα. (1) Δυο σημαντικά όρια ακολουθιών είναι τα

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^b}{a^n} = 0 \quad (a>1, b>0), \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{(\log n)^b}{n^a} = 0 \quad (a>0, b>0).$$

Για το πρώτο όριο ορίζουμε $f, g : [1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x^b$ και $g(x) = a^x$, οι οποίες ικανοποιούν τις απαραίτητες συνθήκες, και αναγόμαστε στον υπολογισμό του $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}$. Το όριο αυτό έχει ήδη υπολογιστεί με τον Δεύτερο Κανόνα του l' Hopitâl. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το δεύτερο όριο.
(2) Θα ξανααποδείξουμε το όριο $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.
Γράφουμε $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}}$ για να μετατρέψουμε την απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$ σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και εφαρμόζουμε μια ειδική περίπτωση του προηγούμενου ορίου:

$$\lim_{n\to+\infty}\tfrac{\log n}{n} = 0.$$

Καταλήγουμε στο

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1.$$

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιώντας όρια που μάθαμε σ' αυτήν την ενότητα, υπολογίστε τα $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{4}}}{x^{13}}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[7]{x}}{(\log x)^5}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}-(\log x)^4}{x^{100}-e^{\frac{x}{4}}}$, $\lim_{x\to+\infty}(e^x-x)$, $\lim_{x\to0+}\big(\frac{1}{x^5}-\frac{2}{x^2}+(\log x)^7\big)$, $\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5}$.

2. Βρείτε τα $\lim_{x\to1}\frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2-x}}$, $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{e^{2x}-1}$, $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$, $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\arctan x}$, $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log x)}{\log x}$, $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{b^x-1}$ $(a,b>0, b\neq1)$, $\lim_{x\to0}\big(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\big)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log(\log(\log x)))}{\log(\log(\log x))}$, $\lim_{x\to0}\frac{x\sin(\sin x)-(\sin x)^2}{x^6}$, $\lim_{x\to0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$, $\lim_{x\to1}\frac{x^a-1}{x^b-1}$, $\lim_{x\to1+}\log x\log(x-1)$, $\lim_{x\to0+}\sin x\log x$, $\lim_{x\to0}\big(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\big)$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan(2x)}$, $\lim_{x\to0}(\frac{1}{x}-\cot x)$, $\lim_{x\to0+}x^{x^x-1}$, $\lim_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\log x}$, $\lim_{x\to0}\big(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\big)$.

3. Μπορείτε να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x}$ με διαδοχικές εφαρμογές του Δεύτερου Κανόνα του l' Hopitâl ; Μήπως το όριο αυτό υπολογίζεται πολύ εύκολα, χωρίς αναφορά στους Κανόνες του l' Hopitâl ;

4. Βρείτε a, b ώστε $\lim_{x\to0}\big(\frac{1-\cos x}{x^4}+ax^{-2}+b\big)=0$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\log|x|}, & \text{αν } x\neq0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αλλά όχι Hölder συνεχής στον 0 (δείτε την άσκηση 11 της ενότητας 4.1).

6. Υπολογίστε τα όρια: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\frac{1}{1!}x}{x^2}$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-\frac{1}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2}{x^3}$. Παρατηρήστε ότι το πρώτο όριο είναι εξ ορισμού μια γνωστή παράγωγος - οπότε δε χρειάζεται ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl για την απόδειξή του. Γενικεύστε αυτά τα όρια.

7. Για ποιον λόγο *δε* μπορεί να εφαρμοστεί ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl για *να αποδειχθεί* το $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$; Βρείτε τα: $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\frac{1}{1!}x}{x^3}$, $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2!}x^2}{x^4}$, $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^3}{x^5}$, $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4}{x^6}$. Γενικεύστε.

8. Υπολογίστε τα όρια: $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}$, $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$, $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}$. Παρατηρήστε ότι το πρώτο όριο είναι εξ ορισμού μια γνωστή παράγωγος - οπότε δε χρειάζεται ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl για την απόδειξή του. Γενικεύστε.

9. (i) Έστω $\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b_k(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}=\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b'_k(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $b_k=b'_k$ για κάθε $k=0,1,\dots,n$.
(ii) Έστω $a<\xi<b$ και έστω ότι η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$, αποδείξτε ότι
$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)-\frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}}{(x-\xi)^n}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$
Παρατηρήστε ότι οι ασκήσεις 6, 7, 8 είναι ειδικές περιπτώσεις.
(iii) Εκτός των άλλων υποθέσεων του (ii), θεωρήστε ότι $f^{(n)}(\xi)\in\mathbb{R}$ και αποδείξτε ότι το $p_n(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ για το οποίο ισχύει $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-\xi)^n}=0$.

10. Εφαρμόστε την άσκηση 9:
(i) Έστω $a < \xi < b$ και έστω ότι η f είναι $2m-1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) και ότι υπάρχει η $f^{(2m)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi) = \ldots = f^{(2m-1)}(\xi) = 0$, αποδείξτε ότι, αν $f^{(2m)}(\xi) > 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f και ότι, αν $f^{(2m)}(\xi) < 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.
(ii) Έστω $a < \xi < b$ και έστω ότι η f είναι $2m$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) και ότι υπάρχει η $f^{(2m+1)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi) = \ldots = f^{(2m)}(\xi) = 0$ και $f^{(2m+1)}(\xi) \neq 0$, αποδείξτε ότι ο ξ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f.

11. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a < \xi < b$.
(i) Αν υπάρχει η $f'(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h} = f'(\xi)$.
(ii) Αν υπάρχει η $f''(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2} = f''(\xi)$.
(iii) Αν υπάρχει η $f''(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+2h)-2f(\xi+h)+f(\xi)}{h^2} = f''(\xi)$.

12. (i) Έστω f παραγωγίσιμη στο $(a,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \eta$.
(ii) Έστω f παραγωγίσιμη στο $(a,+\infty)$ και έστω $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = \eta$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

13. (i) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} x^{-m}e^{-\frac{1}{x}} = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.
(ii) Έστω η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η h είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και, ειδικώτερα, ότι $h^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Υπόδειξη: Άσκηση 14 της ενότητας 5.7.
(iii) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-x^2}}, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

14. Χρησιμοποιώντας γνωστά όρια ακολουθιών, βρείτε τα όρια: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^{13}}{n^2}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(\log n)^{95}}$, $\lim_{n\to+\infty} ne^{-n}$, $\lim_{n\to+\infty} n^3e^{-n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{n}{5}}}{n^{100}}$.

15. Υπολογίστε τα όρια: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\log n)}{\log n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\log(\log n))}{\log(\log n)}$, $\lim_{n\to+\infty}(n - \cot\frac{1}{n})$.

5.9 Τάξη μεγέθους, ασυμπτωτική ισότητα.

5.9.1 Τάξη μεγέθους.

Ορισμός. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $f(x), g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν

$$\lim_{x\to\xi} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0,$$

τότε λέμε ότι η f έχει **μικρότερη τάξη μεγέθους** από την g κοντά στο ξ καθώς και ότι η g έχει **μεγαλύτερη τάξη μεγέθους** από την f κοντά στο ξ. Παρατηρήστε ότι, λόγω της υπόθεσης για μη-μηδενισμό των f, g, η ισότητα $\lim_{x\to\xi} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$ είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x\to\xi} \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = +\infty$. Τέλος, αν υπάρχουν l, u ώστε να ισχύει

$$0 < l \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq u < +\infty$$

κοντά στο ξ, τότε λέμε ότι οι f, g έχουν **ίδια τάξη μεγέθους** κοντά στο ξ.

Αν υπάρχει το

$$\rho = \lim_{x\to\xi} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|, \quad \rho\in\mathbb{R}, \quad \rho>0,$$

τότε μπορούμε να επιλέξουμε l ώστε $0<l<\rho$ (για παράδειγμα, τον $l=\frac{\rho}{2}$) και $u>\rho$ (για παράδειγμα, τον $u=2\rho$). Τότε ισχύει $l<\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<u$ κοντά στο ξ, οπότε οι f, g έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο ξ.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση x^b $(b>0)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από τη συνάρτηση a^x $(a>1)$ κοντά στο $+\infty$, διότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x}=0.$$

(2) Η συνάρτηση $(\log x)^c$ $(c>0)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από τη συνάρτηση x^b $(b>0)$ κοντά στο $+\infty$, διότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^c}{x^b}=0.$$

(3) Αν $a_n, b_n\neq 0$, οι συναρτήσεις $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ και $b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}\right| = \left|\frac{a_n}{b_n}\right|>0.$$

(4) Έστω $a_n, b_m\neq 0$ και $n<m$. Η συνάρτηση $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από τη συνάρτηση $q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ κοντά στο $+\infty$. Πράγματι,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=0.$$

(5) Η συνάρτηση $a^{-\frac{1}{x}}$ $(a>1)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από τη συνάρτηση x^b $(b>0)$ κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to0+} \frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x^b}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^b}{a^t}=0$.
(6) Η συνάρτηση $1-\cos x$ και η συνάρτηση x^2 έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}>0$.
(7) Η συνάρτηση $\sin x$ και η συνάρτηση x έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στον 0, διότι είναι $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}=1>0$.
(8) Η συνάρτηση $f(x)=(\log\frac{1}{x})^c$ $(c>0)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από τη συνάρτηση x^{-b} $(b>0)$ κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to0+}\frac{(\log\frac{1}{x})^c}{x^{-b}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\log t)^c}{t^b}=0$.
(9) Το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2+\sin x)$ δεν υπάρχει. Όμως, οι συναρτήσεις $2x+x\sin x$ και x έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. Πράγματι, ισχύει $1\leq\frac{2x+x\sin x}{x}\leq 3$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Θα περιγράψουμε, τώρα, ειδικά για την περίπτωση $\lim_{x\to+\infty}$ μερικούς ευρέως χρησιμοποιούμενους όρους: την *πολυωνυμική*, την *εκθετική* και τη *λογαριθμική τάξη μεγέθους*.

Είδαμε στο παράδειγμα (3) ότι όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. Αυτό το κωδικοποιούμε λέγοντας ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n έχει **πολυωνυμική τάξη μεγέθους** ή, ειδικότερα, **πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού** n κοντά στο $+\infty$. Σύμφωνα με το παράδειγμα (4), μπορούμε να "ιεραρχήσουμε" τις πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους κοντά στο $+\infty$ ανάλογα με τον βαθμό τους: μεγαλύτερος βαθμός αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τάξη μεγέθους. Φυσικά, από τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n η πιο απλή είναι η x^n. Πρέπει, τώρα, να πούμε ότι ο όρος "πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού n" χαρακτηρίζει όχι μόνο τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n αλλά και κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με την x^n κοντά στο $+\infty$.

Παράδειγμα. Κάθε ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ $(a_n, b_m \neq 0)$, όπου $n > m$, έχει πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού $n-m$ κοντά στο $+\infty$, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{r(x)}{x^{n-m}}\right| = \left|\frac{a_n}{b_m}\right| > 0.$$

Ο όρος "πολυωνυμική τάξη μεγέθους" χρησιμοποιείται για τις συναρτήσεις x^b ακόμη και όταν ο εκθέτης $b > 0$ δεν είναι κατ' ανάγκη φυσικός καθώς και για κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις x^b $(b > 0)$ κοντά στο $+\infty$. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός. Λέμε ότι η f έχει **πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού** $b > 0$ κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την συνάρτηση x^b $(b > 0)$ κοντά στο $+\infty$.

Προφανώς, οι πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους "ιεραρχούνται" ανάλογα με τον βαθμό τους, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{b_1}}{x^{b_2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{b_2-b_1}} = 0 \qquad (0 < b_1 < b_2).$$

Παρατηρούμε, επίσης, ότι κάθε συνάρτηση με πολυωνυμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Πράγματι, αν η f έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια συνάρτηση x^b $(b > 0)$, τότε υπάρχουν $u, l > 0$ ώστε να ισχύει

$$l \leq \left|\frac{f(x)}{x^b}\right| \leq u$$

και, επομένως, $|f(x)| \geq lx^b$ κοντά στο $+\infty$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} lx^b = +\infty$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty.$$

Ορισμός. Αν $a > 1$, λέμε ότι η συνάρτηση a^x έχει **εκθετική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$. Το ίδιο λέμε και για οποιαδήποτε συνάρτηση η οποία έχει την ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις συναρτήσεις a^x $(a > 1)$ κοντά στο $+\infty$.

Οι εκθετικές τάξεις μεγέθους "ιεραρχούνται" ανάλογα με τη βάση a, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{{a_1}^x}{{a_2}^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x = 0 \qquad (1 < a_1 < a_2).$$

Ορισμός. Αν $c > 0$, λέμε ότι η συνάρτηση $(\log x)^c$ έχει **λογαριθμική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$. Το ίδιο ισχύει για κάθε συνάρτηση η οποία έχει την ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις συναρτήσεις $(\log x)^c$ $(c > 0)$ κοντά στο $+\infty$.

Οι λογαριθμικές τάξεις μεγέθους "ιεραρχούνται" ανάλογα με τον εκθέτη c, αφού είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^{c_1}}{(\log x)^{c_2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\log x)^{c_2-c_1}} = 0 \qquad (0 < c_1 < c_2).$$

Όπως και με τις συναρτήσεις πολυωνυμικής τάξης μεγέθους, παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση με εκθετική ή λογαριθμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Η απόδειξη είναι παρόμοια.

Στα παραδείγματα (1) και (2) είδαμε ότι, κοντά στο $+\infty$, κάθε λογαριθμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε πολυωνυμική τάξη μεγέθους και κάθε πολυωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε εκθετική τάξη μεγέθους.

5.9.2 Ασυμπτωτική ισότητα. Μικρό όμικρον και μεγάλο όμικρον.

Ορισμός. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν

$$\lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

τότε γράφουμε

$$f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big) \quad \text{κοντά στο } \xi$$

και διαβάζουμε "*η f είναι **μικρό όμικρον** της g*" κοντά στο ξ. Αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \text{κοντά στο } \xi,$$

τότε γράφουμε

$$f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big) \quad \text{κοντά στο } \xi$$

και διαβάζουμε "*η f είναι **μεγάλο όμικρον** της g*" κοντά στο ξ.

Παραδείγματα. (1) Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την g κοντά στο ξ, τότε $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ. Το αντίστροφο ισχύει, φυσικά, αν $f(x) \neq 0$ κοντά στο ξ.
Για παράδειγμα, είναι $(\log x)^c = \mathrm{o}\big(x^b\big)$ και $x^b = \mathrm{o}\big(a^x\big)$ κοντά στο $+\infty$ για κάθε $a > 1$ και $b, c > 0$. Επίσης, είναι $x^{b_1} = \mathrm{o}\big(x^{b_2}\big)$ κοντά στο $+\infty$ αλλά και $x^{b_2} = \mathrm{o}\big(x^{b_1}\big)$ κοντά στον 0 αν $0 < b_1 < b_2$.
(2) Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από ή την ίδια τάξη μεγέθους με την g κοντά στο ξ, τότε $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ.
Για παράδειγμα, είναι $\sin x = \mathrm{O}(x)$ και $1 - \cos x = \mathrm{O}(x^2)$ κοντά στον 0.
(3) **Η παράγωγος**. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Το να είναι η f παραγωγίσιμη στον ξ με παράγωγο $f'(\xi)$ είναι ισοδύναμο με το να ισχύει

$$f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x - \xi) = \mathrm{o}(x - \xi) \quad \text{κοντά στον } \xi.$$

Πράγματι, το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)(x-\xi)}{x-\xi} = 0$ κι αυτό είναι ισοδύναμο με το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi)$.
Αν θεωρήσουμε την αφφινική συνάρτηση $l(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$, δηλαδή το διαφορικό της f στον ξ, τότε τα προηγούμενα είναι, προφανώς, ισοδύναμα με το

$$f(x) - l(x) = \mathrm{o}(x - \xi) \quad \text{κοντά στον } \xi.$$

Αν γράψουμε, όπως στην υποενότητα 5.1.3, $y_1 = f(x)$, $y_2 = l(x)$, $\eta = f(\xi) = l(\xi)$ και $\Delta x = x - \xi$, τότε $\Delta y_1 = f(\xi + \Delta x) - f(\xi)$ και $\Delta y_2 = f'(\xi)\Delta x$. Άρα

$$\Delta y_1 - \Delta y_2 = \mathrm{o}(\Delta x) \quad \text{κοντά στον } \xi.$$

Ορισμός. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν

$$\lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

τότε γράφουμε

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{κοντά στο } \xi$$

και λέμε ότι η f είναι **ασυμπτωτικά ίση** με την g κοντά στο ξ.

Παρατηρήστε ότι από το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ και, επομένως, $f(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Δηλαδή, αν είναι $f(x) \sim g(x)$ κοντά στο ξ, τότε ισχύει $f(x), g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Επομένως, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$, οπότε είναι $g(x) \sim f(x)$ κοντά στο ξ. Άρα η σχέση της ασυμπτωτικής ισότητας είναι συμμετρική.

`Παραδείγματα.` (1) Είναι $\sin x \sim x$ και $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ κοντά στον 0.
(2) Είναι $e^x - 1 \sim x$ κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.
(3) Είναι $\log(1+x) \sim x$ κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$.
(4) Είναι $\tan x \sim \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$ κοντά στον $\frac{\pi}{2}$, διότι $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{1/(x-\frac{\pi}{2})} = \lim_{t\to 0} t\tan(t+\frac{\pi}{2}) = \lim_{t\to 0} t\cot t = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cos t = 1$.

Ιδού ένα χρήσιμο αποτέλεσμα:
Έστω $c \neq 0$. Τότε η σχέση $f(x)-g(x) = o\big(cg(x)\big)$ είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική ισότητα $f(x) \sim g(x)$.
Πράγματι: $f(x)-g(x) = \mathrm{o}\big(cg(x)\big)$ κοντά στο ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-g(x)}{cg(x)} = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi}\big(\frac{f(x)}{g(x)}-1\big) = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ αν και μόνο αν $f(x) \sim g(x)$ κοντά στο ξ.

`Παραδείγματα.` Βάσει των προηγούμενων παραδειγμάτων:
(1) $\sin x - x = \mathrm{o}(x)$ και $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \mathrm{o}(x^2)$ κοντά στον 0.
(2) $e^x - 1 - x = \mathrm{o}(x)$ κοντά στον 0.
(3) $\log(1+x) - x = \mathrm{o}(x)$ κοντά στον 0.
(4) $\tan x - \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} = \mathrm{o}\big(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\big)$ κοντά στον $\frac{\pi}{2}$.

Αν όλες οι $g_1, \dots, g_n$ είναι μικρό όμικρον της ίδιας g κοντά στο ξ, τότε και η $g_1 + \cdots + g_n$ είναι μικρό όμικρον της g κοντά στο ξ. Αυτό είναι σχεδόν προφανές:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi}\frac{g_1(x)}{g(x)} + \cdots + \lim_{x\to\xi}\frac{g_n(x)}{g(x)} = 0 + \cdots + 0 = 0.$$

Ορισμός. Αν στην συνάρτηση/άθροισμα $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ είναι όλες οι $g_1, \dots, g_n$ μικρό όμικρον της g κοντά στο ξ, τότε η g χαρακτηρίζεται **κύριος όρος** του αθροίσματος κοντά στο ξ και, τότε, είναι $f(x) \sim g(x)$ κοντά στο ξ.

Πράγματι,

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi}\big(1 + \frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)}\big) = 1.$$

Είναι *χρήσιμο* να μπορούμε να διακρίνουμε τον κύριο όρο σε ένα άθροισμα συναρτήσεων. Για παράδειγμα, αν στην $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ η g είναι ο κύριος όρος κοντά στον ξ και υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} g(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και τα δυο όρια είναι ίσα. Διότι, όπως είδαμε, είναι $f(x) \sim g(x)$ κοντά στο ξ, οπότε

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}g(x) = 1 \cdot \lim_{x\to\xi} g(x).$$

Ένα ακόμη παράδειγμα: αν στις $g + g_1 + \cdots + g_n$ και $h + h_1 + \cdots + h_m$ οι g, h είναι οι κύριοι όροι, αντιστοίχως, κοντά στο ξ, τότε

$$\frac{g(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{h(x)+h_1(x)+\cdots+h_m(x)} \sim \frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{κοντά στο } \xi$$

και, επομένως, αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}\frac{g(x)}{h(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi}\frac{g(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{h(x)+h_1(x)+\cdots+h_m(x)}$ και τα δυο όρια είναι ίσα.

`Παραδείγματα.` (1) Βάσει των προηγουμένων μπορούμε να δούμε με "νέο μάτι" τα όρια πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων.
Επειδή $x^k = \mathrm{o}(x^n)$ κοντά στο $+\infty$ για κάθε $k < n$, στο πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ $(a_n \neq 0)$

ο όρος a_nx^n είναι κύριος όρος κοντά στο $+\infty$, οπότε $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \sim a_nx^n$ κοντά στο $+\infty$ και, επομένως,

$$\lim_{x\to+\infty}(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=\lim_{x\to+\infty}a_nx^n\,.$$

Ομοίως, είναι

$$\tfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}\sim\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\quad\text{κοντά στο }+\infty,$$

οπότε είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\tfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{a_nx^n}{b_mx^m}\,.$$

(2) Και στα δυο αθροίσματα $xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}$ και $2e^{2x}+\log x-x^2e^x$ ο πρώτος τους όρος είναι ο κύριος όρος κοντά στο $+\infty$. Άρα

$$\tfrac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x}\sim\tfrac{xe^{2x}}{2e^{2x}}=\frac{x}{2}\quad\text{κοντά στο }+\infty,$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\tfrac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x}=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{x}{2}=+\infty.$$

Ασκήσεις.

1. (i) Έστω $a>1$. Ιεραρχήστε τις συναρτήσεις $\exp_a$, $\exp_a\circ\exp_a$, $\exp_a\circ\exp_a\circ\exp_a$ κατά τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. Γενικεύστε.
   (ii) Ιεραρχήστε τις συναρτήσεις $\log$, $\log\circ\log$, $\log\circ\log\circ\log$ κατά τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. Γενικεύστε.

2. (i) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x, $\log(e^x+x\log x)$, $e^{(1+\frac{1}{x})\log x}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$.
   (ii) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x, $\frac{x^2+x\log x}{\sin x+x^2}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στον 0.

3. Έστω οι συναρτήσεις $\frac{x^3e^x-x^5e^{\frac{x}{2}}}{xe^x+\sin x}$, $e^{\frac{x}{5}}+x^3e^{\frac{x}{6}}-x$, $e^{3\log(2+\log x)}$. Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους τους κοντά στο $+\infty$ σε πολυωνυμικές, εκθετικές και λογαριθμικές και ιεραρχήστε τις.

4. Λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις συναρτήσεις x^b $(b<0)$. Ομοίως, λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη εκθετική** ή **αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις συναρτήσεις a^x $(0<a<1)$ ή τις συναρτήσεις $(\log x)^c$ $(c<0)$, αντιστοίχως, κοντά στο $+\infty$.
   (i) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση με αντίστροφη πολυωνυμική ή αντίστροφη εκθετική ή αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ έχει όριο 0 στο $+\infty$.
   (ii) Αποδείξτε ότι κοντά στο $+\infty$ κάθε αντίστροφη εκθετική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους και ότι κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους.
   (iii) Ιεραρχήστε τις αντίστροφες πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους μεταξύ τους και κάντε το ίδιο για τις αντίστροφες εκθετικές και τις αντίστροφες λογαριθμικές τάξεις μεγέθους.
   (iv) Αποδείξτε ότι κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ $(a_n,b_m\neq 0)$, όπου $n<m$, έχει αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$.
   (v) Έστω οι συναρτήσεις $e^{-x}+2e^{-x^2}$, $\frac{1}{\log(x+\log x)}$, $\log\left(e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}\right)$. Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους τους κοντά στο $+\infty$ σε αντίστροφες πολυωνυμικές, αντίστροφες εκθετικές και αντίστροφες λογαριθμικές.

5. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{1-x}-1=\mathsf{o}(1)$, $\frac{1}{1-x}-(1+x)=\mathsf{o}(x)$, $\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2)=\mathsf{o}(x^2)$ κοντά στον 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες. Γενικεύστε.

6. Αποδείξτε ότι $e^x-1=\mathsf{o}(1)$, $e^x-\big(1+\frac{x}{1!}\big)=\mathsf{o}(x)$, $e^x-\big(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\big)=\mathsf{o}(x^2)$ κοντά στον 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες. Γενικεύστε.

7. Αποδείξτε ότι $\sin x-\big(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}\big)=\mathsf{o}(x^3)$, $\cos x-\big(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\big)=\mathsf{o}(x^4)$, $\sin x-\big(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\big)=\mathsf{o}(x^5)$, $\cos x-\big(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\big)=\mathsf{o}(x^6)$ κοντά στον 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες. Γενικεύστε.

8. Αποδείξτε ότι $\log(1+x)-x=\mathsf{o}(x)$, $\log(1+x)-\big(x-\frac{x^2}{2}\big)=\mathsf{o}(x^2)$, $\log(1+x)-\big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\big)=\mathsf{o}(x^3)$ κοντά στον 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες. Γενικεύστε.

9. Αποδείξτε ότι $\arctan x-x=\mathsf{o}(x)$, $\arctan x-\big(x-\frac{x^3}{3}\big)=\mathsf{o}(x^3)$, $\arctan x-\big(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\big)=\mathsf{o}(x^5)$ κοντά στον 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες. Γενικεύστε.

10. (i) Έστω $f(x)-(a+bx+cx^2+dx^3)=\mathsf{o}(x^3)$ κοντά στον 0. Αποδείξτε διαδοχικά ότι $f(x)-(a+bx+cx^2)=\mathsf{o}(x^2)$, $f(x)-(a+bx)=\mathsf{o}(x)$ και $f(x)-a=\mathsf{o}(1)$ κοντά στον 0. (ii) Βρείτε a,b,c,d ώστε $\frac{x}{e^x-1}-(a+bx+cx^2+dx^3)=\mathsf{o}(x^3)$ κοντά στον 0.

11. Διατυπώστε την άσκηση 9 της ενότητας 5.8 ως εξής. Έστω $a<\xi<b$ και ότι η f είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b). Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$ και είναι αριθμός, αποδείξτε ότι, κοντά στον ξ,

$$f(x)-\Big(f(\xi)+\frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\Big)=\mathsf{o}\big((x-\xi)^n\big).$$

Τα αποτελέσματα των ασκήσεων 5 - 9 είναι ειδικές περιπτώσεις.

12. (i) Ποιοι είναι οι κύριοι όροι των αθροισμάτων $e^{2x}\log x-x^5e^x$, $x\log x-\frac{x^2}{\log x}+x\sqrt{x}\log(\log x)$, $x^2\log x-x^2+3x\sin x$ κοντά στο $+\infty$;
(ii) Ποιοι είναι οι κύριοι όροι των αθροισμάτων $\frac{2}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}$, $1+2x-x\sqrt{x}$, $\frac{1}{(\sin x)^2}+\frac{3}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$ κοντά στον 0;

13. (i) Αν $f(x)=\mathsf{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ, αποδείξτε ότι $f(x)=\mathsf{O}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά: $\mathsf{o}\big(g(x)\big)=\mathsf{O}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ. Προσέξτε: *δεν* ισχύει $\mathsf{O}\big(g(x)\big)=\mathsf{o}\big(g(x)\big)$.
(ii) Είδαμε ότι, αν $f_1(x)=\mathsf{o}\big(g(x)\big)$ και $f_2(x)=\mathsf{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ, τότε $f_1(x)+f_2(x)=\mathsf{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά: $\mathsf{o}\big(g(x)\big)+\mathsf{o}\big(g(x)\big)=\mathsf{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ. Αποδείξτε και τα ανάλογα: $\mathsf{O}\big(g(x)\big)+\mathsf{O}\big(g(x)\big)=\mathsf{O}\big(g(x)\big)$, $\mathsf{o}\big(g_1(x)\big)\mathsf{O}\big(g_2(x)\big)=\mathsf{o}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$ και $\mathsf{O}\big(g_1(x)\big)\mathsf{O}\big(g_2(x)\big)=\mathsf{O}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$ κοντά στο ξ.

5.10 Ο τύπος του Taylor, I.

Πρόταση 5.18. *Έστω $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$, $f,g:[\xi,c]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[\xi,c]$, n φορές παραγωγίσιμες στο $[\xi,c)$ ώστε οι $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ να είναι συνεχείς στο $[\xi,c)$ και παραγωγίσιμες στο (ξ,c). Τότε υπάρχει $\zeta\in(\xi,c)$ ώστε*

$$\Big(f(c)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k\Big)g^{(n+1)}(\zeta)=\Big(g(c)-\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k\Big)f^{(n+1)}(\zeta).$$

Η ισότητα αυτή ισχύει και όταν $c < \xi$, αρκεί όλες οι προηγούμενες υποθέσεις να ισχύουν στο διάστημα $[c, \xi]$.

Απόδειξη. Έστω $\xi < c$. Ορίζουμε τους αριθμούς

$$a_f = f(c) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k\,, \qquad a_g = g(c) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k\,.$$

Οι αριθμοί αυτοί εμφανίζονται στην ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.
Επίσης, ορίζουμε τη συνάρτηση $h : [\xi, c] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = a_g\Big(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\Big) - a_f\Big(g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\Big).$$

Η h είναι συνεχής στο $[\xi, c]$, n φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi, c)$ και η $h^{(n)}$ είναι συνεχής στο $[\xi, c)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, c). Επίσης, είναι εύκολο να υπολογίσουμε ότι

$$h(c) = 0 \qquad \text{και} \qquad h^{(k)}(\xi) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Επειδή $h(\xi) = h(c) = 0$, συνεπάγεται από το Θεώρημα του Rolle ότι υπάρχει $\zeta_1 \in (\xi, c)$ ώστε $h^{(1)}(\zeta_1) = 0$. Επειδή $h^{(1)}(\xi) = h^{(1)}(\zeta_1) = 0$, υπάρχει $\zeta_2 \in (\xi, \zeta_1)$ και, επομένως, $\zeta_2 \in (\xi, c)$ ώστε $h^{(2)}(\zeta_2) = 0$. Επειδή $h^{(2)}(\xi) = h^{(2)}(\zeta_2) = 0$, υπάρχει $\zeta_3 \in (\xi, \zeta_2)$ και, επομένως, $\zeta_3 \in (\xi, c)$ ώστε $h^{(3)}(\zeta_3) = 0$. Συνεχίζοντας επαγωγικά με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο ότι υπάρχει $\zeta_{n+1} \in (\xi, c)$ ώστε $h^{(n+1)}(\zeta_{n+1}) = 0$. Ονομάζουμε $\zeta = \zeta_{n+1}$, οπότε έχουμε καταλήξει στο ότι υπάρχει $\zeta \in (\xi, c)$ ώστε

$$0 = h^{(n+1)}(\zeta) = a_g f^{(n+1)}(\zeta) - a_f g^{(n+1)}(\zeta)$$

και, επομένως, $a_f g^{(n+1)}(\zeta) = a_g f^{(n+1)}(\zeta)$.
Στην περίπτωση $c < \xi$ η απόδειξη είναι ίδια. □

Παρατηρήστε ότι, στην περίπτωση $n = 0$, η Πρόταση 5.18 ταυτίζεται με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy).

Θεώρημα 5.1. *Έστω $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $f : [\xi, c] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\xi, c]$, n φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi, c)$ ώστε η $f^{(n)}$ να είναι συνεχής στο $[\xi, c)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, c). Τότε υπάρχει $\zeta \in (\xi, c)$ ώστε*

$$(\textbf{\textit{Lagrange}}) \qquad f(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(c-\xi)^{n+1}\,.$$

Επίσης, υπάρχει (διαφορετικός, ίσως) $\zeta \in (\xi, c)$ ώστε

$$(\textbf{\textit{Cauchy}}) \qquad f(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(c-\zeta)^n(c-\xi).$$

Οι ίδιες ισότητες ισχύουν και όταν $c < \xi$, αρκεί όλες οι προηγούμενες υποθέσεις να ισχύουν στο διάστημα $[c, \xi]$.

Απόδειξη. Για την πρώτη ισότητα εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.18 στο $[\xi, c]$ με τη συνάρτηση $g(x) = (x-\xi)^{n+1}$. Για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε είτε τη συνάρτηση $g(x) = x - \xi$, αν $n = 0$, είτε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} (c-x)\log(c-x) - (c-x), & \text{αν } \xi \leq x < c \\ 0, & \text{αν } x = c \end{cases}$ αν $n \geq 1$. □

Ορισμός. Αν μια συνάρτηση f είναι τουλάχιστον n φορές παραγωγίσιμη στον ξ, το

$$p_{n,\xi}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

ονομάζεται **πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στον ξ**.
Οι δυο ισότητες στο Θεώρημα 5.1 γράφονται

$$f(c) = p_{n,\xi}(c) + R_{n,\xi}(c,\zeta),$$

όπου

$$R_{n,\xi}(c,\zeta) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(c-\xi)^{n+1} \qquad \text{ή} \qquad R_{n,\xi}(c,\zeta) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(c-\zeta)^n(c-\xi).$$

Η πρώτη ισότητα ονομάζεται **τύπος του Taylor για την f στον ξ με υπόλοιπο Lagrange** και η δεύτερη ισότητα ονομάζεται **τύπος του Taylor για την f στον ξ με υπόλοιπο Cauchy**. Το $R_{n,\xi}(c,\zeta)$ ονομάζεται **υπόλοιπο Lagrange** ή, αντιστοίχως, **Cauchy τάξης** n.

Θα δούμε μια ακόμη παραλλαγή του τύπου του Taylor στην ενότητα 7.4.

Το υπόλοιπο τάξης n εκφράζει το σφάλμα που γίνεται όταν αντικαθίσταται η τιμή $f(c)$ από την τιμή $p_{n,\xi}(c)$ του πολυωνύμου Taylor τάξης n στον ξ που της αντιστοιχεί. Κάθε εφαρμογή του τύπου του Taylor αποσκοπεί στο να αποδείξει ότι το $R_{n,\xi}(c,\zeta)$ είναι μικρό και, επομένως, ότι η τιμή $f(c)$ προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την τιμή $p_{n,\xi}(c)$.

Παραδείγματα. (1) Έστω πολυωνυμική συνάρτηση p βαθμού $\leq n$. Η p είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και, επομένως, μπορεί να εφαρμοσθεί το Θεώρημα 5.1 για κάθε ξ, c. Επειδή $p^{(n+1)}(\zeta) = 0$ για κάθε ζ, είναι $R_{n,\xi}(c,\zeta) = 0$ και, επομένως,

$$p(c) = p_{n,\xi}(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k$$

για κάθε ξ, c. Δηλαδή η προσέγγιση ενός πολυωνύμου p βαθμού $\leq n$ από οποιοδήποτε πολυώνυμο Taylor τάξης $\geq n$ του p είναι τέλεια.
(2) Θα υπολογίσουμε τον αριθμό $\sqrt{4+10^{-5}}$ με σφάλμα $< 10^{-17}$.
Παρατηρούμε ότι ο $c = 4+10^{-5}$ είναι πολύ κοντά στον $\xi = 4$ και ότι ο αριθμός $\sqrt{4}$ υπολογίζεται εύκολα. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x}$$

στο διάστημα $[4, 4+10^{-5}]$ με παραγώγους

$$f^{(k)}(x) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)\cdots(\tfrac{1}{2}-k+1)x^{\frac{1}{2}-k}.$$

Στον $\xi = 4$ υπολογίζουμε ακριβώς:

$$f^{(k)}(4) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)\cdots(\tfrac{1}{2}-k+1)4^{\frac{1}{2}-k}$$

και, επομένως,

$$f'(4) = \tfrac{1}{4} \qquad \text{και} \qquad f^{(k)}(4) = (-1)^{k-1}\tfrac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^{3k-1}} \quad (k \geq 2).$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε ένα άνω φράγμα για την $|f^{(n+1)}(x)|$ στο διάστημα $(4, 4+10^{-5})$. Γράφουμε

$$|f^{(n+1)}(x)| = |\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)\cdots(\tfrac{1}{2}-n)x^{\frac{1}{2}-n-1}| \leq \tfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}\tfrac{1}{4^{n+\frac{1}{2}}} = \tfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{3n+2}}.$$

Επομένως, για το υπόλοιπο Lagrange ισχύει

$$|R_{n,4}(4+10^{-5},\zeta)| \leq \tfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{3n+2}(n+1)!}10^{-5(n+1)}\,.$$

Αν $n=2$, τότε

$$|R_{2,4}(4+10^{-5},\zeta)| < 10^{-17}$$

και, επομένως, ο τύπος του Taylor γράφεται

$$\left|\sqrt{4+10^{-5}} - 2 - \tfrac{1}{4}10^{-5} - \tfrac{1}{2!}(-1)^{2-1}\tfrac{1\cdot 3\cdots(2\cdot 2-3)}{2^{3\cdot 2-1}}(10^{-5})^2\right| < 10^{-17}\,.$$

Άρα ο αριθμός

$$2+\tfrac{1}{4}10^{-5} + \tfrac{1}{2!}(-1)^{2-1}\tfrac{1\cdot 3\cdots(2\cdot 2-3)}{2^{3\cdot 2-1}}(10^{-5})^2 = \tfrac{1280001599999}{640000000000} \approx 2$$

είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{4+10^{-5}}$ με σφάλμα $< 10^{-17}$.

Ασκήσεις.

1. Υποθέστε ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στον ξ και αποδείξτε ότι το $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ για το οποίο ισχύει $p^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi)$ για κάθε $k=0,1,\dots,n$.

2. Εφαρμόστε τον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange στην $f(x)=\sqrt{x}$ στο διάστημα $[\xi,c]=[4,4+10^{-5}]$. Ποιον $n\in\mathbb{N}$ πρέπει να χρησιμοποιήσετε ώστε να προσεγγίσετε τον $\sqrt{4+10^{-5}}$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

3. Προσαρμόστε την προηγούμενη άσκηση στην προσέγγιση των sin(1^o) και sin(31^o) με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου.
   Υπόδειξη: $1^o = 0+\frac{\pi}{180}$, $31^o = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}$.

4. Στον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange $\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(c-\xi)^{n+1}$ ο ζ εξαρτάται, φυσικά, από τον c. Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει η $f^{(n+2)}(x)$ στο $[\xi,c)$ και είναι συνεχής στον ξ, τότε $\lim_{c\to\xi+}\frac{\zeta-\xi}{c-\xi} = \frac{1}{n+2}$.

Κεφάλαιο 6

Ολοκληρώματα Riemann.

6.1 Διαμερίσεις και αθροίσματα Darboux.

Ορισμός. Έστω $a < b$ και το αντίστοιχο διάστημα $[a, b]$. Ονομάζουμε **διαμέριση** του $[a, b]$ οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του $[a, b]$ το οποίο περιέχει τουλάχιστον τους a, b. Κάθε διαμέριση του $[a, b]$ τη συμβολίζουμε, συνήθως,

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\} = \{x_k \,|\, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n\},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Η Δ ονομάζεται **διαμέριση** $n+1$ **σημείων** του $[a, b]$ και τα $x_0, \ldots, x_n$ ονομάζονται **Δ-σημεία**. Το x_k ονομάζεται k-οστό Δ-σημείο. Η Δ χωρίζει το $[a, b]$ στα n υποδιαστήματα

$$[x_0, x_1], \ \ldots \ , [x_{n-1}, x_n],$$

τα οποία ονομάζονται **Δ-διαστήματα**. Το $[x_{k-1}, x_k]$ ονομάζεται k-οστό Δ-διάστημα.

Παραδείγματα. (1) Η απλούστερη διαμέριση του $[a, b]$ είναι η διαμέριση δύο σημείων $\Delta = \{a = x_0, x_1 = b\}$. Αυτή ορίζει *ένα* Δ-διάστημα, το $[x_0, x_1] = [a, b]$.
(2) Υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις τριών σημείων του $[a, b]$. Πράγματι, κάθε $x_1 \in (a, b)$ ορίζει διαμέριση $\{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$ τριών σημείων. Προφανώς, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις τεσσάρων σημείων, πέντε σημείων κλπ.
(3) Η απλούστερη διαμέριση $n+1$ σημείων Δ του $[a, b]$ είναι η διαμέριση σε n ισομήκη υποδιαστήματα, δηλαδή εκείνη της οποίας όλα τα Δ-διαστήματα έχουν το ίδιο μήκος. Επειδή το πλήθος των Δ-διαστημάτων είναι n και το συνολικό τους μήκος $b - a$, το μήκος καθενός από αυτά είναι $\frac{b-a}{n}$. Επομένως, τα Δ-σημεία είναι τα $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}$ και ούτω καθ' εξής: για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$ το k-οστό Δ-σημείο είναι το

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n}\,.$$

Πράγματι, τότε το μήκος του $[x_{k-1}, x_k]$ είναι

$$x_k - x_{k-1} = (a + k\tfrac{b-a}{n}) - (a + (k-1)\tfrac{b-a}{n}) = \tfrac{b-a}{n}$$

και το n-οστό Δ-σημείο είναι το $x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$.
(4) Τονίζουμε ότι, αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις $n+1$ σημείων του $[a, b]$ και όχι μόνο η διαμέριση σε ισομήκη υποδιαστήματα. Για παράδειγμα, η $\{0, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{13}{15}, \frac{23}{24}, 1\}$ είναι μια διαμέριση 6 σημείων του $[0, 1]$ και η $\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\}$ είναι η διαμέριση 6 σημείων σε ισομήκη υποδιαστήματα του $[0, 1]$.

Ορισμός. Έστω Δ', Δ'' δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Η Δ'' χαρακτηρίζεται **λεπτότερη** από την Δ' αν $\Delta' \subseteq \Delta''$ ή, με άλλα λόγια, αν κάθε Δ'-σημείο είναι και Δ''-σημείο ή, με άλλα λόγια, αν η Δ'' περιέχει τα σημεία της Δ' και πιθανόν επιπλέον σημεία.

Παραδείγματα. (1) Η διαμέριση $\Delta'' = \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$ είναι λεπτότερη από τη διαμέριση $\Delta' = \{0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, 1\}$ του $[0,1]$.
(2) Από τις διαμερίσεις $\Delta' = \{0, \frac{1}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}, 1\}$, $\Delta'' = \{0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, 1\}$ του $[0,1]$ καμιά δεν είναι λεπτότερη από την άλλη.

Ορισμός. Έστω Δ', Δ'' δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε η $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ και ονομάζεται **κοινή εκλέπτυνση** των Δ', Δ''. Προφανώς, είναι $\Delta' \subseteq \Delta$ και $\Delta'' \subseteq \Delta$, δηλαδή η Δ είναι λεπτότερη από την Δ' και από την Δ''.

Παράδειγμα. Στο προηγούμενο παράδειγμα (1) η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η Δ'', ενώ στο παράδειγμα (2) η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η $\Delta = \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$.

Το Λήμμα 6.1 λέει ότι η κοινή εκλέπτυνση των διαμερίσεων Δ', Δ'' του $[a,b]$ είναι, από όλες τις διαμερίσεις του $[a,b]$ που είναι λεπτότερες απο την Δ' και από την Δ'', εκείνη που έχει τα λιγότερα σημεία.

Λήμμα 6.1. *Έστω Δ', Δ'' διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε κάθε διαμέριση του $[a,b]$ οι οποία είναι λεπτότερη από την Δ' και την Δ'' είναι λεπτότερη και από την κοινή εκλέπτυνση $\Delta' \cup \Delta''$.*

Απόδειξη. Έστω διαμέριση Δ''' του $[a,b]$ λεπτότερη από την Δ' και από την Δ''. Δηλαδή, έστω $\Delta' \subseteq \Delta'''$ και $\Delta'' \subseteq \Delta'''$. Τότε $\Delta' \cup \Delta'' \subseteq \Delta'''$ και, επομένως, η Δ''' είναι λεπτότερη από την $\Delta' \cup \Delta''$. □

Ορισμός. Έστω φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a,b]$. Για κάθε Δ-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ συμβολίζουμε

$$u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Ονομάζουμε **άνω άθροισμα Darboux της f ως προς την Δ στο** $[a,b]$ το

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) = u_1(x_1 - x_0) + \cdots + u_n(x_n - x_{n-1})$$

και **κάτω άθροισμα Darboux της f ως προς την Δ στο** $[a,b]$ το

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) = l_1(x_1 - x_0) + \cdots + l_n(x_n - x_{n-1}).$$

Ιδού δυο γενικά παραδείγματα.

Παραδείγματα. (1) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο $[a,b]$ και οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a,b]$. Τότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ η f έχει μέγιστη τιμή $f(x_k)$ και ελάχιστη τιμή $f(x_{k-1})$. Άρα

$$u_k = f(x_k), \qquad l_k = f(x_{k-1})$$

και, επομένως,

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}), \qquad \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).$$

Αν η f είναι φθίνουσα, το μόνο που αλλάζει είναι ότι

$$u_k = f(x_{k-1}), \qquad l_k = f(x_k)$$

και, επομένως,

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \qquad \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

(2) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$. Τότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν ζ_k και η_k ώστε:

$$f(\zeta_k) \leq f(x) \leq f(\eta_k)$$

για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Άρα

$$u_k = f(\eta_k), \qquad l_k = f(\zeta_k),$$

οπότε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}), \qquad \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Σχόλια. Θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν πολλές φορές παρακάτω και, μερικές φορές, ακόμη και *χωρίς ιδιαίτερη επισήμανση*.

1. Έστω φραγμένη $f : [c,d] \to \mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ είναι φραγμένο και, αν

$$u = \sup\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}, \qquad l = \inf\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\},$$

τότε είναι

$$l \leq u.$$

Επίσης, έστω $[c', d'] \subseteq [c,d]$ και

$$u' = \sup\{f(x) \,|\, c' \leq x \leq d'\}, \qquad l' = \inf\{f(x) \,|\, c' \leq x \leq d'\}.$$

Για κάθε $x \in [c', d']$ είναι $x \in [c,d]$, οπότε $l \leq f(x) \leq u$. Άρα οι l και u είναι, αντιστοίχως, κάτω φράγμα και άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, c' \leq x \leq d'\}$, οπότε

$$l \leq l' \leq u' \leq u.$$

Με λόγια:

Όταν το διάστημα μικραίνει, τότε το supremum της συνάρτησης μένει ίδιο ή μικραίνει και το infimum της μένει ίδιο ή μεγαλώνει.

2. Από τις $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1})$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1})$ προκύπτει η ισότητα

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Επειδή είναι $l_k \leq u_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, κάθε όρος του τελευταίου αθροίσματος είναι μη-αρνητικός, οπότε και το συνολικό άθροισμα είναι *μη-αρνητικό*. Επίσης, αν παραλείψουμε κάποιους όρους του αθροίσματος, το άθροισμα που θα απομείνει θα είναι κι αυτό *μη-αρνητικό* και *όχι μεγαλύτερο από το αρχικό άθροισμα*.

3. Όπως στην πρώτη παρατήρηση, έστω $u = \sup\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ και $l = \inf\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ και έστω ότι ισχύει

$$f(s) - f(t) \leq w \quad \text{για κάθε} \quad s, t \in [c,d].$$

Τότε για κάθε $s \in [c,d]$ ισχύει $f(s) - w \leq f(t)$ για κάθε $t \in [c,d]$. Άρα για κάθε $s \in [c,d]$ ο $f(s) - w$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\inf\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ και, επομένως, είναι $f(s) - w \leq l$ ή, ισοδύναμα, $f(s) \leq w + l$. Άρα ο $w + l$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\sup\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$, οπότε $u \leq w + l$. Άρα

$$u - l \leq w.$$

Το ίδιο αποδεικνύεται και με άλλο τρόπο. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $x' \in [c,d]$ ώστε $f(x') > u - \frac{\varepsilon}{2}$ και υπάρχει $x'' \in [c,d]$ ώστε $f(x'') < l + \frac{\varepsilon}{2}$. Συνεπάγεται $u - l - \varepsilon < f(x') - f(x'') \leq w$. Άρα είναι $u - l - \varepsilon < w$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και, επομένως, $u - l \leq w$.
Δείτε σχετικά στην άσκηση 3.

Λήμμα 6.2. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση Δ του $[a,b]$. Αν $u = \sup\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$, $l = \inf\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$, τότε*

$$l(b-a) \leq \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq u(b-a).$$

Απόδειξη. Έστω $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$. Για κάθε $k = 1, \dots, n$ είναι $[x_{k-1}, x_k] \subseteq [a,b]$, οπότε

$$l \leq l_k \leq u_k \leq u$$

και, επομένως,

$$l(x_k - x_{k-1}) \leq l_k(x_k - x_{k-1}) \leq u_k(x_k - x_{k-1}) \leq u(x_k - x_{k-1}).$$

Συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{k=1}^n l(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n u(x_k - x_{k-1}).$$

Το αριστερό άθροισμα είναι ίσο με $l\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = l(b-a)$ και το δεξιό άθροισμα είναι ίσο με $u\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = u(b-a)$. □

Το Λήμμα 6.3 είναι πολύ βασικό για την ανάπτυξη της θεωρίας. Λέει ότι, όταν εκλεπτύνεται η διαμέριση, το άνω άθροισμα Darboux μένει ίδιο ή μικραίνει και το κάτω άθροισμα Darboux μένει ίδιο ή μεγαλώνει.

Λήμμα 6.3. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$. Αν η Δ'' είναι λεπτότερη από την Δ', τότε*

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta').$$

Απόδειξη. Έστω $\Delta' = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$. Η Δ'' περιέχει τα Δ'-σημεία και πιθανόν περισσότερα σημεία. Έτσι, σε κάθε Δ'-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ενδέχεται να υπάρχουν και άλλα Δ''-σημεία, εκτός των x_{k-1} και x_k. Θεωρούμε, τώρα, σε κάθε Δ'-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ όλα τα Δ''-σημεία τα οποία περιέχονται στο διάστημα αυτό και με αυτά τα σημεία δημιουργούμε μια διαμέριση Δ_k'' του διαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$. Επομένως,

$$\Delta'' = \cup_{k=1}^n \Delta_k''.$$

Είναι σαφές ότι τα Δ_k''-διαστήματα είναι εκείνα ακριβώς τα Δ''-διαστήματα τα οποία περιέχονται στο $[x_{k-1}, x_k]$. Παρατηρούμε, τώρα, ότι οι όροι του αθροίσματος $\overline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta_k'')$ είναι εκείνοι ακριβώς οι όροι του αθροίσματος $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$ οι οποίοι αντιστοιχούν στα Δ''-διαστήματα τα οποία περιέχονται στο $[x_{k-1}, x_k]$. Επομένως,

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') = \textstyle\sum_{k=1}^n \overline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta_k'')$$

και, ομοίως,

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') = \textstyle\sum_{k=1}^n \underline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta_k'').$$

Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 6.2 σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, βρίσκουμε

$$l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \underline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta_k'') \leq \overline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta_k'') \leq u_k(x_k - x_{k-1})$$

για κάθε $k = 1, \dots, n$. Το τελικό συμπέρασμα προκύπτει αθροίζοντας κατά μέλη τις ανισότητες αυτές για $k = 1, \dots, n$. □

Και το Λήμμα 6.4 είναι πολύ βασικό. Λέει ότι κάθε κάτω άθροισμα Darboux είναι μικρότερο από ή ίσο με κάθε άνω άθροισμα Darboux, ακόμη κι αν τα δυο αυτά αθροίσματα Darboux δεν προέρχονται από ίδιες διαμερίσεις.

Λήμμα 6.4. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$. Τότε*

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'').$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$. Η Δ είναι λεπτότερη από την Δ', οπότε

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Επίσης, η Δ είναι λεπτότερη από την Δ'', οπότε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'').$$

Τέλος, είναι

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Άρα $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$. □

Τονίζουμε ότι, για να ορίσουμε τα άνω και κάτω αθροίσματα Darboux μιας συνάρτησης σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, *προϋποτίθεται* ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη στο διάστημα. Δείτε την άσκηση 2.

Ασκήσεις.

1. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
   (i) Αν υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a,b]$.
   Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $u_k = l_k$ για κάθε Δ-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, ότι η f είναι σταθερή σε κάθε τέτοιο Δ-διάστημα και, τέλος, ότι είναι σταθερή στο $[a,b]$.
   (ii) Αν υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') = \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a,b]$.
   Υπόδειξη: Θεωρήστε την $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$.

2. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $[a,b]$, τότε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ είναι $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = +\infty$ και ότι, αν η f δεν είναι κάτω φραγμένη στο $[a,b]$, τότε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ είναι $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = -\infty$.

3. **Ταλάντωση συνάρτησης σε διάστημα**. Έστω $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ και $u = \sup\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ και $l = \inf\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$. Ορίζουμε $\omega(f;c,d) = u - l$ και το $\omega(f;c,d)$ το ονομάζουμε **ταλάντωση** της f στο διάστημα $[c,d]$. Να αντιπαραβάλετε με την έννοια της ταλάντωσης σε σημείο στην άσκηση 4 της ενότητας 3.7.
   (i) Παρατηρήστε ότι $0 \leq \omega(f;c,d) \leq +\infty$ και αποδείξτε ότι $\omega(f;c,d) < +\infty$ αν και μόνο αν η f είναι φραγμένη στο $[c,d]$.
   (ii) Αποδείξτε ότι

$$\omega(f;c,d) = \sup\{f(s) - f(t) \,|\, s,t \in [c,d]\} = \sup\{|f(s) - f(t)| \,|\, s,t \in [c,d]\}.$$

6.2 Ολοκλήρωμα. Ο ορισμός του Darboux.

6.2.1 Ορισμός και πρώτα παραδείγματα.

Ορισμός. Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **κάτω ολοκλήρωμα της** f **στό** $[a,b]$ το

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\,|\,\Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

και **άνω ολοκλήρωμα της** f **στό** $[a,b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\,|\,\Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}.$$

Πρόταση 6.1. *Έστω φραγμένη* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $u=\sup\{f(x)\,|\,a\leq x\leq b\}$ *και* $l=\inf\{f(x)\,|\,a\leq x\leq b\}$. *Τότε*

$$l(b-a)\leq \underline{\int_a^b} f\leq \overline{\int_a^b} f\leq u(b-a).$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από το Λήμμα 6.2 ότι

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\leq u(b-a)$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$. Επειδή

$$\overline{\int_a^b} f\leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$$

για κάθε Δ, συνεπάγεται $\overline{\int_a^b} f\leq u(b-a)$. Ομοίως, $l(b-a)\leq \underline{\int_a^b} f$.
Έστω διαμερίσεις Δ' και Δ'' του $[a,b]$. Τότε είναι

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')\leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'').$$

Άρα το $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\,|\,\Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$ και, επομένως,

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')\leq \overline{\int_a^b} f.$$

Άρα, λοιπόν, το $\overline{\int_a^b} f$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\,|\,\Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$ και, επομένως, $\underline{\int_a^b} f\leq \overline{\int_a^b} f$. □

Ορισμός. Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **ολοκληρώσιμη** ή, πιο σωστά, **Riemann ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$ αν $\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε την κοινή τιμή των $\underline{\int_a^b} f$ και $\overline{\int_a^b} f$ ονομάζουμε **ολοκλήρωμα** ή, πιο σωστά, **Riemann ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ και τη συμβολίζουμε $\int_a^b f$. Δηλαδή,

$$\int_a^b f=\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f.$$

Ο ορισμός αυτός του ολοκληρώματος Riemann είναι ο ορισμός τον οποίο έδωσε ο Darboux. Στην ενότητα 6.5 θα γνωρίσουμε και τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann που έδωσε ο Riemann.

Παραδείγματα. (1) Έστω σταθερή συνάρτηση $c : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$. Τότε

$$\{c \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\} = \{c\},$$

οπότε

$$l_k = u_k = c.$$

Άρα

$$\underline{\Sigma}(c;a,b;\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a), \quad \overline{\Sigma}(c;a,b;\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a).$$

Άρα τα σύνολα $\{\underline{\Sigma}(c;a,b;\Delta) |\, \Delta$ διαμέριση του $[a,b]\}$, $\{\overline{\Sigma}(c;a,b;\Delta) |\, \Delta$ διαμέριση του $[a,b]\}$ περιέχουν ένα μόνο στοιχείο, το $c(b-a)$. Άρα

$$\underline{\textstyle\int_a^b} c = c(b-a), \qquad \overline{\textstyle\int_a^b} c = c(b-a)$$

και, επομένως, η c είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b c = c(b-a).$$

(2) Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$. Σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός και τουλάχιστον ένας άρρητος. Άρα

$$\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\} = \{0, 1\}.$$

Άρα

$$l_k = 0, \qquad u_k = 1$$

και, επομένως,

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n 0(x_k - x_{k-1}) = 0, \qquad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n 1(x_k - x_{k-1}) = b-a.$$

Άρα $\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \,|\, \Delta$ διαμέριση του $[a,b]\} = \{0\}$, οπότε

$$\underline{\textstyle\int_a^b} f = 0.$$

Ομοίως, $\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \,|\, \Delta$ διαμέριση του $[a,b]\} = \{b-a\}$ και, επομένως,

$$\overline{\textstyle\int_a^b} f = b - a > 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f$, οπότε η f *δεν* είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και *δεν* ορίζεται το $\int_a^b f$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και για κάθε δυο διαμερίσεις Δ' και Δ'' του $[a,b]$ ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$$

και, στην περίπτωση που η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$,

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'').$$

Αυτές τις ιδιότητες θα τις χρησιμοποιούμε συχνά από εδώ και πέρα.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το βασικό θεωρητικό κριτήριο για να αποδεικνύεται η ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης.

Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας. *Έστω φραγμένη* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon>0$ *υπάρχει διαμέριση* Δ *του* $[a,b]$ *ώστε*

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') < \overline{\int_a^b} f + \tfrac{\varepsilon}{2}, \qquad \underline{\int_a^b} f - \tfrac{\varepsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta').$$

Έστω η $\Delta=\Delta'\cup\Delta''$. Τότε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \overline{\int_a^b} f + \tfrac{\varepsilon}{2}, \qquad \underline{\int_a^b} f - \tfrac{\varepsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, συνεπάγεται

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \int_a^b f + \tfrac{\varepsilon}{2}, \qquad \int_a^b f - \tfrac{\varepsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Αφαιρώντας, βρίσκουμε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \varepsilon.$$

Επειδή $\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \underline{\int_a^b} f$, συνεπάγεται

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon>0$, συνεπάγεται

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq 0,$$

οπότε $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. □

Το επόμενο παράδειγμα είναι βασικό. Ένα προσεκτικό σχέδιο θα βοηθήσει.

Παράδειγμα. Έστω $\xi\in[a,b]$ και η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in[a,b], x\neq\xi\\ 1, & \text{αν } x=\xi\end{cases}$

Έστω ε. Θεωρούμε συγκεκριμένη διαμέριση Δ του $[a,b]$, διακρίνοντας περιπτώσεις, ως εξής.
Αν $\xi=a$, θεωρούμε $x_1\in(a,b)$ ώστε $x_1-a<\varepsilon$ και την $\Delta=\{a=x_0,x_1,x_2=b\}$. Τότε $u_1=1$, $l_1=0$ και $u_2=0$, $l_2=0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=u_1(x_1-x_0)+u_2(x_2-x_1)=x_1-x_0<\varepsilon$ και

$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) = 0$.
Αν $\xi = b$, θεωρούμε $x_1 \in (a,b)$ ώστε $b - x_1 < \varepsilon$ και την $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$. Τότε $u_1 = 0$, $l_1 = 0$ και $u_2 = 1$, $l_2 = 0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) = x_2 - x_1 < \varepsilon$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) = 0$.
Αν $a < \xi < b$, θεωρούμε $x_1 \in (a,\xi)$, $x_2 \in (\xi,b)$ ώστε $x_2 - x_1 < \varepsilon$ και την $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3 = b\}$. Τότε $u_1 = 0$, $l_1 = 0$, $u_2 = 1$, $l_2 = 0$ και $u_3 = 0$, $l_3 = 0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) + u_3(x_3 - x_2) = x_2 - x_1 < \varepsilon$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) + l_3(x_3 - x_2) = 0$.
Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = 0, \qquad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \varepsilon$$

και, επομένως,

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \varepsilon.$$

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Επιπλέον, για την ίδια Δ, ισχύει

$$0 = \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $0 \le \int_a^b f < \varepsilon$ και, επομένως,

$$\int_a^b f = 0.$$

Αν εξαιρέσουμε τις μεθόδους του επόμενου κεφαλαίου, οι οποίες βασίζονται στη σχέση ανάμεσα στις έννοιες του ολοκληρώματος και της παραγώγου, η Πρόταση 6.2 καθώς και η Πρόταση 6.15 που θα δούμε λίγο πιο μετά παρέχουν τις βασικές μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Οι μέθοδοι αυτές προέρχονται κατευθείαν από τον ορισμό του ολοκληρώματος.

Πρόταση 6.2. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to 0$. Στην περίπτωση αυτή, είναι*

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f, \qquad \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ ώστε

$$0 \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) < \tfrac{1}{n}\,.$$

Άρα υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to 0$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) < \varepsilon$$

οπότε, σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Από $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \le \int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)$ συνεπάγεται

$$0 \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)$$

και, επίσης,

$$0 \le \int_a^b f - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f$. $\square$

Είναι πολύ συνηθισμένο να συμβολίζουμε τα $\int_a^b f$, $\underline{\int_a^b} f$ και $\overline{\int_a^b} f$ με τρόπο ώστε να φαίνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης f. Δηλαδή, γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Φυσικά, τα ολοκληρώματα αυτά παραμένουν αμετάβλητα αν, για παράδειγμα, τα συμβολίσουμε $\int_a^b f(t)\,dt$, $\underline{\int_a^b} f(t)\,dt$, $\overline{\int_a^b} f(t)\,dt$, αντιστοίχως.

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση $p_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τον τύπο $p_1(x) = x$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα. Δηλαδή, έστω $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ για $k = 0, \dots, n$.
Επειδή η p_1 είναι αύξουσα, είναι $u_k = p_1(x_k) = x_k$ και $l_k = p_1(x_{k-1}) = x_{k-1}$. Άρα

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(p_1; a, b; \Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^n x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \big(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\big)\\ &= \textstyle\frac{b-a}{n}\big(na + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\big) = \frac{b-a}{n}\big(na + \frac{b-a}{n}\frac{n(n-1)}{2}\big) \to \frac{b^2-a^2}{2}\,.\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο,

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(p_1; a, b; \Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^n x_k(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \big(a + k\frac{b-a}{n}\big)\\ &= \textstyle\frac{b-a}{n}\big(na + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} k\big) = \frac{b-a}{n}\big(na + \frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2}\big) \to \frac{b^2-a^2}{2}\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\overline{\Sigma}(p_1; a, b; \Delta_n) - \underline{\Sigma}(p_1; a, b; \Delta_n) \to 0,$$

οπότε η p_1 είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b p_1 = \frac{b^2-a^2}{2}$ ή, ισοδύναμα,

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}\,.$$

6.2.2 Εμβαδόν.

Δεν θα μας απασχολήσει ο αυστηρός ορισμός της έννοιας του **εμβαδού** $E(A)$ υποσυνόλων A του καρτεσιανού επιπέδου. Θα δεχτούμε, όμως, ότι, όπως κι αν ορίζεται η έννοια του εμβαδού, πρέπει να έχει κάποιες βασικές ιδιότητες. Μερικές από αυτές είναι:
(i) $E(A) \geq 0$ για κάθε σύνολο A το οποίο έχει εμβαδό.
(ii) το εμβαδό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο των μηκών των δυο μη-παράλληλων πλευρών του.
(iii) αν δυο σύνολα A_1 και A_2 έχουν εμβαδά $E(A_1)$ και $E(A_2)$ και αν η τομή τους είναι κενή ή είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους ευθυγράμμων τμημάτων, τότε η ένωσή τους $A_1 \cup A_2$ έχει εμβαδό και αυτό είναι $E(A_1 \cup A_2) = E(A_1) + E(A_2)$.
(iv) αν δυο σύνολα A_1 και A_2 έχουν εμβαδά $E(A_1)$ και $E(A_2)$ και αν $A_1 \subseteq A_2$, τότε $E(A_1) \leq E(A_2)$.

Έστω συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με την επιπλέον υπόθεση ότι ισχύει

$$f(x) \geq 0$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \,|\, x \in [a,b]\}$$

της συνάρτησης, ως υποσύνολο του καρτεσιανού επιπέδου, περιέχεται στο ημιεπίπεδο πάνω από τον x-άξονα. Ορίζεται, επίσης, και το σύνολο

$$A = \{(x, y) \,|\, x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\},$$

δηλαδή το υποσύνολο του καρτεσιανού επιπέδου το οποίο περικλείεται ανάμεσα στο οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, 0)$, $(b, 0)$ (δηλαδή το διάστημα $[a, b]$ του x-άξονα), στο κατακόρυφο ευθ. τμήμα με άκρα $(a, 0)$, $(a, f(a))$, στο κατακόρυφο ευθ. τμήμα με άκρα $(b, 0)$, $(b, f(b))$ και στο γράφημα Γ της συνάρτησης.

Υποθέτουμε ότι *η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι το σύνολο A έχει εμβαδό $E(A)$* και θα αποδείξουμε ότι

$$E(A) = \int_a^b f.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \varepsilon.$$

Θυμόμαστε ότι

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}), \qquad \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}),$$

όπου

$$u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Τώρα, για κάθε $k = 1, \ldots, n$ θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο B_k που έχει κατακόρυφες πλευρές το ευθ. τμήμα με άκρα $(x_{k-1}, 0)$, (x_{k-1}, l_k) και το ευθ. τμήμα με άκρα $(x_k, 0)$, (x_k, l_k) και οριζόντιες πλευρές το ευθ. τμήμα με άκρα $(x_{k-1}, 0)$, $(x_k, 0)$ και το ευθ. τμήμα με άκρα (x_{k-1}, l_k), (x_k, l_k). Βάσει της ιδιότητας (ii), το B_k έχει εμβαδό

$$E(B_k) = l_k(x_k - x_{k-1}).$$

Επίσης, για κάθε $k = 1, \ldots, n$ θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο C_k που έχει κατακόρυφες πλευρές το ευθ. τμήμα με άκρα $(x_{k-1}, 0)$, (x_{k-1}, u_k) και το ευθ. τμήμα με άκρα $(x_k, 0)$, (x_k, u_k) και οριζόντιες πλευρές το ευθ. τμήμα με άκρα $(x_{k-1}, 0)$, $(x_k, 0)$ και το ευθ. τμήμα με άκρα (x_{k-1}, u_k), (x_k, u_k). Το C_k έχει εμβαδό

$$E(C_k) = u_k(x_k - x_{k-1}).$$

Κατόπιν, θεωρούμε τις ενώσεις

$$B = B_1 \cup \cdots \cup B_n\,, \qquad C = C_1 \cup \cdots \cup C_n\,,$$

οι οποίες, βάσει της ιδιότητας (iii), έχουν εμβαδά

$$E(B) = \textstyle\sum_{k=1}^n E(B_k) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$$

και

$$E(C) = \textstyle\sum_{k=1}^n E(C_k) = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta).$$

Επειδή, για κάθε $k = 1, \ldots, n$, ισχύει $l_k \le f(x) \le u_k$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$, συνεπάγεται ότι το σύνολο A περιέχει το σύνολο B και περιέχεται στο σύνολο C. Δηλαδή

$$B \subseteq A \subseteq C.$$

Επομένως, βάσει της ιδιότητας (iv),

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = E(B) \leq E(A) \leq E(C) = \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Από αυτές τις σχέσεις και από τις

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$$

προκύπτει ότι

$$\Big| \int_a^b f - E(A) \Big| \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon.$$

Επειδή ισχύει $| \int_a^b f - E(A)| < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $| \int_a^b f - E(A)| = 0$ και, επομένως, $E(A) = \int_a^b f$.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι οι $p_2, p_3 : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και ότι $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$, $\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4-a^4}{4}$.
   Υπόδειξη: Θεωρήστε διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ σε n ισομήκη διαστήματα. Θα χρειαστείτε τις ισότητες $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Για το $\int_a^b x^2\,dx$ δείτε πρώτα τις περιπτώσεις $0 \leq a < b$, $a < b \leq 0$.

2. Έστω $[a,b] \subseteq (0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι η $p_\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι:
   (i) $\int_a^b x^\rho\,dx = \frac{b^{\rho+1}-a^{\rho+1}}{\rho+1}$ αν $\rho \neq -1$.
   (ii) $\int_a^b x^{-1}\,dx = \log\frac{b}{a}$.
   Υπόδειξη: Θεωρήστε τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, όπου $\mu_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ και $x_k = a{\mu_n}^k$ $(k = 0, \ldots, n)$.

3. Αποδείξτε ότι η $\exp_\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι $\int_a^b \rho^x\,dx = \frac{\rho^b-\rho^a}{\log\rho}$ αν $\rho \neq 1$.
   Υπόδειξη: Θεωρήστε διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ σε n ισομήκη διαστήματα.

4. Αποδείξτε ότι οι $\cos, \sin : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και ότι $\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a$ και $\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b$.
   Υπόδειξη: Θεωρήστε διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ σε n ισομήκη διαστήματα. Θα χρειαστείτε τους τύπους $\sum_{k=1}^n \cos(kq) = \frac{\sin\frac{nq}{2}\cos(\frac{(n+1)q}{2})}{\sin\frac{q}{2}}$, $\sum_{k=1}^n \sin(kq) = \frac{\sin\frac{nq}{2}\sin(\frac{(n+1)q}{2})}{\sin\frac{q}{2}}$.

5. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και διαμερίσεις ${\Delta_n}'$ και ${\Delta_n}''$ $(n \in \mathbb{N})$ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;{\Delta_n}') - \underline{\Sigma}(f;a,b;{\Delta_n}'') \to 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\overline{\Sigma}(f;a,b;{\Delta_n}') \to \int_a^b f$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;{\Delta_n}'') \to \int_a^b f$.

6. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ώστε $f(r) = 0$ για κάθε ρητό $r \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f = 0$.
   Υπόδειξη: Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$. Λόγω της πυκνότητας των ρητών, είναι $l_k \leq 0 \leq u_k$. Άρα $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq 0 \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$.

7. Έστω $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν οι f, h είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = \int_a^b h$, αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g = \int_a^b f = \int_a^b h$.
Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(h; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \varepsilon$.

8. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,b]$ για κάθε c, $a < c < b$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = \lim_{c \to a+} \int_c^b f$. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε c, $a < c < b$.
Υπόδειξη: Έστω $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Πάρτε $c \in (a,b)$ ώστε $c - a < \frac{\varepsilon}{4M+1}$. Τότε υπάρχει διαμέριση Δ' του $[c,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; c, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; c, b; \Delta') < \frac{\varepsilon}{2}$. Θεωρήστε τη διαμέριση $\Delta = \{a\} \cup \Delta'$ του $[a,b]$.

9. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b f > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει υποδιάστημα (όχι μονοσύνολο) $[c,d]$ του $[a,b]$ ώστε να ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [c,d]$.
Υπόδειξη: Υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{x_0, \ldots, x_n\}$ του $[a,b]$ ώστε να είναι $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) > 0$. Αν ήταν $l_k \leq 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, τότε θα συνεπαγόταν $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq 0$.

10. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
(i) Αποδείξτε ότι υπάρχει $[a_1, b_1] \subseteq (a,b)$ ώστε $0 < b_1 - a_1 < 1$ και $\sup\{f(x) \,|\, a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) \,|\, a_1 \leq x \leq b_1\} < 1$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας με $\varepsilon = b - a$. Αν χρειάζεται, πάρτε λεπτότερη διαμέριση Δ ώστε όλα τα Δ-διαστήματα να έχουν μήκος < 1.
(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $[a_n, b_n] \subseteq (a,b)$ ώστε $0 < b_n - a_n < \frac{1}{n}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq (a_n, b_n)$ και $\sup\{f(x) \,|\, a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) \,|\, a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένας ξ ώστε $\xi \in (a_n, b_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ.
(iii) Αποδείξτε ότι σε κάθε ανοικτό υποδιάστημα του $[a,b]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο η f είναι συνεχής. Δηλαδή, το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι πυκνό στο $[a,b]$.

6.3 Τα βασικά παραδείγματα.

Τα δυο θεωρήματα αυτής της ενότητας λένε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις και οι μονότονες συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα 6.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{\varepsilon}{b-a}$$

για κάθε $x', x'' \in [a,b]$, $|x' - x''| < \delta_0$.
Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε όλα τα Δ-διαστήματα να έχουν μήκος $< \delta_0$, δηλαδή, ώστε

$$x_k - x_{k-1} < \delta_0 \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_{k-1}, x_k]$, υπάρχουν $\zeta_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ώστε

$$f(\zeta_k) \leq f(x) \leq f(\eta_k)$$

για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ και, επομένως,

$$u_k = f(\eta_k), \qquad l_k = f(\zeta_k).$$

Επίσης, επειδή $|\eta_k - \zeta_k| < \delta_0$, είναι

$$u_k - l_k = f(\eta_k) - f(\zeta_k) < \tfrac{\varepsilon}{b-a}$$

και, επομένως,

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \varepsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. $\square$

Παραδείγματα. (1) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και κάθε ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα το οποίο δεν περιέχει καμιά ρίζα του $q(x)$.
(2) Η p_ρ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα το οποίο περιέχεται στο πεδίο ορισμού της.
(3) Η ρ^x $(\rho > 0)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα.
(4) Η $\log_\rho x$ $(\rho > 0, \rho \neq 1)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα το οποίο περιέχεται στο $(0, +\infty)$.
(5) Οι cos και sin είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα.

Θεώρημα 6.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μονότονη στο $[a, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε όλα τα Δ-διαστήματα να έχουν μήκος

$$x_k - x_{k-1} < \delta_0 = \tfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Επειδή η f είναι αύξουσα, είναι

$$u_k = f(x_k), \qquad l_k = f(x_{k-1}).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n (u_k - l_k)\delta_0 \\ &= \delta_0 \textstyle\sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta_0(f(b) - f(a)) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \varepsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Η απόδειξη στην περίπτωση που η f είναι φθίνουσα είναι παρόμοια. $\square$

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $[x]$ είναι αύξουσα, οπότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα.

Ασκήσεις.

1. Περιγράψτε τα διαστήματα στα οποία είναι ολοκληρώσιμες οι συναρτήσεις $x^3 - x$, $\frac{1}{x^3-x}$, $\exp \frac{1}{x^3-x}$, $\log \frac{1}{x^3-x}$, $\sqrt{x^3 - x}$.

2. Δείτε τα όρια των ακολουθιών $\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\big)$, $\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}\big)$, $\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}\big)$, $\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}\big)$, $\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-(k-1)^2}}{n^2}\Big)$ ως ολοκληρώματα.
Υπόδειξη: Γράψτε $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \frac{1}{n} = \overline{\Sigma}(f; 0, 1; \Delta)$, όπου $f(x) = \frac{1}{1+x}$ και $\Delta = \{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}$.

3. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[f(a), f(b)]$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[f(a), f(b)]$. Αποδείξτε ότι
$$\int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} = bf(b) - af(a).$$
Αν $0 \le a < b$ και $0 \le f(a) < f(b)$, περιγράψτε το γεωμετρικό νόημα αυτής της ισότητας.
Υπόδειξη: Έστω διαμέριση $\Delta' = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και η αντίστοιχη διαμέριση $\Delta'' = \{f(a) = y_0, \ldots, y_n = f(b)\}$ του $[f(a), f(b)]$. Δηλαδή, $y_k = f(x_k)$. Παρατηρήστε ότι $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') + \underline{\Sigma}(f^{-1}; f(a), f(b); \Delta'') = bf(b) - af(a)$ και $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') + \overline{\Sigma}(f^{-1}; f(a), f(b); \Delta'') = bf(b) - af(a)$ και χρησιμοποιήστε την Πρόταση 6.2.

4. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$.
(i) Αποδείξτε ότι $ab \le \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}$ για κάθε $a, b > 0$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $f(a) = b$.
Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 3.
(ii) Χρησιμοποιήστε την $p_{\frac{t}{t-1}}$ $(0 < t < 1)$ για να αποδείξετε την ανισότητα του Young στην άσκηση 21 της ενότητας 5.6.

6.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος.

Πρόταση 6.3. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε η $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Απόδειξη. Οι f, g είναι φραγμένες, οπότε υπάρχουν M' και M'' ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M'$ και $|g(x)| \le M''$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα ισχύει
$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le M' + M''$$
για κάθε $x \in [a, b]$ και, επομένως, η $f + g$ είναι φραγμένη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας, υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$ ώστε
$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') < \tfrac{\varepsilon}{2}, \qquad \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$, οπότε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \tfrac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ορίζουμε

$$u_k{}' = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k{}' = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

και

$$u_k{}'' = \sup\{g(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k{}'' = \inf\{g(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k{}' \le f(x) \le u_k{}'$ και $l_k{}'' \le g(x) \le u_k{}''$, οπότε

$$l_k{}' + l_k{}'' \le f(x) + g(x) \le u_k{}' + u_k{}''\,.$$

Ορίζουμε

$$u_k = \sup\{f(x) + g(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k = \inf\{f(x) + g(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\},$$

οπότε

$$l_k{}' + l_k{}'' \le l_k \le u_k \le u_k{}' + u_k{}''\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^n u_k{}'(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n u_k{}''(x_k - x_{k-1}) \\ &= \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) \ge \sum_{k=1}^n l_k{}'(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n l_k{}''(x_k - x_{k-1}) \\ &= \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta).\end{aligned}$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) &\le \big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big) \\ &\quad + \big(\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)\big) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) < \varepsilon$ και, επομένως, η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τώρα, από τις

$$\underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) \le \textstyle\int_a^b (f+g) \le \overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta)$$

συνεπάγεται

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \le \textstyle\int_a^b (f+g) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta),$$

οπότε, σε συνδυασμό με τις

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \textstyle\int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta), \qquad \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \le \int_a^b g \le \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta),$$

συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\big|\textstyle\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g\big| &\le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \\ &\quad - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Επειδή $|\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g| < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, είναι $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. $\square$

Πρόταση 6.4. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η $\lambda f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα ισχύει

$$|\lambda f(x)| \leq |\lambda| M$$

για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε η λf είναι φραγμένη.
Αν $\lambda = 0$, η $0f$ είναι η σταθερή συνάρτηση 0, η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει

$$\textstyle\int_a^b 0f = \int_a^b 0 = 0 = 0 \int_a^b f.$$

Έστω $\lambda \neq 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \tfrac{\varepsilon}{|\lambda|}\,.$$

Ορίζουμε

$$u_k{}' = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \qquad l_k{}' = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

και

$$u_k = \sup\{\lambda f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \qquad l_k = \inf\{\lambda f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}.$$

Έστω $\lambda > 0$. Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $f(x) \leq u_k{}'$, οπότε $\lambda f(x) \leq \lambda u_k{}'$ και, επομένως, $u_k \leq \lambda u_k{}'$. Επίσης, για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $\lambda f(x) \leq u_k$, οπότε $f(x) \leq \frac{1}{\lambda} u_k$ και, επομένως, $u_k{}' \leq \frac{1}{\lambda} u_k$. Συμπεραίνουμε ότι

$$u_k = \lambda u_k{}'$$

και, με ακριβώς ίδιο τρόπο, ότι

$$l_k = \lambda l_k{}'\,.$$

Τώρα,

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n u_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta),$$

$$\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n l_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$$

και, επομένως,

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big) < \lambda \tfrac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon.$$

Έστω $\lambda < 0$. Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $f(x) \leq u_k{}'$, οπότε $\lambda u_k{}' \leq \lambda f(x)$ και, επομένως, $\lambda u_k{}' \leq l_k$. Επίσης, για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k \leq \lambda f(x)$, οπότε $f(x) \leq \frac{1}{\lambda} l_k$ και, επομένως, $u_k{}' \leq \frac{1}{\lambda} l_k$. Συμπεραίνουμε ότι

$$l_k = \lambda u_k{}'$$

και, παρομοίως,

$$u_k = \lambda l_k{}'\,.$$

Τώρα,

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n l_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta),$$

$$\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n u_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$$

και, επομένως,

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)=-\lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big)<-\lambda\tfrac{\varepsilon}{-\lambda}=\varepsilon.$$

Σε κάθε περίπτωση, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)<\varepsilon$, οπότε η λf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Αν $\lambda>0$, από τις

$$\lambda\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)\leq\int_a^b\lambda f\leq\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta)=\lambda\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta),$$

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\leq\int_a^b f\leq\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$$

συνεπάγεται

$$\Big|\int_a^b\lambda f-\lambda\int_a^b f\Big|\leq\lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big)<\varepsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon>0$, συνεπάγεται $\int_a^b\lambda f=\lambda\int_a^b f$.
Η απόδειξη της $\int_a^b\lambda f=\lambda\int_a^b f$ είναι παρόμοια και στην περίπτωση $\lambda<0$. □

Οι ισότητες που αποδείχθηκαν στις Προτάσεις 6.3 και 6.4 συνδυάζονται στην

$$\int_a^b(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g.$$

Αυτή η ισότητα εύκολα γενικεύεται με επαγωγή για περισσότερους από δυο όρους:

$$\int_a^b\sum\nolimits_{k=1}^n\lambda_k f_k=\sum\nolimits_{k=1}^n\lambda_k\int_a^b f_k\,,$$

αν όλες οι $f_1\,,\ldots,f_n$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$.

Το επόμενο παράδειγμα είναι άμεση γενίκευση του παραδείγματος που είδαμε μετά από το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας και είναι κι αυτό σημαντικό.

Παράδειγμα. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, η οποία μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $[a,b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f=0$.
Συγκεκριμένα, έστω $\xi_1,\ldots,\xi_m\in[a,b]$ και έστω ότι η f μηδενίζεται σε κάθε $x\in[a,b]\setminus\{\xi_1,\ldots,\xi_m\}$ και $f(\xi_j)=c_j\neq 0$ για κάθε $j=1,\ldots,m$. Δηλαδή ο τύπος της f είναι

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in[a,b]\setminus\{\xi_1,\ldots,\xi_m\}\\ c_j, & \text{αν } x=\xi_j\ (j=1,\ldots,m)\end{cases}$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_j(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in[a,b], x\neq\xi_j\\ 1, & \text{αν } x=\xi_j\end{cases}$$

Αν $x\in[a,b]\setminus\{\xi_1,\ldots,\xi_m\}$, τότε $f(x)=0$ και $f_j(x)=0$ για κάθε $j=1,\ldots,m$. Άρα

$$\sum\nolimits_{j=1}^m c_j f_j(x)=\sum\nolimits_{j=1}^m c_j 0=0=f(x).$$

Αν $x\in\{\xi_1,\ldots,\xi_m\}$, τότε $x=\xi_{j_0}$ για κάποιον $j_0=1,\ldots,m$, οπότε $f(x)=c_{j_0}$ και $f_{j_0}(x)=1$ και $f_j(x)=0$ για κάθε $j=1,\ldots,m$, $j\neq j_0$. Άρα

$$\sum\nolimits_{j=1}^m c_j f_j(x)=c_{j_0}=f(x).$$

Συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\sum_{j=1}^m c_j f_j(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ ή, ισοδύναμα,

$$f = \sum_{j=1}^m c_j f_j \,.$$

Επειδή κάθε f_j είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f_j = 0$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b f_j = \sum_{j=1}^m c_j 0 = 0.$$

Το παράδειγμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη της Πρότασης 6.5.

Πρόταση 6.5. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ των οποίων οι τιμές είναι ίσες σε κάθε σημείο του $[a,b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g = \int_a^b f$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την $h = g - f : [a,b] \to \mathbb{R}$ η οποία μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $[a,b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Σύμφωνα με το τελευταίο παράδειγμα, η h είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b h = 0$. Επειδή $g = f + h$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, η g είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g = \int_a^b (f+h) = \int_a^b f + \int_a^b h = \int_a^b f$. □

Η Πρόταση 6.5 διατυπώνεται και ως εξής: αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα και δημιουργήσουμε μια *νέα* συνάρτηση αλλάζοντας τις τιμές της αρχικής σε πεπερασμένου πλήθους σημεία του διαστήματος, τότε η *νέα* συνάρτηση είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα και το ολοκλήρωμά της είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης.

Πρόταση 6.6. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Τότε η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Οι f, g είναι φραγμένες, οπότε υπάρχουν M', M'' ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M'$ και $|g(x)| \le M''$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα ισχύει

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \le M'M''$$

για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε η fg είναι φραγμένη στο $[a,b]$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') < \tfrac{\varepsilon}{M'+M''+1}\,, \quad \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta'') < \tfrac{\varepsilon}{M'+M''+1}\,.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, οπότε είναι

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \tfrac{\varepsilon}{M'+M''+1}\,, \quad \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) < \tfrac{\varepsilon}{M'+M''+1}\,.$$

Κατόπιν, ορίζουμε

$$u_k{}' = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k{}' = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

και

$$u_k{}'' = \sup\{g(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k{}'' = \inf\{g(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Επίσης, ορίζουμε

$$u_k = \sup\{f(x)g(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k = \inf\{f(x)g(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Για κάθε $s,t \in [x_{k-1},x_k]$ ισχύει ${l_k}' - {u_k}' \le f(s) - f(t) \le {u_k}' - {l_k}'$ και, επομένως, $|f(s)-f(t)| \le {u_k}' - {l_k}'$. Ομοίως, για κάθε $s,t \in [x_{k-1},x_k]$ ισχύει $|g(s)-g(t)| \le {u_k}'' - {l_k}''$. Άρα για κάθε $s,t \in [x_{k-1},x_k]$ ισχύει

$$\begin{aligned}|f(s)g(s)-f(t)g(t)| &\le |f(s)-f(t)||g(s)| + |f(t)||g(s)-g(t)| \\ &\le M''({u_k}'-{l_k}') + M'({u_k}''-{l_k}'').\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το τρίτο σχόλιο πριν από το Λήμμα 6.2, συνεπάγεται

$$u_k - l_k \le M''({u_k}'-{l_k}') + M'({u_k}''-{l_k}'').$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(fg;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(fg;a,b;\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k-l_k)(x_k-x_{k-1}) \\ &\le M'' \textstyle\sum_{k=1}^n ({u_k}'-{l_k}')(x_k-x_{k-1}) \\ &\quad + M' \textstyle\sum_{k=1}^n ({u_k}''-{l_k}'')(x_k-x_{k-1}) \\ &\le M''\tfrac{\varepsilon}{M'+M''+1} + M'\tfrac{\varepsilon}{M'+M''+1} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(fg;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(fg;a,b;\Delta) < \varepsilon$, οπότε η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. $\square$

Τονίζουμε ότι, σε αντίθεση με την περίπτωση του αθροίσματος συναρτήσεων, δεν υπάρχει τύπος ο οποίος να συνδέει το ολοκλήρωμα του γινομένου συναρτήσεων με τα ολοκληρώματα των δυο συναρτήσεων ξεχωριστά. Για παράδειγμα, **δεν** ισχύει γενικά $\int_a^b fg = \int_a^b f \int_a^b g$.

Παράδειγμα. Είναι $\int_a^b (1\cdot 1) = \int_a^b 1 = b-a$ και $\int_a^b 1 \int_a^b 1 = (b-a)(b-a) = (b-a)^2$. Η ισότητα $b-a = (b-a)^2$ δεν ισχύει γενικά!

Πρόταση 6.7. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν υπάρχει $m > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \ge m$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε η $\frac{1}{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Ισχύει

$$\left|\tfrac{1}{f(x)}\right| \le \tfrac{1}{m}$$

για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε η $\frac{1}{f}$ είναι φραγμένη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < m^2\varepsilon.$$

Ορίζουμε

$${u_k}' = \sup\{f(x)\,|\,x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad {l_k}' = \inf\{f(x)\,|\,x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

και

$$u_k = \sup\left\{\tfrac{1}{f(x)}\,|\,x_{k-1} \le x \le x_k\right\}, \qquad l_k = \inf\left\{\tfrac{1}{f(x)}\,|\,x_{k-1} \le x \le x_k\right\}.$$

Για κάθε $s,t \in [x_{k-1},x_k]$ ισχύει ${l_k}' - {u_k}' \le f(s) - f(t) \le {u_k}' - {l_k}'$ και, επομένως, $|f(s)-f(t)| \le {u_k}' - {l_k}'$. Τότε για κάθε $s,t \in [x_{k-1},x_k]$ ισχύει

$$\left|\tfrac{1}{f(s)} - \tfrac{1}{f(t)}\right| = \tfrac{|f(s)-f(t)|}{|f(s)||f(t)|} \le \tfrac{{u_k}'-{l_k}'}{m^2}$$

και, επομένως,

$$u_k - l_k \le \tfrac{{u_k}'-{l_k}'}{m^2}.$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}\big(\tfrac{1}{f};a,b;\Delta\big)-\underline{\Sigma}\big(\tfrac{1}{f};a,b;\Delta\big)&=\textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k-l_k)(x_k-x_{k-1})\\&\le\tfrac{1}{m^2}\textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k{}'-l_k{}')(x_k-x_{k-1})\\&=\tfrac{1}{m^2}\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big)<\varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}\big(\frac{1}{f};a,b;\Delta\big)-\underline{\Sigma}\big(\frac{1}{f};a,b;\Delta\big)<\varepsilon$, οπότε η $\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. □

Όπως και για το γινόμενο συναρτήσεων, δεν υπάρχει γενικός τύπος που να συνδέει το ολοκλήρωμα του αντιστρόφου μιας συνάρτησης με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Για παράδειγμα, **δεν** ισχύει γενικά $\int_a^b\frac{1}{f}=\frac{1}{\int_a^b f}$.

Παράδειγμα. Είναι $\int_a^b\frac{1}{1}=\int_a^b 1=b-a$ και $\frac{1}{\int_a^b 1}=\frac{1}{b-a}$. Η ισότητα $b-a=\frac{1}{b-a}$ δεν ισχύει γενικά!

Πρόταση 6.8. *Έστω $a<c<b$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$, οπότε υπάρχουν M' και M'' ώστε να ισχύει $|f(x)|\le M'$ για κάθε $x\in[a,c]$ και $|f(x)|\le M''$ για κάθε $x\in[c,b]$. Ορίζουμε $M=\max\{M',M''\}$, οπότε ισχύει

$$|f(x)|\le M$$

για κάθε $x\in[a,b]$ και, επομένως, η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.
Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις $\Delta'=\{a=x_0{}',\dots,x_n{}'=c\}$ του $[a,c]$ και $\Delta''=\{c=x_0{}'',\dots,x_m{}''=b\}$ του $[c,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')-\underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')<\tfrac{\varepsilon}{2},\qquad\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')-\underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')<\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Ορίζουμε τη διαμέριση $\Delta=\{a=x_0{}',\dots,x_{n-1}{}',x_n{}'=c=x_0{}'',\dots,x_m{}''=b\}$ του $[a,b]$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)&=\overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')+\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta''),\\\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)&=\underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')+\underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'').\end{aligned}$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)&=\big(\overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')-\underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')\big)\\&\quad+\big(\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')-\underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')\big)\\&<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)<\varepsilon$, οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Από τις

$$\underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')\le\textstyle\int_a^c f\le\overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta'),\qquad\underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')\le\textstyle\int_c^b f\le\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')$$

συνεπάγεται η

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)&=\underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')+\underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')\\&\le\textstyle\int_a^c f+\int_c^b f\le\overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')+\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')=\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).\end{aligned}$$

Από αυτήν και από την
$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$$
προκύπτει
$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b \right| \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \varepsilon.$$
Επομένως, είναι $\left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, οπότε $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. □

Πρόταση 6.9. *Έστω $a \le c < d \le b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, είναι φραγμένη και στο $[c,d]$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση Δ' του $[a,b]$ ώστε
$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') < \varepsilon.$$
Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta'' = \Delta' \cup \{c,d\}$, η οποία είναι λεπτότερη από την Δ' και, επομένως,
$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') < \varepsilon.$$
Αν από τα Δ''-σημεία κρατήσουμε μόνο εκείνα τα οποία ανήκουν στο διάστημα $[c,d]$ (τα c, d είναι δυο τέτοια), τότε δημιουργείται διαμέριση Δ του $[c,d]$. Τώρα τα αθροίσματα Darboux $\overline{\Sigma}(f;c,d;\Delta)$ και $\underline{\Sigma}(f;c,d;\Delta)$ προκύπτουν από τα αντίστοιχα $\overline{\Sigma}(f;c,d;\Delta'')$ και $\underline{\Sigma}(f;c,d;\Delta'')$ αν από τα δυο τελευταία αφαιρέσουμε τους όρους που προέρχονται από τα Δ''-διαστήματα που δεν είναι Δ-διαστήματα. Επομένως, η διαφορά $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ προκύπτει από την $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$ αν από αυτήν αφαιρέσουμε τους όρους που προέρχονται από τα Δ''-διαστήματα που δεν είναι Δ-διαστήματα. Σύμφωνα με το δεύτερο σχόλιο πριν από το Λήμμα 6.2, είναι
$$\overline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') < \varepsilon.$$
Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[c,d]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) < \varepsilon$ και, επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$. □

Ορισμός. Η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **κατά τμήματα σταθερή** στο $[a,b]$ αν υπάρχουν $\xi_0, \ldots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και υπάρχουν $c_1, \ldots, c_m$ ώστε $f(x) = c_k$ για κάθε $x \in (\xi_{k-1}, \xi_k)$ και κάθε $k = 1, \ldots, m$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0, \xi_1), \ldots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$. Οι τιμές της f στα σημεία $\xi_0, \ldots, \xi_m$ δεν έχουν καμιά σημασία.

Παράδειγμα. Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι κατά τμήματα σταθερή στο $[a,b]$, όπως στον ορισμό που μόλις είδαμε. Στο διάστημα $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ η f διαφέρει από τη σταθερή συνάρτηση c_k σε δυο *το πολύ* σημεία: στα άκρα ξ_{k-1}, ξ_k. Επειδή η σταθερή συνάρτηση c_k είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και $\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} c_k = c_k(\xi_k - \xi_{k-1})$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και $\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f = c_k(\xi_k - \xi_{k-1})$. Επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και
$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^m \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f = \sum_{k=1}^m c_k(\xi_k - \xi_{k-1}).$$

Θα γνωρίσουμε, τώρα, δυο σχετικά μεγάλες κατηγορίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, οι οποίες περιέχουν τις συναρτήσεις που συναντάμε συνήθως στην πράξη. Και οι δυο κατηγορίες περιέχουν τις κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις.

Ορισμός. Η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **κατά τμήματα συνεχής** στο $[a,b]$ αν υπάρχουν $\xi_0, \dots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$, η f να είναι συνεχής σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0, \xi_1), \dots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$ και να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi_k+} f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $k = 0, \dots, m-1$ καθώς και το όριο $\lim_{x\to\xi_k-} f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $k = 1, \dots, m$.

Πρόταση 6.10. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ κατά τμήματα συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[a,b]$, όπως στον ορισμό.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } \xi_{k-1} < x < \xi_k \\ \lim_{x\to\xi_k-} f(x), & \text{αν } x = \xi_k \\ \lim_{x\to\xi_{k-1}+} f(x), & \text{αν } x = \xi_{k-1} \end{cases}$ Η g_k είναι συνεχής στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και η f διαφέρει από αυτήν σε δυο *το πολύ* σημεία του $[\xi_{k-1}, \xi_k]$: στα άκρα ξ_{k-1}, ξ_k. Επειδή η g_k είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. □

Ορισμός. Η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **κατά τμήματα μονότονη** στο $[a,b]$ αν υπάρχουν $\xi_0, \dots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και η f να είναι μονότονη σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0, \xi_1), \dots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$.

Πρόταση 6.11. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ κατά τμήματα μονότονη και φραγμένη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη στο $[a,b]$, όπως στον ορισμό.
Επειδή η f είναι φραγμένη, τα όρια $\lim_{x\to\xi_k-} f(x)$, $\lim_{x\to\xi_{k-1}+} f(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.
Τώρα, ορίζουμε τις συναρτήσεις g_k ακριβώς όπως στην απόδειξη της Πρότασης 6.10. Κάθε g_k είναι μονότονη στο αντίστοιχο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Η f διαφέρει από την g_k σε δυο *το πολύ* σημεία του $[\xi_{k-1}, \xi_k]$: στα άκρα ξ_{k-1}, ξ_k. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. □

Σχεδόν όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται σε συγκεκριμένες εφαρμογές είναι είτε κατά τμήματα συνεχείς είτε κατά τμήματα μονότονες και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα στο οποίο είναι φραγμένες.

Λήμμα 6.5. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.*
(1) Τότε $\int_a^b f \geq 0$.
(2) Αν $\int_a^b f = 0$, τότε η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικότερα, αν $\int_a^b f = 0$ και η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η f είναι η σταθερή συνάρτηση 0 στο $[a,b]$.

Απόδειξη. (1) Ο 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου τιμών $\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$. Αν ορίσουμε $\underline{l} = \inf\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$, τότε $0 \leq \underline{l}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.1, είναι

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \geq \underline{l}(b-a) \geq 0.$$

(2) Έστω $\int_a^b f = 0$ και σημείο συνέχειας $\xi \in [a,b]$ της f και έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι $f(\xi) > 0$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε l ώστε $0 < l < f(\xi)$. Τότε ισχύει $f(x) \geq l$ κοντά στον ξ, δηλαδή υπάρχει διάστημα $[c,d] \subseteq [a,b]$ ώστε $d - c > 0$, $\xi \in [c,d]$ και ώστε να ισχύει $f(x) \geq l$ για κάθε

$x \in [c,d]$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) - l \geq 0$ για κάθε $x \in [c,d]$, οπότε είναι $\int_c^d (f-l) \geq 0$. Άρα $\int_c^d f - \int_c^d l \geq 0$ και, επομένως,
$$\int_c^d f \geq l(d-c).$$
Τώρα διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις.
Έστω $a < c < d < b$. Από το ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,c]$, συνεπάγεται $\int_a^c f \geq 0$. Ομοίως, είναι $\int_d^b f \geq 0$. Άρα
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \geq 0 + l(d-c) + 0 = l(d-c) > 0.$$
Έστω $a < c < d = b$. Όπως πριν, είναι $\int_a^c f \geq 0$ και, επομένως, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f \geq 0 + l(d-c) = l(d-c) > 0$.
Έστω $a = c < d < b$. Όπως πριν, είναι $\int_d^b f \geq 0$ και, επομένως, $\int_a^b f = \int_c^d f + \int_d^b f \geq l(d-c) + 0 = l(d-c) > 0$.
Τέλος, αν $c = a$ και $d = b$, τότε $\int_a^b f = \int_c^d f \geq l(d-c) > 0$.
Σε κάθε περίπτωση, είναι $\int_a^b f > 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο. □

Οι επόμενες τρεις προτάσεις περιέχουν τα βασικά εργαλεία εκτίμησης ολοκληρωμάτων: τα χρησιμοποιούμε στις περιπτώσεις που δεν βολεύει ή δεν είναι εφικτός ο ακριβής υπολογισμός τους.

Πρόταση 6.12. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*
(1) Αν ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε $\int_a^b f \leq u(b-a)$.
Αν, επιπλέον, είναι $\int_a^b f = u(b-a)$, τότε ισχύει $f(x) = u$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.
(2) Αν ισχύει $f(x) \geq l$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε $\int_a^b f \geq l(b-a)$.
Αν, επιπλέον, είναι $\int_a^b f = l(b-a)$, τότε ισχύει $f(x) = l$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.
(3) Αν ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε $\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a)$.
Αν, επιπλέον, είναι $\left|\int_a^b f\right| = M(b-a)$, τότε είτε ισχύει $f(x) = M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ισχύει $f(x) = -M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

Απόδειξη. (1) Εφαρμόζουμε το Λήμμα 6.5 στη συνάρτηση $u - f$.
(2) Ομοίως, με τη συνάρτηση $f - l$.
(3) Από τα (1), (2), επειδή ισχύει $-M \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, συνεπάγεται $-M(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$, οπότε $\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a)$.
Αν $\left|\int_a^b f\right| = M(b-a)$, τότε είτε $\int_a^b f = M(b-a)$ είτε $\int_a^b f = -M(b-a)$. Συνεπάγεται, αντιστοίχως, είτε ότι ισχύει $f(x) = M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ότι ισχύει $f(x) = -M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f. □

Παράδειγμα. Η μέγιστη τιμή της $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ είναι η $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Επομένως, $\int_1^4 \frac{x}{x^2+2}\,dx \leq \frac{\sqrt{2}}{4}(4-1) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Πρόταση 6.13. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.*
(1) Τότε $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
(2) Αν $\int_a^b f = \int_a^b g$, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ σε κάθε κοινό σημείο συνέχειας x των f, g. Ειδικώτερα, αν $\int_a^b f = \int_a^b g$ και οι f, g είναι συνεχείς στο $[a,b]$, τότε οι f, g ταυτίζονται στο $[a,b]$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 6.5 στη συνάρτηση $g - f$. □

Παράδειγμα. Έστω η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \log(1+x)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, είναι και ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Είναι εύκολο, με τις μεθόδους του προηγούμενου κεφαλαίου, να αποδειχθεί ότι $x\log 2 \le \log(1+x) \le x$ για κάθε $x \in [0,1]$. Άρα $\int_0^1 x\log 2\,dx \le \int_0^1 \log(1+x)\,dx \le \int_0^1 x dx$. Άρα $\frac{\log 2}{2} \le \int_0^1 \log(1+x)\,dx \le \frac{1}{2}$.

Πρόταση 6.14. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\Big| \int_a^b f \Big| \le \int_a^b |f|.$$

Αν $\big| \int_a^b f \big| = \int_a^b |f|$, τότε είτε ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ισχύει $f(x) \le 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι και η $|f|$ είναι φραγμένη στο $[a,b]$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \varepsilon.$$

Ορίζουμε

$$u_k{}' = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k{}' = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

και

$$u_k = \sup\{|f(x)| \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k = \inf\{|f(x)| \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Για κάθε $s,t \in [x_{k-1},x_k]$ ισχύει $l_k{}' - u_k{}' \le f(s) - f(t) \le u_k{}' - l_k{}'$, οπότε $|f(s) - f(t)| \le u_k{}' - l_k{}'$.
Άρα για κάθε $s,t \in [x_{k-1},x_k]$ ισχύει

$$||f(s)| - |f(t)|| \le |f(s) - f(t)| \le u_k{}' - l_k{}'.$$

Σύμφωνα με το τρίτο σχόλιο πριν από το Λήμμα 6.2, συνεπάγεται

$$u_k - l_k \le u_k{}' - l_k{}'.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^n (u_k{}' - l_k{}')(x_k - x_{k-1}) \\ &= \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta) < \varepsilon$. Άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, ισχύει $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε

$$-\textstyle\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|) \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|.$$

Άρα $\big| \int_a^b f \big| \le \int_a^b |f|$.
Αν $\big| \int_a^b f \big| = \int_a^b |f|$, τότε είτε $\int_a^b f = \int_a^b |f|$ είτε $\int_a^b f = -\int_a^b |f|$. Συνεπάγεται, αντιστοίχως, είτε ότι ισχύει $f(x) = |f(x)|$ ή, ισοδύναμα, $f(x) \ge 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ότι ισχύει $f(x) = -|f(x)|$ ή, ισοδύναμα, $f(x) \le 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f. $\square$

Παράδειγμα. Έστω $x > 0$. Επειδή $|\sin t| \le 1$ για κάθε t, είναι $\big| \int_0^x \sin t\,dt \big| \le \int_0^x |\sin t|\,dt \le \int_0^x 1\,dt = x$. Επίσης, επειδή $|\sin t| \le |t|$ για κάθε t, συνεπάγεται $\big| \int_0^x \sin t\,dt \big| \le \int_0^x |\sin t|\,dt \le \int_0^x |t|\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$. Άρα $\big| \int_0^x \sin t\,dt \big| \le \min\big\{x, \frac{x^2}{2}\big\} = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{αν } 0 < x \le 2 \\ x, & \text{αν } x \ge 2 \end{cases}$

Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού. *Έστω* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής στο* $[a,b]$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *και* $g(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a,b]$. *Τότε υπάρχει* $\xi \in [a,b]$ *ώστε* $\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = f(x) \int_a^b g - \int_a^b fg \qquad (x \in [a,b]).$$

Προφανώς, η h είναι συνεχής στο $[a,b]$. Επειδή η f είναι συνεχής, υπάρχουν $\zeta, \eta \in [a,b]$ ώστε $f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$, οπότε

$$f(\zeta)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(\eta)g(x)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Συνεπάγεται

$$f(\zeta) \int_a^b g = \int_a^b f(\zeta)g \leq \int_a^b fg \leq \int_a^b f(\eta)g = f(\eta) \int_a^b g.$$

Άρα

$$h(\zeta) \leq 0 \leq h(\eta).$$

Άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $h(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$. □

Ορισμός. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Ο αριθμός $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ ονομάζεται **μέση τιμή της** f **στο** $[a,b]$ και συμβολίζεται

$$E(f; a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\,.$$

Η επιλογή του όρου *μέση τιμή* για το $E(f; a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ θα αιτιολογηθεί στην επόμενη ενότητα.

Είτε από την Πρόταση 6.12 είτε από την Πρόταση 6.1 συνεπάγεται ότι η μέση τιμή μιας f ολοκληρώσιμης στο $[a,b]$ είναι αριθμός στο διάστημα $[l,u]$, όπου $u = \sup\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$ και $l = \inf\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$. Επίσης, εφαρμόζοντας το Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού με τη σταθερή συνάρτηση $g = 1$, συμπεραίνουμε ότι

Η μέση τιμή μιας f *συνεχούς στο* $[a,b]$ *είναι κάποια από τις τιμές της.*

Αν η μέση τιμή της f στο $[a,b]$ είναι ο αριθμός ρ, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \rho(b-a) = \int_a^b \rho\,dx.$$

Επομένως, η μέση τιμή της f στο $[a,b]$ είναι εκείνη η τιμή που πρέπει να έχει μια σταθερή συνάρτηση στο $[a,b]$ ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της f.

Παράδειγμα. Η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ 1, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ στο $[-1,1]$ είναι $\frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^1 f = 0$, αλλά καμιά τιμή της συνάρτησης στο $[-1,1]$ δεν είναι 0.
Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι, αν η f δεν είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε μπορεί η μέση τιμή της στο $[a,b]$ να μην είναι ίση με καμιά τιμή της.

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιώντας και τα αποτελέσματα των ασκήσεων 1 - 4 της ενότητας 2, υπολογίστε τα $\int_{-1}^2 (2 - 3x + 4x^2)\,dx$, $\int_{-2}^4 (3x - 2^x)\,dx$, $\int_\pi^{2\pi} (3\cos x - 2\sin x)\,dx$, $\int_0^\pi (3x - 2\sin x)\,dx$, $\int_1^3 (\frac{2}{x} - x^2 + x^{\sqrt{2}} + 3e^x)\,dx$.

2. Υπολογίστε το $\int_{-2}^{\frac{7}{2}}[x]\,dx$.

3. Αν $f(x) = \begin{cases} 1+3x, & \text{αν } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \\ -2, & \text{αν } x = 2 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 3x, & \text{αν } -1 \le x < 0 \\ 2x, & \text{αν } 0 \le x \le 2 \\ x+2, & \text{αν } 2 < x \le 5 \end{cases}$ βρείτε τα $\int_1^2 f$, $\int_{-1}^5 g$.

4. Βρείτε τη μέση τιμή της x στα $[-1,1]$, $[0,1]$ και της sin στα $[0,\pi]$, $[0,\frac{\pi}{2}]$, $[0,2\pi]$. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 4 της ενότητας 6.2.

5. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[a,b]$.
(i) Αποδείξτε ότι $0\le\int_c^d f\le\int_a^b f$ για κάθε $[c,d]\subseteq[a,b]$.
(ii) Γενικότερα, αν τα $[c_1,d_1],\ldots,[c_n,d_n]$ είναι ξένα ανά δύο (εκτός κοινών άκρων) και περιέχονται στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $\int_{c_1}^{d_1} f+\cdots+\int_{c_n}^{d_n} f\le\int_a^b f$.

6. Αποδείξτε ότι $\int_0^{\pi}(\sin x)^{n+1}\,dx\le\int_0^{\pi}(\sin x)^n\,dx$ και $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{n+1}\,dx\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^n\,dx$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

7. Χωρίς να βρείτε τα ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι $xe^{-2x}\le\int_x^{2x}e^{-t}\,dt\le xe^{-x}$ για κάθε $x>0$ και $3e^{-2}\le\int_{\frac{1}{2}}^2 xe^{-x}\,dx\le\frac{3}{2}e^{-1}$.

8. (i) Αποδείξτε ότι $0\le\frac{x}{1-x+x^2}\le\frac{4x}{3}$ για κάθε $x\in[0,1]$ και $0\le\frac{x}{1-x+x^2}\le\frac{4}{3x}$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$.
(ii) Χωρίς να βρείτε το ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι $0\le\int_0^x\frac{t}{1-t+t^2}\,dt\le\frac{2x^2}{3}$ για κάθε $x\in[0,1]$.
(iii) Χωρίς να βρείτε το ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι $0\le\int_0^x\frac{t}{1-t+t^2}\,dt\le\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\log x$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$.

9. Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+\sqrt{x}}\frac{t}{1+t^2}\,dt$, $\lim_{x\to0+}\int_{1-x}^{1+x}\frac{t}{1+t^2}\,dt$, $\lim_{x\to0+}\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x}\frac{t}{1+t^2}\,dt$ χωρίς υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

10. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b f=\int_a^b g$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

11. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ ώστε $\int_0^1 f(x)x^2\,dx=\frac{f(\xi)}{3}$.

12. Αποδείξτε ότι:
(i) $\int_k^{k+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx=0$, $\int_k^{k+\frac{1}{2}}(x-[x]-\frac{1}{2})\,dx=-\frac{1}{8}$ και $\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{8}$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$,
(ii) $-\frac{1}{8}\le\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx\le\frac{1}{8}$ για κάθε $a,b,\ a<b$.

13. (i) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n+1}\le\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx\le\frac{1}{n}$ και, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 2 της ενότητας 6.2, $\frac{1}{n+1}\le\log(n+1)-\log n\le\frac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
(ii) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), όπου $x_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\log n$ $(n\in\mathbb{N})$ είναι φθίνουσα

με κάτω φράγμα τον 0 και, επομένως, ότι συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Το όριο της ακολουθίας αυτής ονομάζεται **σταθερά του Euler** και συμβολίζεται

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum\nolimits_{k=1}^{n}\tfrac{1}{k} - \log n\Big).$$

14. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ώστε $|f(y)-f(x)|\leq M|y-x|$ για κάθε $x,y\in[0,1]$.
(i) Αποδείξτε ότι $\big|\int_c^d f - f(d)(d-c)\big| \leq M\frac{(d-c)^2}{2}$ για κάθε $[c,d]\subseteq[0,1]$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\big|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\big| \leq \frac{M}{2n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το (i) στα $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ $(k=1,\dots,n)$.
(iii) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) \to \int_0^1 f$.

15. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε: $\lim_{x\to\xi+}\int_\xi^x f = 0$ για κάθε $\xi\in[a,b)$ και $\lim_{x\to\xi-}\int_x^\xi f = 0$ για κάθε $\xi\in(a,b]$.
Υπόδειξη: Υπάρχει M ώστε $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Τότε $\big|\int_\xi^x f\big|\leq M(x-\xi)$, αν $a\leq\xi<x\leq b$, και $\big|\int_x^\xi f\big|\leq M(\xi-x)$, αν $a\leq x<\xi\leq b$.

16. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και η $g:[a+c,b+c]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x-c)$ $(x\in[a+c,b+c])$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a+c,b+c]$ και $\int_{a+c}^{b+c} g = \int_a^b f$ ή, ισοδύναμα,
$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$
Υπόδειξη: Θεωρήστε διαμέριση $\Delta'=\{a={x_0}',\dots,{x_n}'=b\}$ του $[a,b]$ και τη διαμέριση Δ του $[a+c,b+c]$ η οποία προκύπτει από τη Δ' παίρνοντας $x_k={x_k}'+c$. Για τα ${u_k}'$, ${l_k}'$ της f στο $[{x_{k-1}}',{x_k}']$ και τα u_k, l_k της g στο $[x_{k-1},x_k]$ αποδείξτε ότι $u_k={u_k}'$ και $l_k={l_k}'$. Αποδείξτε ανάλογες ισότητες ανάμεσα στα άνω και κάτω αθροίσματα Darboux των f,g. Χρησιμοποιήστε το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας. Για την ισότητα των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήστε τις $\underline{\Sigma}(g;a+c,b+c;\Delta)\leq\int_{a+c}^{b+c} g\leq\overline{\Sigma}(g;a+c,b+c;\Delta)$ και τις ανάλογες ανισότητες για την f.

17. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau>0$, δηλαδή $f(x+\tau)=f(x)$ για κάθε x. Έστω ότι υπάρχει κ ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\kappa,\kappa+\tau]$.
(i) Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε a,b, $a<b$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 16 στα $[\kappa+n\tau,\kappa+(n+1)\tau]$ $(n\in\mathbb{Z})$ και στις ενώσεις διαδοχικών τέτοιων διαστημάτων.
(ii) Αποδείξτε ότι $\int_a^b f=\int_{a+\tau}^{b+\tau} f$ και $\int_a^{a+\tau} f=\int_b^{b+\tau} f$ για κάθε a,b, $a<b$.

18. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, $c>0$ και η $g:[ac,bc]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(\frac{x}{c})$ $(x\in[ac,bc])$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[ac,bc]$ και $\int_{ac}^{bc} g = c\int_a^b f$ ή, ισοδύναμα,
$$\int_{ac}^{bc} f\Big(\frac{x}{c}\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$
Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα αν $c<0$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε διαμέριση $\Delta'=\{a={x_0}',\dots,{x_n}'=b\}$ του $[a,b]$ και τη διαμέριση Δ του $[ac,bc]$ η οποία προκύπτει από τη Δ' παίρνοντας $x_k={x_k}'c$. Για τα ${u_k}'$, ${l_k}'$ της f στο $[{x_{k-1}}',{x_k}']$ και τα u_k, l_k της g στο $[x_{k-1},x_k]$ αποδείξτε ότι $u_k={u_k}'$ και $l_k={l_k}'$. Αποδείξτε ανάλογες ισότητες ανάμεσα στα άνω και κάτω αθροίσματα Darboux των f,g. Χρησιμοποιήστε

το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας. Για την ισότητα των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήστε τις $\underline{\Sigma}(g;ac,bc;\Delta) \leq \int_{ac}^{bc} g \leq \overline{\Sigma}(g;ac,bc;\Delta)$ και τις ανάλογες ανισότητες για την f.

19. Έστω $f : [-b,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[0,b]$.
(i) Αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-b,b]$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-b,b]$ και $\int_{-b}^{b} f = 2\int_0^b f$.
Υπόδειξη: $\int_{-b}^{b} f = \int_{-b}^{0} f + \int_0^b f$ και άσκηση 18.
(ii) Αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [-b,b]$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-b,b]$ και $\int_{-b}^{b} f = 0$.

20. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b fg = 0$ για κάθε $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Υπόδειξη: Πάρτε $g = f$.

21. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b fg = 0$ για κάθε $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[a,b]$ με $g(a) = g(b) = 0$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε $f = 0$ στο $[a,b]$.
Υπόδειξη: Έστω ότι η f είναι συνεχής στον $\xi \in [a,b]$ και $f(\xi) > 0$. Υπάρχει $[c,d] \subseteq [a,b]$ ώστε $d - c > 0$, $\xi \in [c,d]$ και $f(x) \geq \frac{f(\xi)}{2}$ για κάθε $x \in [c,d]$. Θεωρήστε την *τριγωνική συνάρτηση* g η οποία μηδενίζεται στα $[a,c]$ και $[d,b]$, έχει τιμή 1 στο σημείο $\frac{c+d}{2}$ και είναι αφφινική στο $[c,\frac{c+d}{2}]$ και αφφινική στο $[\frac{c+d}{2},d]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b fg > 0$.

22. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f > 0$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 10 της ενότητας 6.2.

23. Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$.
(i) Αποδείξτε ότι είναι $\frac{1}{2}\int_a^b \big(\int_a^b (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy\big)\,dx = (b-a)\int_a^b fg - \int_a^b f \int_a^b g$.
(ii) Αν οι f,g είναι είτε και οι δυο αύξουσες είτε και οι δυο φθίνουσες στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f \int_a^b g \leq (b-a)\int_a^b fg$.
(iii) Αν η μια από τις f,g είναι αύξουσα και η άλλη φθίνουσα στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f \int_a^b g \geq (b-a)\int_a^b fg$.

24. **Ανισότητα του Schwartz**. Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Αποδείξτε την πολύ σημαντική ανισότητα:
$$\Big(\int_a^b fg\Big)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2 .$$
Υπόδειξη: Πρώτος τρόπος: Αποδείξτε ότι $\big(\int_a^b f^2\big)t^2 + \big(2\int_a^b fg\big)t + \big(\int_a^b g^2\big) = \int_a^b (tf+g)^2 \geq 0$ για κάθε t. *Δεύτερος τρόπος:* Αποδείξτε ότι $\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 - \big(\int_a^b fg\big)^2 = \frac{1}{2}\int_a^b \big(\int_a^b (f(x)g(y) - g(x)f(y))^2 dy\big)dx$.

25. (α) **Ανισότητα του Jensen**. Έστω $f : [a,b] \to [c,d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ κυρτή και συνεχής στο $[c,d]$. Αποδείξτε ότι $g\big(E(f;a,b)\big) \leq E(g\circ f;a,b)$ ή, ισοδύναμα,
$$g\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f.$$

Αν η g είναι κοίλη και συνεχής στο $[c,d]$, τότε ισχύει η αντίστροφη της ανισότητας αυτής.
Υπόδειξη: Έστω $\eta = E(f;a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Αποδείξτε ότι $\eta \in [c,d]$. Αν $c < \eta < d$, τότε (Πρόταση 5.17) υπάρχει μ ώστε $g(y) \geq \mu(y-\eta)+g(\eta)$ για κάθε $y \in [c,d]$. Αντικαταστήστε το y με το $f(x)$ και ολοκληρώστε στο $[a,b]$. Αν $\eta = c$ ή $\eta = d$, τότε (Πρόταση 6.12) η f είναι σταθερή η στο $[a,b]$.
(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι:
(i) αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, τότε $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)^n \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^n$.
(ii) αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $\rho \geq 1$, τότε $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)^\rho \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^\rho$.
(iii) αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $0 < \rho \leq 1$, τότε $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)^\rho \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^\rho$.
(iv) αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $\rho < 0$, τότε $\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)^\rho \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^\rho$.
(v) $\frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \log\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \exp\circ f\right)$.
(vi) αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε $\frac{1}{b-a}\int_a^b f \geq \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \log\circ f\right)$.

26. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν $u = \max\{f(x)\,|\,a \leq x \leq b\}$ αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{\int_a^b f^n} \to u$.
Υπόδειξη: Αν $u = 0$, το αποτέλεσμα είναι προφανές. Έστω $f(\xi) = u > 0$ και $0 < \varepsilon \leq 2u$. Υπάρχει $[c,d] \subseteq [a,b]$ ώστε $d-c > 0$, $\xi \in [c,d]$ και $u - \frac{\varepsilon}{2} < f(x)$ για κάθε $x \in [c,d]$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $1 - \frac{\varepsilon}{2u} < \sqrt[n]{d-c}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $u - \varepsilon < (u-\frac{\varepsilon}{2})(1-\frac{\varepsilon}{2u}) \leq \sqrt[n]{\int_c^d f^n} \leq \sqrt[n]{\int_a^b f^n} \leq u$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

27. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και $|f(x)| \leq \kappa \int_a^x |f|$ για κάθε $x \in (a,b]$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b]$.
Υπόδειξη: Υπάρχει M ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $|f(x)| \leq M\frac{\kappa^n (x-a)^n}{n!}$ για κάθε $x \in (a,b]$ και $n \in \mathbb{N}$. Τέλος, δείτε το όριο $\frac{\kappa^n (x-a)^n}{n!} \to 0$ στο παράδειγμα (2) μετά από το Θεώρημα 10.11.

28. Αν η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και συνεχής στον 0, τότε αποδείξτε ότι $\int_0^1 f(x^n)\,dx \to f(0)$.
Υπόδειξη: Υπάρχει M ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x)-f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x \in [0,\delta_0]$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $(1-\frac{\varepsilon}{4M})^n \leq \delta_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $|\int_0^1 f(x^n)dx - f(0)| \leq \int_0^1 |f(x^n) - f(0)|dx = \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M}} |f(x^n) - f(0)|dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M}}^1 |f(x^n) - f(0)|dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

29. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένες στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$.
Υπόδειξη: Θυμηθείτε τις $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)+\underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \leq \underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta)$ και $\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)$ που εμφανίζονται στην απόδειξη της Πρότασης 6.3.

30. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι:
(i) αν $\lambda > 0$, τότε $\overline{\int_a^b}\lambda f = \lambda\overline{\int_a^b} f$ και $\underline{\int_a^b}\lambda f = \lambda\underline{\int_a^b} f$.
(ii) αν $\lambda < 0$, τότε $\overline{\int_a^b}\lambda f = \lambda\underline{\int_a^b} f$ και $\underline{\int_a^b}\lambda f = \lambda\overline{\int_a^b} f$.
Υπόδειξη: Προσαρμόστε την υπόδειξη της άσκησης 29.

31. Έστω $a < c < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$ και $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$.

32. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένες στο $[a,b]$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g$ και $\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} g$.

33. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $\xi_0, \ldots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και η f να είναι συνεχής σε κάθε υποδιάστημα (ξ_{k-1}, ξ_k) $(k = 1, \ldots, m)$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Προσέξτε: μπορεί να μην υπάρχουν τα πλευρικά όρια στους ξ_k $(k = 0, \ldots, m)$.
Υπόδειξη: Άσκηση 8 της ενότητας 2.

34. Έστω η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (-1)^{[\frac{1}{x}]-1}, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και υπολογίστε το $\int_0^1 f$.
Υπόδειξη: Άσκηση 8 της ενότητας 2.

35. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
(i) Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν κατά τμήματα σταθερές $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας. Γράψτε τα άνω και κάτω αθροίσματα Darboux ως ολοκληρώματα κατάλληλων κατά τμήματα σταθερών συναρτήσεων.
(ii) Έστω ότι η f είναι κατά τμήματα σταθερή. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ ώστε $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon$.
Υπόδειξη: Δημιουργήστε τις g, h θεωρώντας κατάλληλα ευθύγραμμα τμήματα με αρκετά μεγάλη κλίση που να συνδέουν διαδοχικά οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα του γραφήματος της f.
(iii) Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ ώστε $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το (ii) στις κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις του (i).

36. (i) Έστω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, πεπερασμένο $A_n \subseteq [a,b]$ ώστε $A_m \cap A_n = \emptyset$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Ορίζουμε $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{αν } x \in A_n \ (n \in \mathbb{N}) \\ 0, & \text{αν } x \in [a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = 0$.
Υπόδειξη: Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n_0+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Θεωρήστε $A = A_1 \cup \cdots \cup A_{n_0}$ και έστω N το πλήθος των στοιχείων του A. Πάρτε N μικρά διαστήματα ξένα ανά δύο ώστε το καθένα να έχει μήκος $< \frac{\varepsilon}{2N}$ και να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο του A στο εσωτερικό του, εκτός αν κάποιο στοιχείο του A είναι ο a ή ο b οπότε το αντίστοιχο μικρό διάστημα θα έχει αυτό το στοιχείο ως άκρο. Τα άκρα αυτών των διαστημάτων μαζί με τους a, b ορίζουν διαμέριση Δ του $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = 0$ και $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \varepsilon$.
(ii) Θεωρήστε $A_n = \{\frac{2k-1}{2^n} \,|\, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2^{n-1}\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $c, d \in [0,1]$, $c < d$ υπάρχει $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ώστε $c < x < d$.
(iii) Θεωρήστε την $f : [0,1] \to [0,1]$ που ορίζεται στο (i) με βάση τα συγκεκριμένα A_n του

μέρους (ii). Θεωρήστε και την $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Τότε οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, αλλά αποδείξτε ότι η $g \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

6.5 Ολοκλήρωμα. Ο ορισμός του Riemann.

Ορισμός. Έστω διάστημα $[a,b]$, όπου $a < b$, και διαμέριση

$$\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$$

του $[a,b]$. Θεωρούμε οποιοδήποτε σύνολο

$$\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$$

ώστε

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Το Ξ ονομάζεται **επιλογή ενδιάμεσων σημείων για τη διαμέριση** Δ. Τα σημεία ξ_k ονομάζονται Ξ**-σημεία**.

Είναι προφανές ότι υπάρχουν άπειρες επιλογές ενδιάμεσων σημείων σε σχέση με την ίδια διαμέριση Δ του $[a,b]$.

Ορισμός. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για τη διαμέριση Δ. Το άθροισμα

$$\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

ονομάζεται **άθροισμα Riemann της** f **ως προς τη διαμέριση** Δ **και την επιλογή** Ξ **ενδιάμεσων σημείων για την** Δ.

Λήμμα 6.6. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση Δ του $[a,b]$. Τότε:*
(1) $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ για κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ.
(2) $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \inf\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \,|\, \Xi \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την } \Delta\}$.
(3) $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sup\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \,|\, \Xi \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την } \Delta\}$.

Απόδειξη. (1) Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ και επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ. Ορίζουμε

$$l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \qquad u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}.$$

Τότε

$$l_k \leq f(\xi_k) \leq u_k\,,$$

οπότε

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum\nolimits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum\nolimits_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}).$$

Δηλαδή, $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$.
(2) Ορίζουμε

$$W = \{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \,|\, \Xi \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την } \Delta\}.$$

Από το (1) συνεπάγεται ότι το $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου W.
Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή $l_k=\inf\{f(x)\,|\,x_{k-1}\le x\le x_k\}$, υπάρχει $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ ώστε

$$f(\xi_k)<l_k+\tfrac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Τα $\xi_k\ \ (k=1,\ldots,n)$ ορίζουν την

$$\Xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$$

και τότε

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)&=\textstyle\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})<\sum_{k=1}^n(l_k+\frac{\varepsilon}{b-a})(x_k-x_{k-1})\\&=\textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^n\frac{\varepsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1})\\&=\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει στοιχείο του W το οποίο είναι $<\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)+\varepsilon$. Επομένως, το $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του W.
(3) Από το (1) συνεπάγεται ότι το $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ είναι άνω φράγμα του W.
Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή $u_k=\sup\{f(x)\,|\,x_{k-1}\le x\le x_k\}$, υπάρχει $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ ώστε

$$u_k-\tfrac{\varepsilon}{b-a}<f(\xi_k).$$

Τα $\xi_k\ \ (k=1,\ldots,n)$ ορίζουν την

$$\Xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$$

(διαφορετική από την Ξ του μέρους 2) και τότε

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)&=\textstyle\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})>\sum_{k=1}^n(u_k-\frac{\varepsilon}{b-a})(x_k-x_{k-1})\\&=\textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k-x_{k-1})-\sum_{k=1}^n\frac{\varepsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1})\\&=\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει στοιχείο του W το οποίο είναι $>\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\varepsilon$. Άρα το $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του W. $\square$

Ορισμός. Έστω διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\ldots,x_n=b\}$ του $[a,b]$. Ονομάζουμε **πλάτος της** Δ το μεγαλύτερο από τα μήκη των Δ-διαστημάτων, δηλαδή το

$$w(\Delta)=\max\{x_k-x_{k-1}\,|\,k\in\mathbb{N},1\le k\le n\}.$$

Σχόλιο. Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.3 είναι, ίσως, η δυσκολότερη όλου του βιβλίου!

Θεώρημα 6.3. *Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.*
(1) Έστω ότι υπάρχει αριθμός $\mathcal{I}$ με την εξής ιδιότητα. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta)<\delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει $\big|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)-\mathcal{I}\big|<\varepsilon$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f=\mathcal{I}$.
(2) Αντιστρόφως, έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta)<\delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει $\big|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)-\int_a^b f\big|<\varepsilon$.

Απόδειξη. (1) Ορίζουμε

$$W=\{\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)\,|\,\Xi\text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την }\Delta\}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει

$$\left|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \mathcal{I}\right| < \tfrac{\varepsilon}{4}\,.$$

Έστω οποιαδήποτε διαμέριση Δ ώστε $w(\Delta) < \delta_0$. Τότε για κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει

$$\mathcal{I} - \tfrac{\varepsilon}{4} < \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) < \mathcal{I} + \tfrac{\varepsilon}{4}\,.$$

Άρα οι $\mathcal{I} - \frac{\varepsilon}{4}$ και $\mathcal{I} + \frac{\varepsilon}{4}$ είναι κάτω φράγμα και άνω φράγμα, αντιστοίχως, του W. Από το Λήμμα 6.5 συνεπάγεται

$$\mathcal{I} - \tfrac{\varepsilon}{4} \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta), \qquad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \mathcal{I} + \tfrac{\varepsilon}{4}\,.$$

Άρα

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \varepsilon$, οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Από τις ανισότητες $\mathcal{I} - \frac{\varepsilon}{4} \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \mathcal{I} + \frac{\varepsilon}{4}$ και την

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \textstyle\int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$$

συνεπάγεται ότι

$$\left|\textstyle\int_a^b f - \mathcal{I}\right| \leq \tfrac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, συνεπάγεται $\int_a^b f = \mathcal{I}$.
(2) Η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|f(x)| \leq M$$

για κάθε $x \in [a, b]$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας, υπάρχει διαμέριση Δ_0 του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Έστω $n_0 \geq 2$ το πλήθος των Δ_0-σημείων και τότε ορίζουμε

$$\delta_0 = \tfrac{\varepsilon}{4n_0(M+1)}\,.$$

Έστω οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ με

$$w(\Delta) < \delta_0\,.$$

Ορίζουμε

$$l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \qquad u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}.$$

Χωρίζουμε τους δείκτες $k = 1, \ldots, n$ σε δυο κατηγορίες. Το σύνολο A έχει ως στοιχεία του εκείνους ακριβώς τους k για τους οποίους το $[x_{k-1}, x_k]$ περιέχει ένα τουλάχιστον Δ_0-σημείο ως *εσωτερικό* του σημείο. Το σύνολο B έχει ως στοιχεία του ακριβώς τους υπόλοιπους k, δηλαδή εκείνους τους k για τους οποίους το $[x_{k-1}, x_k]$ δεν περιέχει κανένα Δ_0-σημείο ως εσωτερικό του σημείο. Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k \in A}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in B}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Είναι προφανές ότι το πλήθος των στοιχείων του A είναι $\le n_0$. Επίσης, είναι προφανές ότι για κάθε $k \in A$ ισχύει $-M \le l_k \le u_k \le M$ και, επομένως, $u_k - l_k \le 2M$. Άρα για κάθε $k \in A$ ισχύει

$$(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \le 2Mw(\Delta) \le 2M\delta_0 < \tfrac{\varepsilon}{2n_0}\,.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\textstyle\sum_{k\in A}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k\in A}\frac{\varepsilon}{2n_0} \le n_0\frac{\varepsilon}{2n_0} = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Θεωρούμε την

$$\Delta' = \Delta \cup \Delta_0$$

και παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in B$, το Δ-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι και Δ'-διάστημα. Άρα, σύμφωνα με το δεύτερο σχόλιο πριν από το Λήμμα 6.2, είναι

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k\in B}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) &\le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')\\ &\le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_0) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_0) < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$. Έστω και οποιαδήποτε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ. Τότε

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Συνδυάζοντας με τις

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \textstyle\int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta), \qquad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \varepsilon,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\left|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) - \textstyle\int_a^b f\right| < \varepsilon$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ. □

Ιδού ο ορισμός του ολοκληρώματος Riemann που έδωσε ο Riemann.

Ορισμός. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **ολοκληρώσιμη** ή, πιό σωστά, **Riemann ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$ αν υπάρχει αριθμός $\mathcal{I}$ με την εξής ιδιότητα. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) - \mathcal{I}\right| < \varepsilon$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε ο αριθμός $\mathcal{I}$ ονομάζεται **ολοκλήρωμα** ή, πιο σωστά, **Riemann ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται

$$\int_a^b f = \mathcal{I}.$$

Το περιεχόμενο του Θεωρήματος 6.3 είναι ακριβώς ότι ο ορισμός του ολοκληρώματος που έδωσε ο Darboux και ο ορισμός που έδωσε ο Riemann είναι ισοδύναμοι. Δηλαδή, *αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον έναν ορισμό, τότε είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα και με τον άλλον ορισμό και οι τιμές των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων της ταυτίζονται.*

Πρόταση 6.15. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $w(\Delta_n) \to 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε μια οποιαδήποτε επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων για την Δ_n. Τότε*

$$\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει

$$\left|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \textstyle\int_a^b f\right| < \varepsilon.$$

Επειδή $w(\Delta_n) \to 0$, ισχύει τελικά $w(\Delta_n) < \delta_0$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$\left|\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) - \textstyle\int_a^b f\right| < \varepsilon.$$

Άρα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f$. □

Μια όχι τόσο αυστηρή αλλά πολύ συνηθισμένη και παραστατική διατύπωση της Πρότασης 6.15 είναι η εξής.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τα αθροίσματα Riemann της f συγκλίνουν στο ολοκλήρωμά της όταν το πλάτος των αντίστοιχων διαμερίσεων τείνει στο 0.

Υπάρχει και το ανάλογο σύμβολο:

$$\lim_{w(\Delta)\to 0} \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) = \int_a^b f.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.15, *αν γνωρίζουμε* ότι μια συγκεκριμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι* ολοκληρώσιμη, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμά της παίρνοντας διαμερίσεις Δ_n ($n \in \mathbb{N}$) του $[a,b]$ ώστε $w(\Delta_n) \to 0$ και, για κάθε Δ_n, μια οποιαδήποτε επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων γι αυτήν. Υπολογίζουμε τα αθροίσματα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$ και, τέλος, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα, αφού $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f$. Η μοναδική μας φροντίδα είναι να βρούμε κατάλληλες Δ_n και αντίστοιχες Ξ_n ώστε να υπολογίζονται εύκολα τα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$.

Σχόλιο. Πάντως, η αξία της Πρότασης 6.15, όπως και της ανάλογης Πρότασης 6.2, είναι περισσότερο θεωρητική παρά πρακτική. Στο Κεφάλαιο 7 θα γνωρίσουμε την κατεξοχήν μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων, η οποία βασίζεται στο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Τονίζουμε, όμως, ότι τα αθροίσματα Riemann είναι το κατεξοχήν εργαλείο σύνδεσης του ολοκληρώματος με τις πολυάριθμες εφαρμογές του στη Γεωμετρία, στη Φυσική και οπουδήποτε αλλού στην επιστήμη. Σχεδόν κάθε ποσότητα, η οποία εκφράζεται με κάποιο ολοκλήρωμα, πρώτα "ποσοτικοποιείται" προσεγγιστικά με τη μορφή αθροισμάτων Riemann και κατόπιν καταλήγει μέσω ορίου στη μορφή ολοκληρώματος.

Τώρα θα αιτιολογήσουμε την επιλογή του όρου *μέση τιμή* για το $E(f; a, b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$ ξεκινώντας από την αρχική και απλή χρήση του όρου *μέση τιμή*.

Είναι γνωστό ότι η *μέση τιμή* οποιωνδήποτε αριθμών $y_1, y_2, \dots, y_n$, όπου ο κάθε y_k εμφανίζεται ν_k φορές, είναι ο λόγος του συνολικού αθροίσματος των αριθμών προς το συνολικό πλήθος τους, δηλαδή ο αριθμός

$$\tfrac{\nu_1 y_1 + \cdots + \nu_n y_n}{\nu_1 + \cdots + \nu_n} = \tfrac{\nu_1}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}\, y_1 + \cdots + \tfrac{\nu_n}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}\, y_n = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_n y_n,$$

όπου κάθε $\mu_k = \frac{\nu_k}{\nu_1+\cdots+\nu_n}$ είναι η αναλογία (σχετική συχνότητα) του αριθμού εμφανίσεων του αντίστοιχου y_k προς τον συνολικό αριθμό εμφανίσεων των $y_1, \dots, y_n$. Είναι, επίσης, γνωστό ότι ο αριθμός αυτός μπορεί να μην είναι ίσος με κανέναν από τους $y_1, \dots, y_n$ αλλά ότι είναι ανάμεσα στον μικρότερο και στον μεγαλύτερο από τους $y_1, \dots, y_n$.

Τώρα, έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Επιλέγουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και οποιαδήποτε επιλογή

$$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$$

ενδιάμεσων σημείων για την Δ. Θεωρούμε και τις αντίστοιχες τιμές

$$f(\xi_1), \dots, f(\xi_n).$$

Αν το πλάτος $w(\Delta)$ είναι αρκετά μικρό, δηλαδή αν κάθε Δ-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι αρκετά μικρό, τότε τα σημεία $x \in [x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ κοντά στον αντίστοιχο ξ_k, οπότε είναι εύλογο να δεχτούμε ότι κάθε τιμή $f(\xi_k)$ "εκπροσωπεί" τις τιμές $f(x)$ για $x \in [x_{k-1}, x_k]$ και, επομένως, ότι οι τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ "εκπροσωπούν" όλες τις τιμές της συνάρτησης. Πρέπει, φυσικά, να σκεφτούμε ότι αν κάποιο $[x_{k-1}, x_k]$ έχει μεγαλύτερο μήκος από κάποιο άλλο $[x_{l-1}, x_l]$, τότε η τιμή $f(\xi_k)$ "εκπροσωπεί" περισσότερες τιμές της συνάρτησης από όσες "εκπροσωπεί" η τιμή $f(\xi_l)$. Θα δεχτούμε, λοιπόν, ότι η αναλογία του συνόλου των τιμών $f(x)$ που "εκπροσωπούνται" από οποιαδήποτε τιμή $f(\xi_k)$ προς το σύνολο όλων των τιμών της συνάρτησης είναι ίδια με την αναλογία

$$\mu_k = \tfrac{x_k - x_{k-1}}{b-a}$$

του μήκους του αντίστοιχου $[x_{k-1}, x_k]$ προς το συνολικό μήκος $b - a$. Επομένως, αν θέλουμε να εισαγάγουμε την έννοια της μέσης τιμής *όλων* των τιμών της f, μια καλή ιδέα είναι να θεωρήσουμε τη μέση τιμή

$$\tfrac{x_1 - x_0}{b-a} f(\xi_1) + \cdots + \tfrac{x_n - x_{n-1}}{b-a} f(\xi_n)$$

των "αντιπροσωπευτικών" τιμών $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ και να δούμε μήπως αυτή η μέση τιμή πλησιάζει κάποιον αριθμό αν το πλάτος $w(\Delta)$ γίνει αρκετά μικρό. Όμως, αυτή η μέση τιμή είναι, προφανώς, ίση με

$$\tfrac{1}{b-a}\, \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi).$$

και, επομένως, πλησιάζει απεριόριστα τον αριθμό $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ όταν το $w(\Delta)$ γίνει κατάλληλα μικρό.

Ασκήσεις.

1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι

$$\tfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\big(a + k\tfrac{b-a}{n}\big) \to \int_a^b f.$$

2. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Έστω οποιεσδήποτε διαμερίσεις Δ_k $(k \in \mathbb{N})$ του $[a, b]$ ώστε $w(\Delta_k) \to 0$. Αποδείξτε ότι $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_k) \to \int_a^b f$ και $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_k) \to \int_a^b f$.

3. Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \delta) = \sup\{\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b], w(\Delta) < \delta\}$$

και

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \delta) = \inf\{\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b], w(\Delta) < \delta\}.$$

Αποδείξτε ότι:
(i) $\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\delta_1) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\delta_2)$, αν $0 < \delta_1 < \delta_2$.
(ii) $\underline{\Sigma}(f;a,b;\delta_2) \leq \underline{\Sigma}(f;a,b;\delta_1) \leq \underline{\int_a^b} f$, αν $0 < \delta_1 < \delta_2$.
(iii) $\lim_{\delta\to 0+} \overline{\Sigma}(f;a,b;\delta) = \overline{\int_a^b} f$ και $\lim_{\delta\to 0+} \underline{\Sigma}(f;a,b;\delta) = \underline{\int_a^b} f$.
(iv) είναι $\lim_{\delta\to 0+} \big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\delta)\big) = 0$ αν και μόνο αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Κεφάλαιο 7

Σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος.

7.1 Αντιπαράγωγοι, αόριστα ολοκληρώματα.

7.1.1 Αντιπαράγωγοι.

Ορισμός. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Αν για την $F : I \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$F'(x) = f(x)$$

για κάθε x στο I, τότε η F ονομάζεται **αντιπαράγωγος** ή **παράγουσα** ή **πρωτεύουσα συνάρτηση** ή **αρχική συνάρτηση** της f στο διάστημα I.

Παραδείγματα. (1) Η συνάρτηση $\frac{1}{\rho+1}x^{\rho+1}$ είναι αντιπαράγωγος της συνάρτησης x^ρ είτε στο $\mathbb{R}$, αν $\rho \in \mathbb{N}$, είτε στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, αν $\rho \in \mathbb{Z}$, $\rho \leq -2$, είτε στο $[0, +\infty)$, αν $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\rho > 0$, είτε στο $(0, +\infty)$, αν $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\rho < 0$.
(2) Η συνάρτηση x είναι αντιπαράγωγος της σταθερής συνάρτησης 1 στο $\mathbb{R}$.
(3) Η συνάρτηση $\log|x|$ είναι αντιπαράγωγος της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.
(4) Αν $\rho > 0$, $\rho \neq 1$, η συνάρτηση $\frac{1}{\log\rho}\rho^x$ είναι αντιπαράγωγος της συνάρτησης ρ^x στο $\mathbb{R}$.
(5) Η $\sin$ είναι αντιπαράγωγος της $\cos$ και η $-\cos$ της $\sin$ στο $\mathbb{R}$.
(6) Η $\tan$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{\cos^2}$ σε κάθε $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Η $-\cot$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{\sin^2}$ σε κάθε $(k\pi, \pi + k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$.
(7) Η συνάρτηση $\arcsin x$ είναι αντιπαράγωγος της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ στο $(-1, 1)$.
(8) Η συνάρτηση $\arctan x$ είναι αντιπαράγωγος της συνάρτησης $\frac{1}{1+x^2}$ στο $\mathbb{R}$.
(9) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $F'(x) = f(x)$ για κάθε x. Επειδή $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και η F είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_1 ώστε $F(x) = c_1$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$. Ομοίως, επειδή $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η F είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_2 ώστε $F(x) = c_2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Άρα $c_1 = F(0) = c_2$ και, συμβολίζοντας $c = c_1 = c_2$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = c$ για κάθε x. Επομένως, $F'(x) = 0$ για κάθε x και καταλήγουμε σε αντίφαση, αφού $F'(0) = f(0) = 1$.

Πρόταση 7.1. *Έστω διάστημα I και $f, F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$. Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μια από τις F_1, F_2 είναι αντιπαράγωγος της f στο I, τότε και η άλλη είναι αντιπαράγωγος της f στο I. Αντιστρόφως, αν οι F_1, F_2 είναι αντιπαράγωγοι της f στο I, τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη. Έστω $F_2(x) - F_1(x) = c$ και $F_1{}'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Τότε
$$F_2{}'(x) = (F_1 + c)'(x) = f(x) + 0 = f(x)$$
για κάθε $x \in I$.
Αντιστρόφως, έστω $F_1{}'(x) = f(x)$ και $F_2{}'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Ορίζουμε την $h = F_2 - F_1 : I \to \mathbb{R}$ και τότε
$$h'(x) = F_1{}'(x) - F_2{}'(x) = f(x) - f(x) = 0$$
για κάθε $x \in I$. Άρα η h είναι σταθερή συνάρτηση στο I. $\square$

Το αποτέλεσμα της Πρότασης 7.1 μπορεί να διατυπωθεί και με τον εξής τρόπο. Έστω F αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I. Τότε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $F+c$ $(c \in \mathbb{R})$ και μόνο από αυτές. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει τουλάχιστον μια αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I, τότε η f έχει *άπειρες* αντιπαραγώγους στο διάστημα I και αυτές είναι ακριβώς οι εξής: μια οποιαδήποτε από τις αντιπαραγώγους συν αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παράδειγμα. Οι αντιπαράγωγοι της συνάρτησης x στο $\mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.
Γενικότερα, για κάθε συνάρτηση στα αρχικά μας παραδείγματα μπορούμε να βρούμε τις αντιπαραγώγους της, αν επισυνάψουμε το σύμβολο c στην αναφερόμενη αντιπαράγωγο. Για παράδειγμα, οι αντιπαράγωγοι της cos στο $\mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις $\sin + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Πρέπει να προσεχθεί το εξής. Αν μια συνάρτηση g έχει παράγωγο σταθερή 0 στην ένωση *δυο μη-διαδοχικών* διαστημάτων, τότε δε συνεπάγεται ότι η g είναι σταθερή στην ένωση των δυο αυτών διαστημάτων.

Παράδειγμα. Η $g(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 2\,, & \text{αν } 1 < x < 3 \end{cases}$ έχει παράγωγο 0 στην ένωση $(0,1) \cup (1,3)$, διότι είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$, $(1,3)$. Όμως, η g δεν είναι σταθερή στην ένωση $(0,1) \cup (1,3)$.

Μετά από την τελευταία παρατήρηση καταλαβαίνουμε γιατί στην Πρόταση 7.1 αναφέρεται "διάστημα" και όχι "ένωση διαστημάτων".

Παράδειγμα. Οι συναρτήσεις $\log|x| + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, είναι οι αντιπαράγωγοι της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ καθώς και στο $(0, +\infty)$ αλλά όχι στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Οι αντιπαράγωγοι της $\frac{1}{x}$ στην $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι οι συναρτήσεις $F(x) = \begin{cases} \log|x| + c_1\,, & \text{αν } x < 0 \\ \log|x| + c_2\,, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές συναρτήσεις, όχι απαραιτήτως ίσες.

7.1.2 Αόριστα ολοκληρώματα.

Ορισμός. Έστω $a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οπότε ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_a^b f$. Είναι πολύ χρήσιμη η εξής επέκταση του συμβόλου του ολοκληρώματος:
$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$
Επίσης, αν απλώς ορίζεται η f στον a, τότε την θεωρούμε, αυτομάτως, ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,a] = \{a\}$ και ορίζουμε:
$$\int_a^a f = 0.$$

Επιτρέπεται, λοιπόν, να γράφουμε το μεγαλύτερο άκρο του διαστήματος στην κάτω μεριά και το μικρότερο άκρο στην πάνω μεριά του συμβόλου του ολοκληρώματος. Επομένως, έχουμε ορίσει το σύμβολο $\int_a^b f$ για οποιουσδήποτε a, b με την προϋπόθεση ότι η f είναι είτε ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, αν $a<b$, είτε ολοκληρώσιμη στο $[b,a]$, αν $b<a$, είτε, απλώς, ορισμένη στο a, αν $a=b$.

Η γνωστή ιδιότητα
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$
η οποία ισχύει όταν $a<c<b$, επεκτείνεται για όλες τις περιπτώσεις σχετικής διάταξης των a,b,c, αρκεί η f να είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα από τον μικρότερο μέχρι τον μεγαλύτερο από τους τρεις αυτούς αριθμούς. Αυτό είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί, διακρίνοντας περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αν $b<c<a$, η ισότητα γράφεται $-\int_b^a f = -\int_c^a f - \int_b^c f$ ή, ισοδύναμα, $\int_b^a f = \int_b^c f + \int_c^a f$ και αυτή είναι η ήδη γνωστή μας ισότητα. Επίσης, αν $a=b<c$, η ισότητα γράφεται $0=\int_a^c f - \int_a^c f$ η οποία είναι, προφανώς, σωστή. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η απόδειξη είναι παρόμοια.

Μια ακόμη γνωστή ιδιότητα που επεκτείνεται είναι η εξής. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη είτε στο διάστημα $[a,b]$, αν $a<b$, είτε στο $[b,a]$, αν $b<a$, και αν $|f(x)|\leq M$ για κάθε x στο ίδιο διάστημα, τότε
$$\Big|\int_a^b f\Big| \leq M|b-a|.$$
Πράγματι, αν $a<b$, οπότε $|b-a|=b-a$, τότε το αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστό. Αν $b<a$, τότε $\big|\int_a^b f\big| = \big|-\int_b^a f\big| = \big|\int_b^a f\big| \leq M(a-b) = M|b-a|$. Τέλος, αν $a=b$, τότε η ανισότητα $\big|\int_a^b f\big| \leq M|b-a|$ ισχύει ως ισότητα $0=0$.

Ορισμός. Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $a\in I$, κατόπιν θεωρούμε έναν μεταβλητό $x\in I$ και για κάθε τέτοιον x γράφουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^x f$. Αυτό είναι ένας αριθμός η τιμή του οποίου εξαρτάται από την τιμή του x. Τέλος, παίρνουμε και έναν αυθαίρετο αριθμό c, οπότε ορίζεται η συνάρτηση $F:I\to\mathbb{R}$ με τύπο
$$F(x)=\int_a^x f + c \qquad (x\in I).$$
Κάθε τέτοια συνάρτηση ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f στο διάστημα I και ο a ονομάζεται **αρχικό σημείο** του αόριστου ολοκληρώματος.

Πρόταση 7.2. *Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι συνάρτηση συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω $a\in I$, αριθμός c και η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f + c\ \ (x\in I)$.
Έστω $\xi\in I$ όχι δεξιό άκρο του I. Θεωρούμε $b\in I$, $b>\xi$. Η f ως ολοκληρώσιμη στο $[\xi,b]$ είναι φραγμένη στο $[\xi,b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[\xi,b]$. Τότε, για κάθε $x\in[\xi,b]$ ισχύει
$$|F(x)-F(\xi)| = \big|\big(\int_a^x f + c\big) - \big(\int_a^\xi f + c\big)\big| = \big|\int_\xi^x f\big| \leq M(x-\xi).$$
Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $[\xi,x]\subseteq[\xi,b]$, οπότε $|f(t)|\leq M$ για κάθε $t\in[\xi,x]$. Συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi+}(F(x)-F(\xi))=0$, οπότε $\lim_{x\to\xi+}F(x)=F(\xi)$.

Έστω $\xi \in I$ όχι αριστερό άκρο του I. Τα υπόλοιπα είναι παραλλαγή της προηγούμενης παραγράφου. Θεωρούμε $b \in I$, $b < \xi$. Η f ως ολοκληρώσιμη στο $[b, \xi]$ είναι φραγμένη στο $[b, \xi]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [b, \xi]$. Για κάθε $x \in [b, \xi]$ ισχύει

$$|F(x) - F(\xi)| = \big|(\textstyle\int_a^x f + c) - (\int_a^\xi f + c)\big| = \big|\int_x^\xi f\big| \leq M(\xi - x).$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $[x, \xi] \subseteq [b, \xi]$, οπότε $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [x, \xi]$. Συνεπάγεται $\lim_{x \to \xi-}(F(x) - F(\xi)) = 0$, οπότε $\lim_{x \to \xi-} F(x) = F(\xi)$.
Άρα η F είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in I$. □

Αν θέλουμε να αντικαταστήσουμε το αρχικό σημείο $a \in I$ με ένα άλλο $a' \in I$ σε ένα αόριστο ολοκλήρωμα, κάνουμε το εξής απλό:

$$F(x) = \textstyle\int_a^x f + c = \int_{a'}^x f + \int_a^{a'} f + c = \int_{a'}^x f + c'\,,$$

όπου $c' = \int_a^{a'} f + c$. Δηλαδή, η αντικατάσταση ενός αρχικού σημείου a με ένα άλλο a' ισοδυναμεί με την αντικατάσταση ενός αριθμού c με έναν άλλον c'. Γι αυτό όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα επιλέγουμε κατάλληλο αρχικό σημείο a τέτοιο ώστε είτε να είναι βολικότερες οι πράξεις για τον υπολογισμό του $\int_a^x f$ είτε να είναι πιο απλός ο τύπος που θα προκύψει.

Παράδειγμα. Για να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της x στο $\mathbb{R}$, παίρνουμε $a = 0$ και έχουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}$. Ένα οποιοδήποτε άλλο αόριστο ολοκλήρωμα της x είναι το $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Αν, για παράδειγμα, επιλέξουμε κάποιον άλλο a ως αρχικό σημείο, για παράδειγμα τον $a = 4$, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_4^x t\,dt + 3$ είναι το $\int_4^x t\,dt + 3 = \frac{x^2}{2} - \frac{4^2}{2} + 3 = \frac{x^2}{2} - 5$ και ο σταθερός αριθμός είναι ο $c = -5$.

Προσέξτε την ομοιότητα ανάμεσα στις Προτάσεις 7.1 και 7.3.

Πρόταση 7.3. *Έστω διάστημα I και $f, F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μια από τις F_1, F_2 είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I, τότε και η άλλη είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I. Αντιστρόφως, αν οι F_1, F_2 είναι αόριστα ολοκληρώματα της f στο I, τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη. Έστω $F_2(x) - F_1(x) = c$ για κάθε $x \in I$ και έστω $F_1(x) = \int_{a_1}^x f + c_1$ για κάθε $x \in I$, όπου $a_1 \in I$. Συνεπάγεται

$$F_2(x) = F_1(x) + c = \textstyle\int_{a_1}^x f + (c_1 + c) = \int_{a_2}^x f + c_2$$

για κάθε $x \in I$, όπου $a_2 = a_1$, $c_2 = c_1 + c$.
Αντιστρόφως, έστω $F_1(x) = \int_{a_1}^x f + c_1$ και $F_2(x) = \int_{a_2}^x f + c_2$ για κάθε $x \in I$, όπου $a_1, a_2 \in I$. Συνεπάγεται

$$F_2(x) - F_1(x) = \textstyle\int_{a_2}^x f + c_2 - \int_{a_1}^x f - c_1 = \int_{a_2}^{a_1} f + c_2 - c_1$$

για κάθε $x \in I$, οπότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I. □

Το τελευταίο αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής. Έστω F ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I. Τότε το σύνολο όλων των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $F + c$ $(c \in \mathbb{R})$ και μόνο από αυτές. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει τουλάχιστον ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I, τότε η f έχει *άπειρα* αόριστα ολοκληρώματα στο διάστημα I και αυτά είναι ακριβώς οι εξής συναρτήσεις: ένα οποιοδήποτε από τα αόριστα ολοκληρώματα συν αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Αν επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε $a \in I$, τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $\int_a^x f + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Ορισμός. Κατά παράδοση, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\int^x f$ και $\int f(x)\,dx$ για να συμβολίσουμε *όλα μαζί τα αόριστα ολοκληρώματα* της f στο I. Δηλαδή, γράφουμε

$$\int^x f = \int_a^x f + c \quad \text{ή} \quad \int f(x)\,dx = \int_a^x f + c \qquad (x \in I)$$

και διαβάζουμε: το $\int^x f$ ή $\int f(x)\,dx$ είναι κάθε συνάρτηση $\int_a^x f + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Ελπίζουμε να μη δημιουργηθεί σύγχυση!

Σημείωση. Πάντοτε γράφουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x: είτε στο σύμβολο $\int^x f$ είτε στο σύμβολο $\int f(x)\,dx$. Πολλές φορές, στο σύμβολο $\int^x f$, εκτός από την ανεξάρτητη μεταβλητή x, γράφουμε και τη "μεταβλητή ολοκλήρωσης" ως εξής: $\int^x f(t)\,dt$. Δηλαδή,

$$\int^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + c.$$

Παράδειγμα. Γράφουμε $\int^x t\,dt = \int_0^x t\,dt + c = \frac{x^2}{2} + c$ ή, ισοδύναμα, $\int x\,dx = \int_0^x t\,dt + c = \frac{x^2}{2} + c$. Διαβάζουμε: το $\int^x t\,dt$ ή $\int x\,dx$ είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της x στο $\mathbb{R}$, δηλαδή οι συναρτήσεις $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παρατηρήστε ότι σε δυο από τα παραδείγματά μας είδαμε ότι το σύνολο των αντιπαραγώγων της συνάρτησης x στο $\mathbb{R}$ είναι ίδιο με το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της. Στην επόμενη ενότητα αυτό θα γενικευθεί.

Πριν προχωρήσουμε ας δούμε δυο απλές ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων. Η πρώτη είναι:

$$\int^x (f+g) = \int^x f + \int^x g \quad \text{ή} \quad \int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Η ισότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια της αντίστοιχης ισότητας ανάμεσα σε ολοκληρώματα με συγκεκριμένα άκρα. Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα $F(x) = \int_a^x f$, $G(x) = \int_a^x g$. Επομένως, $\int^x f = F(x) + c_1$ και $\int^x g = G(x) + c_2$, όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές συναρτήσεις. Τώρα,

$$\int^x f + \int^x g = F(x) + c_1 + G(x) + c_2 = F(x) + G(x) + (c_1 + c_2) = \int_a^x (f+g) + (c_1 + c_2).$$

Όταν οι c_1, c_2 διατρέχουν όλους τους αριθμούς, τότε και η $c_1 + c_2$ διατρέχει όλους τους αριθμούς. Δηλαδή, η $c_1 + c_2$ είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Επομένως, επειδή το $\int_a^x (f+g)$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $f + g$, συνεπάγεται

$$\int^x (f+g) = \int_a^x (f+g) + (c_1 + c_2).$$

Άρα $\int^x f + \int^x g = \int^x (f+g)$.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι:

$$\int^x \lambda f = \lambda \int^x f \quad \text{ή} \quad \int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx \qquad (\lambda \neq 0).$$

Θεωρούμε, όπως πριν, το ίδιο αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f$, οπότε $\int^x f = F(x) + c$, όπου ο c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Τώρα

$$\lambda \int^x f = \lambda F(x) + \lambda c = \int_a^x \lambda f + \lambda c.$$

Όταν η c διατρέχει όλους τους αριθμούς, τότε, ακριβώς επειδή $\lambda \neq 0$, και η λc διατρέχει όλους τους αριθμούς. Δηλαδή, η λc είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Οπότε, επειδή το $\int_a^x \lambda f$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της λf,

$$\int^x \lambda f = \int_a^x \lambda f + \lambda c$$

και, επομένως, $\lambda \int^x f = \int^x \lambda f$.

Όπως φάνηκε στις τελευταίες αποδείξεις, όταν προσθέτουμε δυο αόριστα ολοκληρώματα $\int^x f$, $\int^x g$ μπορούμε να αντικαθιστούμε το άθροισμα των δυο αυθαίρετων σταθερών συναρτήσεων που εμφανίζονται με *μια* αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Ομοίως, όταν πολλαπλασιάζουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα $\int^x f$ με ένα αριθμό $\neq 0$ μπορούμε να αντικαθιστούμε το γινόμενο της αυθαίρετης σταθερής συνάρτησης και του πολλαπλασιαστή αριθμού με *μια* αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παραδείγματα. (1) Γράφουμε $\int (x+x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$. Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (x+x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1 + \frac{x^3}{3} + c_2$.

(2) Γράφουμε $\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2} + c$. Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2} + 7c$.

(3) Γράφουμε $\int (x+g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \int g(x)\,dx$. Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (x+g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + c + \int g(x)\,dx$ διότι η αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση c μπορεί να "απορροφηθεί" στο $\int g(x)\,dx$ το οποίο περιέχει αφ' εαυτού μια αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

(4) Προσέξτε! Γράφουμε $\int x\,dx - \int x\,dx = c$ και όχι $= 0$. Διότι είναι $\int x\,dx - \int x\,dx = \int (x-x)\,dx = \int 0\,dx = c$ ή, με άλλο τρόπο, $\int x\,dx - \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1 - \frac{x^2}{2} - c_2 = c_1 - c_2 = c$.

(5) Προσέξτε! Είναι $0\int^x f \neq \int^x 0f$. Πράγματι: $0\int^x f = 0$ ενώ $\int^x 0f = \int^x 0 = c$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε όλες τις αντιπαραγώγους της $2x+\sin x$ στο $\mathbb{R}$. Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $2x+\sin x$ στο $\mathbb{R}$ ώστε η τιμή της στον 1 να είναι -2. Πόσες τέτοιες αντιπαράγωγοι υπάρχουν;

2. (i) Βρείτε συνάρτηση $F(x)$ ώστε $F'(x^2) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και $F(1) = 1$.
   (i) Βρείτε συνάρτηση $F(x)$ ώστε $F'(\log x) = 1$ για κάθε $x \in (0,1]$ και $F'(\log x) = x$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$ και $F(1) = 1$.

3. Αν υπήρχε ρητή συνάρτηση $r(x)$ και διάστημα (a,b) ώστε $r'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (a,b)$, θα ήταν $r(x) = \ldots$ στο (a,b). Τί συμπεραίνετε;

4. Βρείτε όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $1-x$ στο $\mathbb{R}$. Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1-x$ στο $\mathbb{R}$ ώστε η τιμή του στον 2 να είναι -1. Πόσα τέτοια αόριστα ολοκληρώματα υπάρχουν;

5. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $a \in I$ και αριθμός κ. Πόσα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I υπάρχουν τα οποία έχουν τιμή κ στον a;

6. Υποθέστε ότι $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + x^2 - 3$. Με τί είναι ίση η παράσταση $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$;

7. Θεωρήστε την $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$.
   (i) Αποδείξτε ότι η f είναι περιοδική στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1.
   (ii) Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_0^x f$ είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1 και υπολογίστε το στο $[0,1]$. Εκφράστε τον τύπο της F στο $\mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το $[x]$.
   (iii) Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $G(x) = \int_0^x (F + \frac{1}{12})$ είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1 και υπολογίστε το στο $[0,1]$.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και έστω ότι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της f είναι περιοδική ή άρτια ή περιττή συνάρτηση. Ισχύει τότε ότι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της f είναι περιοδικές ή άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, αντιστοίχως;

7.2 Το Θεμελιώδες Θεώρημα.

Το Θεμελιώδες Θεώρημα είναι το σημαντικότερο αποτέλεσμα του Απειροστικού Λογισμού. Παρέχει την - καθόλου προφανή - σύνδεση ανάμεσα σε δυο φαινομενικά ασύνδετες έννοιες: την παράγωγο και το ολοκλήρωμα. Οι συνέπειες για τον χειρισμό αλλά και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων είναι σημαντικές.

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $a \in I$ και το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f \ \ (x \in I)$. Αν η f είναι συνεχής στον $\xi \in I$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στον ξ και*

$$F'(\xi) = f(\xi).$$

Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο I, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

για κάθε $x \in I$, $|x - \xi| < \delta_0$. Έστω, λοιπόν, οποιοσδήποτε $x \in I$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Για κάθε $t \in [\xi, x]$ ή $t \in [x, \xi]$ ισχύει $|t - \xi| < \delta_0$, οπότε

$$|f(t) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Άρα

$$\big| \textstyle\int_\xi^x (f - f(\xi)) \big| \leq \varepsilon |x - \xi|.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \Big| \tfrac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} - f(\xi) \Big| &= \Big| \tfrac{\int_a^x f - \int_a^\xi f}{x-\xi} - f(\xi) \Big| = \Big| \tfrac{\int_\xi^x f - f(\xi)(x-\xi)}{x-\xi} \Big| = \Big| \tfrac{\int_\xi^x f - \int_\xi^x f(\xi)}{x-\xi} \Big| \\ &= \tfrac{|\int_\xi^x (f - f(\xi))|}{|x-\xi|} \leq \tfrac{\varepsilon |x-\xi|}{|x-\xi|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} = f(\xi)$, οπότε $F'(\xi) = f(\xi)$. □

Σχετικά με το τελευταίο μέρος του Θεμελιώδους Θεωρήματος, παρατηρήστε ότι, αν η f είναι συνεχής στο I, τότε είναι, αυτομάτως, ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.

Οι επόμενες τρεις προτάσεις είναι απλά πορίσματα του Θεμελιώδους Θεωρήματος.

Πρόταση 7.4. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I και αντιστρόφως. Με άλλα λόγια, το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I είναι ίδιο με το σύνολο των αντιπαραγώγων της στο I.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα, το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f \ \ (x \in I)$ της f στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I. Τώρα, επειδή η F είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I, τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι ακριβώς οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. Επίσης, επειδή η F είναι αντιπαράγωγος της f στο I, οι αντιπαράγωγοι της f στο I είναι ακριβώς οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. □

Η Πρόταση 7.5 έχει σπουδαία πρακτική αξία.

Πρόταση 7.5. *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και $F : I \to \mathbb{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο I. Τότε*
(1) τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. Δηλαδή

$$\int^x f = F(x) + c \quad \text{ή} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad (x \in I).$$

(2) το ολοκλήρωμα της f σε οποιοδήποτε $[a, b] \subseteq I$ είναι ίσο με τη διαφορά των τιμών της F στα άκρα του $[a, b]$. Δηλαδή

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \qquad (a, b \in I).$$

Απόδειξη. (1) Οι αντιπαράγωγοι της f στο I είναι οι $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I, και, σύμφωνα με την Πρόταση 7.4, το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I είναι ίδιο με το σύνολο των αντιπαραγώγων της στο I.
(2) Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα, το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_a^x f \ \ (x \in I)$ είναι αντιπαράγωγος της f στο I. Άρα η $\int_a^x f - F(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I. Άρα

$$\int_a^x f - F(x) = \int_a^a f - F(a) = -F(a)$$

για κάθε $x \in I$ και, επομένως, $\int_a^b f - F(b) = -F(a)$. □

Πρόταση 7.6. *Έστω διάστημα I και $F : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο I ώστε η $F' : I \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο I. Τότε,*

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a)$$

για κάθε $a, b \in I$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το (2) της Πρότασης 7.5 στην $f = F'$, παρατηρώντας ότι η F είναι, προφανώς, αντιπαράγωγος της f στο I. □

Στα επόμενα παραδείγματα εκμεταλλευόμαστε το ότι ήδη γνωρίζουμε μια αντιπαράγωγο των συναρτήσεων που εμφανίζονται σ' αυτά και την Πρόταση 7.5.

Παραδείγματα. (1) Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbb{R}$ και η δεύτερη για κάθε a, b:

$$\int 1\,dx = x + c \qquad \text{και} \qquad \int_a^b 1\,dx = b - a.$$

(2) Για κάθε $\rho \neq -1$,

$$\int x^\rho\,dx = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1} + c \qquad \text{και} \qquad \int_a^b x^\rho\,dx = \frac{b^{\rho+1} - a^{\rho+1}}{\rho+1}.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει είτε στο $\mathbb{R}$, αν $\rho \in \mathbb{N}$, είτε στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, αν $\rho \in \mathbb{Z}$, $\rho \leq -2$, είτε στο $[0, +\infty)$, αν $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\rho > 0$, είτε στο $(0, +\infty)$, αν $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\rho < 0$. Η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε a, b τα οποία ανήκουν σε ένα (και το ίδιο) από τα προηγούμενα διαστήματα. Για παράδειγμα, αν $\rho \in \mathbb{Z}$, $\rho \leq -2$, τότε η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε $a, b < 0$ και για κάθε $a, b > 0$, αλλά όχι όταν $a < 0 < b$ ή $b < 0 < a$.

(3) Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ και η δεύτερη για κάθε $a, b < 0$ και κάθε $a, b > 0$:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c \qquad \text{και} \qquad \int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \log|b| - \log|a| = \log\frac{b}{a}.$$

(4) Αν $\rho > 0$, $\rho \neq 1$, η πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbb{R}$ και η δεύτερη για κάθε a, b:

$$\int \rho^x\, dx = \frac{\rho^x}{\log\rho} + c \qquad \text{και} \qquad \int_a^b \rho^x\, dx = \frac{\rho^b - \rho^a}{\log\rho}.$$

(5) Οι πρώτες δυο ισότητες ισχύουν στο $\mathbb{R}$ και οι τελευταίες δυο για κάθε a, b:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c, \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + c,$$

$$\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a, \qquad \int_a^b \sin x\, dx = \cos a - \cos b.$$

(6) Η πρώτη ισότητα ισχύει σε κάθε $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ και η δεύτερη σε κάθε $(k\pi, \pi + k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Οι τελευταίες δυο ισότητες ισχύουν για κάθε a, b τα οποία ανήκουν σε ένα (και το ίδιο) από τα προηγούμενα αντίστοιχα διαστήματα.

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \tan x + c, \qquad \int \frac{1}{(\sin x)^2}\, dx = -\cot x + c,$$

$$\int_a^b \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \tan b - \tan a, \qquad \int_a^b \frac{1}{(\sin x)^2}\, dx = \cot a - \cot b.$$

(7) Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(-1, 1)$ και η δεύτερη για κάθε $a, b \in (-1, 1)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x + c \qquad \text{και} \qquad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin b - \arcsin a.$$

(8) Οι πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbb{R}$ και η δεύτερη για κάθε a, b:

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \arctan x + c \qquad \text{και} \qquad \int_a^b \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \arctan b - \arctan a.$$

Τώρα μπορούμε να δούμε και τη συσχέτιση ανάμεσα στα Θεωρήματα Μέσης Τιμής του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Θεωρούμε στο Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού την ειδική περίπτωση όπου, εκτός από την f, και η g είναι συνεχής στο $[a, b]$. Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος είναι ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\textstyle\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

Τώρα ορίζουμε τα αόριστα ολοκληρώματα $F(x) = \int_a^x fg$ και $G(x) = \int_a^x g$ και η σχέση $\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b$ γράφεται

$$\textstyle g(\xi) \int_a^b fg = f(\xi) g(\xi) \int_a^b$$

και αυτή γράφεται

$$G'(\xi)(F(b)-F(a)) = F'(\xi)(G(b)-G(a)).$$

Αυτή είναι η σχέση στο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy).

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε: $\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax)+c$, $\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)+c$.

2. Αποδείξτε ότι:
   (i) $\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log x)+c$ στο διάστημα $(1,+\infty)$.
   (ii) $\int \frac{1}{x\log x\log(\log x)}\,dx = \log(\log(\log x))+c$ στο διάστημα $(e,+\infty)$.

3. Αποδείξτε ότι:
   (i) $\int x^n e^{-x}\,dx = n!e^{-x}\big(e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\cdots-\frac{x^n}{n!}\big)+c$.
   (ii) $\int x^n e^{x}\,dx = (-1)^{n-1}n!e^{x}\big(e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\big)+c$.

4. Βρείτε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχή στο $\mathbb{R}$ και αριθμό a ώστε $\int_a^x f = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε x. Πόσες λύσεις υπάρχουν;

5. Υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε $\int_0^x f = e^x$ για κάθε x; Ίδια ερώτηση για την $\int_0^x f = e^x-1$.

6. Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο I. Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in I$, αποδείξτε ότι $\int_a^b \frac{f'}{f} = \log\frac{f(b)}{f(a)}$ για κάθε $a,b\in I$.

7. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $\int_a^\xi f = \int_\xi^b f$.
   Υπόδειξη: Εξετάστε την $F(x)=\int_a^x f - \int_x^b f$.

8. Έστω διάστημα I, $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο I και $a\in I$.
   (i) Αν η $\int_a^x f$ είναι σταθερή στο I, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο I.
   (ii) Αν $\int_a^x f = \int_x^b f$ για κάθε $x\in I$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο I.

9. Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αν οι $g,h:A\to I$ είναι συνεχείς στον $\xi\in A$, αποδείξτε ότι η $F(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f\ \ (x\in A)$ είναι συνεχής στον ξ.

10. (i) Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $g,h:A\to I$ παραγωγίσιμες στον $\xi\in A$ και έστω ότι η f είναι συνεχής στους $g(\xi),h(\xi)$. Αποδείξτε ότι η $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f\ \ (x\in A)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $F'(\xi)=g'(\xi)f(g(\xi))-h'(\xi)f(h(\xi))$.
    (ii) Βρείτε τα πεδία ορισμού και τις παραγώγους των $\int_1^{x^2-x}\frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt$, $\int_x^{x^2}\frac{e^t}{t}\,dt$, $\int_{2-x}^{2+x}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$, $\int_{\sin x}^{x+\cos x} te^t\,dt$.
    (iii) Βρείτε $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχή στο $[0,+\infty)$ ώστε $\int_0^{x^2} f = 1-2^{x^2}$ για κάθε $x\geq 0$.

11. (i) Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x e^{t-x}(2t+1)\,dt$.
(ii) Βρείτε $a>0$ και b ώστε $\lim_{x\to0+}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt=1$.

12. Υπολογίστε τα όρια της άσκησης 2 της ενότητας 6.3 και το όριο $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{k^\rho}{n^{\rho+1}}$.

13. Αποδείξτε ότι:
(i) $\int_0^{2\pi}\sin(kx)\,dx=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.
(ii) $\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,dx=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq0$.
(iii) $\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,dx=0$ για κάθε $n,m\in\mathbb{Z}$.
(iv) $\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx=0$ για κάθε $n,m\in\mathbb{Z}$, $n\neq m$.
(v) $\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx=0$ για κάθε $n,m\in\mathbb{Z}$, $n\neq m$.
(vi) $\int_0^{2\pi}(\sin(nx))^2\,dx=\int_0^{2\pi}(\cos(nx))^2\,dx=\pi$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq0$.

14. Έστω $f(x)=a_0+\sum_{k=1}^n(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$, $g(x)=c_0+\sum_{k=1}^n(c_k\cos(kx)+d_k\sin(kx))$. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg=a_0c_0+\sum_{k=1}^n\frac{a_kc_k+b_kd_k}{2}$.

15. Αν $a\neq\pm b$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\sin(at)\sin(bt)\,dt=0$.

16. Η ακολουθία των **πολυωνύμων του Bernoulli** ορίζεται επαγωγικά από τις σχέσεις: $P_0=1$, $P_n{}'=nP_{n-1}$, $\int_0^1 P_n=0\ \ (n\in\mathbb{N})$.
(i) Βρείτε τα πολυώνυμα P_n για $n=1,2,3,4$.
(ii) Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι το P_n είναι πολυώνυμο βαθμού n με μεγιστοβάθμιο όρο x^n.
(iii) Αποδείξτε ότι $P_n(0)=P_n(1)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq2$.
(iv) Αποδείξτε ότι $P_n(x+1)-P_n(x)=nx^{n-1}$ για κάθε x και $n\in\mathbb{N}$.
(v) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^m k^n=\int_0^{m+1}P_n=\frac{P_{n+1}(m+1)-P_{n+1}(0)}{n+1}$ και επαληθεύστε τους γνωστούς τύπους για $n=1$, $n=2$.
(vi) Αποδείξτε ότι $P_n(1-x)=(-1)^nP_n(x)$ για κάθε x και $n\in\mathbb{N}$.
(vii) Αποδείξτε ότι $P_{2n+1}(0)=0$, $P_{2n-1}(\frac{1}{2})=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

17. (i) Δώστε δεύτερη απόδειξη του μέρους 2 του Λήμματος 6.5.
Υπόδειξη: Αποδείξτε πρώτα ότι η $F(x)=\int_a^x f\ \ (x\in[a,b])$ είναι αύξουσα στο $[a,b]$ και, κατόπιν, ότι είναι σταθερή στο $[a,b]$.
(ii) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b f^2=0$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της.
(iii) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_{x'}^{x''} f\geq0$ για κάθε $x',x''\in[a,b]$, $x'<x''$, αποδείξτε ότι $f(x)\geq0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

18. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$, $f(x)\neq0$ για κάθε $x>0$ και $(f(x))^2=2\int_0^x f$ για κάθε $x\geq0$. Αποδείξτε ότι:
(i) $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.
(ii) η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
(iii) $f(x)=x$ για κάθε $x\geq0$.

19. Έστω $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ ώστε η $f':[0,a]\to\mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο $[0,a]$ και $f(0)=0$.

(i) Θεωρήστε την $g(x) = \begin{cases} \frac{(f(x))^2}{x}, & \text{αν } 0 < x \leq a \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[0, a]$.
(ii) Να συγκρίνετε τις παραγώγους των $g(x)$ και $\int_0^x (f')^2$.
(iii) Αποδείξτε ότι $(f(x))^2 \leq x \int_0^x (f')^2$ για κάθε $x \in [0, a]$.
(iv) Αν $(f(a))^2 = a \int_0^a (f')^2$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι σταθερή στο $(0, a]$.
(v) Αν $(f(a))^2 = a \int_0^a (f')^2$ και $f'(0) = 2$, αποδείξτε ότι $f(x) = 2x$ για κάθε $x \in [0, a]$.

20. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Ορίζουμε $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t)\, dt$ $(x \in [a, b])$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(i) Αποδείξτε ότι ${f_1}'(x) = f(x)$ και ${f_{n+1}}'(x) = f_n(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Αποδείξτε ότι ${f_n}^{(n)}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Αποδείξτε ότι $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ για κάθε $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$.
(iv) Αποδείξτε το εξής αποτέλεσμα του **Fekete**: το πλήθος των εναλλαγών προσήμου της f στο $[a, b]$ δεν είναι μικρότερο από το πλήθος των εναλλαγών προσήμου στην $(n + 1)$-άδα $\big(f(b), f_1(b), \ldots, f_n(b)\big)$.
Υπόδειξη: Αρχή της επαγωγής.
(v) Αποδείξτε το εξής αποτέλεσμα του **Fejer**: το πλήθος των εναλλαγών προσήμου της f στο $[a, b]$ δεν είναι μικρότερο από το πλήθος των εναλλαγών προσήμου στην $(n + 1)$-άδα $\Big(f(a), \int_a^b f(t)dt, \ldots, \int_a^b (t - a)^{n-1} f(t)dt\Big)$.

21. **Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης**. Έστω διάστημα I, $a \in I$, αριθμός λ και $p, g : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο I. Θεωρήστε και την $\mu : I \to \mathbb{R}$, $\mu(x) = \int_a^x p(t)\, dt$.
(i) Αποδείξτε ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \lambda e^{-\mu(x)} + e^{-\mu(x)} \int_a^x e^{\mu(t)} g(t)\, dt \qquad (x \in I)$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(*) \qquad f'(x) + p(x)f(x) = g(x) \qquad (x \in I)$$

και ότι $f(a) = \lambda$.
(ii) Αντιστρόφως, αποδείξτε ότι αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $(*)$ και αν $f(a) = \lambda$, τότε ο τύπος της είναι $f(x) = \lambda e^{-\mu(x)} + e^{-\mu(x)} \int_a^x e^{\mu(t)} g(t)\, dt$ $(x \in I)$.
Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε την $f' + pf = g$ με την e^{μ}.

7.3 Τεχνικές υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

7.3.1 Μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής.

Πρόταση 7.7. *Έστω διαστήματα I, J. Έστω $\phi : I \to J$ ώστε η $\phi' : I \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο I και έστω $f : J \to \mathbb{R}$ συνεχής στο J. Τότε*

$$\int^x (f \circ \phi)\phi' = \int^{\phi(x)} f \quad (x \in I), \qquad \int_a^b (f \circ \phi)\phi' = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f \quad (a, b \in I).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $(f \circ \phi)\phi'$ είναι συνεχής στο I.
Έστω $F : J \to \mathbb{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο J. Τότε

$$\int^{y} f = F(y) + c \qquad (y \in J),$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Άρα

$$\int^{\phi(x)} f = F(\phi(x)) + c = (F \circ \phi)(x) + c \qquad (x \in I),$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. Τώρα, ισχύει

$$(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x) = (f \circ \phi)(x)\phi'(x)$$

για κάθε $x \in I$, οπότε η $F \circ \phi : I \to \mathbb{R}$ είναι αντιπαράγωγος της $(f \circ \phi)\phi'$ στο I. Άρα

$$\int^{x} (f \circ \phi)\phi' = (F \circ \phi)(x) + c \qquad (x \in I),$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. Επομένως, $\int^{x} (f \circ \phi)\phi' = \int^{\phi(x)} f \ \ (x \in I)$.
Για τη δεύτερη ισότητα θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$G(x) = \int_{a}^{x} (f \circ \phi)\phi' \quad (x \in I), \qquad F(y) = \int_{\phi(a)}^{y} f \quad (y \in J).$$

Ισχύει $G'(x) = (f \circ \phi)(x)\phi'(x)$ για κάθε $x \in I$ και $F'(y) = f(y)$ για κάθε $y \in J$. Άρα ισχύει

$$(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x) = (f \circ \phi)(x)\phi'(x) = G'(x)$$

για κάθε $x \in I$. Άρα η συνάρτηση $F \circ \phi - G$ είναι σταθερή στο I και, επομένως, είναι

$$F(\phi(x)) - G(x) = F(\phi(a)) - G(a) = 0$$

για κάθε $x \in I$. Άρα $F(\phi(b)) - G(b) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_{a}^{b} (f \circ \phi)\phi'$. ☐

Οι δυο ισότητες της Πρότασης 7.7 γράφονται και

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=\phi(x)}, \qquad \int_{a}^{b} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\,dy.$$

Παρατηρούμε, τώρα, σχετικά με την πρώτη ισότητα το εξής. Το $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$ συμβολίζει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης $f(\phi(x))\phi'(x)$, τα οποία είναι, φυσικά, συναρτήσεις του $x \in I$. Το $\int f(y)\,dy$ συμβολίζει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης $f(y)$, τα οποία είναι συναρτήσεις του $y \in J$. *Μόνο όταν γίνει αντικατάσταση του y με το $\phi(x)$ προκύπτει η πρώτη από τις δυο παραπάνω ισότητες.*

Και στις δυο ισότητες, συνήθως λέμε ότι η δεξιά μεριά τους προκύπτει από την αριστερή "με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \phi(x)$ και με αντικατάσταση του $\phi'(x)\,dx$ από το dy". Αυτή η αντικατάσταση αιτιολογείται από τις σχέσεις

$$\tfrac{dy}{dx} = \phi'(x), \qquad dy = \phi'(x)\,dx$$

ανάμεσα στα απειροστά των μεταβλητών x και y.

Παραδείγματα. (1) Αν $n \in \mathbb{N}$, θα υπολογίσουμε το $\int (\sin x)^n \cos x \, dx$.
Με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \sin x$, βρίσκουμε

$$\int (\sin x)^n \cos x \, dx = \int y^n \, dy\Big|_{y=\sin x} = \left(\tfrac{y^{n+1}}{n+1} + c\right)\Big|_{y=\sin x} = \tfrac{(\sin x)^{n+1}}{n+1} + c.$$

(2) Για να βρούμε το $\int \frac{2x}{x^2+1} \, dx$ χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = x^2 + 1$, οπότε

$$\int \tfrac{2x}{x^2+1} \, dx = \int \tfrac{1}{y} \, dy\Big|_{y=x^2+1} = (\log|y| + c)\Big|_{y=x^2+1} = \log(x^2 + 1) + c.$$

(3) Για τον υπολογισμό του $\int_a^b \frac{1}{x \log x} \, dx$ χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \log x$ και έχουμε

$$\int_a^b \tfrac{1}{x \log x} \, dx = \int_{\log a}^{\log b} \tfrac{1}{y} \, dy = \log\left|\tfrac{\log b}{\log a}\right|.$$

Πρέπει να προσέξουμε ώστε οι a, b να είναι τέτοιοι ώστε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\log x$, το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα με άκρα a, b, να περιέχεται στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της $\frac{1}{y}$, δηλαδή είτε στο $(-\infty, 0)$ είτε στο $(0, +\infty)$. Αυτό το σύνολο τιμών της $\log x$ είναι το διάστημα με άκρα $\log a, \log b$. Άρα πρέπει να είναι είτε $\log a, \log b > 0$ ή, ισοδύναμα, $a, b > 1$, είτε $\log a, \log b < 0$ ή, ισοδύναμα, $0 < a, b < 1$. Ειδικώτερα, οι $\log a, \log b$ έχουν το ίδιο πρόσημο, οπότε

$$\int_a^b \tfrac{1}{x \log x} \, dx = \log \tfrac{\log b}{\log a}\,.$$

7.3.2 Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες

.

Πρόταση 7.8. *Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ ώστε οι $f', g' : I \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχείς στο I. Τότε*

$$\int^x fg' = f(x)g(x) - \int^x f'g \quad (x \in I),$$

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g \quad (a, b \in I).$$

Απόδειξη. Έστω $F : I \to \mathbb{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της $f'g$ στο I. Τότε είναι

$$\int^x f'g = F(x) - c \qquad (x \in I),$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Θεωρούμε την $G = fg - F : I \to \mathbb{R}$. Τότε

$$G' = f'g + fg' - F' = fg'$$

στο I, οπότε η G είναι αντιπαράγωγος της fg' στο I. Άρα

$$\int^x fg' = G(x) + c = f(x)g(x) - F(x) + c = f(x)g(x) - \int^x f'g \qquad (x \in I).$$

Για τη δεύτερη ισότητα, θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$F(x) = \int_a^x f'g, \quad G(x) = \int_a^x fg' \qquad (x \in I).$$

Τότε ισχύει

$$F'(x) + G'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (fg)'(x)$$

για κάθε $x \in I$. Άρα η συνάρτηση $F + G - fg$ είναι σταθερή στο I, οπότε είναι

$$F(x) + G(x) - f(x)g(x) = F(a) + G(a) - f(a)g(a) = -f(a)g(a)$$

για κάθε $x \in I$. Άρα $F(b) + G(b) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. □

Παραδείγματα. (1) $\int \log x\,dx = \int 1 \log x\,dx = x\log x - \int x \log' x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c$ στο $(0,+\infty)$.
(2) $\int_0^2 xe^x\,dx = 2e^2 - 0e^0 - \int_0^2 1e^x\,dx = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1$.
(3) $\int_0^\pi x\sin x\,dx = -\pi\cos\pi + 0\cos 0 + \int_0^\pi 1\cos x\,dx = \pi + (\sin\pi - \sin 0) = \pi$.
(4) Αν $a \neq 0$, με μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες βρίσκουμε

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \tfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \tfrac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx.$$

Προκύπτει ολοκλήρωμα παρόμοιο με το αρχικό, οπότε εφαρμόζουμε πάλι ολοκλήρωση κατά μέρη και βρίσκουμε

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \tfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \tfrac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \tfrac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx.$$

Άρα

$$\big(1 + \tfrac{b^2}{a^2}\big)\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \tfrac{1}{a^2}e^{ax}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big) + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση και, επομένως,

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = e^{ax}\Big(\frac{a}{a^2+b^2}\sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2}\cos(bx)\Big) + c.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο χρήσιμος αυτός τύπος ισχύει και στην περίπτωση $a = 0,\ b \neq 0$, αφού τότε γράφεται $\int \sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}\cos(bx) + c$. Άρα ο τύπος ισχύει αν $a^2 + b^2 \neq 0$, δηλαδή αν δεν είναι και οι δυο a, b ίσοι με μηδέν.
Ομοίως, αποδεικνύεται και ο τύπος

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = e^{ax}\Big(\frac{a}{a^2+b^2}\cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2}\sin(bx)\Big) + c.$$

7.3.3 Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

Θα περιγράψουμε μια γενική μέθοδο υπολογισμού του

$$\int r(x)\,dx = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\,dx,$$

όπου $r(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ είναι οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση.
Πρώτο βήμα. Αναγόμαστε στην περίπτωση που ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή. Αν $m < n$ εξ αρχής, παραλείπουμε το πρώτο βήμα. Αν $m \geq n$, διαιρούμε τα πολυώνυμα και βρίσκουμε πολυώνυμα $p(x)$, $q(x)$ ώστε ο βαθμός του $q(x)$ να είναι $< n$ και να ισχύει

$$a_m x^m + \cdots + a_0 = p(x)(b_n x^n + \cdots + b_0) + q(x)$$

για κάθε x. Τότε

$$r(x) = p(x) + \frac{q(x)}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\,.$$

Το $\int p(x)\,dx$ υπολογίζεται εύκολα, οπότε από τώρα και στο εξής μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m < n$.
Δεύτερο βήμα. Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων. Αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε τις ρίζες - εν γένει μιγαδικές - του παρονομαστή και είναι πολύ δύσκολο ή και αδύνατο αλλά σε αρκετές περιπτώσεις είναι εφικτό. Το γενικό συμπέρασμα, το οποίο δε θα αποδείξουμε, είναι το εξής.

Κάθε πολυώνυμο $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων

$$b_nx^n + \cdots + b_0 = b_n(x-\alpha)^\kappa \cdots (x-\gamma)^\lambda((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho \cdots ((x-\varepsilon)^2+\delta^2)^\tau ,$$

όπου οι εκθέτες $\kappa, \dots, \lambda, \rho, \dots, \tau$ είναι φυσικοί αριθμοί με $\kappa + \cdots + \lambda + 2\rho + \cdots + 2\tau = n$ και οι αριθμοί $\nu, \dots, \delta$ είναι όλοι > 0.

Στην ανάλυση αυτή, η ύπαρξη των πρωτοβάθμιων όρων $x-\alpha, \dots, x-\gamma$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι $\alpha, \dots, \gamma$ είναι όλες οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\kappa, \dots, \lambda$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Επίσης, η ύπαρξη των δευτεροβάθμιων όρων $(x-\mu)^2+\nu^2, \dots, (x-\varepsilon)^2+\delta^2$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι μιγαδικοί αριθμοί $\mu \pm i\nu, \dots, \varepsilon \pm i\delta$ είναι όλες οι γνησίως μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\rho, \dots, \tau$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Προσέξτε ότι οι γνησίως μιγαδικές ρίζες αποτελούν ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Επισημαίνουμε ότι οι πραγματικές ρίζες $\alpha, \dots, \gamma$ καθορίζουν τα διαστήματα στα οποία ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμά μας: είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα με άκρα τα $\alpha, \dots, \gamma$ καθώς και τα $\pm\infty$.

Τρίτο βήμα. Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση σε **απλούς λόγους**:

$$\begin{aligned} r(x) = {} & \big(\tfrac{A_1}{x-\alpha} + \cdots + \tfrac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa}\big) + \cdots + \big(\tfrac{\Gamma_1}{x-\gamma} + \cdots + \tfrac{\Gamma_\lambda}{(x-\gamma)^\lambda}\big) \\ & + \big(\tfrac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \tfrac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}\big) + \cdots + \big(\tfrac{E_1(x-\varepsilon)+\Delta_1}{(x-\varepsilon)^2+\delta^2} + \cdots + \tfrac{E_\tau(x-\varepsilon)+\Delta_\tau}{((x-\varepsilon)^2+\delta^2)^\tau}\big). \end{aligned}$$

Κάθε παράγων $x-\alpha, \dots, x-\gamma$ του παρονομαστή καθορίζει μια ομάδα λόγων με αριθμούς ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως $\kappa, \dots, \lambda$, αντιστοίχως, ως παρονομαστές. Κάθε παράγων $(x-\mu)^2+\nu^2, \dots, (x-\varepsilon)^2+\delta^2$ καθορίζει μια ομάδα λόγων με πρωτοβάθμιους όρους ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως $\rho, \dots, \tau$, αντιστοίχως, ως παρονομαστές. Οι αριθμοί $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$, δηλαδή όλοι οι συντελεστές των αριθμητών, είναι άγνωστοι και πρέπει να υπολογιστούν. Αυτό επιτυγχάνεται με απαλοιφή των παρονομαστών, αν πολλαπλασιάσουμε με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους, δηλαδή το $b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0$. Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των δυο πολυωνύμων που προκύπτουν, βρίσκουμε ένα σύστημα n εξισώσεων με τους n αγνώστους $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$ και το λύνουμε.

Τέταρτο βήμα. Το πρόβλημα, λοιπόν, ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων των εξής τριών τύπων:

$$\int \tfrac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx, \quad \int \tfrac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx, \quad \int \tfrac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx, \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Εξετάζουμε καθέναν από τους τρεις τύπους ξεχωριστά.

(i) Για το $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx$, είτε στο διάστημα $(-\infty, \alpha)$ είτε στο $(\alpha, +\infty)$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x - \alpha$ και τότε

$$\int \tfrac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \int \tfrac{1}{y^k}\,dy\big|_{y=x-\alpha}.$$

Αν $k \geq 2$, τότε $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \big(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{y^{k-1}} + c\big)\big|_{y=x-\alpha} = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + c$.
Αν $k = 1$, τότε $\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = (\log|y| + c)\big|_{y=x-\alpha} = \log|x-\alpha| + c$.
Δηλαδή,

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + c, & \text{αν } k \geq 2 \\ \log|x-\alpha| + c, & \text{αν } k = 1 \end{cases}$$

(ii) Για το $\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = (x-\mu)^2 + \nu^2$ και τότε

$$\int \tfrac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{y^k}\,dy\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2}.$$

Αν $k \geq 2$, τότε $\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \frac{1}{2}\big(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{y^{k-1}}+c\big)\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} = -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}}+c$.
Αν $k=1$, τότε $\int \frac{x-\mu}{(x-\mu)^2+\nu^2}\,dx = \frac{1}{2}(\log|y|+c)\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} = \frac{1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2)+c$.
Άρα

$$\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}}+c, & \text{αν } k\geq 2 \\ \frac{1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2)+c, & \text{αν } k=1 \end{cases}$$

(iii) Τέλος, για το $\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{x-\mu}{\nu}$ και τότε

$$\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \frac{1}{\nu^{2k-1}}\int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy\Big|_{y=(x-\mu)/\nu}.$$

Έτσι αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy \quad (k\in\mathbb{N}).$$

Αυτό είναι πιο περίπλοκο από τα προηγούμενα και υπολογίζεται με *αναδρομικό τύπο*.
Κατ' αρχάς, αν $k=1$, τότε

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y + c.$$

Αν $k>1$, τότε

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy = \int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^k}\,dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^k}\,dy = \int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy - \int y\frac{y}{(y^2+1)^k}\,dy \\ &= I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy = \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στον αναδρομικό τύπο

$$I_k = \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1},$$

ο οποίος ανάγει τον υπολογισμό του I_k στον υπολογισμό του I_{k-1} και, επαγωγικά, στο I_1. Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1} \\ &= \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \frac{(2k-3)(2k-5)}{(2k-2)(2k-4)}I_{k-2} \\ &= \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\frac{y}{y^2+1} + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 1}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\arctan y + c. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στο ότι κάθε ομάδα όρων $\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa}$ στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $r(x)$ συνεισφέρει μια ομάδα

$$A_1\log|x-\alpha| - \frac{A_2}{x-\alpha} - \cdots - \frac{A_\kappa}{(k-1)(x-\alpha)^{\kappa-1}}$$

στο ολοκλήρωμα $\int r(x)\,dx$, κάθε ομάδα $\frac{M_1(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2}+\frac{M_2(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2}+\cdots+\frac{M_\rho(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ συνεισφέρει μια ομάδα

$$\frac{M_1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2) - \frac{M_2}{2((x-\mu)^2+\nu^2)} - \cdots - \frac{M_\rho}{2(\rho-1)((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}}$$

και, τέλος, κάθε ομάδα $\frac{N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2}+\frac{N_2}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2}+\cdots+\frac{N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ συνεισφέρει μια ομάδα

$$N_1'\arctan\frac{x-\mu}{\nu} + \frac{N_2'(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \frac{N_\rho'(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}},$$

όπου οι $N_1',\ldots,N_\rho'$ είναι διαφορετικοί από τους $N_1,\ldots,N_\rho$.

Παραδείγματα. (1) $\int \frac{2}{x-3}\,dx = 2\log|x-3| + c$ στο $(-\infty,3)$ και στο $(3,+\infty)$.
(2) $\int \frac{-5}{(x+2)^3}\,dx = \frac{5}{2}\frac{1}{(x+2)^2} + c$ στο $(-\infty,-2)$ και στο $(-2,+\infty)$.
(3) $\int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy\Big|_{y=(x+1)/3} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3} + c$ στο $(-\infty,+\infty)$.
(4) $\int \frac{x-2}{(x-2)^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy\Big|_{y=(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}\log((x-2)^2+4) + c$ στο $(-\infty,+\infty)$.
(5) $\int \frac{x-2}{((x-2)^2+4)^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^4}\,dy\Big|_{y=(x-2)^2+4} = -\frac{1}{6}\frac{1}{((x-2)^2+4)^3} + c$ στο $(-\infty,+\infty)$.
(6) Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx$.
Διαιρούμε το x^3-2x^2+2 με το x^2-3x+2 και βρίσκουμε $x^3-2x^2+2 = (x^2-3x+2)(x+1)+x$ ή, ισοδύναμα, $\frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2} = x+1+\frac{x}{x^2-3x+2}$. Άρα

$$\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ αναλύουμε τον λόγο $\frac{x}{x^2-3x+2}$ σε απλούς λόγους. Οι ρίζες του x^2-3x+2 είναι οι 1 και 2, οπότε είναι $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$. Άρα ο λόγος $\frac{x}{x^2-3x+2}$ γράφεται

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}\,,$$

όπου οι αριθμοί a,b πρέπει να προσδιοριστούν. Πολλαπλασιάζουμε τα δυο μέλη της τελευταίας ισότητας με το $(x-1)(x-2)$ και προκύπτει $x = a(x-2)+b(x-1)$ ή, ισοδύναμα, $x = (a+b)x + (-2a-b)$. Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιόβαθμων μονωνύμων των δυο μελών της τελευταίας ισότητας και βρίσκουμε $a+b=1$ και $-2a-b=0$. Το σύστημα αυτό έχει λύση $a=-1$, $b=2$. Άρα

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}\,.$$

Επομένως,

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = -\int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx = -\log|x-1| + 2\log|x-2| + c$$

και, τέλος,

$$\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x - \log|x-1| + 2\log|x-2| + c$$

στα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,2)$ και $(2,+\infty)$.
(7) Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$.
Παραγοντοποιούμε το x^3+x^2-x-1 ως εξής: $x^3+x^2-x-1 = x^2(x+1)-(x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$. Δηλαδή, το x^3+x^2-x-1 έχει απλή ρίζα τον 1 και διπλή ρίζα τον -1. Άρα ο λόγος $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}$ γράφεται

$$\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}\,,$$

όπου πρέπει να υπολογίσουμε τους a,b,c. Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία ισότητα με το $(x-1)(x+1)^2$ και προκύπτει $2x^2+1 = a(x+1)^2 + b(x-1)(x+1) + c(x-1)$ ή, ισοδύναμα, $2x^2+1 = (a+b)x^2 + (2a+c)x + (a-b-c)$. Εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε $a+b=2$, $2a+c=0$ και $a-b-c=1$. Το σύστημα αυτό έχει λύση $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{5}{4}$, $c=-\frac{3}{2}$. Άρα

$$\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{5}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2}$$

και

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx &= \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{5}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= \frac{3}{4}\log|x-1| + \frac{5}{4}\log|x+1| + \frac{3}{2}\frac{1}{x+1} + c\end{aligned}$$

στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$.

(8) Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx$.
Παραγοντοποιούμε: $x^4-x^2-2x+2 = x^2(x^2-1)-2(x-1) = x^2(x-1)(x+1)-2(x-1) = (x-1)(x^3+x^2-2) = (x-1)(x^3-x^2+2x^2-2) = (x-1)(x^2(x-1)+2(x-1)(x+1)) = (x-1)^2(x^2+2x+2)$. Δηλαδή, το x^4-x^2-2x+2 έχει διπλή ρίζα τον 1 και καμία άλλη πραγματική ρίζα, διότι $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$. Άρα ο λόγος $\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}$ γράφεται

$$\frac{x}{x^4-x^2-2x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c(x+1)+d}{(x+1)^2+1}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με το $(x-1)^2((x+1)^2+1)$ και προκύπτει $x = (a+c)x^3 + (a+b-c+d)x^2 + (2b-c-2d)x + (-2a+2b+c+d)$. Εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε $a+c=0$, $a+b-c+d=0$, $2b-c-2d=1$ και $-2a+2b+c+d=0$. Το σύστημα έχει λύση $a=\frac{1}{25}$, $b=\frac{1}{5}$, $c=-\frac{1}{25}$, $d=-\frac{7}{25}$. Άρα

$$\frac{x}{x^4-x^2-2x+2} = \frac{1}{25}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{5}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{25}\frac{x+1}{(x+1)^2+1} - \frac{7}{25}\frac{1}{(x+1)^2+1}\,,$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx &= \frac{1}{25}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{1}{25}\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}\,dx - \frac{7}{25}\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{25}\log|x-1| - \frac{1}{5}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{50}\log((x+1)^2+1) - \frac{7}{25}\arctan(x+1) + c\end{aligned}$$

στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.
(9) Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx$.
Διαιρώντας, βρίσκουμε ότι $\frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = x^2+7x+5+\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$. Άρα

$$\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 5x + \int \frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx.$$

Παραγοντοποιούμε: $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1 = x^4(x-1)+2x^2(x-1)+(x-1) = (x^4+2x^2+1)(x-1) = (x^2+1)^2(x-1)$. Άρα το $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1$ έχει απλή ρίζα τον 1 και καμία άλλη πραγματική ρίζα και γράφουμε

$$\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε με το $(x^2+1)^2(x-1)$ και βρίσκουμε $-7x^4+3x^3+4x^2+x+5 = (a+b)x^4 + (-b+c)x^3 + (2a+b-c+d)x^2 + (-b+c-d+e)x + (a-c-e)$ οπότε $a+b=-7$, $-b+c=3$, $2a+b-c+d=4$, $-b+c-d+e=1$ και $a-c-e=5$. Το σύστημα έχει λύση $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{17}{2}$, $c=-\frac{11}{2}$, $d=4$ και $e=2$ και, επομένως,

$$\begin{aligned}\int \frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{17x+11}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{17}{4}\log(x^2+1) - \frac{11}{2}\arctan x - \frac{2}{x^2+1} + 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int x\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + c.\end{aligned}$$

Συγκεντρώνοντας τους υπολογισμούς:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 5x + \frac{x-2}{x^2+1} \\ &\quad + \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{17}{4}\log(x^2+1) - \frac{9}{2}\arctan x + c\end{aligned}$$

στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

7.3.4 Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θα δούμε μια μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int f(x)\,dx = \int r(\cos x, \sin x)\,dx,$$

όπου η $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δυο μεταβλητών s, t. Δηλαδή, είναι

$$f(x) = r(\cos x, \sin x) = \tfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\,,$$

όπου καθεμιά από τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$ είναι της μορφής

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_j\,(\cos x)^{k_j}(\sin x)^{l_j}\,,$$

όπου $a_j \in \mathbb{R}$ και $k_j, l_j \in \mathbb{Z}$, $k_j, l_j \geq 0$.

Παράδειγμα. Στο $\int \big(2\sin x\cos x - \frac{\sin x+(\cos x)^3-(\sin x)^2\cos x}{\sin x+(\cos x)^2}\big)\,dx$ η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι η $f(x) = 2\sin x\cos x - \frac{\sin x+(\cos x)^3-(\sin x)^2\cos x}{\sin x+(\cos x)^2} = \frac{2(\cos x)^3\sin x+3\cos x(\sin x)^2-(\cos x)^3-\sin x}{(\cos x)^2+\sin x} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, όπου $f_1(x) = 2(\cos x)^3\sin x + 3\cos x(\sin x)^2 - (\cos x)^3 - \sin x$, $f_2(x) = (\cos x)^2 + \sin x$ και η αντίστοιχη ρητή συνάρτηση είναι η $r(s,t) = \frac{2s^3t+3st^2-s^3-t}{s^2+t}$.

Παρατηρούμε ότι οι f_1 και f_2 είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, ότι η f δεν ορίζεται στα σημεία στα οποία η f_2 έχει τιμή 0 και ότι, αν εξαιρέσουμε αυτά τα σημεία, δηλαδή αν περιοριστούμε στο πεδίο ορισμού της f, τότε η f είναι συνεχής. Παρατηρούμε, επίσης, ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π και θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις σχετικά με τη συνάρτηση αυτή.

Περίπτωση 1. Έστω ότι η f δεν ορίζεται στον $-\pi$, δηλαδή ότι ο παρονομαστής της έχει τιμή 0 στον $-\pi$.

Επειδή η συνάρτηση έχει περίοδο 2π, δεν ορίζεται ούτε στον π. Τώρα, είτε η συνάρτηση ορίζεται στο διάστημα $(-\pi,\pi)$, οπότε είναι συνεχής στο $(-\pi,\pi)$, είτε δεν ορίζεται σε διάφορα σημεία του $(-\pi,\pi)$, οπότε είναι συνεχής σε διάφορα υποδιαστήματα του $(-\pi,\pi)$. Ένας καλός τρόπος να μελετήσουμε την f στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ είναι να θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \tan\tfrac{x}{2}\,.$$

Προσέξτε: αυτή η αλλαγή μεταβλητής δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μεγαλύτερο διάστημα αφού η $u = \tan\frac{x}{2}$ δεν ορίζεται στους $\pm\pi$. Η $u = \tan\frac{x}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\pi,\pi)$. Είναι $\lim_{x\to-\pi+}\tan\frac{x}{2} = -\infty$ και $\lim_{x\to\pi-}\tan\frac{x}{2} = +\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της $u = \tan\frac{x}{2}$ είναι το $\mathbb{R}$. Η αντίστροφη αλλαγή μεταβλητής είναι η

$$x = 2\arctan u,$$

η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(-\pi,\pi)$. Άρα, καθώς η μεταβλητή x αυξάνεται και διατρέχει το διάστημα $(-\pi,\pi)$, η u αυξάνεται και διατρέχει το $\mathbb{R}$ και αντιστρόφως. Τώρα, είναι

$$\cos x = \tfrac{1-(\tan\frac{x}{2})^2}{1+(\tan\frac{x}{2})^2} = \tfrac{1-u^2}{1+u^2}\,, \qquad \sin x = \tfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+(\tan\frac{x}{2})^2} = \tfrac{2u}{1+u^2},$$

οπότε η συνάρτηση $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ στο $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στη συνάρτηση

$$g(u) = r\big(\tfrac{1-u^2}{1+u^2}, \tfrac{2u}{1+u^2}\big)$$

στο $\mathbb{R}$. Το σημαντικό είναι ότι η *νέα* αυτή συνάρτηση είναι ρητή συνάρτηση του u.

Παράδειγμα. Στη συνάρτηση $f(x) = \frac{2(\cos x)^3 \sin x + 3\cos x(\sin x)^2 - (\cos x)^3 - \sin x}{(\cos x)^2 + \sin x}$ στο $(-\pi, \pi)$ του προηγούμενου παραδείγματος αντιστοιχεί, με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$, η συνάρτηση $g(u) = \frac{2\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^3 \frac{2u}{1+u^2} + 3\frac{1-u^2}{1+u^2}\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 - \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^3 - \frac{2u}{1+u^2}}{\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2 + \frac{2u}{1+u^2}} = \frac{-1+2u+14u^2-18u^3+6u^5-14u^6+2u^7+u^8}{1+2u+6u^3-2u^4+6u^5+2u^7+u^8}$ στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = g(u) = g(\tan\tfrac{x}{2}), \qquad g(u) = f(x) = f(2\arctan u)$$

και, επομένως, ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(u)$ προκύπτουν η μια από την άλλη μέσω σύνθεσης με συνεχή συνάρτηση. Άρα, αν η $f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιον $x \in (-\pi, \pi)$, τότε η $g(u)$ είναι συνεχής στον αντίστοιχο $u \in \mathbb{R}$ και αντιστρόφως. Επίσης, αν η $f(x)$ δεν ορίζεται σε κάποιον $x \in (-\pi, \pi)$, τότε η $g(u)$ δεν ορίζεται στον αντίστοιχο $u \in \mathbb{R}$ και αντιστρόφως.

Βάσει των παραπάνω, για να βρούμε τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $f(x)$ στο $(-\pi, \pi)$ αρκεί να βρούμε τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $g(u)$ στο $\mathbb{R}$, δηλαδή να βρούμε τις ρίζες ενός *πολυωνύμου*. Αν η $g(u)$ ορίζεται και, επομένως, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η $f(x)$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $(-\pi, \pi)$. Αν η $g(u)$ δεν ορίζεται στους $u_1, \ldots, u_n$, όπου $-\infty < u_1 < \cdots < u_n < +\infty$, οπότε είναι συνεχής στα διαδοχικά διαστήματα

$$(-\infty, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_{n-1}, u_n), (u_n, +\infty),$$

τότε η $f(x)$ δεν ορίζεται στους αντίστοιχους $x_1, \ldots, x_n$, όπου $-\pi < x_1 < \cdots < x_n < \pi$ και είναι συνεχής στα διαδοχικά διαστήματα

$$(-\pi, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, \pi).$$

Δεν ξεχνάμε ότι οι x_i και u_i αλληλοκαθορίζονται μέσω των σχέσεων

$$u_i = \tan\tfrac{x_i}{2}, \qquad x_i = 2\arctan u_i .$$

Επομένως, αν περιορίσουμε τον υπολογισμό του $\int r(\sin x, \cos x)\,dx$ *κατ' αρχάς* στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, τότε είναι

$$\int r(\sin x, \cos x)dx = \int f(x)dx = \int g(u)\tfrac{2}{1+u^2}du\Big|_{u=\tan(x/2)} = \int r\left(\tfrac{1-u^2}{1+u^2}, \tfrac{2u}{1+u^2}\right)\tfrac{2}{1+u^2}du\Big|_{u=\tan(x/2)}$$

Άρα το αρχικό ολοκλήρωμα της $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ στα υποδιαστήματα του $(-\pi, \pi)$ στα οποία αυτή ορίζεται και είναι συνεχής ανάγεται στο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$.

Έστω, λοιπόν, ότι υπολογίζουμε το

$$\int g(u)\tfrac{2}{1+u^2}\,du = G(u) + c,$$

όπου η $G(u)$ είναι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση του u - ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $g(u)$ - στα κατάλληλα υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$. Τότε, βάσει των παραπάνω και αφού ορίσουμε την συνάρτηση

$$F(x) = G\big(\tan\tfrac{x}{2}\big),$$

έχουμε ότι

$$\int r(\cos x, \sin x)\,dx = \int f(x)\,dx = G\Big(\tan\frac{x}{2}\Big) + c = F(x) + c$$

στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $(-\pi, \pi)$. Επομένως, η συνάρτηση $F(x)$ είναι ένα από τα ζητούμενα αόριστα ολοκληρώματα της $f(x)$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $(-\pi, \pi)$.

Πρέπει, τώρα, να παρατηρήσουμε ότι το τελευταίο συμπέρασμα ισχύει όχι μόνο στο $(-\pi,\pi)$ αλλά και σε κάθε διάστημα $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$. Αυτό συμβαίνει επειδή, όπως η $f(x)$ έχει περίοδο 2π, έτσι και η $F(x)=G\big(\tan\frac{x}{2}\big)$ και, επομένως, και η $F'(x)$ έχουν περίοδο 2π. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι ισχύει $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ σε κάποιο υποδιάστημα (a,b) του $(-\pi,\pi)$ στο οποίο η $f(x)$ είναι συνεχής. Αυτό, φυσικά, ισοδυναμεί με το ότι $F'(x)=f(x)$ στο ίδιο υποδιάστημα. Θεωρούμε το αντίστοιχο υποδιάστημα $(a+k2\pi,b+k2\pi)$ του $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$, οπότε για κάθε $x\in(a+k2\pi,b+k2\pi)$ ισχύει $x-k2\pi\in(a,b)$ και, επομένως,

$$F'(x)=F'(x-k2\pi)=f(x-k2\pi)=f(x).$$

Άρα ισχύει $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ και στο $(a+k2\pi,b+k2\pi)$.

Έχει, επομένως, τελειώσει ο υπολογισμός του $\int r(\cos x,\sin x)\,dx$ σε κάθε υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ στο οποίο η $y=f(x)=r(\cos x,\sin x)$ ορίζεται και είναι συνεχής. Αρκεί, φυσικά, να υπολογιστεί η $G(u)$.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{\sin x}\,dx$.
Το παράδειγμα αυτό εμπίπτει στην Περίπτωση 1 διότι η συνάρτηση $\frac{1}{\sin x}$ δεν ορίζεται στον $-\pi$. Θα εργαστούμε κατ' αρχάς στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{x}{2}$ η συνάρτηση $\frac{1}{\sin x}$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στη συνάρτηση $\frac{1+u^2}{2u}$ στο $\mathbb{R}$. Η $\frac{1+u^2}{2u}$ δεν ορίζεται στον $0\in\mathbb{R}$ και η $\frac{1}{\sin x}$ δεν ορίζεται στον $0\in(-\pi,\pi)$. Τώρα έχουμε

$$\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}du\Big|_{u=\tan(x/2)}=\int\frac{1}{u}du\Big|_{u=\tan(x/2)}=(\log|u|+c)|_{u=\tan(x/2)}=\log\Big|\tan\frac{x}{2}\Big|+c$$

στα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$. Είναι: $G(u)=\log|u|$ και $F(x)=\log\big|\tan\frac{x}{2}\big|$.
Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{1}{\sin x}$ και $\log\big|\tan\frac{x}{2}\big|$ έχουν και οι δυο περίοδο 2π, συνεπάγεται $\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\log\big|\tan\frac{x}{2}\big|+c$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα $(-\pi+k2\pi,k2\pi)$ και $(k2\pi,\pi+k2\pi)$ του οποιουδήποτε $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$.
Απλουστεύοντας την απάντηση, γράφουμε:

$$\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\log\Big|\tan\frac{x}{2}\Big|+c$$

σε κάθε διάστημα $(k\pi,\pi+k\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Μένοντας στην Περίπτωση 1, έστω, γενικότερα, ότι η $r(\cos x,\sin x)$ δεν ορίζεται σε κάποιον x_0, ο οποίος μπορεί να είναι $\neq-\pi$.

Τώρα, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $z=x-x_0-\pi$ οπότε

$$\cos x=\cos(z+x_0+\pi)=-\cos(z+x_0)=-\cos x_0\cos z+\sin x_0\sin z=p\cos z+q\sin z,$$

με συντελεστές $p=-\cos x_0$ και $q=\sin x_0$, και, παρομοίως,

$$\sin x=\sin(z+x_0+\pi)=-\sin(z+x_0)=-\sin x_0\cos z-\cos x_0\sin z=-q\cos z+p\sin z.$$

Τότε

$$r(\cos x,\sin x)=r(p\cos z+q\sin z,-q\cos z+p\sin z),$$

οπότε

$$\int r(\cos x,\sin x)\,dx=\int r(p\cos z+q\sin z,-q\cos z+p\sin z)\,dz\Big|_{z=x-x_0-\pi}.$$

Όταν η μεταβλητή x διατρέχει το διάστημα $(x_0,x_0+2\pi)$ η νέα μεταβλητή z διατρέχει το $(-\pi,\pi)$ και, επειδή η συνάρτηση $r(\cos x,\sin x)$ δεν ορίζεται στον x_0, η συνάρτηση $r(p\cos z+q\sin z,-q\cos z+p\sin z)$ δεν ορίζεται στον $-\pi$. Αναγόμαστε, λοιπόν, στην ειδική περίπτωση που ήδη μελετήσαμε.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό μας είναι ήδη γνωστό και είναι ευκαιρία να ελέγξουμε τη μέθοδο που αναπτύξαμε.
Η συνάρτηση $\frac{1}{(\cos x)^2}$ δεν ορίζεται στον $-\frac{\pi}{2}$ (αλλά ορίζεται στον $-\pi$). Με την αλλαγή μεταβλητής $z = x - (-\frac{\pi}{2}) - \pi = x - \frac{\pi}{2}$ η συνάρτηση $\frac{1}{(\cos x)^2}$ μετατρέπεται στη συνάρτηση $\frac{1}{(\cos(z+\frac{\pi}{2}))^2} = \frac{1}{(\sin z)^2}$ και, επίσης,

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(\sin z)^2}\,dz\Big|_{z=x-(\pi/2)}.$$

Η συνάρτηση $\frac{1}{(\sin z)^2}$ δεν ορίζεται στον $-\pi$ και εργαζόμαστε κατ' αρχάς στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{z}{2}$ η $\frac{1}{(\sin z)^2}$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στη συνάρτηση $\frac{(1+u^2)^2}{4u^2}$ στο $\mathbb{R}$. Η $\frac{(1+u^2)^2}{4u^2}$ δεν ορίζεται στον $0 \in \mathbb{R}$ και η $\frac{1}{(\sin z)^2}$ δεν ορίζεται στον $0 \in (-\pi,\pi)$. Τώρα,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(\sin z)^2}\,dz &= \int \frac{(1+u^2)^2}{4u^2}\frac{2}{1+u^2}\,du\Big|_{u=\tan(z/2)} = \int \frac{1+u^2}{2u^2}\,du\Big|_{u=\tan(z/2)} \\ &= \Big(-\frac{1}{2u}+\frac{u}{2}\Big)\Big|_{u=\tan(z/2)} + c = -\frac{1}{2}\cot\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\tan\frac{z}{2} + c = -\cot z + c\end{aligned}$$

στα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$. Όταν ο z διατρέχει τα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$, ο $x = z + \frac{\pi}{2}$ διατρέχει τα αντίστοιχα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ και $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. Άρα σ' αυτά τα διαστήματα είναι

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(\sin z)^2}\,dz\Big|_{z=x-(\pi/2)} = -\cot(x-\tfrac{\pi}{2}) + c = \tan x + c.$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{1}{(\cos x)^2}$ και $\tan x$ έχουν και οι δυο περίοδο 2π, είναι $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{\pi}{2}+k2\pi)$ και $(\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{3\pi}{2}+k2\pi)$ του $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{3\pi}{2}+k2\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$.
Απλουστεύουμε λέγοντας ότι

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c$$

σε κάθε διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Περίπτωση 2. Έστω ότι η συνάρτηση $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$, δηλαδή ότι ο παρονομαστής της δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο.

Συνεπάγεται, φυσικά, ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\int f(x)\,dx = \int r(\cos x,\sin x)\,dx$ ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, δηλαδή ότι $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, όπου η F είναι κάποια συνάρτηση παραγωγίσιμη και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα δούμε, τώρα, πώς υπολογίζεται η F.

Όπως στην Περίπτωση 1, θα εργαστούμε, *προσωρινά*, στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ χρησιμοποιώντας την ίδια αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$ και την αντίστροφή της $x = 2\arctan u$. Όπως πριν, η συνάρτηση $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ στο $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στη ρητή συνάρτηση $g(u) = r\big(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\big)$ στο $\mathbb{R}$. Τώρα, όμως, θα μελετήσουμε πιο προσεκτικά κάποιες ιδιότητες της g.
Επειδή η f είναι συνεχής στον π, συνεπάγεται ότι το

$$\lim_{u\to+\infty} g(u) = \lim_{x\to\pi-} f(x) = f(\pi)$$

είναι αριθμός και, επομένως, ο βαθμός του πολυωνύμου στον αριθμητή της g δεν είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του πολυωνύμου στον παρονομαστή της. Άρα για τη ρητή συνάρτηση

$$g_1(u) = g(u)\frac{2}{1+u^2} = \frac{a_0+a_1u+\cdots+a_nu^n}{b_0+b_1u+\cdots+b_mu^m}$$

(με $a_n, b_m \neq 0$) είναι

$$m \geq n+2.$$

Από αυτό συνεπάγεται ότι

$$\lim_{u\to+\infty} ug_1(u) = 0.$$

Επειδή η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$, το πολυώνυμο $b_0 + b_1u + \cdots + b_mu^m$ δεν έχει *καμιά πραγματική ρίζα*. Άρα η ανάλυση της g_1 σε απλούς λόγους είναι της μορφής

$$g_1(u) = \left(\tfrac{M_1(u-\mu)+N_1}{(u-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \tfrac{M_\rho(u-\mu)+N_\rho}{((u-\mu)^2+\nu^2)^\rho}\right) + \cdots + \left(\tfrac{E_1(u-\varepsilon)+\Delta_1}{(u-\varepsilon)^2+\delta^2} + \cdots + \tfrac{E_\tau(u-\varepsilon)+\Delta_\tau}{((u-\varepsilon)^2+\delta^2)^\tau}\right)$$

όπου, ειδικώτερα, είναι $\nu, \ldots, \delta > 0$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα με τον u και υπολογίζοντας το $\lim_{u\to+\infty}$ των δυο πλευρών, βρίσκουμε εύκολα ότι

$$M_1 + \cdots + E_1 = 0.$$

Μελετώντας προσεκτικά τα αποτελέσματά μας για τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int g_1(u)\,du &= G(u) + c\\ &= \tfrac{M_1}{2}\log((u-\mu)^2+\nu^2) + \cdots + \tfrac{E_1}{2}\log((u-\varepsilon)^2+\delta^2)\\ &\quad + {N_1}'\arctan\tfrac{u-\mu}{\nu} + \cdots + {\Delta_1}'\arctan\tfrac{u-\varepsilon}{\delta} + h(u) + c,\end{aligned}$$

όπου η $h(u)$ είναι μια ρητή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ στην οποία ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή. Τώρα, χρησιμοποιώντας τη σχέση $M_1 + \cdots + E_1 = 0$ και ορίζοντας

$$\kappa = ({N_1}' + \cdots + {\Delta_1}')\pi,$$

βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\lim_{x\to\pi-} G\big(\tan\tfrac{x}{2}\big) = \lim_{u\to+\infty} G(u) = \tfrac{\kappa}{2}, \quad \lim_{x\to-\pi+} G\big(\tan\tfrac{x}{2}\big) = \lim_{u\to-\infty} G(u) = -\tfrac{\kappa}{2}.$$

Μέχρι τώρα έχουμε υπολογίσει το $\int f(x)\,dx$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$:

$$\int f(x)\,dx = \int g_1(u)\,du\Big|_{u=\tan(x/2)} = G(\tan\tfrac{x}{2}) + c.$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $G(\tan\frac{x}{2})$ έχουν περίοδο 2π, οπότε η σχέση $\int f(x)\,dx = G(\tan\frac{x}{2}) + c$ ισχύει σε κάθε διάστημα $(-\pi+k2\pi, \pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$. Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση

$$\Phi(x) = \begin{cases} G(\tan\frac{x}{2}) + \kappa[\frac{x+\pi}{2\pi}], & \text{αν } x \neq \pi + k2\pi \text{ για κάθε } k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\kappa}{2\pi}x, & \text{αν } x = \pi + k2\pi \text{ για κάποιον } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Σε κάθε διάστημα $I_k = (-\pi+k2\pi, \pi+k2\pi)$ είναι

$$\Phi(x) = G(\tan\tfrac{x}{2}) + k\kappa,$$

οπότε η Φ είναι παραγωγίσιμη και, μάλιστα, ισχύει $\Phi' = f$ στο διάστημα αυτό. Ας δούμε αν η Φ είναι συνεχής στα σημεία $\pi + k2\pi$ που χωρίζουν τα γειτονικά διαστήματα I_k και I_{k+1}. Λόγω περιοδικότητας της $G(\tan\frac{x}{2})$ είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(\pi+k2\pi)+}\Phi(x) &= \lim_{x\to(\pi+k2\pi)+}\big(G(\tan\tfrac{x}{2}) + (k+1)\kappa\big) = \lim_{x\to-\pi+} G(\tan\tfrac{x}{2}) + (k+1)\kappa\\ &= -\tfrac{1}{2}\kappa + (k+1)\kappa = (k+\tfrac{1}{2})\kappa = \Phi(\pi+k2\pi).\end{aligned}$$

Ομοίως, είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(\pi+k2\pi)-}\Phi(x) &= \lim_{x\to(\pi+k2\pi)-}\big(G(\tan\tfrac{x}{2})+k\kappa\big)=\lim_{x\to\pi-}G(\tan\tfrac{x}{2})+k\kappa\\ &= \tfrac{1}{2}\kappa+k\kappa=(k+\tfrac{1}{2})\kappa=\Phi(\pi+k2\pi).\end{aligned}$$

Άρα η Φ είναι συνεχής σε κάθε $\pi+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Επομένως, η Φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη σε κάθε $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)\ \ (k\in\mathbb{Z})$ και ισχύει $\Phi'=f$ σε κάθε τέτοιο διάστημα. Αν η F είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο $\mathbb{R}$ - αυτό που ζητάμε να υπολογίσουμε - τότε η F είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $F'=f$ στο $\mathbb{R}$. Συνεπάγεται ότι η $\Phi-F$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη σε κάθε $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbb{Z})$ και ισχύει $(\Phi-F)'=0$ σε κάθε τέτοιο διάστημα. Άρα η $\Phi-F$ είναι σταθερή σε κάθε *κλειστό* διάστημα $[-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi]\ \ (k\in\mathbb{Z})$. Επομένως, η $\Phi-F$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή, υπάρχει c_0 ώστε $\Phi(x)=F(x)+c_0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, και η Φ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο $\mathbb{R}$ και μπορούμε να θεωρήσουμε ως F την ίδια την Φ. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι

$$\int r(\cos x,\sin x)\,dx=\Phi(x)+c\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx$.
Η συνάρτηση $\frac{1}{2+\sin x}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Κατ' αρχάς εργαζόμαστε στο $(-\pi,\pi)$ με την αλλαγή $u=\tan\frac{x}{2}$, οπότε

$$\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx=\int\frac{1}{u^2+u+1}\,du\Big|_{u=\tan(x/2)}.$$

Τώρα, είναι

$$\int\frac{1}{u^2+u+1}\,du=\int\frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,du=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+c$$

στο $\mathbb{R}$. Άρα

$$\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)+c$$

στο $(-\pi,\pi)$.
Οι συναρτήσεις $\frac{1}{2+\sin x}$ και $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)$ έχουν περίοδο 2π και, επομένως, η σχέση $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)+c$ ισχύει σε κάθε $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)\ \ (k\in\mathbb{Z})$. Τώρα,

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)=\frac{\pi}{\sqrt{3}},\quad \lim_{x\to-\pi+}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Η

$$\Phi(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}[\frac{x+\pi}{2\pi}], & \text{αν } x\neq\pi+k2\pi \text{ για κάθε } k\in\mathbb{Z}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}x, & \text{αν } x=\pi+k2\pi \text{ για κάποιον } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx=\Phi(x)+c$ στο $\mathbb{R}$.

7.3.5 Ολοκληρώματα μερικών αλγεβρικών συναρτήσεων.

Τώρα θα υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int r\big(x,\sqrt{1-x^2}\big)\,dx,\qquad\int r\big(x,\sqrt{x^2-1}\big)\,dx,\qquad\int r\big(x,\sqrt{x^2+1}\big)\,dx.$$

Και στα τρία ολοκληρώματα η $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δυο μεταβλητών $s,\ t$.
(i) Το πρώτο ολοκλήρωμα ορίζεται κατ' αρχάς στο $[-1,1]$ και είναι φυσιολογικό να χρησιμοποιηθεί η αλλαγή μεταβλητής $x=\sin t$ με τον t στο $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Τότε $\sqrt{1-x^2}=\cos t$ και προκύπτει

το $\int r(\sin t, \cos t) \cos t \, dt$, στο οποίο, όπως είδαμε στην υποενότητα 7.3.4, θα γίνει νέα αλλαγή μεταβλητής $u = \tan \frac{t}{2}$. Μετά από λίγες πράξεις παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές x και u συνδέονται με τη σχέση $u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. Είναι, λοιπόν, προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε κατ' ευθείαν την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \tfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} .$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και το σύνολο τιμών της είναι, επίσης, το $[-1, 1]$. Εύκολα υπολογίζουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης

$$x = \tfrac{2u}{1+u^2} .$$

Επίσης, $\sqrt{1-x^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ και, επομένως,

$$\int r(x, \sqrt{1-x^2}) \, dx = \int r\big(\tfrac{2u}{1+u^2}, \tfrac{1-u^2}{1+u^2}\big) \tfrac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \, dy\Big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})} .$$

Αναγόμαστε έτσι σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο διάστημα $[-1, 1]$ και συνεχίζουμε όπως ορίζει η υποενότητα 7.3.3.

Φυσικά, για να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής του $r(x, \sqrt{1-x^2})$ ενδέχεται να πρέπει να περιορισθεί ο x σε κάποια υποδιαστήματα του $[-1, 1]$. Αυτό, όμως, εξαρτάται από το συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα. Θα βρούμε το $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}} \, dx$ στα υποδιαστήματα $[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ και $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ του $[-1, 1]$.
Ο περιορισμός στα υποδιαστήματα αυτά του $[-1, 1]$ χρειάζεται, επειδή πρέπει να είναι $x + \sqrt{1-x^2} \neq 0$ ή ισοδύναμα $x \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Επομένως, ο $u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ περιορίζεται είτε στο διάστημα $[-1, 1-\sqrt{2})$ είτε στο $(1-\sqrt{2}, 1]$, αντιστοίχως, και έχουμε:

$$\int \tfrac{1}{x+\sqrt{1-x^2}} \, dx = 2 \int \tfrac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)} \, du\Big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})} .$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε το $2 \int \frac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)} \, du$ ως ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης και βρίσκουμε ότι είναι ίσο με $\frac{1}{2} \log \frac{|1+2u-u^2|}{1+u^2} + \arctan u + c$. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο

$$\int \tfrac{1}{x+\sqrt{1-x^2}} \, dx = \tfrac{1}{2} \log |x + \sqrt{1-x^2}| + \arctan \tfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + c.$$

(ii) Το δεύτερο ολοκλήρωμα ορίζεται είτε στο $[1, +\infty)$ είτε στο $(-\infty, -1]$. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση του $[1, +\infty)$ και μια φυσιολογική αλλαγή μεταβλητής είναι η $x = \frac{1}{\sin t}$ με τον t στο $(0, \frac{\pi}{2}]$. Τότε $\sqrt{x^2-1} = \frac{\cos t}{\sin t}$ και το αόριστο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $-\int r(\frac{1}{\sin t}, \frac{\cos t}{\sin t}) \frac{\cos t}{(\sin t)^2} \, dt$, οπότε, βάσει της υποενότητας 7.3.4, θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan \frac{t}{2}$. Εύκολα βλέπουμε ότι οι μεταβλητές x και u συνδέονται με τη σχέση $u = x + \sqrt{x^2-1}$, οπότε χρησιμοποιούμε κατ' ευθείαν αυτή την αλλαγή μεταβλητής χωρίς να μεσολαβήσει ο t. Θεωρούμε, λοιπόν, την αλλαγή μεταβλητής

$$u = x + \sqrt{x^2-1} .$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Βρίσκουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-1}) = +\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[1, +\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$x = \tfrac{u^2+1}{2u}$$

και, επίσης, $\sqrt{x^2-1} = \frac{u^2-1}{2u}$. Άρα

$$\int r(x, \sqrt{x^2-1}) \, dx = \int r\big(\tfrac{u^2+1}{2u}, \tfrac{u^2-1}{2u}\big) \tfrac{u^2-1}{2u^2} \, du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}$$

και καταλήγουμε πάλι σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $[1,+\infty)$.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το αρχικό αόριστο ολοκλήρωμα στο $(-\infty,-1]$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = x - \sqrt{x^2-1}$$

και καταλήγουμε σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $(-\infty,-1]$. Οι λεπτομέρειες είναι παρόμοιες με τις παραπάνω.

Φυσικά, εκτός από τον περιορισμό στα $(-\infty,-1]$ ή $[1,+\infty)$, ενδέχεται να πρέπει να περιοριστούμε σε μικρότερα διαστήματα ώστε να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής του $r(x,\sqrt{x^2-1})$.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx$ στο $[1,+\infty)$.
Δε χρειάζεται ο περιορισμός σε μικρότερα διαστήματα, διότι $x+\sqrt{x^2-1}\neq 0$ στο $[1,+\infty)$. Άρα

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \big(\tfrac{1}{2u}-\tfrac{1}{2u^3}\big)\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Τώρα, είναι $\int\big(\frac{1}{2u}-\frac{1}{2u^3}\big)\,du = \frac{1}{2}\log|u| + \frac{1}{4u^2}+c$, οπότε

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx = \tfrac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}| + \frac{1}{4(x+\sqrt{x^2-1})^2}+c.$$

(iii) Το τρίτο ολοκλήρωμα ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και μια φυσιολογική αλλαγή μεταβλητής είναι η $x=-\cot t$ με τον t στο $(0,\pi)$. Τότε $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sin t}$ και το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $\int r\big(-\frac{\cos t}{\sin t},\frac{1}{\sin t}\big)\frac{1}{(\sin t)^2}\,dt$, οπότε, βάσει της υποενότητας 7.3.4, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{t}{2}$. Όμως, τότε

$$u = x+\sqrt{x^2+1},$$

οπότε θεωρούμε κατ' ευθείαν αυτή την αλλαγή μεταβλητής. Η $u=x+\sqrt{x^2+1}$ είναι γνησίως αύξουσα. Υπολογίζουμε $\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=0$ και $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=+\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της $u=x+\sqrt{x^2+1}$ είναι το $(0,+\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$x = \frac{u^2-1}{2u}.$$

Επίσης, $\sqrt{x^2+1}=\frac{u^2+1}{2u}$. Άρα

$$\int r(x,\sqrt{x^2+1})\,dx = \int r\big(\tfrac{u^2-1}{2u},\tfrac{u^2+1}{2u}\big)\tfrac{u^2+1}{2u^2}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}$$

και καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $(0,+\infty)$.

Παράδειγμα. Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ είτε στο $(-\infty,0)$ είτε στο $(0,+\infty)$.
Ο περιορισμός του x στα δυο αυτά υποδιαστήματα είναι αυτονόητος, οπότε και ο $u=x+\sqrt{x^2+1}$ περιορίζεται, αντιστοίχως, είτε στο $(0,1)$ είτε στο $(1,+\infty)$. Καταλήγουμε στην ισότητα

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = 2\int\frac{1}{u^2-1}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}$$

και υπολογίζουμε το $2\int\frac{1}{u^2-1}\,du$ είτε στο $(0,1)$ είτε στο $(1,+\infty)$ και βρίσκουμε ότι είναι ίσο με $\log|u-1|-\log(u+1)+c$. Επομένως,

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \log\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+c.$$

Βάσει των παραπάνω τριών τύπων ολοκληρωμάτων, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε ολοκληρώματα του τύπου

$$\int r\big(x,\sqrt{\kappa x^2+\lambda x+\mu}\big)\,dx,$$

όπου κ, λ, μ είναι αριθμοί με $\kappa \neq 0$ και η $r(s,t)$ είναι μια ρητή συνάρτηση των s,t. Πράγματι, αφού γράψουμε

$$\kappa x^2 + \lambda x + \mu = \kappa\big((x + \tfrac{\lambda}{2\kappa})^2 + \tfrac{4\kappa\mu - \lambda^2}{4\kappa^2}\big),$$

διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $\kappa > 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 > 0$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{2\kappa}{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}(x + \frac{\lambda}{2\kappa})$ το αόριστο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\tfrac{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}{2\kappa} \int r\big(-\tfrac{\lambda}{2\kappa} + \tfrac{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}{2\kappa}\, u, \tfrac{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}{2\sqrt{\kappa}} \sqrt{u^2+1}\big)\, du = \int R(u, \sqrt{u^2+1})\, du,$$

όπου $R(s,t)$ είναι μια *νέα* ρητή συνάρτηση των s,t.

Περίπτωση 2: $\kappa > 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 < 0$.

Τώρα με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{2\kappa}{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}(x + \frac{\lambda}{2\kappa})$ μετατρέπουμε το αόριστο ολοκλήρωμα στο

$$\tfrac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa} \int r\big(-\tfrac{\lambda}{2\kappa} + \tfrac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa}\, u, \tfrac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\sqrt{\kappa}} \sqrt{u^2-1}\big)\, du = \int R(u, \sqrt{u^2-1})\, du,$$

όπου $R(s,t)$ είναι μια *νέα* ρητή συνάρτηση των s,t.

Περίπτωση 3: $\kappa < 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 < 0$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{-2\kappa}{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}(x + \frac{\lambda}{2\kappa})$ μετατρέπουμε το αόριστο ολοκλήρωμα στο

$$-\tfrac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa} \int r\big(-\tfrac{\lambda}{2\kappa} - \tfrac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa}\, u, \tfrac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\sqrt{-\kappa}} \sqrt{1-u^2}\big)\, du = \int R(u, \sqrt{1-u^2})\, du,$$

όπου $R(s,t)$ είναι μια *νέα* ρητή συνάρτηση των s,t.

Η περίπτωση $\kappa < 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 > 0$ αποκλείεται διότι τότε δεν ορίζεται σε κανένα σημείο η $\sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}$. Οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, όπου ένας τουλάχιστον από τους κ και $4\kappa\mu - \lambda^2$ είναι 0, καταλήγει σε απλό ολοκλήρωμα.

Ορισμός. Τα ολοκληρώματα $\int r(x, \sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu})\, dx$, όπου $\kappa \neq 0$, είναι ειδική περίπτωση των ολοκληρωμάτων $\int r(x, a(x))\, dx$, όπου η $a(x)$ είναι οποιαδήποτε "αλγεβρική συνάρτηση" του x. Τα ολοκληρώματα αυτά ονομάζονται **ολοκληρώματα του Abel** ή **αβελιανά ολοκληρώματα**. Μια ακόμη ειδική περίπτωση αβελιανών ολοκληρωμάτων είναι αυτά για τα οποία $a(x) = \sqrt{\rho x^4 + \sigma x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + \mu}$, όπου ένας τουλάχιστον από τους ρ, σ είναι $\neq 0$, και ονομάζονται **ελλειπτικά ολοκληρώματα**, διότι έχουν άμεση σχέση με υπολογισμό μηκών ελλειπτικών τόξων.

Αναφέραμε προηγουμένως τον όρο "αλγεβρική συνάρτηση". Αν και δε θα ασχοληθούμε με τις αλγεβρικές συναρτήσεις καθεαυτές, αξίζει να εξηγήσουμε, συνοπτικά, ποιές είναι αυτές. Οι ρητές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις $\sqrt[n]{x}$ είναι τα απλούστερα παραδείγματα αλγεβρικών συναρτήσεων. Άλλα τέτοια παραδείγματα είναι, γενικά, συναρτήσεις που προκύπτουν από ρητές συναρτήσεις με συνδυασμό των τεσσάρων αλγεβρικών πράξεων και την εξαγωγή ριζών οποιασδήποτε τάξης όπως, για παράδειγμα, η συνάρτηση $\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{\frac{x^2+1+\sqrt{x}}{x-1}}$. Ο γενικός ορισμός των αλγεβρικών συναρτήσεων είναι ο εξής.

Ορισμός. Θεωρούμε οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής

$$p_0(x) + p_1(x)y + \cdots + p_n(x)y^n = 0$$

με άγνωστο y, όπου κάθε $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ είναι πολυώνυμο, $n \geq 1$ και το $p_n(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Έστω, επίσης, μια συνάρτηση g με πεδίο ορισμού οποιαδήποτε ένωση διαστημάτων, η οποία είναι *συνεχής* στο πεδίο ορισμού της και *επαληθεύει* την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή ισχύει

$$p_0(x) + p_1(x)g(x) + \cdots + p_n(x)g(x)^n = 0$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της g. Τότε η g χαρακτηρίζεται **αλγεβρική συνάρτηση**.

Παραδείγματα. (1) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x)$ είναι αλγεβρική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, η $p(x)$ επαληθεύει την εξίσωση $-p(x) + 1y = 0$, της οποίας οι συντελεστές $-p(x)$, 1 είναι πολυώνυμα.

(2) Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{p(x)}{q(x)}$, όπου τα $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, είναι αλγεβρική συνάρτηση. Η $\frac{p(x)}{q(x)}$ επαληθεύει την εξίσωση $-p(x) + q(x)y = 0$, της οποίας οι συντελεστές $-p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα.

(3) Κάθε συνάρτηση $\sqrt[n]{\frac{p(x)}{q(x)}}$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και τα $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, είναι αλγεβρική συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και επαληθεύει την εξίσωση $-p(x) + q(x)y^n = 0$, της οποίας οι συντελεστές $-p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα. Ειδικώτερα, οι συναρτήσεις $a(x) = \sqrt{\rho x^4 + \sigma x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + \mu}$ που είδαμε προηγουμένως είναι αλγεβρικές συναρτήσεις.

Οι συναρτήσεις που δεν είναι αλγεβρικές χαρακτηρίζονται **υπερβατικές συναρτήσεις**. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Όμως, η απόδειξη του ότι αυτές οι συναρτήσεις είναι υπερβατικές είναι έξω από το πλαίσιο αυτού του βιβλίου.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε με αλλαγές μεταβλητής τα: $\int x^3 \cos(x^4)\, dx$, $\int (\cos x)^2 \sin x\, dx$, $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$, $\int x\sqrt[3]{x-1}\, dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$, $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$, $\int \tan x\, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$, $\int \frac{1}{x^2+2}\, dx$, $\int \frac{1}{x(x^4+1)}\, dx$, $\int (\sin x)^3\, dx$, $\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$, $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$.

2. Βρείτε με ολοκληρώσεις κατά μέρη και αλλαγές μεταβλητής τα: $\int x^3 e^{-x^2} dx$, $\int (x^2+3x)\sin x dx$, $\int e^{\sqrt{x+1}}\, dx$, $\int x^2(\log x)^4\, dx$, $\int \arcsin x\, dx$, $\int \arctan\sqrt{x}\, dx$, $\int (\sin x)^3 \sin(5x)\, dx$, $\int (\cos x)^2\, dx$, $\int \frac{x}{(\cos x)^2}\, dx$, $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx$, $\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\, dx$.

3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων: $\int \frac{5x+3}{x^2+2x-1}\, dx$, $\int \frac{x+2}{x^2-4x+4}\, dx$, $\int \frac{3x^2+1}{x^3-1}\, dx$, $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\, dx$, $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\, dx$, $\int \frac{1}{x^4-1}\, dx$, $\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-x+1)}\, dx$, $\int \frac{1}{x^4+1}\, dx$, $\int \frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1}\, dx$, $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\, dx$, $\int \frac{1}{(x-1)^2(x+2)^3(x^2+1)^2}\, dx$.

4. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των $\sin x$, $\cos x$: $\int \frac{1}{(\sin x)^4}\, dx$, $\int \frac{1}{1+2\sin x}\, dx$, $\int \frac{1}{2+\cos x}\, dx$, $\int \frac{(\sin x)^2}{1+(\sin x)^2}\, dx$, $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\, dx$.

5. Βρείτε τα: $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$, $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}\, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}\, dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\, dx$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f_1(x) = \int_0^x f$ και $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι $f_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f(t)(x-t)^n\, dt$ και $f_n{}^{(n)} = f$.

7. Έστω $J_n(x) = \int(\cos x)^n\,dx$, $I_n(x) = \int(\sin x)^n\,dx$ $(n \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι $J_{n+2}(x) = \frac{\sin x(\cos x)^{n+1}}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}J_n(x)$, $I_{n+2}(x) = -\frac{\cos x(\sin x)^{n+1}}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}I_n(x)$. Βρείτε τους τύπους των $J_n(x)$, $I_n(x)$.

8. Ορίζουμε $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,dx$ $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 0)$.
(i) Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης και αποδείξτε ότι $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.
(ii) Είναι προφανές ότι $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Αποδείξτε ότι $I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}$, $I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}$.
(iii) Αποδείξτε ότι $\frac{\pi}{2} = \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2 I_{2n}}{(3\cdot 5\cdots(2n-1))^2(2n+1)I_{2n+1}}$, $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
(iv) Παρατηρήστε τις σχέσεις $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n}I_{2n+1}$, από τις οποίες συνεπάγεται $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$ και, επομένως, $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \to 1$.
(v) Αποδείξτε τον περίφημο **τύπο του Wallis**:

$$\frac{1}{2n+1}\Big(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)}\Big)^2 \to \frac{\pi}{2}$$

καθώς και τον τύπο

$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} \to \sqrt{\pi}\,.$$

9. Αποδείξτε ότι:
(i) αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, $\int x^n e^{-x^2}\,dx = p_{n-1}(x)e^{-x^2} + c$, όπου $p_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$.
(ii) αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, $\int x^n e^{-x^2}\,dx = p_{n-1}(x)e^{-x^2} + \int e^{-x^2}\,dx$, όπου $p_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$.

10. Αφού βρείτε κατάλληλους αναδρομικούς τύπους, αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \qquad (m, n \in \mathbb{Z}, m, n \geq 0).$$

11. Αφού βρείτε κατάλληλους αναδρομικούς τύπους, αποδείξτε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^m(\sin x)^n\,dx = \begin{cases} \kappa_{m,n}\frac{\pi}{2}\,, & \text{αν } m, n \text{ άρτιοι} \\ \kappa_{m,n}\,, & \text{αν } m \text{ περιττός ή } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

όπου $\kappa_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\cdots(1 \text{ ή } 2)\cdot(n-1)(n-3)\cdots(1 \text{ ή } 2)}{(m+n)(m+n-2)\cdots(1 \text{ ή } 2)}$.

12. Αν η $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, \pi]$, αποδείξτε ότι $\int_0^{\pi}\big(f(x) + \frac{1}{n^2}f''(x)\big)\sin(nx)\,dx = \frac{f(0)+(-1)^{n-1}f(\pi)}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

13. (i) Αποδείξτε το **Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού**: *Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη και έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$ και ότι η $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε*

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^{\xi} g + f(b)\int_{\xi}^b g.$$

Υπόδειξη: Έστω $G(x) = \int_a^x g$. Τότε $\int_a^b fg = \int_a^b fG'$.
(ii) Έστω ότι η $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει μονότονη παράγωγο και συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a,b]$ και ότι υπάρχει $m > 0$ ώστε $\phi'(x) \geq m$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\left| \int_a^b \sin(\phi(x))\, dx \right| \leq \frac{4}{m}$.
(iii) Αποδείξτε ότι $\left| \int_a^b \sin(x^2)\, dx \right| \leq \frac{2}{a}$ για κάθε a, b, $0 < a < b$.

14. Έστω $a < b$ και η $f_n(x) = (x-a)^n(b-x)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ορίζουμε τα πολυώνυμα $p_0(x) = 1$ και $p_n(x) = \frac{1}{n!(b-a)^n} {f_n}^{(n)}(x)$ $(n \in \mathbb{N})$.
(i) Αποδείξτε ότι το $p_n(x)$ έχει βαθμό n.
(ii) Αποδείξτε ότι $\int_a^b p_n p = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού $< n$.
(iii) Αποδείξτε ότι $\int_a^b p_n p_m = 0$, αν $m \neq n$, και $\int_a^b {p_n}^2 = \frac{b-a}{2n+1}$.
(iv) Χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, την αρχή της επαγωγής, αποδείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού n υπάρχουν $c_0, \ldots, c_n$ ώστε $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k p_k(x)$ για κάθε x.
(v) Αποδείξτε ότι οι $c_0, \ldots, c_n$ του (iv) δίνονται από τον τύπο $c_k = \frac{2k+1}{b-a} \int_a^b pp_k$.
(vi) Έστω $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ με την ιδιότητα: $\int_a^b qp = 0$ για κάθε πολυώνυμο $q(x)$ βαθμού $< n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει c ώστε $p(x) = cp_n(x)$ για κάθε x.

15. Αποδείξτε την **Αρχή της Αβεβαιότητας του Heisenberg**: *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$, $f(a) = f(b) = 0$ και $\int_a^b f^2 = 1$. Τότε $\int_a^b xf(x)f'(x)\, dx = -\frac{1}{2}$ και*

$$\int_a^b x^2 (f(x))^2\, dx \int_a^b (f'(x))^2\, dx > \frac{1}{4}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε την άσκηση 24 της ενότητας 6.4.

16. **Τύπος άθροισης του Euler**. Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ και $f : [m,n] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[m,n]$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x)\, dx + \int_m^n f'(x)\Big(x - [x] - \frac{1}{2}\Big)\, dx + \frac{f(m)+f(n)}{2}.$$

17. Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ και αριθμοί $a_m, \ldots, a_n$. Ορίζουμε την κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση $A : [m,n] \to \mathbb{R}$, $A(x) = \sum_{k=m}^{[x]} a_k$. Έστω $f : [m,n] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[m,n]$. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=m}^{[x]} a_k f(k) = A(x)f(x) - \int_m^x Af'$ για κάθε $x \in [m,n]$.

18. (i) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\rho} = \frac{1}{n^{\rho-1}} + \rho \int_1^n \frac{[x]}{x^{\rho+1}}\, dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\rho \neq 1$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε οποιαδήποτε από τις ασκήσεις 16, 17.
(ii) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \log n - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}\, dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Αποδείξτε ότι το $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\rho}$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός, αν $\rho > 1$, είτε $+\infty$, αν $\rho \leq 1$.
(iv) Αποδείξτε ότι το $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Το όριο αυτό το ξαναείδαμε στην άσκηση 13 της ενότητας 6.4.

19. (Συνέχεια της άσκησης 16.) (i) Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$ και $f : [m,n] \to \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[m,n]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x) = \int_m^x (t - [t] - \frac{1}{2})\, dt$ $(x \in [m,n])$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x)\, dx - \int_m^n f''(x)\phi(x)\, dx + \frac{f(m)+f(n)}{2}.$$

(ii) Έστω $\psi(x)=\int_1^x (t-[t]-\frac{1}{2})\,dt \;\; (x\in[1,+\infty))$. Αποδείξτε ότι $\log(n!)=(n+\frac{1}{2})\log n - n+1+\int_1^n \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
(iii) Αποδείξτε ότι το σημαντικό όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

υπάρχει και είναι αριθμός.

20. **Ο π είναι άρρητος**. Έστω ότι ο π είναι ρητός: $\pi=\frac{m}{l}$, $m,l\in\mathbb{N}$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$.
(i) Αποδείξτε ότι $0\le f(x)\le\frac{1}{2^n n!}$ για κάθε $x\in[0,1]$.
(ii) Αποδείξτε ότι $f^{(k)}(0)\in\mathbb{Z}$ και $f^{(k)}(1)\in\mathbb{Z}$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $F(x)=l^{2n}\sum_{k=0}^n(-1)^k f^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k}$.
(iii) Αποδείξτε ότι $F(0),F(1)\in\mathbb{Z}$.
(iv) Αποδείξτε ότι $\pi^2 m^{2n} f(x)\sin(\pi x)=\frac{d}{dx}(F'(x)\sin(\pi x)-\pi F(x)\cos(\pi x))$.
(v) Αποδείξτε ότι $F(1)+F(0)=\pi m^{2n}\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx$.
(vi) Αποδείξτε ότι, αν ο n είναι κατάλληλα μεγάλος, τότε $0<F(0)+F(1)<1$ και καταλήξτε σε αντίφαση.

7.4 Ο τύπος του Taylor, II.

Τώρα θα δούμε μια τρίτη παραλλαγή του τύπου του Taylor. Οι δύο άλλες παραλλαγές, δηλαδή ο τύπος του Taylor με υπόλοιπο Lagrange και ο τύπος του Taylor με υπόλοιπο Cauchy, περιγράφτηκαν στο Θεώρημα 5.1. Τώρα θα δούμε τον τύπο του Taylor με *ολοκληρωτικό υπόλοιπο*.

Θεώρημα 7.1. *Έστω $n\in\mathbb{Z}$, $n\ge 0$, $f:[\xi,c]\to\mathbb{R}$ $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi,c]$ ώστε η $f^{(n+1)}$ να είναι συνεχής στο $[\xi,c]$. Τότε*

$$f(c)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k+\frac{1}{n!}\int_\xi^c f^{(n+1)}(x)(c-x)^n\,dx.$$

Η ίδια ισότητα ισχύει και όταν $c<\xi$, αρκεί όλες οι προηγούμενες υποθέσεις να ισχύουν στο διάστημα $[c,\xi]$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την $g:[\xi,c]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)(c-x)^k.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$g'(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x)(c-x)^n$$

για κάθε $x\in[\xi,c]$, οπότε η g' είναι συνεχής στο $[\xi,c]$. Συνεπάγεται

$$\frac{1}{n!}\int_\xi^c f^{(n+1)}(x)(c-x)^n\,dx=\int_\xi^c g'=g(c)-g(\xi)=f(c)-\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}f^{(k)}(\xi)(c-\xi)^k.$$

Άρα

$$f(c)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k+\frac{1}{n!}\int_\xi^c f^{(n+1)}(x)(c-x)^n\,dx.$$

□

Η ισότητα στο Θεώρημα 7.1 ονομάζεται **τύπος του Taylor για την f στον ξ με ολοκληρωτικό υπόλοιπο** και γράφεται

$$f(c) = p_{n,\xi}(c) + R_{n,\xi}(c),$$

όπου $p_{n,\xi}$ είναι το γνωστό πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στον ξ και το

$$R_{n,\xi}(c) = \frac{1}{n!}\int_{\xi}^{c} f^{(n+1)}(x)(c-x)^n\,dx$$

ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο τάξης** n.

Παράδειγμα. Αν p είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n$, τότε είναι $p^{(n+1)}(x) = 0$ για κάθε x, οπότε καταλήγουμε στον γνωστό τύπο:

$$p(c) = p_{n,\xi}(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k$$

για κάθε ξ, c.

Ασκήσεις.

1. Αναφερόμενοι στα Θεωρήματα 5.1, 7.1, αποδείξτε ότι, αν η $f^{(n+1)}$ είναι συνεχής στο $[\xi, c]$, το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 7.1 συνεπάγεται τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 5.1. Με τις ίδιες υποθέσεις, αποδείξτε τύπους Taylor με υπόλοιπα της μορφής

$$R_{n,\xi}(c) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!(n-k+1)}(c-\zeta)^k(c-a)^{n-k+1}$$

για οποιονδήποτε $k = 0, \dots, n$. Κατόπιν, προσπαθήστε να αποδείξετε αυτούς τους τύπους με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5.1.

7.5 Ειδικώτερα θέματα.

7.5.1 Ολοκλήρωμα παραγώγου.

Η Πρόταση 7.9 αποτελεί ισχυροποίηση της Πρότασης 7.6. Το συμπέρασμα είναι το ίδιο, αλλά οι υποθέσεις είναι ασθενέστερες: δεν απαιτείται να είναι η παράγωγος συνεχής στο διάστημα αλλά μόνο να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του διαστήματος. Η υπόθεση αυτή είναι η ασθενέστερη δυνατή, αφού το αποτέλεσμα αναφέρεται στα ολοκληρώματα της παραγώγου.

Πρόταση 7.9. *Έστω διάστημα I και $F : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο I ώστε η $F' : I \to \mathbb{R}$ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Τότε*

$$\textstyle\int_a^b F' = F(b) - F(a)$$

για κάθε $a, b \in I$.

Πρώτη απόδειξη. Έστω $a, b \in I$, $a < b$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) < \varepsilon.$$

Ορίζουμε

$$u_k = \sup\{F'(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k = \inf\{F'(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Τότε υπάρχει $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ ώστε

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

και, επομένως,

$$l_k(x_k - x_{k-1}) \le F(x_k) - F(x_{k-1}) \le u_k(x_k - x_{k-1}).$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1}))\\ &\le \textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta)\end{aligned}$$

και, επομένως,

$$\underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) \le F(b) - F(a) \le \overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta).$$

Από αυτήν τη σχέση και από την

$$\underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) \le \textstyle\int_a^b F' \le \overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta)$$

συνεπάγεται

$$\left|F(b) - F(a) - \textstyle\int_a^b F'\right| \le \overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) < \varepsilon.$$

Άρα $\left|F(b) - F(a) - \int_a^b F'\right| < \varepsilon$ για κάθε ε, οπότε $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$.
Η περίπτωση $b < a$ ανάγεται στην προηγούμενη και η $a = b$ είναι προφανής.
Δεύτερη απόδειξη. Έστω $a, b \in I$ και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει

$$|\Sigma(F'; a, b; \Delta, \Xi) - \textstyle\int_a^b F'| < \epsilon.$$

Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$w(\Delta) < \delta_0\,.$$

Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ υπάρχει $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ ώστε

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Συνεπάγεται

$$\Sigma(F'; a, b; \Delta, \Xi) = \textstyle\sum_{k=1}^n F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a)$$

και, επειδή $w(\Delta) < \delta_0$,

$$\left|F(b) - F(a) - \textstyle\int_a^b F'\right| < \varepsilon.$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\left|F(b) - F(a) - \int_a^b F'\right| < \varepsilon$, οπότε $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$. □

Ασκήσεις.

1. Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο I ώστε οι $f', g' : I \to \mathbb{R}$ να είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αποδείξτε ότι

$$\textstyle\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$$

για κάθε $a, b \in I$. Αυτό αποτελεί γενίκευση της Πρότασης 7.8, στην οποία υπάρχει η επιπλέον υπόθεση ότι οι f' και g' είναι συνεχείς στο I.

7.5.2 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις.

Θυμόμαστε ότι, αν η f είναι κυρτή σε διάστημα I, τότε για κάθε εσωτερικό σημείο x του I ορίζονται οι πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x)$ και $f'_+(x)$, αυτές είναι αριθμοί και ισχύει $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. Αν η f είναι κοίλη στο I, ισχύουν τα ίδια με $\geq$ αντί $\leq$.

Πρόταση 7.10. *Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή ή κοίλη στο I. Έστω $g : I \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in I$ ο $g(x)$ να είναι ανάμεσα στους $f'_+(x)$ και $f'_-(x)$. Τότε η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και $\int_a^b g = f(b) - f(a)$ για κάθε $a, b \in I$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I.
Αν $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 5.11, είναι

$$g(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'_-(x_2) \leq g(x_2)$$

και, επομένως, η g είναι αύξουσα στο I. Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.
Έστω $[a, b] \subseteq I$ και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \varepsilon.$$

Ορίζουμε

$$u_k = \sup\{g(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \qquad l_k = \inf\{g(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}.$$

Επειδή η g είναι αύξουσα, είναι $u_k = g(x_k)$ και $l_k = g(x_{k-1})$, οπότε

$$l_k = g(x_{k-1}) \leq \tfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} \leq g(x_k) = u_k\,.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n \tfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) \leq f(b) - f(a) \leq \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta).$$

Από αυτήν τη σχέση και από την

$$\underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) \leq \textstyle\int_a^b g \leq \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta)$$

συνεπάγεται

$$\left|f(b) - f(a) - \textstyle\int_a^b g\right| \leq \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \varepsilon.$$

Άρα $\left|f(b) - f(a) - \int_a^b g\right| < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, οπότε $\int_a^b g = f(b) - f(a)$.
Η περίπτωση $b < a$ ανάγεται στην προηγούμενη και η $a = b$ είναι προφανής. Η απόδειξη είναι παρόμοια αν η f είναι κοίλη. □

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.10, μπορούμε να επιλέξουμε $g(x) = f'_-(x)$ για κάθε $x \in I$ ή $g(x) = f'_+(x)$ για κάθε $x \in I$ και, τότε, καταλήγουμε στους αντίστοιχους τύπους

$$\int_a^b f'_- = f(b) - f(a), \qquad \int_a^b f'_+ = f(b) - f(a).$$

Παρατηρήστε ότι, αν στην Πρόταση 7.10 υποθέσουμε, *επιπλέον*, ότι η f έχει παράγωγο στο I, τότε ισχύει $g(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in I$. Από την Πρόταση 5.12 συνεπάγεται ότι η f' είναι μονότονη στο I, οπότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και, επομένως, η ισότητα

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 7.9.

Το Θεώρημα 7.2 δίνει έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό των κυρτών και των κοίλων συναρτήσεων.

Θεώρημα 7.2. *Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη στο I αν και μόνο αν είναι αόριστο ολοκλήρωμα κάποιας, αντιστοίχως, αύξουσας ή φθίνουσας συνάρτησης στο I.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Τότε οποιαδήποτε $g : I \to \mathbb{R}$ της Πρότασης 7.10 είναι αύξουσα στο I και, όπως αποδείχθηκε, ισχύει $f(x) - f(a) = \int_a^x g$ για κάθε $a, x \in I$. Άρα ισχύει $f(x) = \int_a^x g + f(a)$ για κάθε $x \in I$.
Αντιστρόφως, έστω $g : I \to \mathbb{R}$ κάποια αύξουσα συνάρτηση στο I και, επομένως, ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω

$$f(x) = \int_a^x g + c \qquad (x \in I),$$

όπου $a \in I$. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και $x \in (x_1, x_2)$. Επειδή η g είναι αύξουσα, είναι

$$f(x) - f(x_1) = (\int_a^x g + c) - (\int_a^{x_1} g + c) = \int_{x_1}^x g \leq g(x)(x - x_1)$$

και, ομοίως,

$$f(x_2) - f(x) = \int_x^{x_2} g \geq g(x)(x_2 - x).$$

Συνεπάγεται

$$\tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) \geq \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}\big(f(x) - g(x)(x-x_1)\big) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\big(f(x) + g(x)(x_2-x)\big) = f(x)$$

και, επομένως, η f είναι κυρτή στο I.
Η περίπτωση κοίλης συνάρτησης είναι παρόμοια. □

7.5.3 Ολοκληρωσιμότητα σύνθετης συνάρτησης.

Πρόταση 7.11. *Έστω $f : [a,b] \to [c,d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[c,d]$. Τότε η $g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[c,d]$, οπότε υπάρχει ${\delta_0}' > 0$ ώστε να ισχύει

$$|g(y') - g(y'')| < \tfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

για κάθε $y', y'' \in [c,d]$, $|y' - y''| < {\delta_0}'$. Επίσης, η g είναι φραγμένη στο $[c,d]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|g(y)| \leq M$$

για κάθε $y \in [c,d]$.
Έστω

$$\delta_0 = \min\{{\delta_0}', \tfrac{\varepsilon}{8M}\}.$$

Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < {\delta_0}^2 .$$

Ορίζουμε

$$u_k{}' = \sup\{f(x)\,|\,x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k{}' = \inf\{f(x)\,|\,x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

και

$$u_k = \sup\{(g\circ f)(x)\,|\,x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad l_k = \inf\{(g\circ f)(x)\,|\,x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

Χωρίζουμε τους $k = 1, \ldots, n$ σε δυο κατηγορίες. Το A έχει ως στοιχεία του τους $k = 1, \ldots, n$ με την ιδιότητα $u_k{}' - l_k{}' < \delta_0$ και το B έχει ως στοιχεία του τους υπόλοιπους $k = 1, \ldots, n$, δηλαδή αυτούς με την ιδιότητα $u_k{}' - l_k{}' \ge \delta_0$.
(i) Αν $k \in A$, τότε για κάθε $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k{}' - u_k{}' \le f(x') - f(x'') \le u_k{}' - l_k{}'$, οπότε

$$|f(x') - f(x'')| \le u_k{}' - l_k{}' < \delta_0 \le \delta_0{}'$$

και, επομένως,

$$|g(f(x')) - g(f(x''))| < \tfrac{\varepsilon}{4(b-a)}\,.$$

Άρα

$$u_k - l_k \le \tfrac{\varepsilon}{4(b-a)}\,.$$

(ii) Αν $k \in B$, τότε για κάθε $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει

$$|g(f(x')) - g(f(x''))| \le |g(f(x'))| + |g(f(x''))| \le 2M,$$

οπότε, όπως στην (i), συνεπάγεται

$$u_k - l_k \le 2M.$$

Επίσης, είναι

$$\delta_0{}^2 > \textstyle\sum_{k\in B}(u_k{}' - l_k{}')(x_k - x_{k-1}) \ge \delta_0 \sum_{k\in B}(x_k - x_{k-1}),$$

οπότε

$$\textstyle\sum_{k\in B}(x_k - x_{k-1}) < \delta_0\,.$$

Απο όλα τα προηγούμενα,

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}((g\circ f); a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}((g\circ f); a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \textstyle\sum_{k\in A}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k\in B}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\le \tfrac{\varepsilon}{4(b-a)} \textstyle\sum_{k\in A}(x_k - x_{k-1}) + 2M \sum_{k\in B}(x_k - x_{k-1}) \\
&\le \tfrac{\varepsilon}{4(b-a)}(b-a) + 2M\delta_0 \le \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\overline{\Sigma}((g\circ f); a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}((g\circ f); a, b; \Delta) < \varepsilon$ για κάποια διαμέριση Δ του $[a, b]$ και, επομένως, η $g\circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. $\square$

Παράδειγμα. Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η $\sin\circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Πράγματι, η f είναι φραγμένη, οπότε υπάρχουν c, d ώστε $f(x) \in [c, d]$ για κάθε $x \in [a, b]$. Η $\sin$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι συνεχής και στο $[c, d]$. Άρα η $\sin\circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι οι $\cos\circ f$, $\exp\circ f$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Επίσης, αν η f έχει θετικό κάτω φράγμα, τότε η $\log\circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Αν στην Πρόταση 7.11 δεν υποθέσουμε ότι η g είναι συνεχής στο $[c, d]$ αλλά υποθέσουμε μόνο ότι είναι ολοκληρώσιμη στο $[c, d]$, τότε μπορεί να μην ισχύει το συμπέρασμα. Ένα τέτοιο παράδειγμα υπάρχει στην άσκηση 36 της ενότητας 6.4.

7.5.4 Η ανισότητα του Jensen.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι σημαντικό και είναι πηγή πολλών ανισοτήτων της Ανάλυσης. Μια απλούστερη μορφή του υπάρχει στην άσκηση 25 της ενότητας 6.4.

Ανισότητα του Jensen. *Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ κυρτή και συνεχής στο $[c, d]$. Τότε*

$$g\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g \circ f.$$

Αν η g είναι κοίλη και συνεχής στο $[c, d]$, τότε ισχύει η αντίστροφη της ανισότητας αυτής.

Απόδειξη. Έστω $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ οποιαδήποτε διαμέριση του $[a, b]$ και $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την Δ. Ορίζουμε

$$\mu_l = \tfrac{x_l - x_{l-1}}{b-a}$$

για κάθε $l = 1, \dots, n$, οπότε είναι

$$\mu_1, \dots, \mu_n > 0, \qquad \mu_1 + \cdots + \mu_n = 1.$$

Εφαρμόζουμε την άσκηση 33 της ενότητας 5.7 και βρίσκουμε ότι

$$g\big(\tfrac{x_1-x_0}{b-a} f(\xi_1) + \cdots + \tfrac{x_n-x_{n-1}}{b-a} f(\xi_n)\big) \leq \tfrac{x_1-x_0}{b-a} g(f(\xi_1)) + \cdots + \tfrac{x_n-x_{n-1}}{b-a} g(f(\xi_n))$$

ή, ισοδύναμα,

$$g\big(\tfrac{\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)}{b-a}\big) \leq \tfrac{\Sigma(g\circ f;a,b;\Delta,\Xi)}{b-a}.$$

Επειδή ισχύει $c \leq f(x) \leq d$ για κάθε $x \in [a, b]$, συνεπάγεται $c \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq d$. Άρα η g είναι συνεχής στον αριθμό $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Επίσης, σύμφωνα με την Πρόταση 7.11, η $g \circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Θεωρούμε ακολουθία διαμερίσεων (Δ_k) του $[a, b]$ ώστε

$$w(\Delta_k) \to 0.$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε επιλογή Ξ_k ενδιάμεσων σημείων για την Δ_k. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.15, συνεπάγεται

$$\tfrac{\Sigma(f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)}{b-a} \to \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f, \qquad \tfrac{\Sigma(g\circ f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)}{b-a} \to \tfrac{1}{b-a}\int_a^b g \circ f.$$

Προηγουμένως είδαμε ότι $g\big(\frac{\Sigma(f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)}{b-a}\big) \leq \frac{\Sigma(g\circ f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)}{b-a}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε ότι $g\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g \circ f$. □

Παραδείγματα. (1) Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Η συνάρτηση $g(y) = e^y$ είναι κυρτή και συνεχής στο $[c, d]$, οπότε

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}\,dx.$$

(2) Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $[c, d] \subseteq (0, +\infty)$. Η συνάρτηση $g(y) = \log y$ είναι κοίλη και συνεχής στο $[c, d]$, οπότε

$$\tfrac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\,dx \leq \log\big(\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big).$$

Μέρος III

Η έννοια του ορίου: ανώτερα θέματα.

Κεφάλαιο 8

Σειρές αριθμών.

8.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.

Ορισμός. Θεωρούμε μια ακολουθία (x_n) και σχηματίζουμε τα διαδοχικά αθροίσματα

$$s_1 = x_1\,,\ s_2 = x_1 + x_2\,,\ s_3 = x_1 + x_2 + x_3\,,\ \ldots\ , s_n = x_1 + \cdots + x_n\,,\ \ldots\,.$$

Ο s_n ονομάζεται **n-οστό μερικό άθροισμα** της ακολουθίας (x_n) ή, πιο απλά, των x_n $(n \in \mathbb{N})$ και η (s_n) ονομάζεται **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** των x_n $(n \in \mathbb{N})$. Το σύμβολο

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots\,.$$

ονομάζεται **σειρά των** x_n $(n \in \mathbb{N})$ και η τιμή του, αν αυτή υπάρχει, ονομάζεται **άθροισμα** της σειράς των x_n $(n \in \mathbb{N})$ και καθορίζεται ως εξής. Αν η ακολουθία (s_n) δεν έχει όριο, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **αποκλίνει** και ότι **δεν έχει άθροισμα**. Αν $s_n \to s \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **έχει άθροισμα** και ως *άθροισμα* της σειράς θεωρούμε το όριο s και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \qquad \text{ή} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = s.$$

Ειδικώτερα, αν $s \in \mathbb{R}$, λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει στον** s και, αν $s = +\infty$ ή $s = -\infty$, λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει στο** $+\infty$ **ή** $-\infty$, αντιστοίχως.
Ο x_n ονομάζεται **n-οστός όρος** ή **προσθετέος** της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Επισημαίνουμε ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$, τότε η σειρά έχει άθροισμα και αυτό είναι αριθμός ή $\pm\infty$, αντιστοίχως. Αν η σειρά αποκλίνει, αλλά όχι στα $\pm\infty$, τότε η σειρά δεν έχει άθροισμα. Προσέξτε: το σύμβολο $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ της σειράς των x_n έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός είναι ένα σκέτο σύμβολο, ανεξάρτητα από το αν η σειρά έχει άθροισμα ή όχι. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση που η σειρά έχει άθροισμα, συμβολίζει και το άθροισμα της σειράς.

Το σύμβολο του δείκτη δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο: με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$, $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ συμβολίζουμε την ίδια σειρά.

Παραδείγματα. (1) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ ή $1+1+1+\cdots+1+\cdots$. Τα μερικά αθροίσματά της είναι οι $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 1 = 2$, $s_3 = 1 + 1 + 1 = 3$ και, γενικότερα, $s_n = 1 + \cdots + 1 = n$ $(n \in \mathbb{N})$. Επειδή $s_n = n \to +\infty$, η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ και το άθροισμά της είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

(2) Η απλούστερη σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ ή $0+0+0+\cdots+0+\cdots$. Η σειρά αυτή ονομάζεται **μηδενική σειρά**. Τα μερικά αθροίσματά της είναι οι $s_1 = 0$, $s_2 = 0+0 = 0$, $s_3 = 0+0+0 = 0$ και, γενικότερα, $s_n = 0+\cdots+0 = 0 \ (n \in \mathbb{N})$. Επειδή $s_n = 0 \to 0$, η μηδενική σειρά συγκλίνει στον 0 και το άθροισμά της είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

(3) **Η γεωμετρική σειρά με λόγο** a είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}$ ή $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+\cdots$. Η σειρά αυτή έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1+a$, $s_3 = 1+a+a^2$ και, γενικότερα, $s_n = 1+a+\cdots+a^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι ο πρώτος προσθετέος της γεωμετρικής σειράς είναι ο a^0 και ότι τον θεωρήσαμε ίσο με 1. Αυτό είναι προφανώς σωστό αν $a \neq 0$, αλλά όχι αν $a = 0$, διότι δεν ορίζεται το σύμβολο 0^0. Υπάρχει, όμως, μια παραδοσιακή σύμβαση να θεωρείται ότι $a^0 = 1$ για κάθε a, ακόμη και για $a = 0$, στην περίπτωση που εμφανίζεται το σύμβολο a^0 ως όρος στο σύμβολο $\sum$, το οποίο χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε πεπερασμένο άθροισμα ή σειρά. Για παράδειγμα, ένα πολυώνυμο $a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$ μπορούμε να το συμβολίσουμε $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, υπονοώντας ότι $x^0 = 1$ για κάθε x, ακόμη και για $x = 0$.

Γνωρίζουμε ήδη πότε υπάρχει το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς, δηλαδή το όριο της ακολουθίας $(1+a+\cdots+a^{n-1})$, και, αν υπάρχει, την τιμή του. Επομένως, για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς έχουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } a \geq 1 \\ = \frac{1}{1-a}, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } a \leq -1. \end{cases}$$

Ειδική περίπτωση είναι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$ ή $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$. Η σειρά αυτή δεν έχει άθροισμα.

(4) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ ή $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$. Η σειρά αυτή έχει μερικά αθροίσματα $s_n = 1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Στην περίπτωση $p = 1$ προκύπτει η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία ονομάζεται **αρμονική σειρά**. Η σειρά αυτή έχει μερικά αθροίσματα $s_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ και είδαμε στην ενότητα 2.5 ότι $s_n \to +\infty$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Επίσης, στην περίπτωση $p = 2$ προκύπτει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ με μερικά αθροίσματα $s_n = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Στις ενότητες 2.5 και 2.8 είδαμε ότι η ακολουθία (s_n) συγκλίνει, οπότε η σειρά αυτή συγκλίνει και έχει άθροισμα το οποίο είναι αριθμός.

Λίγο αργότερα θα μελετήσουμε στη γενική περίπτωση τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

(5) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ έχει μερικά αθροίσματα $s_n = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$. Γνωρίζουμε από την ενότητα 2.5 ότι $s_n \to e-1$, οπότε η σειρά συγκλίνει στον αριθμό $e-1$ και

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

(6) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ έχει μερικά αθροίσματα $s_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Είδαμε στην ενότητα 2.7 ότι η ακολουθία (s_n) συγκλίνει. Άρα η σειρά αυτή συγκλίνει και έχει άθροισμα το οποίο είναι αριθμός.

Πρόταση 8.1. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε $x_n \to 0$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $s_n = x_1 + \cdots + x_n \ \ (n \in \mathbb{N})$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \mathbb{R}$, τότε $s_n \to s$. Επειδή

$$x_n = s_n - s_{n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, συνεπάγεται

$$x_n \to s - s = 0.$$

□

Παραδείγματα. (1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ αποκλίνει διότι $\frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$.
(2) Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ δε συγκλίνει. Όμως, $\frac{1}{n} \to 0$.
Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 8.1.

Πρόταση 8.2. *Έστω ότι οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$ αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$, αντιστοίχως, συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν $k_0, m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$x_{k_0+l} = y_{m_0+l}$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n \ \ (n \in \mathbb{N})$. Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$s_{k_0+l} - s_{k_0} = x_{k_0+1} + \cdots + x_{k_0+l} = y_{m_0+1} + \cdots + y_{m_0+l} = t_{m_0+l} - t_{m_0}\,.$$

Άρα οι ακολουθίες $(s_n - s_{k_0})$ και $(t_n - t_{m_0})$ ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Έστω

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Τότε $s_n \to s$, οπότε $s_n - s_{k_0} \to s - s_{k_0}$. Άρα $t_n - t_{m_0} \to s - s_{k_0}$ και, επομένως, $t_n \to s - s_{k_0} + t_{m_0}$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = s - s_{k_0} + t_{m_0}\,.$$

Αν $s \in \mathbb{R}$ ή $s = +\infty$ ή $s = -\infty$, τότε, αντιστοίχως, $s - s_{k_0} + t_{m_0} \in \mathbb{R}$ ή $s - s_{k_0} + t_{m_0} = +\infty$ ή $s - s_{k_0} + t_{m_0} = -\infty$. □

Παράδειγμα. Έστω $m \in \mathbb{Z}$. Με τα σύμβολα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{m+n-1} + \cdots$$

δηλώνουμε τη σειρά με μερικά αθροίσματα: $t_1 = x_m$, $t_2 = x_m + x_{m+1}$ και, γενικότερα, $t_n = x_m + \cdots + x_{m+n-1} \ \ (n \in \mathbb{N})$. Είναι φανερό ότι η Πρόταση 8.2 εφαρμόζεται στις σειρές $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, οπότε η σειρά $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$ αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, αντιστοίχως, συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$. Μάλιστα, μπορούμε να βρούμε και τη σχέση ανάμεσα στα αθροίσματα των δυο σειρών.
Στην περίπτωση $m \geq 2$, αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n \ \ (n \in \mathbb{N})$, τότε ισχύει

$$\begin{aligned} t_n &= x_m + \cdots + x_{m+n-1} = x_1 + \cdots + x_{m+n-1} - (x_1 + \cdots + x_{m-1}) \\ &= s_{m+n-1} - (x_1 + \cdots + x_{m-1}) \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $s_n \to s$, οπότε $t_n \to s - (x_1 + \cdots + x_{m-1})$ και, επομένως, $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = s - (x_1 + \cdots + x_{m-1})$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = x_1 + \cdots + x_{m-1} + \sum_{n=m}^{+\infty} x_n \qquad (m \geq 2).$$

Στην περίπτωση $m \leq 0$, είναι

$$t_n = x_m + \cdots + x_{m+n-1} = x_m + \cdots + x_0 + x_1 + \cdots + x_{m+n-1} = x_m + \cdots + x_0 + s_{m+n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 - m$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $s_n \to s$, οπότε $t_n \to x_m + \cdots + x_0 + s$ και, επομένως, $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_0 + s$. Άρα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad (m \leq 0).$$

Συνδυάζοντας τους δυο αυτούς τύπους, εύκολα βλέπουμε ότι, αν $m, k \in \mathbb{Z}$, $m < k$, τότε

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_{k-1} + \sum_{n=k}^{+\infty} x_n \qquad (m < k).$$

Στον χειρισμό των σειρών εμφανίζεται μερικές φορές μια απλή *αλλαγή μεταβλητής*. Για παράδειγμα, έστω η σειρά $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$. Εισάγουμε τη νέα μεταβλητή $k = n - m + 1$ και βλέπουμε ότι, όταν ο n διατρέχει τους $m, m+1, m+2, \ldots$, τότε ο k διατρέχει τους $1, 2, 3, \ldots$. Άρα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+m-1}\,.$$

Πράγματι, και οι δυο σειρές είναι η $x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots$.

Πρόταση 8.3. *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Αν $r_n = \sum_{m=n}^{+\infty} x_m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $r_n \to 0$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \mathbb{R}$, τότε $s_n \to s$. Επειδή

$$s = s_{n-1} + r_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται

$$r_n \to s - s = 0.$$

□

Πρόταση 8.4. *Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα και το $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\,.$$

Απόδειξη. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = t \in \overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε τα n-οστά μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ είναι το

$$u_n = (x_1 + y_1) + \cdots + (x_n + y_n) = (x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n) = s_n + t_n\,.$$

Επομένως, $u_n = s_n + t_n \to s + t$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = s + t = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. □

Πρόταση 8.5. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα και το $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \,.$$

Απόδειξη. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε το n-οστό μερικό άθροισμα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n$ είναι το

$$w_n = \lambda x_1 + \cdots + \lambda x_n = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) = \lambda s_n \,.$$

Άρα $w_n = \lambda s_n \to \lambda s$ και, επομένως, $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n = \lambda s = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. □

Μπορούμε να συνδυάσουμε τα δυο τελευταία αποτελέσματα ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \,.$$

Αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή ότι αυτό ισχύει και για περισσότερες από δυο σειρές.

Πρόταση 8.6. *Έστω $x_n \leq y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
(1) Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \,.$$

Αν, επιπλέον, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{n_0} < y_{n_0}$ και αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ και το κοινό άθροισμα είναι αριθμός, τότε $x_n = y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(2) Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$.
(3) Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = -\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = -\infty$.

Απόδειξη. (1) Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = t \in \overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε τα n-οστά μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Επειδή

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \leq y_1 + \cdots + y_n = t_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $s \leq t$.
Τέλος, έστω $x_{n_0} < y_{n_0}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει

$$t_n - s_n = (y_n - x_n) + \cdots + (y_1 - x_1) \geq y_{n_0} - x_{n_0} \,.$$

Άρα $t - s \geq y_{n_0} - x_{n_0} > 0$.
(2) Όπως πριν, ισχύει $s_n \leq t_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, αν $s_n \to +\infty$, τότε $t_n \to +\infty$.
(3) Όπως στο (2). □

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{2})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} n^2$ και βρείτε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n}{n+1})^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}n\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}n\log(1+\frac{1}{n})$.

3. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2}{3})^{n+2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{4}{3})^{n-3}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-4}$, $\sum_{n=3}^{+\infty}(-\frac{2}{3})^n$, $\sum_{n=4}^{+\infty}(-3)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}+3^{n+1}-5^n}{6^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+2^{\frac{n}{2}}}{2^n}$ και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

4. (i) Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$ χαρακτηρίζεται **τηλεσκοπική σειρά**. Βρείτε συνοπτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα s_n της σειράς αυτής και, βάσει αυτού, αποδείξτε ότι αυτή έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}b_n$ και ότι το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty}b_n$ είναι αριθμός. Αποδείξτε την εξής σχέση ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty}b_n$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})=b_1-\lim_{n\to+\infty}b_n\,.$$

(ii) Γράψτε τις παρακάτω σειρές ως τηλεσκοπικές και βρείτε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν): $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\log\frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

8.2 Σειρές με μη-αρνητικούς όρους.

Θεώρημα 8.1. *Αν $x_n\geq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ έχει άθροισμα και αυτό είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Δηλαδή, $0\leq\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\leq+\infty$.*
Ειδικότερα: αν $s_n=x_1+\cdots+x_n$ $(n\in\mathbb{N})$, τότε είτε η ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη, οπότε η σειρά συγκλίνει, είτε η ακολουθία (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Απόδειξη. Ισχύει

$$s_{n+1}=x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}=s_n+x_{n+1}\geq s_n$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα η ακολουθία (s_n) είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Έστω $s_n\to s\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Τότε $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n=s$.
Επειδή είναι $s_n=x_1+\cdots+x_n\geq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, συνεπάγεται $s\geq 0$.
Τέλος, αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη, τότε $s\in\mathbb{R}$, και, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $s=+\infty$. □

Άρα κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ με μη-αρνητικούς όρους έχει άθροισμα και το άθροισμα αυτό είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Επίσης, το ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ με μη-αρνητικούς όρους συγκλίνει ισοδυναμεί με $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n<+\infty$ και το ότι αποκλίνει ισοδυναμεί με $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n=+\infty$.

Πρόταση 8.7. *(1) Έστω $0\leq x_n\leq y_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε*

$$0\leq\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\leq\sum_{n=1}^{+\infty}y_n\,.$$

Αν, επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει.
(2) Έστω $x_n\geq 0$, $y_n>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και έστω ότι η ακολουθία $\big(\frac{x_n}{y_n}\big)$ συγκλίνει ή, γενικότερα, είναι φραγμένη. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη. (1) Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1, οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα, οπότε από την Πρόταση 8.6 συνεπάγεται ότι $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
(2) Αν η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ είναι φραγμένη, υπάρχει u ώστε $\frac{x_n}{y_n} \leq u$ και, επομένως,

$$x_n \leq u y_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} u y_n$ συγκλίνει. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. $\square$

Παραδείγματα. (1) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$.
Γράφουμε $\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{2+6\cdot 2^{-n}}{1+3n3^{-n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\left(\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}\right)/\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \to 2$. Τώρα συγκρίνουμε την αρχική σειρά με τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. Επειδή η δεύτερη σειρά συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η πρώτη συγκλίνει.
(2) Αν $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται

$$x_1 + \cdots + x_m \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$.
Πρώτη απόδειξη: Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n \, (n \in \mathbb{N})$, τότε $s_n \to s$. Επειδή η ακολουθία (s_n) είναι αύξουσα, ισχύει $s_m \leq s$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.
Δεύτερη απόδειξη: Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, όπου ορίζουμε $a_n = x_n$, αν $1 \leq n \leq m$, και $a_n = 0$, αν $n \geq m+1$. Τότε είναι $0 \leq a_n \leq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \, .$$

Επίσης,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_m + \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n = x_1 + \cdots + x_m + \sum_{n=m+1}^{+\infty} 0 = x_1 + \cdots + x_m \, .$$

Αξίζει να αποδείξουμε το εξής:

Πρόταση 8.8. *Ο e είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα $e = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.
Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι $e \in \mathbb{Q}$ και, συγκεκριμένα, έστω $e = \frac{l}{k}$, όπου $l, k \in \mathbb{N}$. Τότε

$$(k-1)!l = k!e = k! + \tfrac{k!}{1!} + \cdots + \tfrac{k!}{k!} + k! \sum_{n=k+1}^{+\infty} \tfrac{1}{n!} \, .$$

Καθένας από τους $(k-1)!l$, $k!$, $\frac{k!}{1!}$, ... , $\frac{k!}{k!}$ είναι ακέραιος, οπότε και ο $k! \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{k!}{n!}$ είναι ακέραιος. Όμως, είναι

$$0 < \sum_{n=k+1}^{+\infty} \tfrac{k!}{n!} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \tfrac{1}{(k+1)\cdots n} < \sum_{n=k+1}^{+\infty} \tfrac{1}{(k+1)^{n-k}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(k+1)^n} = \tfrac{1}{k+1} \tfrac{1}{1-\frac{1}{k+1}} = \tfrac{1}{k} \leq 1$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Στις επόμενες δυο προτάσεις θα δούμε δυο κριτήρια σύγκλισης για σειρές με *φθίνοντες* μη-αρνητικούς όρους.

Κριτήριο Ολοκληρώματος. *Έστω φθίνουσα ακολουθία* (x_n) *ώστε* $x_n \geq 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Έστω ότι υπάρχει* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *φθίνουσα στο* $[1, +\infty)$ *ώστε να ισχύει* $f(n) = x_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε υπάρχει το* $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f$, *η τιμή του είναι αριθμός* ≥ 0 *ή* $+\infty$ *και*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ *αν και μόνο αν* $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ *αν και μόνο αν* $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f = +\infty$.
Επιπλέον,

$$\int_1^{n+1} f \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \lim_{x\to+\infty} \int_1^x f.$$

Απόδειξη. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι σειρά μη-αρνητικών όρων, οπότε έχει άθροισμα. Έστω

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s.$$

Αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ $(n \in \mathbb{N})$, τότε

$$s_n \to s.$$

Επειδή η f είναι μονότονη, είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[1, +\infty)$, οπότε ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα

$$F(x) = \textstyle\int_1^x f \qquad (x \in [1, +\infty)).$$

Έστω $x \geq 1$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq x$. Τότε

$$f(x) \geq f(n) = x_n \geq 0.$$

Άρα ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$. Άρα, αν $1 \leq x_1 < x_2$, τότε

$$F(x_2) = \textstyle\int_1^{x_2} f = \int_1^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f \geq \int_1^{x_1} f = F(x_1).$$

Άρα η F είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$, οπότε υπάρχει το όριο

$$l = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \textstyle\int_1^x f$$

και η τιμή του είναι αριθμός ή $+\infty$. Μάλιστα, επειδή ισχύει $F(x) = \int_1^x f \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$, είναι $l \geq 0$.
Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in [k, k+1]$ ισχύει $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, οπότε $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k)$ ή, ισοδύναμα,

$$x_{k+1} \leq \textstyle\int_k^{k+1} f \leq x_k\,.$$

Προσθέτουμε τις αριστερές ανισότητες για $k = 1, \ldots, n-1$ και τις δεξιές ανισότητες για $k = 1, \ldots, n$ και βρίσκουμε $x_2 + \cdots + x_n \leq \int_1^n f$ και $\int_1^{n+1} f \leq x_1 + \cdots + x_n$, αντιστοίχως. Άρα

$$\textstyle\int_1^{n+1} f \leq s_n \leq x_1 + \int_1^n f$$

και, επομένως, $l \leq s \leq x_1 + l$.
Τα (i), (ii) είναι άμεση συνέπεια της τελευταίας ανισότητας. $\square$

Παραδείγματα. (1) Θα μελετήσουμε τις *πολύ σημαντικές* σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. Οι σειρές αυτές είναι σημαντικές *και* διότι χρησιμεύουν ως "πρότυπα σύγκρισης" για πολλές άλλες σειρές.
Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ είναι σειρά μη-αρνητικών όρων, οπότε έχει άθροισμα το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$.
Αν $p \leq 0$, τότε $\frac{1}{n^p} \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Έστω $p > 0$. Τότε η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ είναι φθίνουσα και έχει θετικούς όρους. Θεωρούμε την $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^p}$, η οποία είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και, προφανώς, ισχύει $f(n) = \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι

$$\int_1^x \frac{1}{t^p}\, dt = \frac{x^{1-p}-1}{1-p} \quad (p \neq 1), \qquad \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \log x.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^p}\, dt = +\infty \quad (0 < p \leq 1), \qquad \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^p}\, dt = \frac{1}{p-1} < +\infty \quad (p > 1).$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}\,, & \text{αν } p > 1 \\ +\infty\,, & \text{αν } p \leq 1 \end{cases}$$

Ειδικώτερα, όπως έχουμε ήδη δει, η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$ ενώ η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Επιπλέον, έχουμε και τις χρήσιμες εκτιμήσεις

$$\frac{1}{p-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \leq 1 + \frac{1}{p-1} \qquad (p > 1),$$

$$\log(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\frac{(n+1)^{1-p}-1}{1-p} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \frac{n^{1-p}-1}{1-p} \qquad (0 \leq p < 1, n \in \mathbb{N}).$$

Παρατηρήστε ότι κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ $(0 < p \leq 1)$, είναι παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία δε συγκλίνει αλλά για την οποία ισχύει $x_n \to 0$.

(2) Για να μελετήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ γράφουμε $\frac{2n-1}{n^2+3n+1} = \frac{1}{n} \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$ και βλέπουμε ότι $\left(\frac{1}{n}\right)/\left(\frac{2n-1}{n^2+3n+1}\right) \to \frac{1}{2}$. Επομένως, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνει. Αυτό δεν ισχύει, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ αποκλίνει.

(3) Για να μελετήσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$, γράφουμε $\frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3} = \frac{1}{n^{3/2}} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2+\frac{3}{n^2}}$, οπότε $\left(\frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}\right)/\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \to \frac{1}{2}$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$ συγκλίνει.

Κριτήριο Συμπύκνωσης (Cauchy). *Έστω φθίνουσα ακολουθία (x_n) ώστε $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} = +\infty$.

Απόδειξη. Οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$ έχουν άθροισμα, αφού είναι σειρές με μη-αρνητικούς όρους. Έστω

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} = t.$$

Θεωρούμε και τα μερικά αθροίσματα

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad t_k = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k-1}x_{2^{k-1}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Τότε

$$s_n \to s, \qquad t_k \to t$$

και, επίσης, ισχύει

$$s_n \leq s, \qquad t_k \leq t$$

για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$.
Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{Z}$, $k_0 \geq 0$ ώστε

$$2^{k_0} \leq n < 2^{k_0+1}.$$

Επειδή η (x_n) είναι φθίνουσα, είναι

$$\begin{aligned} s_n &= x_1 + \cdots + x_n \\ &= x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \cdots \\ &\quad \cdots + (x_{2^{k_0-1}} + \cdots + x_{2^{k_0}-1}) + (x_{2^{k_0}} + \cdots + x_n) \\ &\leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k_0-1}x_{2^{k_0-1}} + 2^{k_0}x_{2^{k_0}} = t_{k_0+1} \leq t. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $s_n \leq t$ και, επομένως, $s \leq t$.
Επίσης, είναι

$$\begin{aligned} t_k &= x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k-1}x_{2^{k-1}} \\ &\leq 2x_1 + 2x_2 + 2(x_3 + x_4) + \cdots + 2(x_{2^{k-2}+1} + \cdots + x_{2^{k-1}}) \\ &= 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{k-1}}) = 2s_{2^{k-1}} \leq 2s. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $t_k \leq 2s$ και, επομένως, $t \leq 2s$.
Συνεπάγεται $s \leq t \leq 2s$, οπότε τα αθροίσματα s και t είναι είτε και τα δυο αριθμοί είτε και τα δυο $+\infty$. □

Παράδειγμα. Θα ξαναδούμε τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.
Κατ' αρχάς, αν $p \leq 0$, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Έστω $p > 0$, οπότε η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ είναι φθίνουσα με μη-αρνητικούς όρους. Εξετάζουμε τη σειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k.$$

Η σειρά αυτή είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{2^{p-1}}$ και είτε συγκλίνει, αν $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ ή, ισοδύναμα, αν $p > 1$, είτε αποκλίνει στο $+\infty$, αν $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$ ή, ισοδύναμα, αν $0 < p \leq 1$.
Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ είτε συγκλίνει, αν $p > 1$, είτε αποκλίνει στο $+\infty$, αν $p \leq 1$.

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιήστε το ολοκληρωτικό κριτήριο στις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n \log(\log n)}$, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n (\log(\log n))^2}$. Για όσες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους. Για όσες σειρές αποκλίνουν στο $+\infty$ βρείτε εκτιμήσεις για τα μερικά αθροίσματά τους.

2. Εφαρμόστε την Πρόταση 8.7 στις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^4-n^2+4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+\frac{1}{n^2})$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-\cos\frac{1}{n})$.

3. Είναι πολύ απλό να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (άσκηση 4 της ενότητας 8.1). Βάσει αυτού, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

4. Έστω $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ συγκλίνει. Αν, επιπλέον, η (x_n) είναι φθίνουσα, τότε αποδείξτε και το αντίστροφο.

5. Εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο και το κριτήριο συμπύκνωσης (Cauchy) στις σειρές $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n(\log(\log n))^p}$ ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου p.

6. Αποδείξτε ότι $\lim_{p\to 1+}(p-1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1$.

7. Έστω $x_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε αποδείξτε ότι και οι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{{x_n}^2}{1+{x_n}^2}$ συγκλίνουν.

8. Μελετήστε τις $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{1+n^2}-n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a\big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a-n^b}$ $(0<b<a)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^n-b^n}$ $(0<b<a)$ ως προς τη σύγκλιση, συγκρίνοντάς τες με σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ ή $\sum_{n=1}^{+\infty} p^n$ για κατάλληλους p. Όπου εμφανίζονται παράμετροι a, b βρείτε τις τιμές τους για τις οποίες η αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

9. Έστω $x_n, y_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$. Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.

10. Έστω (x_n) φθίνουσα και $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$, τότε αποδείξτε ότι $nx_n \to 0$.
Υπόδειξη: Είναι $0 \leq \frac{n}{2}x_n \leq x_{[\frac{n}{2}]} + \cdots + x_n$.

11. Έστω (x_n) φθίνουσα, $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to 0$ και $x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} n(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}) = x_1$.
Υπόδειξη: Η $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n - x_{n+1})$ συγκλίνει και είναι σειρά μη-αρνητικών όρων οι οποίοι φθίνουν. Από την προηγούμενη άσκηση, $n(x_n - x_{n+1}) \to 0$. Αν s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} n(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2})$, τότε $s_n = x_1 - x_{n+1} - n(x_{n+1} - x_{n+2})$.

8.3 p-αδικά αναπτύγματα.

Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Στην ενότητα 2.5 είδαμε ότι σε κάθε $x \in [0,1)$ αντιστοιχεί η ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) του x, όπου

$$x_n = [p^n x] - p[p^{n-1}x] \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Αποδείξαμε ότι $x_n \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq x_n \leq p-1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$. Τέλος είδαμε ότι, αν ορίσουμε

$$s_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}, \quad t_n = s_n + \frac{1}{p^n} = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

τότε ισχύει

$$s_n \le x < t_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, η (s_n) είναι αύξουσα, η (t_n) φθίνουσα και

$$s_n \to x, \qquad t_n \to x.$$

Τώρα μπορούμε να πούμε ότι η σχέση $s_n \to x$ γράφεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x.$$

Ορισμός. Γενικά, μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **ακολουθία p-αδικών ψηφίων** αν ισχύει $x_n \in \mathbb{Z}$, $0 \le x_n \le p-1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$.

Πρόταση 8.9. *Έστω $p \in \mathbb{Z}$, $p \ge 2$.*
(1) Έστω ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n). Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι αριθμός στο διάστημα $[0,1)$.
(2) Για κάθε $x \in [0,1)$ υπάρχει μοναδική ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x.$$

Απόδειξη. (1) Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ είναι σειρά μη-αρνητικών όρων, οπότε έχει άθροισμα

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}.$$

Επειδή ισχύει $0 \le x_n \le p-1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται

$$0 \le x \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

Επειδή ένας τουλάχιστον από τους x_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι $< p-1$, είναι

$$0 \le x < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

(2) Έστω $0 \le x < 1$. Γνωρίζουμε ήδη ότι υπάρχει ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x$. Θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι μοναδική.

Έστω *οποιαδήποτε* ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x.$$

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Τότε

$$p^{m-1}x = \sum_{n=1}^{m-1} x_n p^{m-n-1} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n-m+1}}.$$

Ορίζουμε

$$k = \sum_{n=1}^{m-1} x_n p^{m-n-1}$$

και παρατηρούμε ότι ο k είναι ακέραιος. Επίσης, είναι

$$0 \le \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n-m+1}} \le \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{n-m+1}} = 1.$$

Μάλιστα, επειδή ένας τουλάχιστον από τους x_n $(n \in \mathbb{N}, n \ge m)$ είναι $< p-1$, συνεπάγεται

$$0 \le \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n-m+1}} < 1.$$

Άρα
$$k \le p^{m-1}x < k+1,$$
οπότε $[p^{m-1}x] = k$. Δηλαδή,
$$[p^{m-1}x] = \sum_{n=1}^{m-1} x_n p^{m-n-1}.$$
Αυτό ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$, οπότε είναι και
$$[p^m x] = \sum_{n=1}^{m} x_n p^{m-n}\,.$$
Άρα
$$\begin{aligned}[p^m x] - p[p^{m-1}x] &= \sum_{n=1}^{m} x_n p^{m-n} - p\sum_{n=1}^{m-1} x_n p^{m-n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{m} x_n p^{m-n} - \sum_{n=1}^{m-1} x_n p^{m-n} = x_m\,.\end{aligned}$$
Επομένως, $x_n = [p^n x] - p[p^{n-1}x]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και καταλήγουμε στο ότι η (x_n) ταυτίζεται με την ήδη γνωστή ακολουθία p-αδικών ψηφίων του x. □

Ορισμός. Αν η (x_n) είναι η ακολουθία των p-αδικών ψηφίων του $x \in [0,1)$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ ονομάζεται **p-αδικό ανάπτυγμα** του x και πολλές φορές την αντικαθιστούμε με το σύμβολο $\langle 0, x_1x_2x_3\,\ldots\rangle_p$, οπότε γράφουμε
$$x = \langle 0, x_1x_2x_3\,\ldots\rangle_p\,.$$
Στην ειδική περίπτωση $p = 10$ χρησιμοποιούμε, παραδοσιακά, το απλούστερο σύμβολο $x = 0, x_1x_2x_3\,\ldots$ αντί του $x = \langle 0, x_1x_2x_3\,\ldots\rangle_{10}$.

Παρατηρήστε ότι η Πρόταση 8.9 λέει ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους αριθμούς στο $[0,1)$ και στις ακολουθίες p-αδικών ψηφίων ή, ισοδύναμα, στα p-αδικά αναπτύγματα $\langle 0, x_1x_2x_3\,\ldots\rangle_p$.

Ορισμός. Το p-αδικό ανάπτυγμα $\langle 0, x_1x_2x_3\,\ldots\rangle_p$ χαρακτηρίζεται **περιοδικό** αν υπάρχουν $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{n+k_0} = x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge m_0$. Αυτό σημαίνει ότι αμέσως μετά από το τμήμα $x_{m_0}x_{m_0+1}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}$ του p-αδικού αναπτύγματος ακολουθεί το ίδιο τμήμα και αμέσως μετά από αυτό ακολουθεί το ίδιο τμήμα και ούτω καθ' εξής. Δηλαδή, το p-αδικό ανάπτυγμα έχει τη μορφή
$$\langle 0, x_1\ldots x_{m_0-1}\; x_{m_0}\,\ldots\, x_{m_0+k_0-1}\; x_{m_0}\,\ldots\, x_{m_0+k_0-1}\; x_{m_0}\,\ldots\, x_{m_0+k_0-1}\,\ldots\rangle_p\,.$$
Χρησιμοποιούμε και τη συντομογραφία $\langle 0, x_1\ldots x_{m_0-1}\overline{x_{m_0}\,\ldots\, x_{m_0+k_0-1}}\,\rangle_p$.

Η Πρόταση 8.10 στην περίπτωση $p = 10$, δηλαδή για τα δεκαδικά αναπτύγματα, είναι γνωστή από το δημοτικό σχολείο - χωρίς απόδειξη, φυσικά!

Επισημαίνουμε ότι, εκτός από τους αριθμούς στο $[0,1)$, *και οι φυσικοί αριθμοί έχουν p-αδικά αναπτύγματα*. Αυτό το ζήτημα εντάσσεται στο πλαίσιο της στοιχειώδους αριθμητικής και, αν θέλετε, δείτε την άσκηση 1 για τα σχετικά.

Πρόταση 8.10. *Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \ge 2$ και $x \in [0,1)$. Τότε ο x είναι ρητός αν και μόνο αν το p-αδικό του ανάπτυγμα είναι περιοδικό.*

Απόδειξη. Έστω $x = \langle 0, x_1\ldots x_{m_0-1}\overline{x_{m_0}\,\ldots\, x_{m_0+k_0-1}}\,\rangle_p$.
Τότε
$$\begin{aligned}x &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \Big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\Big)\Big(1 + \tfrac{1}{p^{k_0}} + \tfrac{1}{p^{2k_0}} + \cdots\Big) \\ &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \Big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\Big)\tfrac{1}{1-(1/p^{k_0})} \\ &= \tfrac{x_1p^{m_0-2}+\cdots+x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \tfrac{x_{m_0}p^{k_0-1}+\cdots+x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)}\,,\end{aligned}$$

οπότε είναι φανερό ότι ο x είναι ρητός.
Αντιστρόφως, έστω ότι ο $x \in [0,1)$ είναι ρητός, δηλαδή $x = \frac{a}{b}$ όπου $a, b \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a < b$. Γράφουμε

$$p = {p_1}^{n_1} \cdots {p_r}^{n_r} ,$$

όπου $p_1, \ldots, p_r$ είναι οι πρώτοι παράγοντες του p και $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$. Ομοίως, γράφουμε

$$b = {p_1}^{l_1} \cdots {p_r}^{l_r} b' ,$$

όπου $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{Z}$, $l_1, \ldots, l_r \geq 0$ (αν κάποιος p_j δεν είναι πρώτος παράγων του b, τότε ο αντίστοιχος l_j είναι 0) και ο $b' \in \mathbb{N}$ είναι σχετικά πρώτος με τον p. Θεωρούμε οποιονδήποτε $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(m_0 - 1)n_j \geq l_j \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

Ορίζουμε

$$v_j = (m_0 - 1)n_j - l_j ,$$

οπότε $v_j \in \mathbb{Z}$, $v_j \geq 0$. Τότε είναι

$$x = \tfrac{a}{b} = \tfrac{a}{{p_1}^{l_1} \cdots {p_r}^{l_r} b'} = \tfrac{a {p_1}^{v_1} \cdots {p_r}^{v_r}}{({p_1}^{n_1} \cdots {p_r}^{n_r})^{m_0 - 1} b'} = \tfrac{a'}{p^{m_0 - 1} b'} ,$$

όπου $a' \in \mathbb{Z}$, $a' \geq 0$. Τώρα, διαιρούμε τους $p, p^2, p^3, \ldots$ με τον b'. Τα πιθανά υπόλοιπα αυτών των διαιρέσεων, δηλαδή οι $0, \ldots, b' - 1$, είναι πεπερασμένα αλλά οι αριθμοί είναι άπειροι, οπότε τουλάχιστον δυο από αυτούς θα δώσουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με τον b'. Δηλαδή, υπάρχουν $t, s \in \mathbb{N}$, $t < s$ ώστε

$$p^t = q_t b' + z, \qquad p^s = q_s b' + z,$$

όπου $q_t, q_s \in \mathbb{Z}$ και

$$z \in \{0, \ldots, b' - 1\}.$$

Συνεπάγεται

$$p^t(p^{s-t} - 1) = p^s - p^t = (q_s - q_t) b' ,$$

οπότε ο b' διαιρεί τον $p^t(p^{s-t} - 1)$. Επειδή οι b', p είναι σχετικά πρώτοι, ο b' διαιρεί τον $p^{s-t} - 1$, οπότε υπάρχει $b'' \in \mathbb{N}$ ώστε

$$b' b'' = p^{s-t} - 1.$$

Ορίζουμε τον $k_0 = s - t \in \mathbb{N}$ και έχουμε ότι

$$b' b'' = p^{k_0} - 1$$

και, επομένως,

$$x = \tfrac{a' b''}{p^{m_0 - 1} b' b''} = \tfrac{a''}{p^{m_0 - 1}(p^{k_0} - 1)} ,$$

όπου

$$a'' \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \leq a'' < p^{m_0 - 1}(p^{k_0} - 1).$$

Κατόπιν, εκτελούμε τη διαίρεση του a'' με τον $p^{k_0} - 1$, οπότε

$$a'' = w(p^{k_0} - 1) + u,$$

όπου

$$w \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \leq w < p^{m_0 - 1} , \qquad u \in \{0, \ldots, p^{k_0} - 2\}.$$

Τέλος, γράφουμε τα p-αδικά αναπτύγματα (δείτε την άσκηση 1) των w, u στη μορφή

$$w = x_1 p^{m_0-2} + \cdots + x_{m_0-1}\,, \qquad u = x_{m_0} p^{k_0-1} + \cdots + x_{m_0+k_0-1}$$

και παρατηρούμε ότι οι $x_{m_0}, \ldots, x_{m_0+k_0-1}$ δεν είναι όλοι ίσοι με $p-1$, διότι αλλιώς θα ήταν $u = (p-1)p^{k_0-1} + \cdots + (p-1)p + (p-1) = p^{k_0} - 1$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{w(p^{k_0}-1)+u}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} = \tfrac{w}{p^{m_0-1}} + \tfrac{u}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} = \tfrac{x_1 p^{m_0-2}+\cdots+x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \tfrac{x_{m_0}p^{k_0-1}+\cdots+x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} \\ &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\tfrac{1}{1-\frac{1}{p^{k_0}}} \\ &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\big(1 + \tfrac{1}{p^{k_0}} + \tfrac{1}{p^{2k_0}} + \cdots\big) \\ &= \langle x_1 \ldots x_{m_0-1}\overline{x_{m_0}\,\ldots\, x_{m_0+k_0-1}}\,\rangle_p\,. \end{aligned}$$

Άρα ο x έχει περιοδικό p-αδικό ανάπτυγμα. □

Ασκήσεις.

1. (i) Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{N}$ υπάρχουν μοναδικοί $n_0 \in \mathbb{Z}$, $n_0 \geq 0$ και $x_0, x_1, \ldots, x_{n_0} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x_0, x_1, \ldots, x_{n_0} \leq p-1$ ώστε $x = x_0 + x_1 p + \cdots + x_{n_0} p^{n_0}$. Η παράσταση $x_0 + x_1 p + \cdots + x_{n_0} p^{n_0}$ ονομάζεται **p-αδικό ανάπτυγμα** του x και συμβολίζεται και $\langle x_{n_0}\,\ldots\, x_1 x_0\rangle_p$. Οι $x_0, x_1, \ldots, x_{n_0}$ ονομάζονται **p-αδικά ψηφία** του x.
   Υπόδειξη: Υπάρχει μοναδικός $n_0 \in \mathbb{Z}$, $n_0 \geq 0$ ώστε $p^{n_0} \leq x < p^{n_0+1}$. Θεωρήστε τους $x_0 = x - p[\frac{x}{p}]$, $x_1 = [\frac{x}{p}] - p[\frac{x}{p^2}]$ και, γενικά, $x_n = [\frac{x}{p^n}] - p[\frac{x}{p^{n+1}}]$ $(n \in \mathbb{N})$.
   (ii) Ποιο είναι το δεκαδικό ανάπτυγμα των αριθμών 2, 16, 354, 10385; Βρείτε και τα δυαδικά, τριαδικά και δεκαεξαδικά αναπτύγματα των ίδιων αριθμών.

2. Βρείτε το δυαδικό, τετραδικό και δεκαεξαδικό ανάπτυγμα των $\frac{7}{16}$, $\frac{31}{32}$.

3. Υπολογίστε τους ρητούς $0,34\overline{239}$, $\langle 0, 0\overline{1201}\,\rangle_3$, $\langle 0, \overline{101}\,\rangle_2$. Υπολογίστε το δυαδικό, το τριαδικό και το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα του $\frac{13}{150}$.

4. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x, y \in [0, 1)$. Αν για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ οι n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις των x, y είναι ίδιες, αποδείξτε ότι $|x - y| < \frac{1}{p^n}$.

5. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \in [0, 1)$. Αν s_n είναι η n-οστή p-αδική προσέγγιση του x, ποια είναι τα p-αδικά αναπτύγματα των $x - s_n$, $p^n(x - s_n)$;

6. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x, y \in [0, 1)$.
   (i) Αν $x + y < 1$, αποδείξτε ότι το σφάλμα στον υπολογισμό του $x + y$ με την αντικατάσταση των x, y από τις n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις τους είναι $< \frac{2}{p^n}$.
   (ii) Αποδείξτε ότι το αντίστοιχο σφάλμα στον υπολογισμό του xy είναι $< \frac{2}{p^n} - \frac{1}{p^{2n}}$.

7. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και οποιοδήποτε συγκεκριμένο p-αδικό ψηφίο k. Αποδείξτε ότι το σύνολο των αριθμών στο $[0, 1)$ των οποίων το n-οστό p-αδικό ψηφίο είναι ίσο με k είναι η ένωση p^{n-1} διαστημάτων τύπου $[a, b)$. Ποια ακριβώς είναι αυτά τα διαστήματα και τι μήκος έχει καθένα από αυτά; Ποιο είναι το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων;
   Υπόδειξη: Δείτε πρώτα τις περιπτώσεις $n = 1, 2, 3, 4$.

8. Βρείτε την έκτη δεκαδική και την έκτη δυαδική προσέγγιση του $\sqrt{2} - 1$.

9. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \in [0,1)$. Αποδείξτε ότι τα p-αδικά ψηφία του x είναι τελικά 0 αν και μόνο αν $p = \frac{m}{n}$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq m < n$, $\gcd(m,n) = 1$ και οι πρώτοι παράγοντες του n είναι πρώτοι παράγοντες και του p.

10. **Γενίκευση των p-αδικών αναπτυγμάτων**. Έστω ακολουθία (p_n) στο $\mathbb{N}$ ώστε $p_n \geq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(i) Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{Z}$ ώστε $0 \leq a_n \leq p_n - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ώστε να μην ισχύει τελικά $a_n = p_n - 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p_1 \cdots p_n}$ συγκλίνει και ότι το άθροισμά της ανήκει στο $[0,1)$.
(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [0,1)$ υπάρχει μοναδική ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{Z}$ ώστε $0 \leq a_n \leq p_n - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ώστε να μην ισχύει τελικά $a_n = p_n - 1$ και ώστε $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p_1 \cdots p_n}$. Επιπλέον αποδείξτε ότι για αυτήν την μοναδική ακολουθία (a_n) είναι $a_n = [p_1 \cdots p_n x] - p_n [p_1 \cdots p_{n-1} x]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

8.4 Κριτήρια σύγκλισης σειρών.

Κριτήριο του Cauchy. *Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\left| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right| = |x_{m+1} + \cdots + x_n| < \varepsilon$ για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$, $n > m \geq n_0$.*

Απόδειξη. Έστω $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Το ότι η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|x_{m+1} + \cdots + x_n| = |(x_1 + \cdots + x_n) - (x_1 + \cdots + x_m)| = |s_n - s_m| < \varepsilon$$

για κάθε $n,m \in \mathbb{N}$, $n > m \geq n_0$. $\square$

Το κριτήριο του Cauchy εκφράζεται και ως εξής: η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν

$$\lim_{m,n \to +\infty} \sum_{k=m+1}^{n} x_k = 0.$$

Παράδειγμα. Θα ξαναδούμε την αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.
Κατ' αρχάς, αν $m,n \in \mathbb{N}$, $m < n$, τότε είναι

$$\tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{n} \geq \tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{1}{n} = \tfrac{n-m}{n}.$$

Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνει. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\left|\tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{n}\right| < \tfrac{1}{2}$$

για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$, $n > m \geq n_0$. Άρα ισχύει

$$\left|\tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{2m}\right| < \tfrac{1}{2}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$. Όμως,

$$\left|\tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{2m}\right| = \tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{2m} \geq \tfrac{2m-m}{2m} = \tfrac{1}{2}.$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, οπότε, ως σειρά μη-αρνητικών όρων, αποκλίνει στο $+\infty$.
Προσέξτε την ομοιότητα αυτής της απόδειξης της απόκλισης της αρμονικής σειράς με την απόδειξη στην ενότητα 2.5 αλλά και με τη λύση της άσκησης 1 της ενότητας 2.8.

8.4.1 Απόλυτη σύγκλιση.

Ορισμός. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει απολύτως** αν η σειρά (με μη-αρνητικούς όρους) $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.

Κριτήριο Απόλυτης Σύγκλισης. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

Πρώτη απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\big||x_{m+1}| + \cdots + |x_n|\big| < \varepsilon$ και, επομένως,

$$|x_{m+1} + \cdots + x_n| \leq |x_{m+1}| + \cdots + |x_n| < \varepsilon$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m \geq n_0$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
Τώρα, επειδή ισχύει

$$-|x_n| \leq x_n \leq |x_n|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$$

και, επομένως, $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$.
Δεύτερη απόδειξη. Για κάθε x ορίζουμε

$$x^+ = \tfrac{|x|+x}{2}, \qquad x^- = \tfrac{|x|-x}{2}.$$

Τότε

$$x^+ \geq 0, \quad x^- \geq 0, \qquad x^+ + x^- = |x|, \quad x^+ - x^- = x.$$

Ειδικώτερα, είναι

$$0 \leq x^+ \leq |x|, \qquad 0 \leq x^- \leq |x|.$$

Έστω, τώρα, ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Τότε και οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-$ συγκλίνουν. Επειδή είναι $x_n = {x_n}^+ - {x_n}^-$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty}({x_n}^+ - {x_n}^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\big|\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| &= \big|\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-\big| \leq \big|\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+\big| + \big|\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-\big| \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ + \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^- = \sum_{n=1}^{+\infty}({x_n}^+ + {x_n}^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.\end{aligned}$$

□

Αν δούμε την ανισότητα $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ ως γενίκευση των $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$, $|x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|$ κλπ, τότε δικαιολογείται ο όρος **τριγωνική ανισότητα** για την ανισότητα αυτή.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ συγκλίνει διότι συγκλίνει απολύτως. Πράγματι, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\Big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

συγκλίνει.

Πρόταση 8.11. *(1) Αν* $|x_n| \leq y_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει. Επίσης,*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\,.$$

(2) Έστω $y_n > 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και έστω ότι η ακολουθία* $\big(\frac{|x_n|}{y_n}\big)$ *συγκλίνει ή, γενικότερα, είναι φραγμένη. Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.*

Απόδειξη. (1) Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και

$$\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\,.$$

(2) Άμεση συνέπεια της Πρότασης 8.6 και του Κριτηρίου Απόλυτης Σύγκλισης. □

Παράδειγμα. Για να μελετήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ γράφουμε $\big|\frac{(-2)^n}{3^n+2^n}\big| = \frac{2^n}{3^n+2^n} = \big(\frac{2}{3}\big)^n \frac{1}{1+(2/3)^n}$, οπότε $\big|\frac{(-2)^n}{3^n+2^n}\big|/\big(\frac{2}{3}\big)^n \to 1$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\frac{2}{3}\big)^n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως.

8.4.2 Υπό συνθήκη σύγκλιση.

Ορισμός. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει υπό συνθήκη** αν συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απολύτως.

Τύπος άθροισης του Abel. *Έστω ακολουθίες* (a_n), (b_n) *και* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. *Για κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ *ισχύει*

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}\,.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m+1}^{n}(s_k - s_{k-1})b_k = \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} s_{k-1} b_k\\ &= \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_{k+1}\\ &= \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_{k+1} + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}\\ &= \sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}\,.\end{aligned}$$

□

Δε χρειάζεται να θυμόμαστε τον τύπο άθροισης του Abel! Αρκεί να κατανοήσουμε την ιδέα: το άθροισμα $\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k$ αντικαθίσταται με ένα άλλο, στο οποίο τη θέση των a_k παίρνουν τα διαδοχικά μερικά αθροίσματά τους s_k και τη θέση των b_k παίρνουν οι διαδοχικές διαφορές τους $b_k - b_{k+1}$. Εμφανίζονται και οι "ακραίοι" όροι $s_n b_{n+1}$, $s_m b_{m+1}$.

Κριτήριο του Dirichlet. *Έστω ακολουθίες* (a_n), (b_n) *και* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. *Αν η* (b_n) *είναι φθίνουσα,* $b_n \to 0$ *και η* (s_n) *είναι φραγμένη, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|s_n| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, επειδή η (b_n) είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, ισχύει

$$b_n \geq 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$b_n \leq \tfrac{\varepsilon}{2M+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned} \big|\textstyle\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\big| &= \big|\textstyle\sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}\big| \\ &\leq \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} |s_k|(b_k - b_{k+1}) + |s_n|b_{n+1} + |s_m|b_{m+1} \\ &\leq M\textstyle\sum_{k=m+1}^{n}(b_k - b_{k+1}) + Mb_{n+1} + Mb_{m+1} \\ &= M(b_{m+1} - b_{n+1}) + Mb_{n+1} + Mb_{m+1} \\ &= 2Mb_{m+1} \leq \tfrac{2M\varepsilon}{2M+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει. □

Κριτήριο του Abel. *Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) και $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Αν η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $b_n \to b \in \mathbb{R}$. Βάσει του Κριτηρίου του Dirichlet, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(b_n - b)$ συγκλίνει. Ισχύει $a_n b_n = a_n(b_n - b) + a_n b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(b_n - b) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(b_n - b) + b\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,.$$

□

Κριτήριο Εναλλασσόμενων Προσήμων. *Αν η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και $b_n \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Είναι $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 1, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$ Άρα, σύμφωνα με το Κριτήριο του Dirichlet, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} b_n$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα. Τυπικά παραδείγματα είναι οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ $(0 < p \leq 1)$. Οι σειρές αυτές συγκλίνουν υπο συνθήκη.
Οι απλούστερες από αυτές είναι οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$. Έχουμε ήδη δει στο κεφάλαιο 2 ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει.

8.4.3 Κριτήρια λόγου και ρίζας.

Κριτήριο Λόγου (d' Alembert). *Έστω $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
(1) Αν $\overline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.
(2) Αν $\underline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.
(3) Αν $\underline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq 1 \leq \overline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.

Απόδειξη. (1) Θεωρούμε a ώστε

$$\overline{\lim}\left|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| < a < 1.$$

Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\left|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq a$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα είναι $|x_{n_0+1}| \leq a|x_{n_0}|$, $|x_{n_0+2}| \leq a|x_{n_0+1}| \leq a^2|x_{n_0}|$ και, επαγωγικά,

$$|x_n| \leq a^{n-n_0}|x_{n_0}| = \tfrac{|x_{n_0}|}{a^{n_0}}\, a^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Επειδή $0 \leq a < 1$, η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.
(2) Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\left|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Δηλαδή, ισχύει

$$|x_n| \geq |x_{n-1}| \geq \cdots \geq |x_{n_0}| > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα, δεν ισχύει $x_n \to 0$ και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δε συγκλίνει.
(3) Για τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ είναι $\left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| \to 1$ και $\left|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right| \to 1$. Η πρώτη σειρά αποκλίνει και η δεύτερη συγκλίνει. □

Κριτήριο Ρίζας (Cauchy). *(1) Αν* $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, *η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει απολύτως.*
(2) Αν $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, *η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *αποκλίνει.*
(3) Αν $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|x_n|} = 1$, *τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*

Απόδειξη. (1) Θεωρούμε a ώστε

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|x_n|} < a < 1.$$

Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|x_n|} \leq a$ και, επομένως,

$$|x_n| \leq a^n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Επειδή $0 \leq a < 1$, η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.
(2) Ισχύει $\sqrt[n]{|x_n|} > 1$ και, επομένως,

$$|x_n| > 1$$

για άπειρους $n \in \mathbb{N}$. Άρα, δεν ισχύει $x_n \to 0$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δε συγκλίνει.
(3) Για τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ είναι $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} \to 1$ και $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} \to 1$. Η πρώτη σειρά αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει. □

Σχόλιο. Στην εφαρμογή των κριτηρίων λόγου και ρίζας σε συγκεκριμένες σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τις περισσότερες φορές υπάρχουν τα όρια $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$. Γνωρίζουμε και το χρησιμοποιήσαμε στις αποδείξεις των μερών (3) των δυο κριτηρίων ότι τότε $\underline{\lim} = \overline{\lim} = \lim$.

Παραδείγματα. (1) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$.
Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $a = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι

$$\left|\tfrac{a^{n+1}/(n+1)}{a^n/n}\right| = |a|\tfrac{n}{n+1} \to |a|.$$

Άρα, αν $0 < |a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι

$$\sqrt[n]{\left|\tfrac{a^n}{n}\right|} = \tfrac{|a|}{\sqrt[n]{n}} \to |a|.$$

Επομένως, αν $|a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|a| = 1$, κανένα από τα δυο κριτήρια δε δίνει συμπέρασμα. Αν $a = 1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει. Αν $a = -1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, η οποία συγκλίνει υπό συνθήκη. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $-1 \le a < 1$ και συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $-1 < a < 1$.
(2) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2}$.
Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $a = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι

$$\left|\frac{a^{n+1}/(n+1)^2}{a^n/n^2}\right| = |a|\frac{n^2}{(n+1)^2} \to |a|.$$

Άρα, αν $0 < |a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$ η σειρά αποκλίνει.
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι

$$\sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n^2}\right|} = \frac{|a|}{(\sqrt[n]{n})^2} \to |a|.$$

Επομένως, αν $|a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|a| = 1$, κανένα από τα δυο κριτήρια δε δίνει συμπέρασμα. Αν $a = 1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, η οποία συγκλίνει απολύτως. Αν $a = -1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, η οποία, επίσης, συγκλίνει απολύτως. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2}$ συγκλίνει απολύτως αν $|a| \le 1$ και αποκλίνει αν $|a| > 1$.
(3) Στη σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. Αν $a = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι

$$\left|\frac{a^{n+1}/(n+1)!}{a^n/n!}\right| = \frac{|a|}{n+1} \to 0 < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε a.
Η εφαρμογή του κριτηρίου ρίζας είναι πιο δύσκολη. Είναι

$$\sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n!}\right|} = \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}}$$

και χρειαζόμαστε το όριο

$$\sqrt[n]{n!} \to +\infty.$$

Ιδού η απόδειξη αυτού του ορίου. Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, γράφουμε

$$n! = 1 \cdots \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) \cdots n \ge \left(\frac{n}{2}+1\right) \cdots n \ge \left(\frac{n}{2}+1\right)^{\frac{n}{2}} \ge \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

οπότε $\sqrt[n]{n!} \ge \sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, τότε

$$n! = 1 \cdots \frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2} \cdots n \ge \frac{n+1}{2} \cdots n \ge \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \ge \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

οπότε $\sqrt[n]{n!} \ge \sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Άρα ισχύει $\sqrt[n]{n!} \ge \sqrt{\frac{n+1}{2}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.
Επομένως,

$$\sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n!}\right|} \to 0 < 1,$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ συγκλίνει απολύτως.
Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ είναι ιδιαιτέρως σημαντική και θα την ξαναδούμε στην υποενότητα 8.5.2 και, κυρίως, στο Κεφάλαιο 10.

Ίσως αναρωτηθεί κανείς αν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στα κριτήρια λόγου και ρίζας στην περίπτωση που μπορούν να εφαρμοσθούν και τα δυο ταυτοχρόνως, δηλαδή, αν έχουμε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, όπου $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η απάντηση είναι ότι *το κριτήριο ρίζας είναι ισχυρότερο από το κριτήριο λόγου.* Δηλαδή, αν το κριτήριο λόγου δίνει κάποιο αποτέλεσμα για τη σύγκλιση της σειράς, τότε και το κριτήριο ρίζας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα - δείτε την άσκηση 14 - ενώ υπάρχουν παραδείγματα σειρών για τα οποία το κριτήριο λόγου δε δίνει αποτέλεσμα ενώ το κριτήριο ρίζας δίνει. Όμως, μερικές φορές, όπως στο τελευταίο παράδειγμα, είναι πιο εύκολο να εφαρμοσθεί το κριτήριο λόγου από το κριτήριο ρίζας.

Ασκήσεις.

1. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 e^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n (n+1)!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$.

2. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι κάτι τέτοιο δυνατό. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{n+1}{2n-1})^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 2^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} e^n (\frac{n}{n+1})^{n^2}$.

3. Εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$ και $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots$, εφαρμόζοντας τα κριτήρια λόγου και ρίζας.

4. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}(1-\cos\frac{1}{n})$.

5. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$, αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνουν.

6. Αποδείξτε ότι $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)} \leq (\frac{2}{3})^n$ $(n \in \mathbb{N})$ και, επομένως, ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}$ συγκλίνει απολύτως.

7. (i) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{2x}\,dx = \log\sqrt{n+1}$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $1+x \leq e^x$, αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ συγκλίνει.
   (ii) Αποδείξτε ότι $1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \leq 1+\int_1^n \frac{1}{2x-1}\,dx = 1+\log\sqrt{2n-1}$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $1+x \leq e^x$, αποδείξτε ότι $2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1} \leq e\sqrt{2n-1}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ δε συγκλίνει απολύτως.

8. Βρείτε τις τιμές του $x \neq -1$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$ συγκλίνει.

9. Για ποιες τιμές των παραμέτρων p, q οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} p^n n^q$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ συγκλίνουν απολύτως; υπό συνθήκη;

10. Έστω (b_n) φθίνουσα ώστε $b_n \to 0$. Ορίζουμε $s_n = b_1 - b_2 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ και $s = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$. Αποδείξτε ότι $0 \leq (-1)^n (s - s_n) \leq b_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

11. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει, αποδείξτε ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} n x_n$ αποκλίνει.

12. Έστω $x_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Ορίζουμε $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} x_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(i) Αποδείξτε ότι $\frac{x_{m+1}}{r_{m+1}} + \cdots + \frac{x_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_{n+1}}{r_{m+1}}$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{r_n}$ αποκλίνει.
Υπόδειξη: Η (r_n) είναι φθίνουσα. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Cauchy και το ότι $r_n \to 0$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\frac{x_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{r_n}}$ συγκλίνει.

13. Έστω $x_n > 0$ και $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.
(i) Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ αποκλίνει.
Υπόδειξη: Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ συγκλίνει, τότε $\frac{x_n}{1+x_n} \to 0$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\frac{x_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{x_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_m}{s_n}$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{s_n}$ αποκλίνει.
Υπόδειξη: Η (s_n) είναι αύξουσα. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Cauchy και το ότι $s_n \to +\infty$.
(iii) Αποδείξτε ότι $\frac{x_n}{s_n{}^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{s_n{}^2}$ συγκλίνει.
Υπόδειξη: $x_n = s_n - s_{n-1}$.

14. (i) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι

$$\underline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

Υπόδειξη: Έστω $x > \overline{\lim}\, \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ να ισχύει $\frac{a_{n+1}}{a_n} < x$ και, επομένως, $\frac{a_n}{a_{n_0}} = \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} < x^{n-n_0}$. Άρα $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n} \leq x$.
(ii) Αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, αποδείξτε ότι υπάρχει και το $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ και τα δυο όρια είναι ίσα. Υπολογίστε τα $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.
(iii) Να αποδείξετε ότι, όταν το κριτήριο λόγου δείχνει σύγκλιση ή απόκλιση σειράς, το ίδιο συμβαίνει και με το κριτήριο ρίζας.

15. **Παρενθέσεις σε σειρές**. Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{N}$. Από κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δημιουργούμε μια νέα σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ ως εξής: $y_1 = x_1 + \cdots + x_{f(1)}$ και $y_n = x_{f(n-1)+1} + \cdots + x_{f(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ προκύπτει από την $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με *εισαγωγή παρενθέσεων* και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ προκύπτει από την $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ με *εξαγωγή παρενθέσεων*.
(i) Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχει το ίδιο άθροισμα.
(ii) Ως αντιπαράδειγμα για το αντίστροφο του (i), θεωρήστε την $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f(k) = 2k$ και την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$.
(iii) Έστω ότι υπάρχει M ώστε $f(k+1) - f(k) \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $x_n \to 0$. Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχει άθροισμα, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει το ίδιο άθροισμα.
(iv) Ορίζουμε, επιπλέον, $y_1' = |x_1| + \cdots + |x_{f(1)}|$ και $y_n' = |x_{f(n-1)+1}| + \cdots + |x_{f(n)}|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Αποδείξτε ότι, αν $y_n' \to 0$ και η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχει άθροισμα, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει το ίδιο άθροισμα.

16. (i) Αν η (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \to 0$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ συγκλίνει για κάθε $x \neq m2\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνει για κάθε x.
Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 5.
Υπόδειξη: Βάσει των τύπων στην άσκηση 4 της ενότητας 6.2, αποδείξτε ότι $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \leq$

$\frac{1}{\sin(x/2)}$ και $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \leq \frac{1}{\sin(x/2)}$.
(ii) Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\frac{\sin(nx)}{n}$ συγκλίνει.

17. Αναδιατυπώστε και αποδείξτε τα κριτήρια του Dirichlet και του Abel αντικαθιστώντας την υπόθεση ότι η (b_n) είναι φθίνουσα με την υπόθεση $\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n - b_{n+1}| < +\infty$.

18. Έστω $y_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι ισχύει τελικά $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$. Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.

8.5 Ειδικώτερα θέματα.

8.5.1 Διαδοχική άθροιση διπλών σειρών.

Ορισμός. Έστω συνάρτηση
$$x : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$
Δηλαδή, σε κάθε ζεύγος (m, n) φυσικών αντιστοιχίζεται ο αριθμός $x(m, n)$. Κάθε τέτοια συνάρτηση x χαρακτηρίζεται **διπλή ακολουθία** και, όπως με τις συνήθεις ακολουθίες, προτιμάμε το σύμβολο $x_{m,n}$ αντί του $x(m, n)$. Δηλαδή
$$x_{m,n} = x(m, n).$$
Επίσης, για τη διπλή ακολουθία x χρησιμοποιούμε τα σύμβολα
$$(x_{m,n}), \qquad (x_{m,n})_{m,n=1}^{+\infty}.$$

Σ' αυτήν την υποενότητα θα μας απασχολήσει το θέμα της άθροισης διπλών ακολουθιών. Το αντίστοιχο θέμα για τις συνήθεις ακολουθίες είναι το θέμα αυτού του κεφαλαίου, δηλαδή οι σειρές. Άρα σ' αυτήν την υποενότητα θα ασχοληθούμε με τις λεγόμενες **διπλές σειρές**. Και μάλιστα, δεν θα εξετάσουμε τη γενική θεωρία των διπλών σειρών και τους πολλούς διάφορους τρόπους άθροισής τους. Θα εξετάσουμε μόνο ένα ειδικό αλλά αρκετά χρήσιμο θέμα, το θέμα της λεγόμενης **διαδοχικής άθροισης διπλών σειρών**, και θα δούμε μόνο δυο βασικά αποτελέσματα.

Ορισμός. Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε για μια διπλή σειρά είναι τα
$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}\,, \qquad \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{m,n}\,.$$

Ορισμός. Ο πρώτος τρόπος διαδοχικής άθροισης διπλής σειράς είναι η άθροιση **πρώτα κατά γραμμές**. Αυτό σημαίνει ότι, κατ' αρχάς, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $s_m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ και, κατόπιν, βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$, δηλαδή το
$$\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\Big).$$
Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός a ή το $+\infty$ ή το $-\infty$, τότε λέμε ότι η διπλή σειρά συγκλίνει στον a ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή αποκλίνει στο $-\infty$, αντιστοίχως, με άθροιση πρώτα κατά γραμμές.
Ο δεύτερος τρόπος διαδοχικής άθροισης διπλής σειράς είναι η άθροιση **πρώτα κατά στήλες**. Αυτό

σημαίνει ότι, κατ' αρχάς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $t_n = \sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}$ και, κατόπιν, βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $\sum_{n=1}^{+\infty} t_n$, δηλαδή το

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\Big).$$

Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός a ή το $+\infty$ ή το $-\infty$, τότε λέμε ότι η διπλή σειρά συγκλίνει στον a ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή αποκλίνει στο $-\infty$, αντιστοίχως, με άθροιση πρώτα κατά στήλες.

Ο τρίτος τρόπος διαδοχικής άθροισης διπλής σειράς είναι η άθροιση **πρώτα κατά διαγωνίους**. Αυτό σημαίνει ότι, κατ' αρχάς, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $u_k = \sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}$ και, κατόπιν, βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, δηλαδή το

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}\Big).$$

Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός a ή το $+\infty$ ή το $-\infty$, τότε λέμε ότι η διπλή σειρά συγκλίνει στον a ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή αποκλίνει στο $-\infty$, αντιστοίχως, με άθροιση πρώτα κατά διαγωνίους.

Οι όροι "στήλες", "γραμμές" και "διαγώνιοι" προέρχονται, προφανώς, από τη θεωρία των *πινάκων*.

Όταν έχουμε πεπερασμένα αθροίσματα τα πράγματα είναι απλά. Για παράδειγμα, ισχύει:

$$\textstyle\sum_{m=1}^{M}\big(\sum_{n=1}^{N} x_{m,n}\big) = \sum_{n=1}^{N}\big(\sum_{m=1}^{M} x_{m,n}\big)$$

διότι η σειρά με την οποία γίνεται η πρόσθεση *πεπερασμένου* πλήθους αριθμών δεν επηρεάζει την τιμή του αθροίσματος. Δείτε, όμως, το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα. Έστω $x_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{αν } m-n=1 \\ -1, & \text{αν } m-n=-1 \\ 0, & \text{αν } m-n\neq \pm 1 \end{cases}$ Τότε, εύκολα βλέπουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{1,n} = -1$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Άρα $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big) = -1$. Επίσης, είναι $\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,1} = 1$ και $\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\big) = 1$. Τέλος, είναι $\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε $\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}\big) = 0$. Επομένως, οι τρεις τρόποι άθροισης της διπλής σειράς δίνουν τρία διαφορετικά αποτελέσματα.

Ας θεωρήσουμε μια διπλή σειρά η οποία έχει μη-αρνητικούς όρους, δηλαδή $x_{m,n} \geq 0$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$.

Τότε, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το άθροισμα $s_m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Τώρα, η πρώτη περίπτωση είναι όταν ο s_m είναι αριθμός για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε, όπως γνωρίζουμε, το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν για τουλάχιστον έναν $m_0 \in \mathbb{N}$ είναι $s_{m_0} = +\infty$. Παρατηρήστε τότε ότι όταν υπολογίζουμε ένα μερικό άθροισμα της $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$, αυτό είναι ένα συνηθισμένο άθροισμα πεπερασμένου πλήθους στοιχείων στο οποίο δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή, αφού όλα αυτά τα στοιχεία ανήκουν στο $[0, +\infty]$. Και, ειδικώτερα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m_0$ είναι $s_1 + \cdots + s_k = +\infty$ αφού κάθε τέτοιο άθροισμα περιέχει τον όρο s_{m_0}. Επομένως, τα μερικά αθροίσματα έχουν όριο το $+\infty$, οπότε το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$ υπάρχει και είναι $+\infty$. Συμπεραίνουμε ότι σε κάθε περίπτωση το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$, δηλαδή το $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big)$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.

Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για το άθροισμα $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\big)$, δηλαδή ότι είναι είτε αριθμός

≥ 0 είτε $+\infty$.
Τέλος, η κατάσταση με την άθροιση πρώτα κατά διαγωνίους είναι λίγο πιο απλή. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το άθροισμα $\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}$ είναι, προφανώς, αριθμός ≥ 0 και, επομένως, το άθροισμα $\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}\big)$ είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.
Οπότε προκύπτει το ερώτημα αν τα τρία αθροίσματα σχετίζονται και, ειδικώτερα, αν είναι ίσα. Στο ερώτημα αυτό απαντά το Θεώρημα 8.2.

Θεώρημα 8.2. *Έστω $x_{m,n} \geq 0$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε*

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}\Big).$$

Δηλαδή, για σειρές με μη-αρνητικούς όρους οι τρεις τρόποι άθροισης δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, το οποίο είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.

Απόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι

$$s_1 + \cdots + s_m = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_{1,n} + \cdots + \sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(x_{1,n} + \cdots + x_{m,n}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\big).$$

Δηλαδή το άθροισμα $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\big)$ είναι άνω φράγμα των μερικών αθροισμάτων $s_1+\cdots+s_m$, οπότε

$$\textstyle\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big) = \sum_{m=1}^{+\infty} s_m \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\big).$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τη συμμετρική σχέση

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\big) \leq \sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big)$$

και καταλήγουμε στην ισότητα $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\big)$.
Τώρα δημιουργούμε μια νέα διπλή σειρά, ορίζοντας

$$y_{m,n} = \begin{cases} x_{m,n-m+1}\,, & \text{αν } m \leq n \\ 0, & \text{αν } m > n \end{cases}$$

Είναι $y_{m,n} \geq 0$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το μέχρι τώρα αποτέλεσμα στη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} y_{m,n}$. Δηλαδή:

$$\textstyle\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} y_{m,n}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} y_{m,n}\big).$$

Όμως, είναι απλό να δούμε ότι

$$\textstyle\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} y_{m,n}\big) = \sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big)$$

και

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} y_{m,n}\big) = \sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}\big).$$

Άρα $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big) = \sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}\big)$. □

Ορισμός. Αν $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{m,n}|\big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} |x_{m,n}|\big) = \sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k} |x_{k-l+1,l}|\big) < +\infty$, τότε λέμε ότι η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ **συγκλίνει απολύτως**.

Πρέπει να τονίσουμε ότι όταν θέλουμε να δούμε αν μια διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ συγκλίνει απολύτως, τότε είναι αρκετό να δούμε αν *ένα μόνο* από τα τρία αθροίσματα $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{m,n}|\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} |x_{m,n}|\big)$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k} |x_{k-l+1,l}|\big)$ είναι αριθμός (και όχι $+\infty$), διότι τα τρία αθροίσματα είναι, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.2, ίσα.

Θεώρημα 8.3. *Αν η διπλή σειρά* $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ *συγκλίνει απολύτως, τότε*

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\Big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\Big)=\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}\Big)$$

και η κοινή τιμή των τριών αθροισμάτων είναι αριθμός.

Απόδειξη. Από το ότι $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)<+\infty$ συνεπάγεται ότι για κάθε $m\in\mathbb{N}$ είναι $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|<+\infty$. Άρα για κάθε $m\in\mathbb{N}$ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}$ συγκλίνει και το άθροισμα

$$s_m=\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}$$

είναι αριθμός. Ομοίως, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ η σειρά $\sum_{m=1}^{+\infty}x_{m,n}$ συγκλίνει και το άθροισμα

$$t_n=\sum_{m=1}^{+\infty}x_{m,n}$$

είναι αριθμός.
Τώρα, για κάθε $m\in\mathbb{N}$ είναι

$$|s_m|=\Big|\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\Big|\le\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|,$$

οπότε

$$\sum_{m=1}^{+\infty}|s_m|\le\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\Big)<+\infty.$$

Άρα η $\sum_{m=1}^{+\infty}s_m$ συγκλίνει και το

$$s=\sum_{m=1}^{+\infty}s_m=\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\Big)$$

είναι αριθμός.
Ομοίως, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ η $\sum_{n=1}^{+\infty}t_n$ συγκλίνει και το

$$t=\sum_{n=1}^{+\infty}t_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}x_{m,n}\Big)$$

είναι αριθμός.
Κατόπιν, θα αποδείξουμε ότι $s=t$.
Ορίζουμε, για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$

$$S_m=\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|,\qquad T_n=\sum_{m=1}^{+\infty}|x_{m,n}|$$

και

$$U=\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\Big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\Big).$$

Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή οι $\sum_{m=1}^{+\infty}S_m$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}T_n$ συγκλίνουν, υπάρχουν $m_0,n_0\in\mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\Big)=\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}S_m<\tfrac{\varepsilon}{4}\,,$$

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\Big)=\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}T_n<\tfrac{\varepsilon}{4}\,.$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
s-\sum_{m=1}^{m_0}\Big(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\Big)&=\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\Big)-\sum_{m=1}^{m_0}\Big(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\Big)\\
&=\sum_{m=1}^{m_0}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\Big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\Big)\\
&\quad-\sum_{m=1}^{m_0}\Big(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\Big)\\
&=\sum_{m=1}^{m_0}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}-\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\Big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\Big)\\
&=\sum_{m=1}^{m_0}\Big(\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}x_{m,n}\Big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\Big)\\
&=\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{m_0}x_{m,n}\Big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\Big),
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\left|s-\sum_{m=1}^{m_0}\left(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\right)\right| &\leq \left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{m_0}x_{m,n}\right)\right| + \left|\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\right)\right| \\ &\leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\left|\sum_{m=1}^{m_0}x_{m,n}\right| + \sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\right| \\ &\leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{m_0}|x_{m,n}| + \sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}| \\ &\leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}|x_{m,n}| + \sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{4}+\tfrac{\varepsilon}{4}=\tfrac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχτεί και η ανάλογη σχέση

$$\left|t-\sum_{n=1}^{n_0}\left(\sum_{m=1}^{m_0}x_{m,n}\right)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι είναι

$$\sum_{m=1}^{m_0}\left(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\right) = \sum_{n=1}^{n_0}\left(\sum_{m=1}^{m_0}x_{m,n}\right),$$

οπότε

$$|s-t| \leq \left|s-\sum_{m=1}^{m_0}\left(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\right)\right| + \left|t-\sum_{n=1}^{n_0}\left(\sum_{m=1}^{m_0}x_{m,n}\right)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Αποδείξαμε ότι είναι $|s-t|<\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon>0$, οπότε $s=t$.
Τώρα, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 8.2, δημιουργούμε μια *νέα* διπλή σειρά, ορίζοντας

$$y_{m,n} = \begin{cases} x_{m,n-m+1}\,, & \text{αν } m\leq n \\ 0, & \text{αν } m>n \end{cases}$$

Η *νέα* διπλή σειρά συγκλίνει απολύτως, διότι

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|y_{m,n}|\right) = \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\right) < +\infty.$$

Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το μέχρι τώρα αποτέλεσμα στη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty}y_{m,n}$. Δηλαδή:

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}y_{m,n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}y_{m,n}\right).$$

Όμως,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}y_{m,n}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\right)$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}y_{m,n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{l=1}^{k}x_{k-l+1,l}\right).$$

Άρα $\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{l=1}^{k}x_{k-l+1,l}\right)$. □

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα διαδοχικά αθροίσματα της διπλής σειράς $\sum_{m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m+n)!}$.

2. Αποδείξτε ότι η $\sum_{m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{m^pn^q}$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $p,q>1$.

3. Αποδείξτε ότι η $\sum_{m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m+n)^p}$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $p>2$.

4. Εξετάστε ως προς και τους τρεις τρόπους διαδοχικής άθροισης τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty}x_{m,n}$, όπου $x_{m,n}=\frac{1}{m+1}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n-\frac{1}{m+2}\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^n$ για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$.

5. Γράψτε την $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}$ ως διπλή σειρά και αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{1-x^{2k-1}}$ για κάθε $x\in(-1,1)$.

8.5.2 Γινόμενο Cauchy σειρών.

Ορισμός. Έστω οι σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Σχηματίζουμε τους όρους μιας νέας σειράς $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ ως εξής:

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$$

$$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k = \textstyle\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Η σειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \Big)$$

ονομάζεται **γινόμενο Cauchy** των σειρών $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Η ιδέα για αυτού του είδους πολλαπλασιασμό προέρχεται από τις *δυναμοσειρές*, δηλαδή σειρές της μορφής $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$. Αυτές τις σειρές θα τις μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 10. Αν πολλαπλασιάσουμε τις σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ όπως πολλαπλασιάζουμε δυο πολυώνυμα, δηλαδή ομαδοποιώντας ίδιες δυνάμεις του x, βλέπουμε ότι σχηματίζεται η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, της οποίας οι συντελεστές c_n δίνονται από τους παραπάνω τύπους.

Θεώρημα 8.4. *Αν οι σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνουν απολύτως, τότε το γινόμενο Cauchy $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ των δυο σειρών συγκλίνει απολύτως και*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=0}^{+\infty} x_{m,n}$, ορίζοντας

$$x_{m,n} = a_m b_n$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 0$.
Η διπλή σειρά συγκλίνει απολύτως διότι

$$\textstyle\sum_{m=0}^{+\infty} \big(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_{m,n}| \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \big(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \ \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < +\infty.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 8.3 και βρίσκουμε

$$\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} x_{k-l,l} \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} \big(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n} \big).$$

Συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \,.$$

Τέλος, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 8.2 στη σειρά $\sum_{m,n=0}^{+\infty} |x_{m,n}|$ για την τελευταία ισότητα παρακάτω, βρίσκουμε:

$$\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} \big| \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \big| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} |a_{k-l}||b_l| \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \ \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < +\infty,$$

οπότε η $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ συγκλίνει απολύτως. □

Δείτε την άσκηση 2 για έναν διαφορετικό τρόπο απόδειξης, χωρίς χρήση διπλών σειρών, του τύπου $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ και, μάλιστα, με ασθενέστερες υποθέσεις: μόνο η μια από τις δυο σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ χρειάζεται να συγκλίνει απολύτως ενώ η άλλη πρέπει, απλώς, να συγκλίνει. Φυσικά, αν μια από τις δυο σειρές δε συγκλίνει απολύτως, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε, εν γένει, ότι το γινόμενο Cauchy συγκλίνει απολύτως.

Παραδείγματα. (1) Γινόμενο Cauchy της σειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ με τον εαυτό της.
Είναι $1 \cdot 1 = 1$ και

$$a^k 1 + a^{k-1} a + \cdots + a a^{k-1} + 1 a^k = (k+1) a^k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα το γινόμενο Cauchy της σειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ με τον εαυτό της είναι η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a^k$. Αν $|a| < 1$, η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, και η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a^k$ συγκλίνει απολύτως και

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a^k = \sum_{m=0}^{+\infty} a^m \ \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{(1-a)^2} \qquad (|a| < 1).$$

(2) Γνωρίζουμε ότι οι σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a^m}{m!}$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$ συγκλίνουν απολύτως για κάθε a, b.
Είναι $1 \cdot 1 = 1$ και, βάσει του δυωνυμικού τύπου του Newton, είναι

$$\begin{aligned} \tfrac{a^k}{k!} 1 + \tfrac{a^{k-1}}{(k-1)!} \tfrac{b^1}{1!} + \cdots + \tfrac{a^1}{1!} \tfrac{b^{k-1}}{(k-1)!} + 1 \tfrac{b^k}{k!} = \tfrac{1}{k!} \big(\tbinom{k}{k} a^k 1 + \tbinom{k}{k-1} a^{k-1} b^1 + \cdots \\ \cdots + \tbinom{k}{1} a^1 b^{k-1} + \tbinom{k}{0} 1 b^k \big) = \tfrac{(a+b)^k}{k!} \end{aligned}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα το γινόμενο Cauchy των σειρών $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a^m}{m!}$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$ είναι η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{k!}$ και, επομένως,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a^m}{m!} \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} .$$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} a^k = \frac{1}{(1-a)^3}$ για κάθε $a \in (-1, 1)$.

2. (i) Αποδείξτε το **Θεώρημα του Mertens**: *Αν η μια από τις σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει απολύτως και η άλλη συγκλίνει, τότε το γινόμενο Cauchy $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ των δυο σειρών συγκλίνει και $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.*
Υπόδειξη: Έστω $T = \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < +\infty$. Θεωρήστε $s_n = a_0 + \cdots + a_n$, $t_n = b_0 + \cdots + b_n$ και $u_n = c_0 + \cdots + c_n$. Επίσης, $s = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m$, $t = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ και $u = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$. Τότε $u_n = b_0 s_n + b_1 s_{n-1} + \cdots + b_{n-1} s_1 + b_n s_0$, οπότε $u_n - st = b_0 (s_n - s) + b_1 (s_{n-1} - s) + \cdots + b_{n-1} (s_1 - s) + b_n (s_0 - s) + (t_n - t) s$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{T}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Επίσης, υπάρχει M ώστε $|s_n - s| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $|u_n - st| \leq |b_0||s_n - s| + |b_1||s_{n-1} - s| + \cdots + |b_{n-1}||s_1 - s| + |b_n||s_0 - s| + |t_n - t||s|$, οπότε $|u_n - st| \leq (|b_0| + \cdots + |b_{n-n_0-1}|) \frac{\varepsilon}{T} + (|b_{n-n_0}| + \cdots + |b_n|) M + |t_n - t||s| \leq \varepsilon + (|b_{n-n_0}| + \cdots + |b_n|) M + |t_n - t||s|$. Βάσει της Πρότασης 2.32, είναι $\overline{\lim} |u_n - st| \leq \varepsilon$, οπότε $\overline{\lim} |u_n - st| = 0$. Άρα $u_n \to st$ και, επομένως, $u = st$.
(ii) Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το γινόμενο Cauchy της σειράς αυτής με τον εαυτό της αποκλίνει.
Υπόδειξη: Το γινόμενο Cauchy είναι η $\sum_{k=2}^{+\infty} c_k$, όπου $c_k = (-1)^k \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{l}\sqrt{k-l}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $2\sqrt{l}\sqrt{k-l} \leq l + (k-l) = k$ για να αποδείξετε ότι $|c_k| \geq \frac{2(k-1)}{k}$ και, επομένως, ότι δεν ισχύει $c_k \to 0$.

3. Για κάθε x ορίζουμε $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Στην ενότητα αυτή αποδείξαμε ότι $f(a+b) = f(a)f(b)$ για κάθε a, b. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = e$.
(i) Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον 0.
Υπόδειξη: $|f(x) - f(0)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{2^{n-1}} \leq \frac{2|x|}{2-|x|}$ για κάθε x, $|x| < 2$.
(ii) Βάσει της άσκησης 6 της ενότητας 4.3, αποδείξτε ότι $f(x) = e^x$ για κάθε x, δηλαδή ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ για κάθε x. Αυτό θα το ξαναποδείξουμε με δυο τρόπους στο Κεφάλαιο 10.

4. Γνωρίζουμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το γινόμενο Cauchy της σειράς αυτής με τον εαυτό της είναι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} z_k$, όπου $z_k = \frac{2}{k+1}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k})$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και ότι αυτή η σειρά συγκλίνει.

5. (i) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)} = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \frac{(-1)^n}{x+n}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $x \neq 0, -1, \ldots, -k$.
(ii) Αποδείξτε ότι $1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ για κάθε $x \neq 0, -1, -2, \ldots$.

8.5.3 Αναδιατάξεις σειρών.

Ορισμός. Έστω ακολουθία (x_n). Θεωρούμε μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί $\sigma(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ περιλαμβάνουν *κάθε φυσικό αριθμό ακριβώς μια φορά* ή, με άλλα λόγια, αποτελούν μια **αναδιάταξη των φυσικών αριθμών**. Αν συμβολίσουμε

$$x'_n = x_{\sigma(n)} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

τότε η ακολουθία (x'_n) ονομάζεται **αναδιάταξη** της (x_n). Επίσης, λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n$ είναι μια **αναδιάταξη** της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ και $s'_n = \sum_{k=1}^{n} x'_k$, οι αριθμοί s_n , s'_n δεν είναι ίδιοι. Το άθροισμα s_n περιέχει τους $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ενώ το s'_n τους $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$. Επομένως, δεν είναι καθόλου βέβαιο - και, εν γένει, δεν ισχύει - ότι $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s'_n$ ή, ισοδύναμα, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x'_n$. Μπορεί η μια σειρά να συγκλίνει ενώ η άλλη να αποκλίνει ή να συγκλίνουν και οι δυο αλλά να έχουν διαφορετικά αθροίσματα.

Παράδειγμα. Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ συγκλίνει. Θεωρούμε τη σειρά $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$, η οποία είναι αναδιάταξη της προηγούμενης. Θα αποδείξουμε ότι η δεύτερη σειρά συγκλίνει, επίσης, αλλά ότι έχει διαφορετικό άθροισμα από την πρώτη.
Η δεύτερη σειρά περιέχει ομάδες τριών όρων. Η n-οστή ομάδα είναι η $\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}$. Αν ονομάσουμε s_n $(n \in \mathbb{N})$ τα μερικά αθροίσματα της δεύτερης σειράς, τότε

$$s_{3n} = \left(1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{4n-3} + \tfrac{1}{4n-1} - \tfrac{1}{2n}\right).$$

Τότε $s_{3(n+1)} - s_{3n} = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2} > 0$ και, επομένως, η ακολουθία (s_{3n}) είναι αύξουσα. Επίσης,

$$s_{3n} = 1 + \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7}\right) - \cdots - \left(\tfrac{1}{2n-2} - \tfrac{1}{4n-3} - \tfrac{1}{4n-1}\right) - \tfrac{1}{2n} < 1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3},$$

επειδή κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η ακολουθία (s_{3n}) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον s. Τώρα, $s_{3n+1} = s_{3n} + \frac{1}{4n+1} \to s + 0 = s$ και $s_{3n+2} = s_{3n} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} \to s + 0 + 0 = s$. Άρα $s_n \to s$ και, επομένως,

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots = s.$$

Παρατηρούμε ότι $s_{3n} \geq \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{6} + \frac{13}{140}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, οπότε $s \geq \frac{5}{6} + \frac{13}{140}$.
Έστω, τώρα,

$$t = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots .$$

Αν $t_n \, (n \in \mathbb{N})$ είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής, τότε

$$t_{2n-1} = 1 - \tfrac{1}{2} + \cdots - \tfrac{1}{2n-2} + \tfrac{1}{2n-1} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) - \cdots - \left(\tfrac{1}{2n-2} - \tfrac{1}{2n-1}\right) \leq 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $t \leq \frac{5}{6}$.
Άρα $t < s$.

Θεώρημα 8.5. *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως. Τότε οποιαδήποτε αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n$ της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, επίσης, απολύτως και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n .$$

Πρώτη απόδειξη. Ορίζουμε

$$x_{m,n} = \begin{cases} x_n = x_{\sigma(m)} = x'_m \,, & \text{αν } n = \sigma(m) \\ 0, & \text{αν } n \neq \sigma(m) \end{cases}$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$.
Η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ συγκλίνει απολύτως, διότι

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} |x_{m,n}| \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty.$$

Από το Θεώρημα 8.3 συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \right)$$

και, επομένως,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} x'_m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n .$$

Δεύτερη απόδειξη: Έστω $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση η οποία ορίζει την αναδιάταξη. Δηλαδή,

$$x'_n = x_{\sigma(n)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Έστω

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = S,$$

όπου $0 \leq S < +\infty$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και έστω

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s.$$

Αν

$$s_n = \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k \,, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

τότε

$$s_n \to s, \qquad S_n \to S.$$

Αν

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} |x'_k| \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

τότε

$$S'_n \leq S,$$

αφού οι όροι $|x'_1|, \ldots, |x'_n|$, δηλαδή οι όροι $|x_{\sigma(1)}|, \ldots, |x_{\sigma(n)}|$, είναι κάποιοι από τους $|x_1|, |x_2|, \ldots$ (χωρίς επανάληψη). Άρα η ακολουθία (S'_n) είναι άνω φραγμένη, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x'_n|$ συγκλίνει. Θεωρούμε τους

$$s'_n = x'_1 + \cdots + x'_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Θα αποδείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n = s$, δηλαδή ότι $s'_n \to s$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει και επειδή $s_n \to s$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |x_n| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \qquad |s_n - s| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.
Επιλέγουμε $n_1 \in \mathbb{N}$ μεγάλο ώστε οι $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n_1)$ να περιλαμβάνουν τους $1, 2, \ldots, n_0$. Είναι προφανές ότι $n_1 \geq n_0$. Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1 (\geq n_0)$, τότε στο $s'_n - s_n$ δεν περιλαμβάνονται οι $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$, αφού καθένας από αυτούς περιέχεται ακριβώς μια φορά στο s_n και στο s'_n. Επομένως, αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, είναι

$$|s'_n - s_n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |x_n| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ ισχύει

$$|s'_n - s| \leq |s'_n - s_n| + |s_n - s| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα $s'_n \to s$. □

Η ύπαρξη του προηγούμενου παραδείγματος έχει ως βαθύτερη αιτία το ότι η αρχική σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως. Πράγματι, υπάρχει το εξής γενικότερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα του Riemann. *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Τότε για κάθε $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leq b$ υπάρχει αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n$ ώστε, αν $s'_n = x'_1 + \cdots + x'_n$ $(n \in \mathbb{N})$, να είναι*

$$\underline{\lim}\, s'_n = a, \qquad \overline{\lim}\, s'_n = b.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αλλά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = +\infty.$$

Έστω

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Έστω, επίσης, τα μερικά αθροίσματα

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n, \quad S_n = |x_1| + \cdots + |x_n| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Από τους x_n $(n \in \mathbb{N})$ ορίζουμε y_1 να είναι ο πρώτος ο οποίος είναι ≥ 0, y_2 ο δεύτερος ο οποίος είναι ≥ 0, y_3 ο τρίτος ο οποίος είναι ≥ 0 και ούτω καθ' εξής. Ομοίως, από τους x_n $(n \in \mathbb{N})$ ορίζουμε z_1 να είναι ο πρώτος ο οποίος είναι < 0, z_2 ο δεύτερος ο οποίος είναι < 0, z_3 ο τρίτος ο οποίος είναι < 0 και ούτω καθ' εξής.

Θα αποδείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty$.
Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα

$$t_n = y_1 + \cdots + y_n\,, \quad u_n = z_1 + \cdots + z_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Παρατηρούμε ότι ο

$$\tfrac{s_n + S_n}{2} = \tfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k + |x_k|)}{2}$$

είναι ίσος με το άθροισμα των μη-αρνητικών από τους $x_1, \ldots, x_n$ και, επομένως,

$$\tfrac{s_n + S_n}{2} \le t_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή

$$\tfrac{s_n + S_n}{2} \to \tfrac{s + \infty}{2} = +\infty,$$

συνεπάγεται $t_n \to +\infty$. Άρα

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty.$$

Ομοίως, ο

$$\tfrac{s_n - S_n}{2} = \tfrac{\sum_{k=1}(x_k - |x_k|)}{2}$$

είναι ίσος με το άθροισμα των αρνητικών από τους $x_1, \ldots, x_n$ και, επομένως,

$$\tfrac{s_n - S_n}{2} \ge u_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή

$$\tfrac{s_n - S_n}{2} \to \tfrac{s - \infty}{2} = -\infty,$$

συνεπάγεται $u_n \to -\infty$. Άρα

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty.$$

Θεωρούμε δυο συγκεκριμένες ακολουθίες (a_n), (b_n) ώστε

$$a_n \to a, \qquad b_n \to b$$

ως εξής. Αν $a \in \mathbb{R}$ θεωρούμε $a_n = a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, αν $a = -\infty$, θεωρούμε $a_n = -n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως, αν $b \in \mathbb{R}$ θεωρούμε $b_n = b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, αν $b = +\infty$, θεωρούμε $b_n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Βήμα 1. Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $y_1 + \cdots + y_{n_1} > b_1$ και έστω ότι ο n_1 είναι ο ελάχιστος φυσικός με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $y_1 + \cdots + y_{n_1 - 1} \le b_1$. Επομένως,

$$b_1 < y_1 + \cdots + y_{n_1} \le b_1 + y_{n_1}\,.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty$, υπάρχει $n_1{}^* \in \mathbb{N}$ ώστε $z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} < a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1})$ και έστω ότι ο $n_1{}^*$ είναι ο ελάχιστος φυσικός με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $z_1 + \cdots + z_{n_1{}^* - 1} \ge a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1})$. Επομένως,

$$a_1 + z_{n_1{}^*} \le y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} < a_1\,.$$

Βήμα 2. Επειδή $\sum_{n=n_1+1}^{+\infty} y_n = +\infty$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ ώστε $y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} > b_2 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*})$ και έστω ότι ο n_2 είναι ο ελάχιστος φυσικός με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2 - 1} \le b_2 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*})$. Επομένως,

$$b_2 < y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} \le b_2 + y_{n_2}\,.$$

Επειδή $\sum_{n=n_1{}^*+1}^{+\infty} z_n = -\infty$, υπάρχει $n_2{}^* \in \mathbb{N}$, $n_2{}^* > n_1{}^*$ ώστε $z_{n_1{}^*+1}+\cdots+z_{n_2{}^*} < a_1-(y_1+\cdots+y_{n_1}+z_1+\cdots+z_{n_1{}^*}+y_{n_1+1}+\cdots+y_{n_2})$ και έστω ότι ο $n_1{}^*$ είναι ο ελάχιστος φυσικός με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $z_{n_1{}^*+1}+\cdots+z_{n_2{}^*-1} \geq a_1-(y_1+\cdots+y_{n_1}+z_1+\cdots+z_{n_1{}^*}+y_{n_1+1}+\cdots+y_{n_2})$. Επομένως,

$$a_2 + z_{n_2{}^*} \leq y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} + z_{n_1{}^*+1} + \cdots + z_{n_2{}^*} < a_2 .$$

Συνεχίζουμε επ' άπειρον, επιλέγοντας διαδοχικά τους $y_1, \ldots, y_{n_1}$, $z_1, \ldots, z_{n_1{}^*}$, $y_{n_1+1}, \ldots, y_{n_2}$, $z_{n_1{}^*+1}, \ldots, z_{n_2{}^*}, \ldots$ οι οποίοι, στη σειρά αυτή που εμφανίζονται, δεν είναι τίποτε άλλο από μια αναδιάταξη των x_n $(n \in \mathbb{N})$. Θεωρούμε, τώρα, τα μερικά αθροίσματα s'_n $(n \in \mathbb{N})$ της συγκεκριμένης αναδιάταξης. Παρατηρούμε ότι $b_1 < s'_{n_1} \leq b_1 + y_{n_1}$, $a_1 + z_{n_1{}^*} \leq s'_{n_1+n_1{}^*} < a_1$, $b_2 < s'_{n_1+n_1{}^*+n_2} \leq b_2 + y_{n_2}$, $a_2 + z_{n_2{}^*} \leq s'_{n_1+n_1{}^*+n_2+n_2{}^*} < a_2$ και, γενικότερα,

$$b_k < s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k} \leq b_k + y_{n_k}\,, \quad a_k + z_{n_k{}^*} \leq s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} < a_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, είναι $x_n \to 0$ και, επειδή, οι (y_n) και (z_n) είναι υποακολουθίες της (x_n), συνεπάγεται $y_{n_k} \to 0$ και $z_{n_k{}^*} \to 0$. Άρα $s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} \to a$ και $s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k} \to b$ και, επομένως,

$$\underline{\lim}\, s'_n \leq a, \qquad b \leq \overline{\lim}\, s'_n .$$

Είναι σαφές ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{N}$ ώστε είτε

$$n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k \leq n < n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k + n_k{}^*$$

είτε

$$n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k + n_k{}^* \leq n < n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k + n_k{}^* + n_{k+1} .$$

Στην πρώτη περίπτωση, είναι

$$s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} \leq s'_n \leq s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k}$$

και στη δεύτερη περίπτωση είναι

$$s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} \leq s'_n \leq s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*+n_{k+1}} .$$

οπότε, αντιστοίχως, είναι είτε

$$a_k + z_{n_k{}^*} \leq s'_n \leq b_k + y_{n_k}$$

είτε

$$a_k + z_{n_k{}^*} \leq s'_n \leq b_{k+1} + y_{n_{k+1}} .$$

Από τις σχέσεις αυτές συνεπάγεται

$$a = \lim_{k\to+\infty}(a_k + z_{n_k{}^*}) \leq \underline{\lim}\, s'_n \qquad \overline{\lim}\, s'_n \leq \lim_{k\to+\infty}(b_k + y_{n_k}) = b.$$

Άρα $\underline{\lim}\, s'_n = a$ και $\overline{\lim}\, s'_n = b$. □

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots$.

2. Έστω η συγκλίνουσα σειρά $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$. Θεωρούμε την αναδιάταξη $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} - \frac{1}{10} + \cdots$. Αποδείξτε ότι η δεύτερη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

3. **Ανάλυση σειρών σε υποσειρές**. Έστω συναρτήσεις $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(k \in \mathbb{N})$ ώστε κάθε f_k $(k \in \mathbb{N})$ είναι ένα-προς-ένα και τα σύνολα τιμών $f_k(\mathbb{N})$ $(k \in \mathbb{N})$ είναι ανά δύο ξένα και η ένωσή τους ισούται με το $\mathbb{N}$. Τότε για κάθε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία συγκλίνει απολύτως αποδείξτε ότι:
(i) για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η $\sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)}$ συγκλίνει απολύτως.
(ii) αν ορίσουμε $s_k = \sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)}$ $(k \in \mathbb{N})$, τότε η $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k$ συγκλίνει απολύτως.
(iii) αν $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k = s$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)} \big) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \,.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη διπλή σειρά $\sum_{k,m=1}^{+\infty} x_{k,m}$ ορίζοντας $x_{k,m} = x_{f_k(m)}$ για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι η άθροιση της διπλής σειράς πρώτα κατά διαγωνίους προκύπτει με κατάλληλη εισαγωγή παρενθέσεων (άσκηση 15 της ενότητας 8.4) σε κατάλληλη αναδιάταξη της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Κεφάλαιο 9

Ακολουθίες συναρτήσεων.

9.1 Κατά σημείο σύγκλιση.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και συναρτήσεις $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Οι f_n $(n \in \mathbb{N})$ σχηματίζουν μια **ακολουθία συναρτήσεων** (f_n).

Ορισμός. Λέμε ότι **η** (f_n) **συγκλίνει στην** f **κατά σημείο στο** A και συμβολίζουμε

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f \quad \text{στο } A \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} f \quad \text{στο } A$$

αν για κάθε $x \in A$ η ακολουθία αριθμών $(f_n(x))$ συγκλίνει στον αριθμό $f(x)$, δηλαδή

$$f_n(x) \to f(x)$$

για κθεά $x \in A$. Με άλλα λόγια, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A αν για κάθε $x \in A$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$.

Τα επόμενα παραδείγματα πρέπει να μελετηθούν προσεκτικά, διότι θα γίνεται συχνή αναφορά σε αυτά.

Παραδείγματα. (1) Έστω $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \to f(x) + 0 = f(x)$ για κάθε $x \in A$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A.
(2) Έστω $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$. Τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $x > 0$, τότε $f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,\infty)$, όπου 0 είναι η σταθερή συνάρτηση 0.
(3) Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+nx}, & \text{αν } \frac{1}{n} < x \le 1 \\ \frac{nx}{2}, & \text{αν } 0 \le x \le \frac{1}{n} \end{cases}$ Κατ' αρχάς, $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $0 < x \le 1$, τότε ισχύει $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge [\frac{1}{x}] + 1 > \frac{1}{x}$ και, επομένως, $f_n(x) \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,1]$.
(4) Έστω $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπο $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$. Για κάθε $x \in (0,1]$ είναι $f_n(x) \to 0$. Επομένως, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο (0,1].
(5) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$.
(6) Έστω $f_n : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$. Είναι $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x > 1$.

Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(1, +\infty)$.
(7) Έστω $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπο $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$. Τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \geq 0$ και, επομένως, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, +\infty)$.
(8) Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπο $f_n(x) = x^n$. Τότε $f_n(1) = 1 \to 1$ και, αν $0 \leq x < 1$, τότε $f_n(x) = x^n \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[0, 1]$, όπου $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

(9) Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)x-1}, & \text{αν } \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ n^2 x, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$ Τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Επίσης, αν $0 < x \leq 1$, τότε ισχύει $f_n(x) = \frac{1}{(n+1)x-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq [\frac{1}{x}] + 1 > \frac{1}{x}$, οπότε είναι $f_n(x) \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, 1]$.
(10) Έστω $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπο $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $f_n(x) \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, 2\pi]$.
(11) Έστω $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπο $f_n(x) = \cos(nx)$. Είναι $f_n(\pi) = (-1)^n$, οπότε η ακολουθία αριθμών $(f_n(\pi))$ δε συγκλίνει. Άρα η (f_n) δε συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση κατά σημείο στο $[0, 2\pi]$.

Πρόταση 9.1. *Έστω αριθμοί λ, μ και $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ και $g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} g$ στο A. Τότε:*
(1) $\lambda f_n + \mu g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \lambda f + \mu g$ στο A.
(2) $f_n g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} fg$ στο A.
(3) Αν $g(x), g_n(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\frac{f_n}{g_n} \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \frac{f}{g}$ στο A.

Απόδειξη. (1) Για κάθε $x \in A$ είναι $f_n(x) \to f(x)$ και $g_n(x) \to g(x)$, οπότε

$$\lambda f_n(x) + \mu g_n(x) \to \lambda f(x) + \mu g(x).$$

Άρα $\lambda f_n + \mu g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \lambda f + \mu g$ στο A.
(2), (3) Ομοίως. □

Οι επόμενες τρεις ερωτήσεις είναι πολύ σημαντικές για την Ανάλυση.

Ερώτηση 1: Έστω $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A και έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η f_n είναι συνεχής στον $\xi \in A$. Είναι η f συνεχής στον ξ;
Απάντηση: Όχι πάντοτε.
Στο παράδειγμα (8) όλες οι f_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι συνεχείς στον 1 αλλά η f δεν είναι συνεχής στον 1.

Ερώτηση 2: Έστω $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a, b]$ και έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Είναι η f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και, αν ναι, ισχύει $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$;
Απάντηση: Όχι πάντοτε.
Στο παράδειγμα (9), είναι $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} + \frac{2 \log n}{n+1} \to \frac{1}{2}$. Όμως, $\int_0^1 f = \int_0^1 0 = 0$.
Επίσης, έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ n^2 x, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$ Κατ' αρχάς, $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $0 < x \leq 1$, τότε ισχύει $f_n(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq [\frac{1}{x}] + 1 > \frac{1}{x}$ και, επομένως, $f_n(x) \to \frac{1}{x}$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[0, 1]$, όπου $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$. Κάθε f_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι συνεχής και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο

$[0,1]$ αλλά η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ αφού δεν είναι καν φραγμένη στο $[0,1]$.

Ερώτηση 3: Έστω $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A και έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η f_n είναι παραγωγίσιμη στο A. Είναι η f παραγωγίσιμη στο A και, αν ναι, ισχύει ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f'$ στο A;

Απάντηση: Όχι πάντοτε.

Στο παράδειγμα (2), $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$. Η σταθερή συνάρτηση 0 είναι παραγωγίσιμη. Αλλά ${f_n}'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, οπότε ${f_n}'(0) = 1 \to 1$ και, αν $x > 0$, τότε $f_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2} \to 0$. Δηλαδή, ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} g$ στο $[0,+\infty)$, όπου $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ οπότε δεν ισχύει ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0' = 0$ στο $[0,+\infty)$.

Στο παράδειγμα (8), κάθε f_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι παραγωγίσιμη στον 1 ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στον 1.

Στο παράδειγμα (10), είναι ${f_n}'(x) = \cos(nx)$ για κάθε $x \in [0,2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$ και, όπως φαίνεται στο παράδειγμα (11), η (f_n') δε συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση κατά σημείο στο $[0,2\pi]$.

Στην επόμενη ενότητα θα ορίσουμε ένα δεύτερο είδος σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων, την *ομοιόμορφη σύγκλιση*. Τότε τα δυο πρώτα ερωτήματα έχουν καταφατική απάντηση ενώ μια παραλλαγή του τρίτου ερωτήματος έχει, επίσης, καταφατική απάντηση.

Ασκήσεις.

1. Έστω $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $g_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^2x^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι οι (f_n), (g_n) συγκλίνουν σε κάποιες f, g κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Βρείτε τις f, g.

2. Έστω $f_n(x) = \frac{x}{n}[\frac{n}{x}]$ για κάθε $x \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Βρείτε την f.

3. Έστω $f_n(x) = \frac{n}{x}[\frac{x}{n}]$ για κάθε $x \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$.
   (i) Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(0,+\infty)$.
   (ii) Αποδείξτε ότι, αν το $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ περιέχει τουλάχιστον έναν αρνητικό αριθμό, η (f_n) δε συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση κατά σημείο στο A.

9.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση.

Ορισμός. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε την **ομοιόμορφη απόσταση των f, g στο** A, και τη συμβολίζουμε $\|f-g\|_A$, με τον τύπο:

$$\|f-g\|_A = \sup\{|f(x)-g(x)| \,|\, x \in A\}.$$

Το σύνολο $\{|f(x)-g(x)| \,|\, x \in A\}$ είναι, προφανώς, μη-κενό. Αν το σύνολο αυτό είναι άνω φραγμένο, τότε η $\|f-g\|_A$ είναι αριθμός, ενώ, αν δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $\|f-g\|_A = +\infty$. Επίσης, είναι $\|f-g\|_A \geq 0$ αφού ισχύει $|f(x)-g(x)| \geq 0$ για κάθε $x \in A$. Άρα

$$0 \leq \|f-g\|_A \leq +\infty.$$

Παραδείγματα. (1) Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. Τότε είναι $|f(x) - g(x)| = |x - x^2| = x - x^2$ και βρίσκουμε εύκολα ότι η μέγιστη τιμή της $x - x^2$ στο $[0,1]$ είναι $\frac{1}{4}$. Άρα

$$\|f-g\|_{[0,1]} = \sup\{x - x^2 \,|\, x \in [0,1]\} = \tfrac{1}{4}.$$

(2) Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, $g(x)=0$. Τότε $|f(x)-g(x)|=\frac{x^2}{1+x^2}$ για κάθε x. Ισχύει

$$\frac{x^2}{1+x^2}<1$$

για κάθε x, οπότε ο 1 είναι άνω φράγμα του $\{\frac{x^2}{1+x^2}\,|\,x\in\mathbb{R}\}$. Επειδή

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1,$$

συνεπάγεται ότι, για κάθε $u<1$, ισχύει $\frac{x^2}{1+x^2}>u$ κοντά στα $\pm\infty$. Άρα κανένας $u<1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{\frac{x^2}{1+x^2}\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ οπότε

$$\|f-g\|_{\mathbb{R}}=\sup\{\tfrac{x^2}{1+x^2}\,|\,x\in\mathbb{R}\}=1.$$

(3) Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=x$, $g(x)=1$. Τότε $|f(x)-g(x)|=|x-1|$ για κάθε x. Επειδή

$$\lim_{x\to\pm\infty}|x-1|=+\infty,$$

συνεπάγεται ότι, για κάθε u, ισχύει $|x-1|>u$ κοντά στα $\pm\infty$. Άρα κανένας u δεν είναι άνω φράγμα του $\{|x-1|\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ και, επομένως,

$$\|f-g\|_{\mathbb{R}}=\sup\{|x-1|\,|\,x\in\mathbb{R}\}=+\infty.$$

Σχόλια. Πριν προχωρήσουμε θα κάνουμε δυο γενικές παρατηρήσεις που θα φανούν χρήσιμες παρακάτω.

1. Έστω $x_n\to x$. Τότε, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n-x|<\varepsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n-x|\leq\varepsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$. Αντιστρόφως, έστω ότι για *κάθε* $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n-x|\leq\varepsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n-x|\leq\frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$. Άρα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n-x|<\varepsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$ και, επομένως, $x_n\to x$. Συμπεραίνουμε ότι ο ορισμός του $x_n\to x$ μπορεί να διατυπωθεί, ισοδύναμα, αντικαθιστώντας την ανισότητα $|x_n-x|<\varepsilon$ με την $|x_n-x|\leq\varepsilon$. Δείτε την άσκηση 8 της ενότητας 2.2.

2. Έστω $\sup B\leq u$. Τότε ο u είναι άνω φράγμα του συνόλου B, οπότε ισχύει $b\leq u$ για κάθε $b\in B$. Αντιστρόφως, έστω $b\leq u$ για κάθε $b\in B$. Τότε ο u είναι άνω φράγμα του B και, επειδή το $\sup B$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του B, συνεπάγεται $\sup B\leq u$. Συμπεραίνουμε ότι $\sup B\leq u$ αν και μόνο αν ισχύει $b\leq u$ για κάθε $b\in B$. Δείτε την άσκηση 11 της ενότητας 1.5.

Ειδική περίπτωση ομοιόμορφης απόστασης είναι η ομοιόμορφη απόσταση μιας $f:A\to\mathbb{R}$ από τη μηδενική συνάρτηση $0:A\to\mathbb{R}$, δηλαδή η

$$\|f\|_A=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in A\}.$$

Πρόταση 9.2. *Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε:*
(1) Είναι $\|f\|_A=0$ αν και μόνο αν η f είναι η μηδενική συνάρτηση στο A.
(2) $\|f+g\|_A\leq\|f\|_A+\|g\|_A$.
(3) $\|\lambda f\|_A=|\lambda|\|f\|_A$.
(4) $\|fg\|_A\leq\|f\|_A\|g\|_A$.

Απόδειξη. (1) Αν $f=0$ στο A, τότε $|f(x)|=0$ για κάθε $x\in A$, οπότε $\|f\|_A=0$. Αντιστρόφως, έστω $\|f\|_A=0$. Τότε είναι $|f(x)|\leq 0$, οπότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in A$.
(2) Για κάθε $x\in A$ ισχύει

$$|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|\leq\|f\|_A+\|g\|_A.$$

Άρα $\|f+g\|_A \le \|f\|_A + \|g\|_A$.
(3) Αν $\lambda = 0$, τότε, βάσει του (1), και οι δυο μεριές της $\|\lambda f\|_A = |\lambda|\|f\|_A$ είναι ίσες με 0. Έστω, λοιπόν, $\lambda \neq 0$. Για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \le |\lambda|\|f\|_A .$$

Άρα $\|\lambda f\|_A \le |\lambda|\|f\|_A$. Ομοίως, για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|f(x)| = \tfrac{1}{|\lambda|}|\lambda f(x)| \le \tfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_A .$$

Άρα $\|f\|_A \le \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_A$ και, επομένως, $|\lambda|\|f\|_A \le \|\lambda f\|_A$. Άρα $\|\lambda f\|_A = |\lambda|\|f\|_A$.
(4) Για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \le \|f\|_A\|g\|_A .$$

Άρα $\|fg\|_A \le \|f\|_A\|g\|_A$. □

Απλή συνέπεια της Πρότασης 9.2 είναι ότι ισχύει $\|f-g\|_A = 0$ αν και μόνο αν οι f, g ταυτίζονται στο A. Επίσης, ισχύει

$$\|f-g\|_A = \|(f-h)+(h-g)\|_A \le \|f-h\|_A + \|h-g\|_A$$

και

$$\|\lambda f - \lambda g\|_A = \|\lambda(f-g)\|_A = |\lambda|\|f-g\|_A$$

για κάθε $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ορισμός. Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι **η** (f_n) **συγκλίνει στην** f **ομοιόμορφα στο A** και συμβολίζουμε

$$f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f \quad \text{στο } A \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f \quad \text{στο } A$$

αν

$$\|f_n - f\|_A \to 0.$$

Με άλλα λόγια, είναι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in A\} = \|f_n - f\|_A \le \varepsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$.

Επειδή η ανισότητα $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in A\} \le \varepsilon$ ισοδυναμεί με το ότι $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, ο παραπάνω ορισμός διατυπώνεται και ως εξής: $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$.

Προσέξτε *πάρα πολύ καλά* τη διαφορά του ορισμού της ομοιόμορφης σύγκλισης από τον ορισμό της κατά σημείο σύγκλισης. (i) Το $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, *ο οποίος εξαρτάται από τον* ε, ώστε να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$. (ii) Το $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in A$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, *ο οποίος εξαρτάται από τον* ε ***και*** *από τον* x, ώστε να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$.

Στην ομοιόμορφη σύγκλιση η επιλογή του $n_0 \in \mathbb{N}$ εξαρτάται από τον $\varepsilon > 0$ αλλά είναι "ομοιόμορφη" ως προς τον $x \in A$: για τον ίδιο $\varepsilon > 0$ υπάρχει *ένας, ο ίδιος*, $n_0 \in \mathbb{N}$ για *κάθε* $x \in A$. Όμως, στην κατά σημείο σύγκλιση, για τον ίδιο $\varepsilon > 0$, μπορεί διαφορετικοί $x \in A$ να καθορίζουν διαφορετικούς $n_0 \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα. Ας δούμε πάλι το παράδειγμα (4) της προηγούμενης ενότητας, όπου $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$ για κάθε $x\in(0,1]$, $n\in\mathbb{N}$ και όπου είδαμε ότι $f_n\overset{\text{κ.σ.}}{\to}0$ στο $(0,1]$. Θα αποδείξουμε ότι *δεν* ισχύει $f_n\overset{\text{ομ}}{\to}0$ στο $(0,1]$.

Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι ισχύει $f_n\overset{\text{ομ}}{\to}0$ στο $(0,1]$. Έστω $0<\varepsilon<1$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\tfrac{1}{1+nx}=|\tfrac{1}{1+nx}-0|\leq\varepsilon$$

για κάθε $x\in(0,1]$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$. Άρα ισχύει

$$\tfrac{1}{1+n_0x}\leq\varepsilon$$

για κάθε $x\in(0,1]$ και, επομένως,

$$1=\lim_{x\to0+}\tfrac{1}{1+n_0x}\leq\varepsilon,$$

οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Θα επαναλάβουμε, υπολογίζοντας την $\|f_n-0\|_{(0,1]}=\|f_n\|_{(0,1]}$ $(n\in\mathbb{N})$. Για κάθε $x\in(0,1]$ είναι

$$|\tfrac{1}{1+nx}|=\tfrac{1}{1+nx}<1,$$

οπότε ο 1 είναι άνω φράγμα του $\{|\frac{1}{1+nx}|\,|\,x\in(0,1]\}$. Επειδή

$$\lim_{x\to0+}\tfrac{1}{1+nx}=1,$$

συνεπάγεται ότι, για κάθε $u<1$, ισχύει $\frac{1}{1+nx}>u$ κοντά στον 0. Άρα κανένας $u<1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{|\frac{1}{1+nx}|\,|\,x\in(0,1]\}$ και, επομένως,

$$\|f_n\|_{(0,1]}=\sup\{|\tfrac{1}{1+nx}|\,|\,x\in(0,1]\}=1.$$

Άρα δεν ισχύει $\|f_n\|_{(0,1]}\to0$.

Η ανισότητα $\|f-g\|_A\leq\varepsilon$ ισοδυναμεί με το ότι $|f(x)-g(x)|\leq\varepsilon$ για κάθε $x\in A$ κι αυτό με το ότι $g(x)-\varepsilon\leq f(x)\leq g(x)+\varepsilon$ για κάθε $x\in A$ κι αυτό με το ότι το γράφημα της f βρίσκεται ολόκληρο ανάμεσα στο γράφημα της $g-\varepsilon$ και στο γράφημα της $g+\varepsilon$, δηλαδή, μέσα στη ζώνη που δημιουργείται συμμετρικά γύρω από το γράφημα της g και έχει κατακόρυφο πλάτος 2ε. Άρα το $f_n\overset{\text{ομ}}{\to}f$ στο A ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\varepsilon>0$ τα γραφήματα όλων των f_n $(n\in\mathbb{N})$ από κάποιον $n\in\mathbb{N}$ και πέρα, βρίσκονται *ολόκληρα* μέσα στη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ε συμμετρικά γύρω από το γράφημα της f.

Παράδειγμα. Ξαναγυρνάμε στο παράδειγμα (4) της προηγούμενης ενότητας, όπου $f_n\overset{\text{κ.σ.}}{\to}0$ στο $(0,1]$. Αν σχεδιάσετε τα γραφήματα των f_n $(n\in\mathbb{N})$, θα δείτε ότι, για μικρούς $\varepsilon>0$, και συγκεκριμένα για $0<\varepsilon<1$, τα γραφήματα αυτά έχουν *όλα* κάποιο τμήμα τους *έξω* από τη ζώνη συμμετρικά γύρω από το γράφημα της 0 κατακόρυφου πλάτους 2ε. Άρα δεν ισχύει $f_n\overset{\text{ομ}}{\to}0$ στο $(0,1]$.

Ας επανεξετάσουμε τα έντεκα παραδείγματα της προηγούμενης ενότητας.

Παραδείγματα. (1) Εύκολα υπολογίζουμε $\|f_n-f\|_A=\frac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα $f_n\overset{\text{ομ}}{\to}f$ στο A.

(2) $\|f_n\|_{[0,+\infty)}=\frac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα $f_n\overset{\text{ομ}}{\to}0$ στο $[0,+\infty)$.

(3) $\|f_n\|_{[0,1]}=\frac{1}{2}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα δεν είναι $f_n\overset{\text{ομ}}{\to}0$ στο $[0,1]$.

(4) $\|f_n\|_{(0,1]}=1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα δεν είναι $f_n\overset{\text{ομ}}{\to}0$ στο $(0,1]$.

(5) $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = +\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα δεν είναι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$.
(6) $\|f_n\|_{(1,+\infty)} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα δεν είναι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $(1,+\infty)$.
(7) $\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$.
(8) $\|f_n - f\|_{[0,1]} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα δεν είναι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[0,1]$.
(9) $\|f_n\|_{[0,1]} = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα δεν είναι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$.
(10) $\|f_n\|_{[0,2\pi]} = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,2\pi]$.
(11) Λόγω της Πρότασης 9.3, η (f_n) δε συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 9.3. *Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, τότε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A. Δηλαδή, η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_A$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, για κάθε $x \in A$, είναι

$$|f_n(x) - f(x)| \to 0$$

και, επομένως, $f_n(x) \to f(x)$. □

Βάσει της Πρότασης 9.3, μπορούμε να βρούμε πιο εύκολα τη συνάρτηση προς την οποία συγκλίνει, αν συγκλίνει, μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ομοιόμορφα σε ένα σύνολο A. Πρώτα βρίσκουμε συνάρτηση f ώστε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A. Αυτό είναι εύκολο, διότι για κάθε $x \in A$ έχουμε να κάνουμε με την ακολουθία *αριθμών* $(f_n(x))$. Βρίσκουμε, λοιπόν, για κάθε $x \in A$ το όριο της $(f_n(x))$, αν αυτό υπάρχει και είναι αριθμός, το ονομάζουμε $f(x)$ και δημιουργούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Απομένει να εξετάσουμε αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, υπολογίζοντας την $\|f_n - f\|_A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός. Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) χαρακτηρίζεται **ομοιόμορφα φραγμένη στο** A αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $\|f_n\|_A \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 9.4. *Έστω αριθμοί λ, μ και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ και $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο A. Τότε:*
(1) Αν $B \subseteq A$, τότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο B.
(2) $\lambda f_n + \mu g_n \overset{\text{ομ}}{\to} \lambda f + \mu g$ στο A.
(3) Αν οι (f_n), (g_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο A, τότε $f_n g_n \overset{\text{ομ}}{\to} fg$ στο A.
(4) Αν οι (f_n), $\left(\frac{1}{g_n}\right)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο A, τότε $\frac{f_n}{g_n} \overset{\text{ομ}}{\to} \frac{f}{g}$ στο A.

Απόδειξη. (1) Είναι

$$\|f_n - f\|_B = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in B\} \leq \{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in A\} = \|f_n - f\|_A$$

και, επομένως, $\|f_n - f\|_B \to 0$.
(2) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_A \leq |\lambda| \|f_n - f\|_A + |\mu| \|g_n - g\|_A \,.$$

Άρα $\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_A \to 0$.
(3) Υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$\|f_n\|_A, \|g_n\|_A \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|f_n(x)|, |g_n(x)| \leq M$$

για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Από την Πρόταση 9.3 συνεπάγεται

$$f_n(x) \to f(x), \qquad g_n(x) \to g(x)$$

και, επομένως, ισχύει

$$|f(x)|, |g(x)| \leq M$$

για κάθε $x \in A$. Άρα

$$\|f\|_A, \|g\|_A \leq M.$$

Τώρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$f_n g_n - fg = (f_n - f)(g_n - g) + f(g_n - g) + g(f_n - f)$$

και, επομένως,

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_A &\leq \|f_n - f\|_A \|g_n - g\|_A + \|f\|_A \|g_n - g\|_A + \|g\|_A \|f_n - f\|_A \\ &\leq \|f_n - f\|_A \|g_n - g\|_A + M\|g_n - g\|_A + M\|f_n - f\|_A . \end{aligned}$$

Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι $\|f_n g_n - fg\|_A \to 0$.
(4) Άμεση συνέπεια του (3). Μόνο μια επισήμανση. Υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$\left|\tfrac{1}{g_n(x)}\right| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x \in A$. Αυτό, ειδικώτερα, σημαίνει ότι $g_n(x) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x \in A$ και, επομένως, ορίζονται οι $\frac{f_n}{g_n} : A \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Επίσης, επειδή ισχύει

$$|g_n(x)| \geq \tfrac{1}{M} > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x \in A$ και επειδή

$$g_n(x) \to g(x)$$

για κάθε $x \in A$, συνεπάγεται

$$|g(x)| \geq \tfrac{1}{M} > 0$$

για κάθε $x \in A$. Άρα ορίζεται και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$. □

Κριτήριο του Cauchy. *Η (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\|f_n - f_m\|_A \leq \varepsilon$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$.*

Απόδειξη. Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\|f_n - f\|_A \leq \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Επομένως, (με απλή αλλαγή συμβόλου) ισχύει $\|f_m - f\|_A \leq \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$. Άρα, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$ ισχύει

$$\|f_n - f_m\|_A \leq \|f_n - f\|_A + \|f_m - f\|_A < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\|f_n - f_m\|_A \leq \varepsilon$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$.
Έστω $x \in A$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_A \leq \varepsilon$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$. Άρα η ακολουθία αριθμών $(f_n(x))$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό. Ορίζουμε

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x),$$

οπότε δημιουργείται συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A.
Η υπόθεσή μας είναι ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

για κάθε $x \in A$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$. Θεωρώντας το όριο $\lim_{m \to +\infty}$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\|f_n - f\|_A \leq \varepsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. □

Τώρα θα δούμε ότι με την ομοιόμορφη σύγκλιση έχουμε πιο ικανοποιητικές απαντήσεις στα τρία ερωτήματα που διατυπώθηκαν στο τέλος της ενότητας 9.1 απ' ότι με την κατά σημείο σύγκλιση.

Θεώρημα 9.1. *Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και $\xi \in A$. Αν κάθε f_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι συνεχής στον ξ, τότε η f είναι συνεχής στον ξ. Ειδικότερα, αν κάθε f_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι συνεχής στο A, τότε η f είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\|f_n - f\|_A < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ και, ειδικότερα,

$$\|f_{n_0} - f\|_A < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Άρα

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + |f_{n_0}(\xi) - f(\xi)| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_A + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + \|f_{n_0} - f\|_A < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Άρα η f είναι συνεχής στον ξ. □

Παράδειγμα. Στο παράδειγμα (8), χωρίς να υπολογίσουμε την $\|f_n - f\|_{[0,1]}$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[0, 1]$, αφού κάθε f_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι συνεχής στον 1 ενώ η f *δεν* είναι συνεχής στον 1.

Θεώρημα 9.2. *Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$. Αν κάθε f_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε

$$\varepsilon' = \tfrac{\varepsilon}{1+2(b-a)} > 0\,.$$

Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $\|f_n - f\|_{[a,b]} \leq \varepsilon'$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ και, ειδικώτερα,

$$\|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} \leq \varepsilon'\,.$$

Επίσης, υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) < \varepsilon'\,.$$

Ορίζουμε

$$u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \qquad l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

και

$$u_k{}' = \sup\{f_{n_0}(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \qquad l_k{}' = \inf\{f_{n_0}(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}.$$

Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει

$$f(x) \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + f_{n_0}(x) \leq \|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} + u_k{}' \leq \varepsilon' + u_k{}'\,.$$

Άρα

$$u_k \leq \varepsilon' + u_k{}'\,.$$

Ομοίως,

$$f(x) \geq -|f(x) - f_{n_0}(x)| + f_{n_0}(x) \geq -\|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} + l_k{}' \geq -\varepsilon' + l_k{}'$$

και, επομένως,

$$l_k \geq -\varepsilon' + l_k{}'\,.$$

Συνεπάγεται

$$u_k - l_k \leq u_k{}' - l_k{}' + 2\varepsilon'\,.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\leq \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k{}' - l_k{}')(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n 2\varepsilon'(x_k - x_{k-1}) \\
&= \overline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) + 2\varepsilon'(b-a) \\
&< (1 + 2(b-a))\varepsilon' = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\big|\textstyle\int_a^b f_n - \int_a^b f\big| = \big|\int_a^b (f_n - f)\big| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \|f_n - f\|_{[a,b]}(b-a).$$

Άρα $\big|\int_a^b f_n - \int_a^b f\big| \to 0$. $\square$

Πολλές φορές, όταν πρόκειται να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 9.2, η f είναι εμφανώς ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Για παράδειγμα, μπορεί όλες οι f_n $(n \in \mathbb{N})$ να είναι συνεχείς στο $[a, b]$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1, η f είναι κι αυτή συνεχής στο $[a, b]$. Ή μπορεί να γνωρίζουμε τον τύπο της f και να διακρίνουμε ότι είναι κατά τμήματα συνεχής ή κατά τμήματα μονότονη στο $[a, b]$. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, το πρώτο και σαφώς πιο δύσκολο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 9.2 - αυτό το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη του $\int_a^b f$ - είναι περιττό και χρειάζεται μόνο η σχετικά απλή απόδειξη του $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

Παράδειγμα. Στο παράδειγμα (9) είναι $\int_0^1 f_n \to \frac{1}{2}$ και $\int_0^1 f = 0$. Άρα, χωρίς να υπολογίσουμε τις $\|f_n - f\|_{[0,1]}$, συμπεραίνουμε ότι δεν ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[0, 1]$.

Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα (10), (11), δε μπορούμε να περιμένουμε ανάλογο θεώρημα για παραγώγους. Δηλαδή, το $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A *δε* συνεπάγεται το ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} f'$ στο A. Υπάρχει, όμως, ένα αποτέλεσμα στην αντίθετη κατεύθυνση.

Θεώρημα 9.3. *Έστω διάστημα I, $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ παραγωγίσιμες στο I, ώστε οι ${f_n}'$ $(n \in \mathbb{N})$ να είναι συνεχείς στο I, και $g : I \to \mathbb{R}$. Αν ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I και η $(f_n(\xi))$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Έστω $f_n(\xi) \to l \in \mathbb{R}$.
Επειδή οι ${f_n}'$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι συνεχείς στο I και ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I, η g είναι κι αυτή συνεχής στο I. Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, οπότε ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα

$$f(x) = \int_\xi^x g + l \qquad (x \in I).$$

Επίσης, ισχύει

$$f_n(x) = \int_\xi^x {f_n}' + f_n(\xi)$$

για κάθε $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$.
Επειδή ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I και, επομένως, και στο $[\xi, x]$ ή $[x, \xi]$, συνεπάγεται

$$\int_\xi^x {f_n}' \to \int_\xi^x g.$$

Άρα

$$f_n(x) \to f(x),$$

οπότε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο I.
Από τον ορισμό της f και τη συνέχεια της g στο I είναι σαφές ότι ισχύει $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.
Τέλος, θα δούμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε $[a, b] \subseteq I$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in [a, b]$ ισχύει

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leq |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(a) - f(a))| + |f_n(a) - f(a)| \\
&= |\int_a^x {f_n}' - \int_a^x g| + |f_n(a) - f(a)| \leq \int_a^x |{f_n}' - g| + |f_n(a) - f(a)| \\
&\leq \|{f_n}' - g\|_{[a,x]}(x - a) + |f_n(a) - f(a)| \\
&\leq \|{f_n}' - g\|_I(b - a) + |f_n(a) - f(a)|.
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\|f_n - f\|_{[a,b]} \leq \|{f_n}' - g\|_I(b - a) + |f_n(a) - f(a)|.$$

Άρα $\|f_n - f\|_{[a,b]} \to 0$, οπότε η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a, b]$. □

Τώρα θα δούμε το ίδιο, ουσιαστικά, θεώρημα αλλά με λιγότερες υποθέσεις. Το Θεώρημα 9.4 είναι ισχυρότερο από το Θεώρημα 9.3 διότι στο Θεώρημα 9.4 δεν υποθέτουμε ότι οι ${f_n}'$ είναι συνεχείς στο I. Από την άλλη μεριά, το Θεώρημα 9.3 είναι αρκετό για τις περισσότερες εφαρμογές διότι συνήθως συναντάμε καταστάσεις όπου είναι δεδομένο ότι οι ${f_n}'$ είναι συνεχείς στο I. Και επειδή η απόδειξη του Θεωρήματος 9.4 είναι πιο δύσκολη, μπορεί να παραληφθεί η μελέτη της κατά την πρώτη ανάγνωση.

Θεώρημα 9.4. *Έστω διάστημα I, $f_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ παραγωγίσιμες στο I και $g : I \to \mathbb{R}$. Αν ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I και η $(f_n(\xi))$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in I$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\|{f_n}' - {f_m}'\|_I \leq \tfrac{\varepsilon}{2|x-\xi|+1}\,, \qquad |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$. Τώρα, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, ξ ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(\xi) - f_m(\xi))| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \\ &= |{f_n}'(\zeta) - {f_m}'(\zeta)||x-\xi| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \\ &\leq \|{f_n}' - {f_m}'\|_I |x-\xi| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2|x-\xi|+1}|x-\xi| + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα η $(f_n(x))$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει. Τώρα, για κάθε $x \in I$ ορίζουμε

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x),$$

οπότε σχηματίζουμε συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο I.
Έστω $x \in I$. Θα αποδείξουμε ότι $f'(x) = g(x)$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$\|{f_n}' - g\|_I \leq \tfrac{\varepsilon}{4}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Επίσης, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$\Big|\tfrac{f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)}{y-x} - {f_{n_0}}'(x)\Big| \leq \tfrac{\varepsilon}{4}$$

για κάθε $y \in I$, $0 < |y-x| < \delta_0$. Συνεπάγεται

$$\|{f_n}' - {f_{n_0}}'\|_I \leq \|{f_n}' - g\|_I + \|{f_{n_0}}' - g\|_I \leq \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} = \tfrac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.
Έστω οποιοσδήποτε $y \in I$, $0 < |y-x| < \delta_0$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Τότε

$$\begin{aligned} \Big|\tfrac{f_n(y) - f_n(x)}{y-x} - g(x)\Big| &\leq \Big|\tfrac{(f_n(y) - f_{n_0}(y)) - (f_n(x) - f_{n_0}(x))}{y-x}\Big| \\ &\quad + \Big|\tfrac{f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)}{y-x} - {f_{n_0}}'(x)\Big| + |{f_{n_0}}'(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

Κατ' αρχάς,

$$|{f_{n_0}}'(x) - g(x)| \leq \|{f_{n_0}}' - g\|_I \leq \tfrac{\varepsilon}{4}\,.$$

Κατόπιν, υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, y ώστε

$$\Big|\tfrac{(f_n(y) - f_{n_0}(y)) - (f_n(x) - f_{n_0}(x))}{y-x}\Big| = |{f_n}'(\zeta) - {f_{n_0}}'(\zeta)| \leq \|{f_n}' - {f_{n_0}}'\|_I \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Άρα

$$\left|\tfrac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} - g(x)\right| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ και κάθε $y \in I$, $0 < |y-x| < \delta_0$. Παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε

$$\left|\tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} - g(x)\right| \leq \varepsilon$$

για κάθε $y \in I$, $0 < |y-x| < \delta_0$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = g(x)$ και, επομένως, $f'(x) = g(x)$.

Τέλος, θα δούμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε $[a,b] \subseteq I$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in [a,b]$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, a ώστε

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(a) - f(a))| + |f_n(a) - f(a)| \\ &= |{f_n}'(\zeta) - f'(\zeta)||x-a| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \|{f_n}' - g\|_I (b-a) + |f_n(a) - f(a)|. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\|f_n - f\|_{[a,b]} \leq \|{f_n}' - g\|_I (b-a) + |f_n(a) - f(a)|.$$

Άρα $\|f_n - f\|_{[a,b]} \to 0$, οπότε η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a,b]$. □

Παρατηρήστε στα Θεωρήματα 9.3 και 9.4 ότι *υποθέτουμε* την ομοιόμορφη σύγκλιση της $({f_n}')$ και *συμπεραίνουμε* την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n). Επίσης, για την (f_n) *αρκεί* να υποθέσουμε την κατά σημείο σύγκλιση σε *ένα μόνο* σημείο ξ.

Ασκήσεις.

1. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $f_n(x) = xe^{-nx}$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$. Ποια είναι η f;

2. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$.
   (i) Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,+\infty)$. Ποια είναι η f;
   (ii) Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
   Να επαναλάβετε με τις $f_n(x) = e^{-nx}$, $f_n(x) = nxe^{-nx}$.

3. Έστω $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ $(n \in \mathbb{N})$.
   (i) Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $\mathbb{R}$. Ποια είναι η f;
   (ii) Για κάθε $\delta \in (0,1]$ αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε καθένα από τα $(-\infty,-1-\delta]$, $[-1+\delta, 1-\delta]$, $[1+\delta,+\infty)$.

4. (i) Έστω $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και $B \subseteq A$. Αποδείξτε ότι $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ στο B.
   (ii) Έστω $A = B \cup C$ και $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ στο B και στο C. Αποδείξτε ότι $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ στο A.

5. Έστω $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, η (x_n) είναι στο A, $\xi \in A$ και $x_n \to \xi$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(\xi)$.
   Υπόδειξη: $|f_n(x_n) - f(\xi)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(\xi)|$.

6. Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, ξ σημείο συσσώρευσης του A και έστω $y_n = \lim_{x\to\xi} f_n(x)$. Αποδείξτε ότι η (y_n) συγκλίνει και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to\xi}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to\xi} f_n(x).$$

7. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $f_n(x) = x^n$ και $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ με $g(1) = 0$. Αποδείξτε ότι $gf_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$.

8. Έστω $f, g, f_n, g_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 0$. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$, $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} g$ και ότι δεν είναι $f_ng_n \overset{\text{ομ}}{\to} fg$ στο $(0,+\infty)$.

9. Έστω $f_n : A \to [a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A.
(i) Αποδείξτε ότι $f : A \to [a,b]$.
(ii) Αν, επίσης, η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $g\circ f_n \overset{\text{ομ}}{\to} g\circ f$ στο A.
Υπόδειξη: Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.

10. Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και κάθε f_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι φραγμένη στο A, αποδείξτε ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A.
Υπόδειξη: Κριτήριο Cauchy με $\varepsilon = 1$.

11. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < \frac{1}{n+1} \text{ ή } \frac{1}{n} < x \\ (\sin\frac{\pi}{x})^2, & \text{αν } \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n} \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Ποια είναι η f; Ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$; Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

12. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $f_n(x) = n^p x(1-x^2)^n$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $[0,1]$.
Υπόδειξη: Βρείτε το $\lim_{n\to+\infty} n^p a^n$ αν $0 \le a \le 1$.
Για ποιούς p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιούς p ισχύει $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$;

13. Έστω $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ${f_n}'(x) \to f'(x)$, αν $x \ne 0$, αλλά δεν είναι ${f_n}'(0) \to f'(0)$.

14. Έστω $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$ $(n \in \mathbb{N})$.
(i) Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ και ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$.
(ii) Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ σε καθένα από τα $(-\infty,-a]$, $[a,+\infty)$ αλλά όχι στο $[-a,a]$.

15. Έστω $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$.
(i) Αποδείξτε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[-1,1]$. Ποια είναι η f;
(ii) Αποδείξτε ότι όλες οι f_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι παραγωγίσιμες στον 0 ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στον 0.

9.3 Το θεώρημα του Weierstrass.

Λήμμα 9.1. *(1)* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1.$
(2) $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx.$
(3) $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(n^2-n)x^2+nx.$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τον διωνυμικό τύπο

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k s^{n-k}=(t+s)^n.$$

(1) Θέτουμε $t=x$ και $s=1-x$.
(2) Παραγωγίζουμε τον δυωνυμικό τύπο ως προς t, πολλαπλασιάζουμε την ισότητα που προκύπτει με t και θέτουμε $t=x$ και $s=1-x$.
(3) Παραγωγίζουμε δυο φορές ως προς t, πολλαπλασιάζουμε με t και θέτουμε $t=x$ και $s=1-x$. $\square$

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε μόνο ένα θεώρημα.

Θεώρημα του Weierstrass. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ ώστε να ισχύει*

$$|p(x)-f(x)|\leq\varepsilon\qquad(x\in[a,b]).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς θεωρούμε την περίπτωση του διαστήματος $[0,1]$.
Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$. Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x')-f(x'')|<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε $x',x''\in[0,1]$, $|x'-x''|<\delta_0$. Επίσης, η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|f(x)|\leq M$$

για κάθε $x\in[0,1]$. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε

$$n\in\mathbb{N},\quad n\geq\max\{\tfrac{1}{{\delta_0}^4},(\tfrac{M}{\varepsilon})^2\}$$

και το πολυώνυμο

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(\tfrac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k}.$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $|p(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ για κάθε $x\in[0,1]$.
Έστω $x\in[0,1]$. Σύμφωνα με το Λήμμα 9.1, είναι

$$f(x)=f(x)\cdot 1=f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(x)x^k(1-x)^{n-k}.$$

Άρα

$$p(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(f(\tfrac{k}{n})-f(x)\big)x^k(1-x)^{n-k}.$$

Χωρίζουμε τους αριθμούς $0,1,\ldots,n$ σε δυο κατηγορίες. Το σύνολο A αποτελείται από τους $k=0,1,\ldots,n$ με την ιδιότητα: $|x-\frac{k}{n}|<\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$. Το σύνολο B αποτελείται από τους υπόλοιπους $k=0,1,\ldots,n$, δηλαδή εκείνους με την ιδιότητα: $|x-\frac{k}{n}|\geq\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.
Αν $k\in A$, συνεπάγεται $|x-\frac{k}{n}|<\delta_0$, οπότε $\big|f(\frac{k}{n})-f(x)\big|<\frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in A}\binom{n}{k}\big|f(\tfrac{k}{n})-f(x)\big|x^k(1-x)^{n-k}&\leq\tfrac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&\leq\tfrac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\tfrac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 9.1.
Αν $k \in B$, είναι

$$\big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| \le \big|f(\tfrac{k}{n})\big| + |f(x)| \le 2M \le 2M\sqrt{n}(\tfrac{k}{n} - x)^2 \,.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k\in B} \binom{n}{k}\big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big|x^k(1-x)^{n-k} &\le 2M\sqrt{n}\textstyle\sum_{k\in B}(\tfrac{k}{n} - x)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &\le 2M\sqrt{n}\textstyle\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{k}{n} - x)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \tfrac{2Mx(1-x)}{\sqrt{n}} \le \tfrac{M}{2\sqrt{n}} \le \tfrac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε, και πάλι, το Λήμμα 9.1.
Επομένως,

$$\begin{aligned}|p(x) - f(x)| &\le \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big|x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \textstyle\sum_{k\in A} \binom{n}{k}\big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big|x^k(1-x)^{n-k} \\ &\quad + \textstyle\sum_{k\in B} \binom{n}{k}\big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big|x^k(1-x)^{n-k} \\ &\le \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα είναι $|p(x) - f(x)| \le \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Θεωρούμε, τώρα, τη γενική περίπτωση διαστήματος $[a,b]$.
Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Ορίζουμε την $\phi : [0,1] \to [a,b]$ με τύπο

$$\phi(t) = (b-a)t + a$$

και την αντίστροφή της $\psi : [a,b] \to [0,1]$ με τύπο

$$\psi(x) = \tfrac{x-a}{b-a}\,.$$

Κατόπιν, θεωρούμε τη σύνθεση $g = f \circ \phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f((b-a)t + a).$$

Η g, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο $[0,1]$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης συνεπάγεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $q(t)$ ώστε να ισχύει

$$|q(t) - g(t)| \le \varepsilon$$

για κάθε $t \in [0,1]$. Τώρα, θεωρούμε τη σύνθεση $p = q \circ \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$p(x) = q(\tfrac{x-a}{b-a}).$$

Επειδή το $q(t)$ είναι πολυώνυμο, το $p(x)$ είναι κι αυτό πολυώνυμο και, μάλιστα, ίδιου βαθμού με το q. Από την $g = f \circ \phi$ συνεπάγεται η $f = g \circ \psi$. Τέλος, ισχύει

$$|p(x) - f(x)| = |q(\psi(x)) - g(\psi(x))| \le \varepsilon$$

για κάθε $x \in [a,b]$. $\square$

Παράδειγμα. Έστω η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$. Ακολουθώντας τη διαδικασία της απόδειξης του Θεωρήματος του Weierstrass, θα βρούμε πολυώνυμο $p(x)$ ώστε να ισχύει

$$|\sqrt{x} - p(x)| \leq 10^{-4}$$

για κάθε $x \in [0,1]$.
Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leq \tfrac{1}{2}10^{-4}$$

για κάθε $x', x'' \in [0,1]$, $|x' - x''| \leq \frac{1}{4}10^{-8}$. Αυτό είναι άμεσο από τη στοιχειώδη ανισότητα $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leq \sqrt{|x' - x''|}$. Προφανώς, ισχύει

$$0 \leq \sqrt{x} \leq 1$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Άρα χρειαζόμαστε

$$n \geq \max\{4^4 10^{32}, 10^8\} = 4^4 10^{32}\,.$$

Με $n = 4^4 10^{32}$ σχηματίζουμε το ζητούμενο πολυώνυμο:

$$p(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{4^4 10^{32}} \binom{4^4 10^{32}}{k} \sqrt{\frac{k}{4^4 10^{32}}}\; x^k (1-x)^{4^4 10^{32} - k}\,.$$

Το πολυώνυμο αυτό είναι βαθμού $4^4 10^{32}$.

Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος του Weierstrass γράφεται ισοδύναμα

$$\|p - f\|_{[a,b]} \leq \varepsilon.$$

Από το Θεώρημα του Weierstrass συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p_n(x)$ ώστε $\|p_n - f\|_{[a,b]} \leq \frac{1}{n}$. Άρα υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$. Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$ ή, ισοδύναμα, $\|p_n - f\|_{[a,b]} \to 0$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|p_n - f\|_{[a,b]} \leq \varepsilon$. Άρα μια ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος του Weierstrass είναι:
Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε

$$p_n \overset{\text{ομ}}{\to} f \quad \text{στο } [a,b].$$

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις του Θεωρήματος του Weierstrass. Η απόδειξη που μελετήσαμε είναι του S. Bernstein.

Ασκήσεις.

1. (i) Βρείτε πολυώνυμο $p(x)$ ώστε $\big|p(x) - |x|\big| \leq \frac{1}{100}$ για κάθε $x \in [-100, 100]$.
   (ii) Βρείτε πολυώνυμο $p(x)$ ώστε $p(0) = 0$ και $|p(x) - \sin x| \leq \frac{1}{100}$ για κάθε $x \in [-100, 100]$.

2. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ με την ιδιότητα: $\int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι $f = 0$.
   Υπόδειξη: Υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ ώστε $|p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$. Βάσει της υπόθεσης, $\int_0^1 fp = 0$. Συνεπάγεται $0 \leq \int_0^1 f^2 = \int_0^1 f(f-p) \leq \int_0^1 |f||f-p| \leq \varepsilon \int_0^1 |f|$.

3. Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[1,+\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ ώστε $|p(\frac{1}{x})-f(x)|\leq\varepsilon$ για κάθε $x\geq 1$.
   Υπόδειξη: Έστω $l=\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Θεωρήστε την $\phi:(0,1]\to[1,+\infty)$, $\phi(t)=\frac{1}{t}$ και την αντίστροφη $\psi:[1,+\infty)\to(0,1]$, $\psi(x)=\frac{1}{x}$. Έστω $g=f\circ\phi:(0,1]\to\mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής στο $(0,1]$. Να ορίσετε $g(0)=l$.

4. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ ώστε $|p(e^{-x})-f(x)|\leq\varepsilon$ για κάθε $x\geq 0$.
   Υπόδειξη: Προσαρμόστε την υπόδειξη της προηγούμενης άσκησης.

Κεφάλαιο 10

Σειρές συναρτήσεων.

10.1 Σειρές συναρτήσεων. Ορισμοί και ιδιότητες.

Ορισμός. Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Θεωρούμε τα διαδοχικά αθροίσματα, δηλαδή τις συναρτήσεις $s_1 = f_1 : A \to \mathbb{R}$, $s_2 = f_1 + f_2 : A \to \mathbb{R}$, $s_3 = f_1 + f_2 + f_3 : A \to \mathbb{R}$ και, γενικότερα:

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n : A \to \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Δηλαδή, $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.
Αν υπάρχει συνάρτηση $s : A \to \mathbb{R}$ ώστε $s_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} s$ στο A, τότε λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ **συγκλίνει στη συνάρτηση** s **κατά σημείο στο** A και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Αν $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο A, τότε λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ **συγκλίνει στη συνάρτηση** s **ομοιόμορφα στο** A και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Η συνάρτηση s_n ονομάζεται n**-οστό μερικό άθροισμα** των f_n $(n \in \mathbb{N})$. Η συνάρτηση s ονομάζεται **κατά σημείο άθροισμα** ή **ομοιόμορφο άθροισμα**, αντιστοίχως, της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ στο A.

Όπως και για τις σειρές αριθμών, υπάρχουν εναλλακτικοί συμβολισμοί ή και παραλλαγές των προηγούμενων συμβολισμών: $s \overset{\text{κ.σ.}}{=} f_1 + f_2 + \cdots$ ή $s \overset{\text{κ.σ.}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ ή $s \overset{\text{ομ}}{=} \sum_{n=m}^{+\infty} f_n$ κλπ.

Η ισότητα $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $s_n(x) \to s(x)$ κι αυτό ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $x \in A$ η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ έχει άθροισμα $s(x)$. Με άλλα λόγια,

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s \quad \text{στο } A \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = s(x) \quad (x \in A).$$

Πρόταση 10.1. *Αν* $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\text{ομ}}{=} s$ *στο* A*, τότε* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ *στο* A.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ $(n \in \mathbb{N})$, οπότε η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των ορισμών και της Πρότασης 9.3. □

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη γνωστή μας γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (x \in (-1,1)).$$

Επομένως, η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στο $(-1,1)$ στη συνάρτηση $s:(-1,1)\to\mathbb{R}$ με τύπο $s(x)=\frac{1}{1-x}$. Δηλαδή,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \overset{\text{κ.σ.}}{=} \frac{1}{1-x} \quad \text{στο } (-1,1).$$

Ας δούμε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $(-1,1)$. Για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι

$$s_n(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}\,,$$

οπότε

$$|s_n(x)-s(x)|=\frac{|x|^n}{1-x}\,.$$

Επειδή $\lim_{x\to1-}\frac{|x|^n}{1-x}=+\infty$, είναι

$$\|s_n-s\|_{(-1,1)}=+\infty.$$

Άρα η $\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ δε συγκλίνει στην $\frac{1}{1-x}$ ομοιόμορφα στο $(-1,1)$.

Πρόταση 10.2. *Έστω αριθμοί λ,μ και $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \overset{\text{ομ}}{=} t$ στο A. Τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda f_n+\mu g_n) \overset{\text{ομ}}{=} \lambda s+\mu t \quad \textit{στο} \quad A.$$

Το ίδιο ισχύει και για την κατά σημείο σύγκλιση.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα $s_n=f_1+\cdots+f_n$ και $t_n=g_1+\cdots+g_n$ $(n\in\mathbb{N})$ και εφαρμόζουμε τις Προτάσεις 9.1 και 9.4. □

Κριτήριο του Cauchy. *Η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|f_{m+1}(x)+\cdots+f_n(x)|\le\varepsilon$ για κάθε $x\in A$ και κάθε $n,m\in\mathbb{N}$, $n>m\ge n_0$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Κριτήριο του Cauchy στο Κεφάλαιο 9 στις $s_n=f_1+\cdots+f_n$ $(n\in\mathbb{N})$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο κριτήριο για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

Κριτήριο του Weierstrass. *Έστω $f_n:A\to\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N})$ και $\|f_n\|_A\le M_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ή, ισοδύναμα, $|f_n(x)|\le M_n$ για κάθε $x\in A$, $n\in\mathbb{N}$. Αν η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.*

Πρώτη απόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$M_{m+1}+\cdots+M_n<\varepsilon$$

για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$, $n>m\ge n_0$. Άρα

$$|f_{m+1}(x)+\cdots+f_n(x)|\le|f_{m+1}(x)|+\cdots+|f_n(x)|\le M_{m+1}+\cdots+M_n<\varepsilon$$

για κάθε $x\in A$ και $m,n\in\mathbb{N}$, $n>m\ge n_0$. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

Δεύτερη απόδειξη. Έστω $x\in A$. Ισχύει $|f_n(x)|\le M_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, οπότε η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως σε κάποιον αριθμό. Ορίζουμε

$$s(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x).$$

Αυτό γίνεται για κάθε $x \in A$, οπότε ορίζεται συνάρτηση $s : A \to \mathbb{R}$ και τότε, προφανώς, ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Τώρα, θεωρούμε τα

$$s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

και έχουμε

$$|s_n(x) - s(x)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x) \Big| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

για κάθε $x \in A$. Άρα

$$\|s_n - s\|_A \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, θεωρούμε τα

$$S_n = M_1 + \cdots + M_n \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad S = \sum_{n=1}^{+\infty} M_n \,.$$

Τότε

$$0 \leq \|s_n - s\|_A \leq S - S_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, επειδή $S_n \to S$, συνεπάγεται $\|s_n - s\|_A \to 0$.
Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A. □

Παραδείγματα. (1) Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Επειδή ισχύει $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$, $n \in \mathbb{N}$ και επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[-1,1]$.
(2) Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Επειδή ισχύει $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε x και $n \in \mathbb{N}$ και επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Το μέρος (1) του Θεωρήματος 10.1 είναι το ανάλογο για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων του κριτηρίου του Dirichlet (για σειρές αριθμών) και το μέρος (2) είναι το ανάλογο του κριτηρίου του Abel. Θα παρατηρήσετε ότι στην απόδειξη, όπως και στις αποδείξεις των κριτηρίων αυτών, χρησιμοποιείται ο τύπος άθροισης του Abel.

Θεώρημα 10.1. *Έστω $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ και $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ $(n \in \mathbb{N})$.*
(1) Έστω ότι η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \in A$, ότι $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ και ότι η (s_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.
(2) Έστω ότι η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \in A$ και ομοιόμορφα φραγμένη στο A και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

Απόδειξη. (1) Υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|s_n(x)| \leq M$$

για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, επειδή για κάθε $x \in A$ η (g_n) είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$g_n(x) \geq 0$$

για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$g_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2M+1}$$

για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $x \in A$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m \geq n_0$ είναι

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)g_k(x) \right| &= \Big| \sum_{k=m+1}^{n} s_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\quad + s_n(x)g_{n+1}(x) - s_m(x)g_{m+1}(x) \Big| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} |s_k(x)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\quad + |s_n(x)|g_{n+1}(x) + |s_m(x)|g_{m+1}(x) \\ &\leq M\Big(\sum_{k=m+1}^{n} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x) + g_{m+1}(x) \Big) \\ &= M(g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x) + g_{n+1}(x) + g_{m+1}(x)) = 2Mg_{m+1}(x) \\ &\leq \tfrac{2M\varepsilon}{2M+1} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.
(2) Υπάρχει $s : A \to \mathbb{R}$ ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A ή, ισοδύναμα, $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο A.
Κατ' αρχάς υποθέτουμε ότι $s(x) = 0$ και $g_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$.
Υπάρχει M ώστε

$$0 \leq g_n(x) \leq M$$

για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$|s_n(x)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2M+1}$$

για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Επομένως, για κάθε $x \in A$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)g_k(x) \right| &= \Big| \sum_{k=m+1}^{n} s_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\quad + s_n(x)g_{n+1}(x) - s_m(x)g_{m+1}(x) \Big| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} |s_k(x)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\quad + |s_n(x)|g_{n+1}(x) + |s_m(x)|g_{m+1}(x) \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2M+1}\Big(\sum_{k=m+1}^{n} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x) + g_{m+1}(x) \Big) \\ &= \tfrac{2\varepsilon g_{m+1}(x)}{2M+1} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.
Στη γενική περίπτωση, υπάρχει l ώστε να ισχύει

$$g_n(x) \geq l$$

για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f_1{}^* = f_1 - s,$$

οπότε

$$f_1{}^* + \sum_{n=2}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0.$$

Τότε, βάσει της ειδικής περίπτωσης, η σειρά

$$f_1{}^*(g_1 - l) + \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(g_n - l)$$

συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A. Επειδή το ίδιο ισχύει και για τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n l = l \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,,$$

συνεπάγεται ότι η

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n = f_1{}^*(g_1 - l) + \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(g_n - l) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n l + s(g_1 - l)$$

συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A. $\square$

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ με πεδίο ορισμού το $[a,+\infty)$, όπου $a>0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$f_n(x)=(-1)^{n-1}\,,\quad g_n(x)=\tfrac{1}{n^x}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Τα μερικά αθροίσματα των f_n είναι ομοιόμορφα φραγμένα στο $[a,+\infty)$, διότι είναι $1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}=1$ ή 0 για κάθε $x\in[a,+\infty)$. Για κάθε $x\in[a,+\infty)$ η $(g_n(x))=\left(\frac{1}{n^x}\right)$ είναι, προφανώς, φθίνουσα. Τέλος, είναι $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[a,+\infty)$, διότι

$$\|g_n\|_{[a,+\infty)}=\sup\{|\tfrac{1}{n^x}|\,|\,x\in[a,+\infty)\}=\tfrac{1}{n^a}\to 0.$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.

Θεώρημα 10.2. *Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A, $\xi\in A$. Αν κάθε f_n $(n\in\mathbb{N})$ είναι συνεχής στον ξ, τότε η s είναι συνεχής στον ξ. Ειδικώτερα, αν κάθε f_n $(n\in\mathbb{N})$ είναι συνεχής στο A, τότε η s είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.1 στις $s_n=f_1+\cdots+f_n$ $(n\in\mathbb{N})$. □

Θεώρημα 10.3. *Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο $[a,b]$. Αν κάθε f_n $(n\in\mathbb{N})$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε η s είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b s.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.2 στις $s_n=f_1+\cdots+f_n$ $(n\in\mathbb{N})$. □

Οι σχέσεις $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b s$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ συνδυάζονται με τη μορφή εναλλαγής των συμβόλων της άθροισης και της ολοκλήρωσης:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,.$$

Θεώρημα 10.4. *Έστω διάστημα I, $f_n:I\to\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N})$ παραγωγίσιμες στο I, ώστε οι ${f_n}'$ $(n\in\mathbb{N})$ να είναι συνεχείς στο I, και $t:I\to\mathbb{R}$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} {f_n}' \overset{\text{ομ}}{=} t$ στο I και η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi\in I$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η s είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $s'(x)=t(x)$ για κάθε $x\in I$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.3 στις $s_n=f_1+\cdots+f_n$ $(n\in\mathbb{N})$. □

Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 10.4 γράφεται και

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\Big)'=\sum_{n=1}^{+\infty} {f_n}'\,,$$

με τη μορφή εναλλαγής των συμβόλων της άθροισης και της παραγώγισης.

Τέλος, έχουμε και το αντίστοιχο του Θεωρήματος 9.4.

Θεώρημα 10.5. *Έστω διάστημα I, $f_n:I\to\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N})$ παραγωγίσιμες στο I και $t:I\to\mathbb{R}$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} {f_n}' \overset{\text{ομ}}{=} t$ στο I και η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi\in I$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η s είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $s'(x)=t(x)$ για κάθε $x\in I$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.4 στις $s_n = f_1 + \cdots + f_n \ \ (n \in \mathbb{N})$. $\square$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-x)x^n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα στο $(-1,1]$. Ποια είναι αυτή η συνάρτηση;

2. Έστω $p > 1$. Αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^p}$ συγκλίνουν σε κάποιες συναρτήσεις ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Είναι οι συναρτήσεις αυτές συνεχείς στο $\mathbb{R}$; παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$;

3. Έστω $p > \frac{1}{2}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^p(1+nx^2)}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

4. Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2+n}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.
Υπόδειξη: Χωρίστε τη σειρά σε δυο σειρές.
Αποδείξτε ότι η σειρά δε συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x.

5. Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\sin(1+\frac{x}{n})$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.
Υπόδειξη: $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$, $|\sin x| \leq |x|$ και $0 \leq 1-\cos x \leq \frac{x^2}{2}$.

6. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^n}{2n}\right)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

7. Έστω $f_n : A \to \mathbb{R} \ \ (n \in \mathbb{N})$ ώστε $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq M_n$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

8. Έστω η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x}$.
(i) Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $x > 0$ και ότι αποκλίνει για $x = 0$.
(ii) Αν $a > 0$, αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
(iii) Ορίζεται $s : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x}$. Είναι η s συνεχής στο $(0,+\infty)$;
Υπόδειξη: Έστω $x \in (0,+\infty)$. Θεωρήστε a ώστε $0 < a < x$.
Είναι η s φραγμένη στο $(0,+\infty)$;
Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $s(\frac{1}{n^2}) \geq \frac{n}{2}$.
(iv) Συγκλίνει η σειρά στην s ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$;

9. Έστω η $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Έστω ακολουθία (x_n) ώστε $x_n \neq x_m$ για κάθε $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n| < +\infty$.
(i) Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}c_n I(x-x_n)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση, έστω s, ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
(ii) Αποδείξτε ότι η s είναι συνεχής σε κάθε $x \neq x_n \ \ (n \in \mathbb{N})$ και ασυνεχής σε κάθε x_n $(n \in \mathbb{N})$ με άλμα c_n στον x_n.
Υπόδειξη: $s(x) = \sum_{k=1}^{n-1}c_k I(x-x_k) + c_n I(x-x_n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty}c_k I(x-x_k)$. Παρατηρήστε ότι η $\sum_{k=1}^{n-1}c_k I(x-x_k)$ και η $\sum_{k=n+1}^{+\infty}c_k I(x-x_k)$ είναι συνεχείς στον x_n.

10. (i) Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx-[nx]}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση, έστω s, ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η s είναι περιοδική με περίοδο 1.
(ii) Αποδείξτε ότι κάθε άρρητος είναι σημείο συνέχειας της s.
(iii) Αποδείξτε ότι κάθε ρητός είναι σημείο ασυνέχειας της s.
Υπόδειξη: Από την άσκηση 6 της ενότητας 9.2, $\lim_{x\to\xi+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx-[nx]}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to\xi+} \frac{nx-[nx]}{n^2}$. Ομοίως για το $\lim_{x\to\xi-}$.
(iv) Αν ο x είναι ρητός και $x = \frac{k}{l}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$, $\gcd(k,l) = 1$, αποδείξτε ότι το άλμα της s στον x είναι $-\frac{a}{l^2}$, όπου $a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$.
(v) Αποδείξτε ότι η s είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και $\int_0^1 s = \frac{a}{2}$.

11. Θεωρήστε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Γνωρίζουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ για κάθε $x \leq 1$. Ορίζουμε τη ζ**-συνάρτηση του Riemann**, $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τον τύπο:
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \qquad (1 < x < +\infty).$$
(i) Αποδείξτε ότι για κάθε $a > 1$ η σειρά συγκλίνει στην ζ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$. Συμπεράνατε ότι η ζ είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$.
Υπόδειξη: Έστω $x \in (1, +\infty)$. Θεωρήστε a ώστε $1 < a < x$.
(ii) Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^x}$ συγκλίνει για κάθε $x > 1$ και ότι για κάθε $a > 1$ η ίδια σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
(iii) Αποδείξτε ότι η ζ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ και
$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^x} \qquad (1 < x < +\infty).$$

12. Αν η (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \to 0$, αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο διάστημα $[m2\pi + \delta, (m+1)2\pi - \delta]$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και κάθε δ, $0 < \delta \leq \pi$.
Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την υπόδειξη της άσκησης 16 της ενότητας 8.4.

13. Έστω ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $nx_n \to 0$.

14. Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$ και ότι
$$\lim_{x\to 0+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n .$$

10.2 Δυναμοσειρές.

Ορισμός. Κάθε σειρά της μορφής
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2 + \cdots + a_n(x-\xi)^n + \cdots$$
ονομάζεται **δυναμοσειρά** με **κέντρο** ξ και **συντελεστές** $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Αυτή είναι η σειρά των συναρτήσεων a_0 και $a_n(x-\xi)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

`Παραδείγματα.` (1) Η $\sum_{n=0}^{+\infty} 0(x-\xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 0 ονομάζεται **μηδενική δυναμοσειρά** και, προφανώς, συγκλίνει για κάθε x και έχει άθροισμα ίσο με 0. Δηλαδή, $\sum_{n=0}^{+\infty} 0(x-\xi)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$ για κάθε x.
(2) Η **γεωμετρική δυναμοσειρά** $\sum_{n=0}^{+\infty} 1(x-\xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 1 συγκλίνει μόνο όταν $-1 < x-\xi < 1$ ή, ισοδύναμα, $\xi - 1 < x < \xi + 1$ και το άθροισμά της είναι ίσο με $\frac{1}{1-(x-\xi)}$. Δηλαδή, $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n = \frac{1}{1-(x-\xi)}$ για κάθε $x \in (\xi-1, \xi+1)$.

Ορισμός. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$. Αν

$$\rho = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|},$$

οπότε $0 \le \rho \le +\infty$, τότε το

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{αν } 0 < \rho \le +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \rho = 0 \end{cases}$$

ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Θεώρημα 10.6. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και R η ακτίνα σύγκλισής της. Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [\xi - R, \xi + R]$. Τέλος, για τους $x = \xi \pm R$ δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα εκτός, βέβαια, από την περίπτωση $R = 0$, οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως για $x = \xi$.*

Απόδειξη. Έστω $0 < R \le +\infty$ ή, ισοδύναμα, $0 \le \rho < +\infty$. Αν $|x-\xi| < R$, τότε

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi|\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = |x-\xi|\rho < 1,$$

οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει απολύτως.
Έστω $0 \le R < +\infty$ ή, ισοδύναμα, $0 < \rho \le +\infty$. Αν $|x-\xi| > R$, τότε

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi|\, \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = |x-\xi|\rho > 1,$$

οπότε η σειρά αποκλίνει.
Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n$ ισχύει $\sqrt[n]{|1|} \to 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi \pm 1$, καταλήγουμε στις σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ οι οποίες αποκλίνουν.
Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^n}{n^2}$ ισχύει $\sqrt[n]{|\frac{1}{n^2}|} \to 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi \pm 1$, καταλήγουμε στις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ οι οποίες συγκλίνουν.
Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^n}{n}$ ισχύει $\sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} \to 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi + 1$, καταλήγουμε στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει και, αν $x = \xi - 1$, στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει.
Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(x-\xi)^n}{n}$ ισχύει $\sqrt[n]{|\frac{(-1)^n}{n}|} \to 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi + 1$, καταλήγουμε στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει και, αν $x = \xi - 1$, στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει. □

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι σε κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ αντιστοιχίζεται η ακτίνα σύγκλισής της $R \in [0, +\infty]$ και ότι υπάρχουν τα εξής απλά ενδεχόμενα: (i) αν $R = +\infty$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$, (ii) αν $R = 0$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για $x = \xi$ και αποκλίνει για κάθε $x \ne \xi$ και (iii) αν $0 < R < +\infty$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [\xi - R, \xi + R]$.

Στην περίπτωση (iii) μπορούμε να πούμε περισσότερα: η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in I$, όπου I είναι το διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$ στο οποίο ενδέχεται να έχουν προστεθεί ένα ή και τα δυο άκρα $\xi \pm R$. Δηλαδή,

$$I = (\xi - R, \xi + R) \quad \text{ή} \quad (\xi - R, \xi + R] \quad \text{ή} \quad [\xi - R, \xi + R) \quad \text{ή} \quad [\xi - R, \xi + R],$$

ανάλογα με τη συγκεκριμένη σειρά. Γράφοντας

$$I = (-\infty, +\infty)$$

στην περίπτωση (i) και

$$I = \{\xi\}$$

στην περίπτωση (ii), βλέπουμε ότι σε κάθε περίπτωση η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in I$.

Ορισμός. Άρα σε κάθε $x \in I$ αντιστοιχίζεται ο αριθμός

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$$

και, επομένως, ορίζεται συνάρτηση $s : I \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι **η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση** $s : I \to \mathbb{R}$ ή ότι **η** $s : I \to \mathbb{R}$ **ορίζεται από τη δυναμοσειρά** και, προφανώς, η δυναμοσειρά συγκλίνει στη συνάρτηση s κατά σημείο στο διάστημα I. Το I ονομάζεται **διάστημα σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Παραδείγματα. (1) Το διάστημα σύγκλισης της γεωμετρικής δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n$ είναι το $I = (\xi - 1, \xi + 1)$. Η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση $s : (\xi - 1, \xi + 1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $s(x) = \frac{1}{1-(x-\xi)}$.
Όπως φαίνεται στο παράδειγμα αυτό, η συνάρτηση s που ορίζεται από μια δυναμοσειρά ενδέχεται να επεκτείνεται και εκτός του διαστήματος σύγκλισης I της δυναμοσειράς. Μπορεί, δηλαδή, να υπάρχει συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $I \subseteq A$, $I \neq A$, ώστε να ισχύει $f(x) = s(x)$ για κάθε $x \in I$. Πράγματι, στο παράδειγμα η $f : \mathbb{R} \setminus \{\xi + 1\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1-(x-\xi)}$ είναι επέκταση της s. Όμως, η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση s και όχι την f, διότι συγκλίνει μόνο στο διάστημα σύγκλισης $(\xi - 1, \xi + 1)$ και όχι σε ολόκληρο το μεγαλύτερο σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{\xi + 1\}$.
(2) Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^n}{n^2}$ είναι το $I = [\xi - 1, \xi + 1]$.
(3) Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^n}{n}$ είναι το $I = [\xi - 1, \xi + 1)$.
(4) Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(x-\xi)^n}{n}$ είναι το $I = (\xi - 1, \xi + 1]$.
(5) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n(x-\xi)^n$. Τότε $\sqrt[n]{|n^n|} = n \to +\infty$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = \frac{1}{+\infty} = 0$ και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $\{\xi\}$.
(6) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}(x-\xi)^n$. Τότε $\sqrt[n]{|\frac{1}{n^n}|} = \frac{1}{n} \to 0$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = +\infty$ και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Ορισμός. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\rho_1 = \underline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ και $\rho_2 = \overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, οπότε $0 \leq \rho_1 \leq \rho_2 \leq +\infty$, ορίζουμε

$$R_1 = \begin{cases} \frac{1}{\rho_1}, & \text{αν } 0 < \rho_1 \leq +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \rho_1 = 0 \end{cases} \qquad R_2 = \begin{cases} \frac{1}{\rho_2}, & \text{αν } 0 < \rho_2 \leq +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \rho_2 = 0 \end{cases}$$

Πρόταση 10.3. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ ώστε $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, R η ακτίνα σύγκλισής της και έστω οι R_1, R_2 που μόλις ορίστηκαν. Τότε $R_2 \leq R \leq R_1$.*

Απόδειξη. Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - $R < R_2$. Τότε $R_2 > 0$, οπότε $\rho_2 < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε x ώστε
$$R < |x-\xi| < R_2\,.$$
Τότε
$$\overline{\lim}\left|\tfrac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| = |x-\xi|\,\overline{\lim}\left|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-\xi|\rho_2 < 1,$$
οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο λόγου, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει απολύτως. Άτοπο.
Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - $R_1 < R$. Τότε $R_1 < +\infty$, οπότε $0 < \rho_1$. Θεωρούμε οποιονδήποτε x ώστε
$$R_1 < |x-\xi| < R.$$
Τότε
$$\underline{\lim}\left|\tfrac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| = |x-\xi|\,\underline{\lim}\left|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-\xi|\rho_1 > 1,$$
οπότε η σειρά αποκλίνει. Άτοπο. □

Η άσκηση 14 της ενότητας 8.4 περιέχει δεύτερη απόδειξη της Πρότασης 10.3.

Σε πάρα πολλές περιπτώσεις η Πρόταση 10.3 μας δίνει έναν χρήσιμο εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης μιας δυναμοσειράς: παρατηρήστε ότι, αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, τότε $R_1 = R_2$, οπότε $R = R_1 = R_2$.

Το Θεώρημα 10.7 συμπληρώνει το Θεώρημα 10.6.

Θεώρημα 10.7. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και s η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της I. Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.*

Απόδειξη. Έστω $a, b \in I$, $a \leq b$.
Έστω, ως πρώτη περίπτωση, ότι $|a-\xi| \leq |b-\xi|$.
Τότε θεωρούμε τις *σταθερές* συναρτήσεις
$$f_n(x) = a_n(b-\xi)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
και τις
$$g_n(x) = \tfrac{(x-\xi)^n}{(b-\xi)^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.1(2): η
$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(b-\xi)^n$$
συγκλίνει στη σταθερή συνάρτηση $s(b) - a_0$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \in [a,b]$ και ισχύει $|g_n(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$. Άρα η
$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$$
συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$.
Στη δεύτερη περίπτωση, που είναι $|a-\xi| \leq |b-\xi|$, η απόδειξη είναι παρόμοια, θεωρώντας τις $f_n(x) = a_n(a-\xi)^n$ και $g_n(x) = \frac{(x-\xi)^n}{(a-\xi)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. □

Το Θεώρημα 10.7 λέει ότι μια δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε *κλειστό και φραγμένο* υποδιάστημα του διαστήματος σύγκλισής της, I. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι η δυναμοσειρά εν γένει δε συγκλίνει ομοιόμορφα στο I.

Παραδείγματα. (1) Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ κατά σημείο αλλά *όχι ομοιόμορφα* στο $(-1,1)$. Από την άλλη μεριά, η ίδια δυναμοσειρά συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε $[a,b]$, $-1 < a \leq b < 1$.
(2) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο διάστημα σύγκλισής της, το $[-1,1)$. Επομένως, η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε $[a,b]$, $-1 \leq a \leq b < 1$.

Σχόλιο. Συνήθως, σε βιβλία παρόμοιου επιπέδου αποδεικνύεται μια ασθενέστερη παραλλαγή του Θεωρήματος 10.7, όπου το συμπέρασμα είναι ότι *η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του εσωτερικού του I*. Το Θεώρημα 10.7 και αυτή η παραλλαγή του δεν έχουν καμιά διαφορά όταν εφαρμοστούν στο προηγούμενο παράδειγμα 1, διότι το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1)$ και είναι το ίδιο με το εσωτερικό του. Όμως, έχουν διαφορά όταν εφαρμοστούν στο παράδειγμα 2. Το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1,1)$ και το Θεώρημα 10.7 επιτρέπει να συμπεράνουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της δυναμοσειράς *και* σε διαστήματα $[-1,b]$, $-1 \leq b < 1$ ενώ η ασθενέστερη παραλλαγή του επιτρέπει να συμπεράνουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της δυναμοσειράς μόνο σε διαστήματα $[a,b]$, $-1 < a \leq b < 1$. Η απόδειξη της παραλλαγής είναι αρκετά πιο εύκολη και δεν χρησιμοποιεί το - κάπως εξεζητημένο - Θεώρημα 10.1. Το ισχυρό Θεώρημα 10.7 οφείλεται στον Abel και είναι αρκετά χρήσιμο όταν θέλουμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης, που ορίζεται από την δυναμοσειρά, στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης (όταν αυτά περιέχονται στο διάστημα σύγκλισης).

Στις επόμενες προτάσεις θα εξετάσουμε μερικές σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης η οποία ορίζεται από μια δυναμοσειρά.

Θεώρημα 10.8. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$. Η συνάρτηση s που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της, I, είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω η εσωτερικό σημείο του I. Θεωρούμε $a,b \in I$ ώστε $a < \eta < b$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και, επειδή κάθε συνάρτηση $a_n(x-\xi)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, η s είναι συνεχής στο $[a,b]$. Επειδή ο η είναι εσωτερικό σημείο του $[a,b]$, η s είναι συνεχής στον η. Προσέξτε: αν ο η ήταν άκρο του $[a,b]$, η s θα ήταν συνεχής στον η μόνο από τη μια πλευρά του.
Έστω ότι ο η είναι δεξιό άκρο του I και ανήκει στο I. Η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[\xi,\eta]$ και, επειδή κάθε συνάρτηση $a_n(x-\xi)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι συνεχής στο $[\xi,\eta]$, η s είναι συνεχής στο $[\xi,\eta]$ και, επομένως, είναι συνεχής στον η. Με το ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν ο η είναι αριστερό άκρο του I και ανήκει στο I, τότε η s είναι συνεχής στον η.
Άρα η s είναι συνεχής στο I. □

Θεώρημα 10.9. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$. Αν s είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της, I, τότε για κάθε $a,b \in I$ ισχύει*

$$\int_a^b s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\big((b-\xi)^{n+1} - (a-\xi)^{n+1}\big).$$

Απόδειξη. Αν $a,b \in I$, $a < b$, η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$, οπότε το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 10.3.
Η περίπτωση $a = b$ είναι προφανής και η $b < a$ ανάγεται στην $a < b$. □

Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 10.8 γράφεται και

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n\Big)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\big((b-\xi)^{n+1} - (a-\xi)^{n+1}\big)$$

και μπορεί να "διαβαστεί" ως εναλλαγή των συμβόλων της σειράς και του ολοκληρώματος.

Θεώρημα 10.10. *Έστω οι δυναμοσειρές* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ *και* $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$.
(1) Οι δυο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, έστω R.
(2) Αν I, I' *είναι, αντιστοίχως, τα διαστήματα σύγκλισης των δυο δυναμοσειρών, τότε* $I' \subseteq I$. *Επίσης, αν* $R > 0$, *τότε η συνάρτηση* s *που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά στο* I *είναι παραγωγίσιμη στο* I' *και*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1} \qquad (x \in I').$$

Απόδειξη. (1) Έστω $\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ και $\rho' = \overline{\lim} \sqrt[n]{|na_n|}$.
Αν $\rho = +\infty$, τότε, προφανώς, $\rho' \leq \rho$. Έστω $0 \leq \rho < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $x > \rho$ και, κατόπιν, οποιονδήποτε y ώστε $\rho < y < x$. Τότε ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|} < y$ και, επειδή, $\sqrt[n]{n} \to 1$, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{n} < \frac{x}{y}$. Άρα ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|} < y$ και $\sqrt[n]{n} < \frac{x}{y}$ και, επομένως, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|na_n|} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{x}{y}y = x$. Άρα $\rho' \leq x$. Επειδή αυτό το τελευταίο ισχύει για κάθε $x > \rho$, συνεπάγεται $\rho' \leq \rho$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\rho' \leq \rho$.
Αν $\rho' = +\infty$, τότε, προφανώς, $\rho \leq \rho'$. Έστω $0 \leq \rho' < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $x > \rho'$. Τότε ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|na_n|} < x$ και, επειδή $\sqrt[n]{n} > 1$, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|} < x$. Άρα $\rho \leq x$. Επειδή αυτό το τελευταίο ισχύει για κάθε $x > \rho'$, συνεπάγεται $\rho \leq \rho'$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\rho \leq \rho'$.
Συμπεραίνουμε ότι $\rho' = \rho$, οπότε οι δυναμοσειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, έστω R.
Αν πολλαπλασιάσουμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ με $x-\xi$, τότε προκύπτει η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^n$. Άρα οι δυο δυναμοσειρές συγκλίνουν για τους ίδιους ακριβώς x, οπότε έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, δηλαδή το R.
(2) Αν $R = 0$, τότε, προφανώς, $I' = I = \{\xi\}$. Για τα παρακάτω υποθέτουμε ότι $R > 0$. Επειδή οι δυο δυναμοσειρές έχουν το ίδιο κέντρο ξ και τις ίδιες ακτίνες σύγκλισης R, τα διαστήματα I, I' έχουν τα ίδια εσωτερικά σημεία και διαφέρουν *πιθανόν* ως προς τα άκρα τους.
Έστω η εσωτερικό σημείο του I' και, επομένως, και του I. Επιλέγουμε εσωτερικά σημεία a, b των I' και I ώστε $a < \eta < b$. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.4, η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με παράγωγο $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ $(x \in [a,b])$. Επειδή ο η είναι εσωτερικό σημείο του $[a,b]$, η s είναι παραγωγίσιμη στον η και $s'(\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(\eta-\xi)^{n-1}$.
Προσέξτε: αν ο η ήταν άκρο του $[a,b]$, η s θα ήταν παραγωγίσιμη στον η μόνο από τη μια πλευρά του.
Έστω η δεξιό άκρο του I' και έστω ότι ο η *ανήκει* στο I'. Επιλέγουμε εσωτερικό σημείο a του I ώστε $a < \eta$. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,\eta]$ και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει για $x = a$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.4, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,\eta]$. Ειδικώτερα, η δυναμοσειρά συγκλίνει αν $x = \eta$ και, επομένως, ο η *ανήκει* στο I. Άρα η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,\eta]$. Σύμφωνα, πάλι, με το Θεώρημα 10.4, η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a,\eta]$ με παράγωγο $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ $(x \in [a,\eta])$. Ειδικώτερα, η s είναι παραγωγίσιμη στον η και $s'(\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(\eta-\xi)^{n-1}$.
Η απόδειξη είναι ίδια αν ο η είναι αριστερό άκρο του I'. □

Παρατηρήστε ότι τα διαστήματα I, I' στο Θεώρημα 10.10 μπορούν να διαφέρουν *μόνο ως προς τα άκρα τους* με τον εξής τρόπο: αν το I περιέχει κάποιο από τα άκρα του, το I' μπορεί να το περιέχει αλλά μπορεί και να μην το περιέχει και, αν το I δεν περιέχει κάποιο από τα άκρα του, το I' δεν το περιέχει, επίσης.

Παρατηρήστε ότι η $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ γράφεται και

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$$

και μπορεί να "διαβαστεί" ως εναλλαγή των συμβόλων της σειράς και της παραγώγου.

Θα δούμε, τώρα, μερικά σημαντικά παραδείγματα.

Παραδείγματα. (1) Η γεωμετρική δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
Γνωρίζουμε ότι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-1,1)$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 10.8, η συνάρτηση s που ορίζεται από αυτήν στο $(-1,1)$ είναι συνεχής στο $(-1,1)$. Αυτό επιβεβαιώνεται άμεσα, αφού γνωρίζουμε ότι $s(x) = \frac{1}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$. Η συνάρτηση αυτή είναι, προφανώς, και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ κι αυτό, όπως θα δούμε, επιβεβαιώνει το Θεώρημα 10.10.
Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.10. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης, επίσης, $R = 1$ και διάστημα σύγκλισης, επίσης, $(-1,1)$. Ακόμη, ισχύει

$$\tfrac{1}{(1-x)^2} = s'(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Θυμηθείτε ότι έχουμε ήδη αποδείξει τον ίδιο τύπο, χρησιμοποιώντας το γινόμενο Cauchy σειρών. Επαναλαμβάνουμε την παραγώγιση όσες φορές θέλουμε, διατηρώντας το ίδιο κάθε φορά διάστημα σύγκλισης, και καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} \qquad (-1 < x < 1)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$.
Ολοκληρώνοντας τη γεωμετρική σειρά βάσει του Θεωρήματος 10.9, βρίσκουμε

$$-\log(1-x) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$$

για $x \in (-1,1)$ ή, ισοδύναμα,

$$\log x = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad (0 < x < 2).$$

(2) **Η λογαριθμική δυναμοσειρά**: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.
Η δυναμοσειρά αυτή προέκυψε στο προηγούμενο παράδειγμα, μέσω της γεωμετρικής δυναμοσειράς, αλλά θα την μελετήσουμε και ανεξάρτητα από τη γεωμετρική δυναμοσειρά.
Είναι

$$\sqrt[n]{\left|\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right|} = \tfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1,$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = \frac{1}{1} = 1$ και το διάστημα σύγκλισης έχει άκρα $1-1=0$, $1+1=2$. Για $x=0$ η δυναμοσειρά γίνεται

$$-\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

και αποκλίνει. Για $x = 2$ η δυναμοσειρά γίνεται

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(0,2]$. Έστω

$$s(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n\qquad(0<x\leq 2)$$

η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Τότε η s είναι συνεχής στο $(0,2]$.
Θεωρούμε την

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.10. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R=1$ και διάστημα σύγκλισης το $(0,2)$ ή το $(0,2]$. Για $x=2$ η δυναμοσειρά γίνεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$$

και αποκλίνει, οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(0,2)$. Η s είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και ισχύει

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}=\log' x$$

για κάθε $x\in(0,2)$, οπότε υπάρχει c ώστε $s(x)-\log x=c$ για κάθε $x\in(0,2)$. Είναι $s(1)=0$, οπότε $c=0$. Συμπεραίνουμε ότι $s(x)=\log x$ για κάθε $x\in(0,2)$. Επειδή η s είναι συνεχής στο $(0,2]$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=s(2)=\lim_{x\to 2-}s(x)=\lim_{x\to 2-}\log x=\log 2.$$

Επομένως,

$$\log x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n\qquad(0<x\leq 2).$$

Ξαναβρίσκουμε, λοιπόν, την τελευταία σχέση του προηγούμενου παραδείγματος αλλά *και για τον* $x=2$. Παρατηρήστε την ενδιαφέρουσα σχέση

$$\log 2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots.$$

(3) **Η εκθετική δυναμοσειρά**: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$.
Είναι

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\to 0,$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=+\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty,+\infty)$. Έστω

$$s(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n\qquad(x\in\mathbb{R})$$

η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Η s είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\frac{1}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=s(x)$$

για κάθε x. Τώρα, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x)=e^{-x}s(x)$$

και βρίσκουμε ότι

$$f'(x)=-e^{-x}s(x)+e^{-x}s'(x)=0$$

για κάθε x. Άρα υπάρχει c ώστε $f(x)=c$ ή, ισοδύναμα, $s(x)=ce^x$ για κάθε x. Είναι $s(0)=1$, οπότε $c=1$ και συμπεραίνουμε ότι $s(x)=e^x$ για κάθε x. Δηλαδή

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Δείτε, επίσης, την άσκηση 3 της υποενότητας 8.5.2 αλλά και την επόμενη ενότητα.

(4) **Η δυναμοσειρές του συνημιτόνου**, $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$, και **του ημιτόνου**, $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$.
Η ακολουθία των συντελεστών της πρώτης δυναμοσειράς έχει διπλό τύπο:

$$a_{2k-1}=0, \qquad a_{2k}=\tfrac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

Άρα

$$\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|}=0\to 0, \qquad \sqrt[2k]{|a_{2k}|}=\tfrac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}}\to 0.$$

και, επομένως,

$$\sqrt[n]{|a_n|}\to 0,$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=+\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $\mathbb{R}$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα για τη δεύτερη δυναμοσειρά. Έστω, τώρα,

$$c(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, \quad s(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

οι συναρτήσεις που ορίζονται από τις δυναμοσειρές. Οι c,s είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και

$$c'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}2k\tfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k-1}=-s(x), \qquad s'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(2k-1)\tfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-2}=c(x)$$

για κάθε x. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x)=(c(x)-\cos x)^2+(s(x)-\sin x)^2$$

και βρίσκουμε ότι

$$f'(x)=2(c(x)-\cos x)(-s(x)+\sin x)+2(s(x)-\sin x)(c(x)-\cos x)=0$$

για κάθε x. Άρα υπάρχει c ώστε $f(x)=c$ για κάθε x. Επειδή $f(0)=0$, συνεπάγεται

$$(c(x)-\cos x)^2+(s(x)-\sin x)^2=0$$

για κάθε x. Άρα $c(x)=\cos x$, $s(x)=\sin x$ για κάθε x. Δηλαδή,

$$\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, \quad \sin x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

(5) **Η δυναμοσειρά της τόξο-εφαπτόμενης**: $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1}$.
Η ακολουθία των συντελεστών έχει διπλό τύπο:

$$a_{2k-1}=\tfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}, \qquad a_{2k}=0.$$

Άρα

$$\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|}=\tfrac{1}{\sqrt[2k-1]{2k-1}}\to 1, \qquad \sqrt[2k]{|a_{2k}|}=0\to 0.$$

Άρα

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=1,$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=\frac{1}{1}=1$ και το διάστημα σύγκλισης έχει άκρα $-1,\ 1$. Για $x=-1$ η δυναμοσειρά γίνεται

$$-\sum_{k=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

και συγκλίνει. Για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1]$. Έστω

$$s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} \qquad (x \in [-1, 1])$$

η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Η s είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.
Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1) \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.10. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης, επίσης, $R = 1$. Για $x = \pm 1$ γίνεται

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$$

και αποκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης της *νέας* δυναμοσειράς είναι το $(-1, 1)$. Η s είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και

$$s'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επομένως, υπάρχει c ώστε $s(x) - \arctan x = c$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επειδή $s(0) = 0$, συνεπάγεται $c = 0$, οπότε $s(x) = \arctan x$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επειδή η s είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, ισχύει

$$s(1) = \lim_{x \to 1-} s(x) = \lim_{x \to 1-} \arctan x = \arctan 1,$$

$$s(-1) = \lim_{x \to -1+} s(x) = \lim_{x \to -1+} \arctan x = \arctan(-1).$$

Επομένως,

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} \qquad (-1 \le x \le 1).$$

Παρατηρήστε τη σχέση:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

(6) **Η δυωνυμική σειρά**: $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, όπου οι αριθμοί $\binom{\alpha}{n}$ ορίζονται για κάθε α με τους τύπους

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Είναι φανερό ότι το σύμβολο $\binom{\alpha}{n}$ είναι επέκταση του γνωστού συμβόλου $\binom{m}{n}$, το οποίο είχε ορισθεί για $n, m \in \mathbb{Z}$, $0 \le n \le m$. Παρατηρήστε ότι, αν ο α είναι μη-αρνητικός ακέραιος, τότε $\binom{\alpha}{n} = 0$ για κάθε $n \ge \alpha + 1$, οπότε η δυναμοσειρά γράφεται

$$1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha} x^\alpha = (1+x)^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \ge 0, x \in \mathbb{R}),$$

βάσει του δυωνυμικού τύπου του Newton. Επομένως, στην περίπτωση που ο α είναι μη-αρνητικός ακέραιος η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$. Στην περίπτωση που ο α *δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος*, υπολογίζουμε

$$\left|\binom{\alpha}{n+1} / \binom{\alpha}{n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \to 1,$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 1. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι ένα από τα: $(-1,1)$, $(-1,1]$, $[-1,1)$, $[-1,1]$. Θα αποδείξουμε ότι (i) *αν* $\alpha \leq -1$, *τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $(-1,1)$, (ii) *αν* $-1 < \alpha < 0$, *τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $(-1,1]$ *και* (iii) *αν* $\alpha \geq 0$ *(και ο* α *δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος), τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $[-1,1]$. Θα χρησιμοποιήσουμε αρκετές φορές το εξής λήμμα.

Λήμμα 10.1. *Αν* $\mu, \nu > -1$, *τότε υπάρχουν δυο αριθμοί* $c_1, c_2 > 0$, *οι οποίοι εξαρτώνται μόνο από τους* μ, ν, *ώστε*

$$c_1 n^{\mu-\nu} \leq \frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq c_2 n^{\mu-\nu} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} &= (1+\tfrac{\mu-\nu}{\nu+1})(1+\tfrac{\mu-\nu}{\nu+2})\cdots(1+\tfrac{\mu-\nu}{\nu+n}) \leq e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}+\frac{\mu-\nu}{\nu+2}+\cdots+\frac{\mu-\nu}{\nu+n}} \\ &= e^{(\mu-\nu)(\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\cdots+\frac{1}{\nu+n})}.\end{aligned}$$

Τώρα, αν $\nu \leq \mu$, συνεπάγεται

$$\tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{(\mu-\nu)(\frac{1}{\nu+1}+\int_1^n \frac{1}{\nu+x}\,dx)} = e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\tfrac{\nu+n}{\nu+1})^{\mu-\nu}.$$

Επειδή $\nu+n \leq (\nu+2)n$, συνεπάγεται

$$\tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\tfrac{\nu+2}{\nu+1})^{\mu-\nu} n^{\mu-\nu}.$$

Αν $\mu \leq \nu$, τότε

$$\tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{(\mu-\nu)\int_1^{n+1} \frac{1}{\nu+x}\,dx} = (\tfrac{\nu+n+1}{\nu+1})^{\mu-\nu}$$

και, επειδή $\nu+n+1 \geq n$, συνεπάγεται

$$\tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq \tfrac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu}} n^{\mu-\nu}.$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\tfrac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq c_2 n^{\mu-\nu},$$

όπου c_2 είναι ο αριθμός $e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\frac{\nu+2}{\nu+1})^{\mu-\nu}$ ή ο $\frac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu}}$ ανάλογα με το αν $-1 < \nu \leq \mu$ ή $-1 < \mu \leq \nu$, αντιστοίχως.
Αποδείχτηκε, λοιπόν, η δεξιά ανισότητα. Η αριστερή ανισότητα είναι ακριβώς ίδια με τη δεξιά (με $c_1 = \frac{1}{c_2}$), αρκεί να εναλλάξουμε τους ρόλους των μ, ν. □

Επιστρέφουμε στη μελέτη της σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ για $x = \pm 1$.
(i) Αν $x = 1$, η δυναμοσειρά γράφεται

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}.$$

Αν $\alpha < 0$, τότε

$$\tbinom{\alpha}{n} = (-1)^n \tfrac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\alpha \leq -1$, τότε

$$|\tbinom{\alpha}{n}| \geq 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η σειρά αποκλίνει.
Αν $-1 < \alpha < 0$, ο $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}$ φθίνει καθώς ο n αυξάνει και

$$\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \le c_2 n^{|\alpha|-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \to 0$. Άρα, αν $-1 < \alpha < 0$, η σειρά συγκλίνει. Παρεμπιπτόντως, βλέπουμε ότι

$$|\tbinom{\alpha}{n}| = \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \ge c_1 n^{|\alpha|-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η σειρά δε συγκλίνει απολύτως.
Αν $\alpha \ge 0$, επειδή ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος, ισχύει $m < \alpha < m+1$, όπου $m = [\alpha]$ είναι μη-αρνητικός ακέραιος. Άρα για $n \in \mathbb{N}$, $n \ge m+1$ είναι

$$|\tbinom{\alpha}{n}| = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!} = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{(m+2)\cdots n} \le c_2 \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\,.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.
Συνοψίζουμε: ο 1 ανήκει στο διάστημα σύγκλισης I, αν $\alpha > -1$, και δεν ανήκει στο I, αν $\alpha \le -1$.
(ii) Αν $x = -1$, η δυναμοσειρά γράφεται

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}(-1)^n\,.$$

Αν $\alpha < 0$, τότε

$$\tbinom{\alpha}{n}(-1)^n = \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \ge c_1 \frac{1}{n^{1-|\alpha|}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η σειρά αποκλίνει.
Αν $\alpha \ge 0$, ισχύει $m < \alpha < m+1$, όπου $m = [\alpha]$ είναι μη-αρνητικός ακέραιος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \ge m+1$ είναι

$$|\tbinom{\alpha}{n}(-1)^n| = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!} = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{(m+2)\cdots n} \le c_2 \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\,,$$

οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.
Συνοψίζουμε: ο -1 ανήκει στο διάστημα σύγκλισης I, αν $\alpha \ge 0$, και δεν ανήκει στο I, αν $\alpha < 0$.
Τώρα έστω s η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισης I. Η s είναι συνεχής στο I και θα βρούμε τον τύπο της. Θεωρούμε και τη δυναμοσειρά

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.10. Η νέα δυναμοσειρά έχει διάστημα σύγκλισης τουλάχιστον το $(-1,1)$, η s είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και

$$s'(x) = \alpha\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Με λίγες πράξεις, συνεπάγεται

$$(1+x)s'(x) = \alpha s(x)$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Ορίζουμε την

$$f(x) = (1+x)^{-\alpha}s(x) \qquad (x \in (-1,1)),$$

οπότε

$$f'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}s(x) + (1+x)^{-\alpha}s'(x) = 0$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα υπάρχει c ώστε $f(x) = c$ ή, ισοδύναμα, $s(x) = c(1+x)^\alpha$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Είναι $s(0) = 1$, οπότε $c = 1$ και, επομένως, $s(x) = (1+x)^\alpha$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Το διάστημα I ενδέχεται να περιέχει και έναν ή και τους δυο από τους ± 1. Αν $\alpha > -1$, τότε $1 \in I$ και, επειδή η s είναι συνεχής στο I, συνεπάγεται

$$s(1) = \lim_{x\to 1-} s(x) = \lim_{x\to 1-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha\,.$$

Αν $\alpha \geq 0$ (και ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος), τότε $-1 \in I$ και, για τον ίδιο λόγο, συνεπάγεται

$$s(-1) = \lim_{x\to -1+} s(x) = \lim_{x\to -1+} (1+x)^\alpha = 0.$$

Συμπέρασμα:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

για κάθε x στο διάστημα $(-1,1)$, αν $\alpha \leq -1$, στο $(-1,1]$, αν $-1 < \alpha < 0$, και στο $[-1,1]$, αν $\alpha \geq 0$ (και ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος). Η σχέση αυτή ονομάζεται **γενικός δυωνυμικός τύπος του Newton**.

Αξίζει να ξεχωρίσουμε δυο ειδικές περιπτώσεις:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{x^n}{2n-1} \qquad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$\tfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} x^n \qquad (-1 < x \leq 1).$$

Ασκήσεις.

1. Βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3x^n$.

2. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{\sqrt{n^3+1}} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2^n + \frac{3^n}{n}\right) x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^n} x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+3^n+5^n} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{4n-3} x^{3n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n^2}}{\sqrt{n}} x^{n^2}$. Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης.

3. Έστω $R > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-\xi)^n$ και s η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $(\xi - R, \xi + R)$. Αποδείξτε ότι

$$s^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1) a_n (x-\xi)^{n-m} \quad (\xi - R < x < \xi + R)$$

   και

$$s^{(m)}(\xi) = m! a_m\,.$$

4. Αναλόγως της τιμής του p, βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n$ και, αν s είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της, βρείτε σε ποιο διάστημα είναι η s παραγωγίσιμη.

5. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right)^3 x^n$. Για τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης χρησιμοποιήστε το Λήμμα 10.1.

6. Θεωρήστε τη δυναμοσειρά

$$1+\frac{ab}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots .$$

Αυτή ονομάζεται **υπεργεωμετρική σειρά** και η συνάρτηση που ορίζεται από αυτήν στο διάστημα σύγκλισής της ονομάζεται **υπεργεωμετρική συνάρτηση** και συμβολίζεται $F(a,b,c;x)$. Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της υπεργεωμετρικής σειράς ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων a,b,c. Για τα άκρα του διαστήματος σύγκλισης χρησιμοποιήστε το Λήμμα 10.1.

7. Αποδείξτε ότι $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$ για κάθε $x\in(-1,1)$, γράφοντας το $\frac{1}{1+x^2}$ ως γεωμετρική σειρά. Κατόπιν, αποδείξτε ότι η σχέση αυτή ισχύει και για $x=\pm 1$.

8. Αποδείξτε ότι $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\,x^{2k-1}$ για κάθε $x\in(-1,1)$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον γενικό δυωνυμικό τύπο του Newton με $a=-\frac{1}{2}$ και $-x^2$ στη θέση του x.
Αποδείξτε ότι

$$\arcsin x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\,x^{2k-1}\qquad(-1\leq x\leq 1).$$

9. Έστω αριθμοί p,q, όχι και οι δυο ίσοι με 0, και δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Υποθέτουμε ότι $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$.
(i) Αποδείξτε ότι για κάθε x στο διάστημα σύγκλισής της η δυναμοσειρά έχει άθροισμα $\frac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$.
(ii) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

10. Αν οι σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty}a_m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι το γινόμενο Cauchy $\sum_{k=0}^{+\infty}c_k$ των δυο σειρών συγκλίνει και $\sum_{k=0}^{+\infty}c_k=\sum_{m=0}^{+\infty}a_m\ \sum_{n=0}^{+\infty}b_n$.
Υπόδειξη: Οι δυναμοσειρές $\sum_{m=0}^{+\infty}a_mx^m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ έχουν ως διαστήματα σύγκλισης τουλάχιστον το $(-1,1]$. Το γινόμενο Cauchy τους είναι η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty}c_kx^k$ και έχει κι αυτή ως διάστημα σύγκλισης τουλάχιστον το $(-1,1]$. Λόγω απόλυτης σύγκλισης στο διάστημα $(-1,1)$, από το Θεώρημα 8.4 συνεπάγεται ότι $\sum_{k=0}^{+\infty}c_kx^k=\sum_{m=0}^{+\infty}a_mx^m\ \sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Το συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα 10.8.

10.3 Σειρές Taylor.

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ ορίζει μια συνάρτηση στο διάστημα σύγκλισής της, το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τον ξ και περιέχει κανένα ή ένα ή και τα δυο άκρα του. Σ' αυτήν την ενότητα θα ακολουθήσουμε την αντίστροφη διαδικασία.

Ορισμός. Έστω συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in A$. Αν υπάρχει διάστημα $I\subseteq A$ με μέσο ξ, το οποίο δεν αποτελείται μόνο από τον ξ, και δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ ώστε να ισχύει

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n\qquad(x\in I),$$

τότε λέμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ είναι η **σειρά Taylor της f στον ξ**.

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Το διάστημα $(-1,1)$ με μέσο 0 περιέχεται στο σύνολο αυτό και υπάρχει η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ για την οποία ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Επομένως, η $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ είναι η σειρά Taylor της $\frac{1}{1-x}$ στον 0.

Η σειρά Taylor της f στον ξ, αν υπάρχει, είναι μοναδική. Πράγματι, είναι άμεση συνέπεια της άσκησης 3 της ενότητας 10.2 ότι οι συντελεστές της σειράς Taylor της f στον ξ είναι οι αριθμοί $a_0 = f(\xi)$ και $a_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Θεώρημα 10.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$, διάστημα $I \subseteq A$ με μέσο ξ, το οποίο δεν αποτελείται μόνο από τον ξ, και έστω ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Τότε για κάθε $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + R_{n,\xi}(x,\zeta) \text{ ή } R_{n,\xi}(x),$$

όπου $R_{n,\xi}(x,\zeta)$ είναι το υπόλοιπο Lagrange ή το υπόλοιπο Cauchy τάξης n και $R_{n,\xi}(x)$ είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο τάξης n.
Αν για κάθε $x \in I$ ισχύει $R_{n,\xi}(x,\zeta) \to 0$ ή $R_{n,\xi}(x) \to 0$, τότε η σειρά Taylor της f στον ξ είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$. Δηλαδή,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \qquad (x \in I).$$

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος είναι απλή συνέπεια των Θεωρημάτων 5.1 και 7.1. Το δεύτερο μέρος είναι προφανές: αν $R_{n,\xi}(x,\zeta) \to 0$ για κάθε $x \in I$, τότε

$$f(\xi) + \tfrac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \to f(x)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = f(x)$$

για κάθε $x \in I$. □

Παραδείγματα. (1) Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού το πολύ m και οποιοσδήποτε ξ.
Για κάθε x και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ ισχύει $p^{(n+1)}(x) = 0$. Άρα το υπόλοιπο Lagrange είναι

$$R_{n,\xi}(x,\zeta) = \tfrac{p^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1} = 0,$$

οπότε $R_{n,\xi}(x,\zeta) \to 0$. Άρα η σειρά Taylor της p στον ξ είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = p(\xi) + \frac{p'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{p^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m$. Δηλαδή,

$$p(x) = p(\xi) + \frac{p'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{p^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Αυτό είναι το λεγόμενο *ανάπτυγμα πολυωνύμου σε δυνάμεις του* $x - \xi$. Φυσικά, στην περίπτωση $\xi = 0$, το ανάπτυγμα σε δυνάμεις του x είναι $p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{p^{(m)}(0)}{m!}x^m$.
(2) Η εκθετική συνάρτηση exp είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και, μάλιστα, ισχύει $\exp^{(n)} = \exp$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, είναι $\exp^{(n)}(0) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η πιθανή σειρά Taylor της exp στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$.

Το υπόλοιπο Lagrange τάξης n της exp στον 0 είναι $R_{n,0}(x,\zeta) = \frac{e^{\zeta}}{(n+1)!}x^{n+1}$, όπου $\zeta \in [0,x]$ ή $\zeta \in [x,0]$. Αν $x \geq 0$, τότε

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| = \tfrac{e^{\zeta}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \tfrac{e^{x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

και, αν $x \leq 0$, τότε

$$|R_{n,0}(x;\zeta)| = \tfrac{e^{\zeta}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \tfrac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}\,.$$

Αποδεικνύεται ότι, για κάθε a,

$$\frac{a^n}{n!} \to 0.$$

Το όριο αυτό είναι απλή συνέπεια της σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$. Ένας πιο άμεσος τρόπος να αποδείξουμε ότι $\frac{a^n}{n!} \to 0$ είναι ο εξής. Ορίζουμε $m = [|a|]$, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m+1$ ισχύει

$$0 \leq \tfrac{|a|^n}{n!} = \tfrac{|a|^m}{m!}\tfrac{|a|}{m+1}\cdots\tfrac{|a|}{n} \leq \tfrac{|a|^m}{m!}\tfrac{|a|}{m+1}\cdots\tfrac{|a|}{m+1} = \tfrac{(m+1)^m}{m!}(\tfrac{|a|}{m+1})^n\,.$$

Επειδή $0 \leq \frac{|a|}{m+1} < 1$, συνεπάγεται $(\frac{|a|}{m+1})^n \to 0$. Άρα $\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} \to 0$ και, επομένως, $\frac{a^n}{n!} \to 0$.
Χρησιμοποιώντας το παραπάνω όριο, βρίσκουμε $|R_{n,0}(x,\zeta)| \to 0$. Άρα η σειρά Taylor της exp στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$. Δηλαδή,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(3) Η cos είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\cos^{(n)} = \pm\cos$ ή $\pm\sin$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικώτερα, είναι $\cos^{(n)}(0) = 1$ ή 0 ή -1 ή 0 αν είναι, αντιστοίχως, $n = 4k+0$ ή $4k+1$ ή $4k+2$ ή $4k+3$, $(k \in \mathbb{Z}, k \geq 0)$. Άρα η πιθανή σειρά Taylor της cos στον 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$.
Το υπόλοιπο Lagrange τάξης n της cos στον 0 είναι $R_{n,0}(x,\zeta) = \frac{\pm\cos\zeta}{(n+1)!}x^{n+1}$ ή $\frac{\pm\sin\zeta}{(n+1)!}x^{n+1}$, όπου $\zeta \in [0,x]$ ή $\zeta \in [x,0]$. Τότε

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| \leq \tfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

οπότε $R_{n,0}(x,\zeta) \to 0$. Επομένως, η σειρά Taylor της cos στον 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$. Δηλαδή

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τη σειρά Taylor της sin στον 0:

$$\sin x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(4) Η συνάρτηση $\log(1+x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ και έχει παραγώγους n-οστής τάξης με τύπο $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. Ειδικώτερα, η τιμή της n-οστής παραγώγου στον 0 είναι $(-1)^{n-1}(n-1)!$ και, επομένως, η πιθανή σειρά Taylor της $\log(1+x)$ στον 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.
Το υπόλοιπο Lagrange στον 0 εινaι $R_{n,0}(x,\zeta) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)}x^{n+1}$, όπου $\zeta \in [0,x]$ ή $\zeta \in [x,0]$. Αν $0 < x \leq 1$, τότε

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| = \tfrac{x^{n+1}}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)} \leq \tfrac{1}{n+1},$$

οπότε $R_{n,0}(x,\zeta) \to 0$.
Τώρα, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στον 0 είναι

$$R_{n,0}(x) = \tfrac{1}{n!}\int_0^x \tfrac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}(x-t)^n\,dt = (-1)^n\int_0^x \tfrac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

Αν $-1 < x \leq 0$, τότε

$$|R_{n,0}(x)| = \big| -\int_x^0 \tfrac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt\big| = \int_x^0 \tfrac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

Επειδή $(\frac{t-x}{1+t})^n \leq |x|^n$ για κάθε $t \in [x,0]$, είναι

$$|R_{n,0}(x)| \leq |x|^n \int_x^0 \tfrac{1}{1+t}\,dt = |x|^n \log\tfrac{1}{1+x}\,.$$

Άρα $R_{n,0}(x) \to 0$.
Άρα η σειρά Taylor της $\log(1+x)$ στον 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$. Δηλαδή,

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad (-1 < x \leq 1).$$

Προφανώς, η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad (0 < x \leq 2)$$

την οποία έχουμε αποδείξει στην προηγούμενη ενότητα.
Τώρα θα βρούμε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $\log(1+x)$ στον 0 με έναν άλλο τρόπο, χωρίς να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 10.11. Αυτός ο τρόπος θα εφαρμοστεί σε ένα ακόμη παράδειγμα, όπου θα είναι δύσκολη η εφαρμογή του Θεωρήματος 10.11.
Αρχίζουμε με τον γνωστό τύπο $\frac{1-(-t)^n}{1+t} = 1 + (-t) + \cdots + (-t)^{n-1}$, ο οποίος ισχύει για κάθε $t \neq -1$, και τον γράφουμε

$$\tfrac{1}{1+t} = 1 - t + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n\tfrac{t^n}{1+t}\,.$$

Επομένως,

$$\int_0^x \tfrac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t\,dt + \cdots + (-1)^{n-1}\int_0^x t^{n-1}\,dt + (-1)^n\int_0^x \tfrac{t^n}{1+t}\,dt$$

για κάθε $x > -1$, οπότε

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (-1)^n\int_0^x \tfrac{t^n}{1+t}\,dt$$

για κάθε $x > -1$.
Αν $0 \leq x \leq 1$, τότε

$$\big|(-1)^n\int_0^x \tfrac{t^n}{1+t}\,dt\big| = \int_0^x \tfrac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \tfrac{x^{n+1}}{n+1} \leq \tfrac{1}{n+1}$$

και, επομένως, $(-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \to 0$.
Αν $-1 < x \leq 0$, τότε

$$\big|(-1)^n\int_0^x \tfrac{t^n}{1+t}\,dt\big| = \int_x^0 \tfrac{|t|^n}{1+t}\,dt \leq \tfrac{1}{1+x}\int_x^0 |t|^n\,dt = \tfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \leq \tfrac{1}{(n+1)(1+x)},$$

οπότε $(-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \to 0$.
Άρα ισχύει $(-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \to 0$ και, επομένως,

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \to \log(1+x)$$

για κάθε $x \in (-1, 1]$. Συνεπάγεται

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

για κάθε x στο $(-1, 1]$.

(5) Θα δούμε ότι η σειρά Taylor της συνάρτησης $\arctan x$ στον 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ με διάστημα σύγκλισης το $[-1, 1]$. Δηλαδή,

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \qquad (-1 \leq x \leq 1).$$

Η συνάρτηση $\arctan x$ έχει παράγωγο $\frac{1}{x^2+1}$ αλλά ο υπολογισμός των παραγώγων ανώτερης τάξης είναι περίπλοκος και δεν είναι βολική η εφαρμογή του Θεωρήματος 10.11. Γι αυτό καταφεύγουμε σε ένα τέχνασμα παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στο τέλος του προηγούμενου παραδείγματος. Είναι $\frac{1-(-t^2)^n}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{2n-2}$, οπότε

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

για κάθε t. Επομένως,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x 1\, dt - \int_0^x t^2\, dt + \int_0^x t^4\, dt - \cdots + (-1)^{n-1} \int_0^x t^{2n-2}\, dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt.$$

Αυτό το γράφουμε

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt.$$

Αν $|x| \leq 1$, τότε

$$\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt\right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \leq \int_0^{|x|} t^{2n}\, dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1},$$

οπότε $(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt \to 0$. Άρα

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \to \arctan x$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = \arctan x$$

για κάθε $x \in [-1, 1]$.

(6) Η συνάρτηση $(1 + x)^\alpha$ έχει παράγωγο n-οστής τάξης την $\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$ και, ειδικώτερα, στον 0 είναι $\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)$. Επομένως, η πιθανή σειρά Taylor της $(1+x)^\alpha$ στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

Αν ο α είναι μη-αρνητικός ακέραιος, τότε αφ' ενός η $y = (1 + x)^\alpha$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού α αφ' ετέρου η παραπάνω δυναμοσειρά γίνεται (όπως έχουμε ξαναπεί) πεπερασμένο άθροισμα $1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha$. Στην περίπτωση αυτή η ισότητα

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha - 1}x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \geq 0)$$

δεν είναι παρά ο δυωνυμικός τύπος του Newton και, επομένως, η παραπάνω δυναμοσειρά είναι, πράγματι, η σειρά Taylor της $y = (1 + x)^\alpha$ στον 0 με διάστημα σύγκλισης το $\mathbb{R}$.

Αν ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος, θα αποδείξουμε ότι και πάλι η σειρά Taylor της $(1+x)^\alpha$ στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$. Δηλαδή,

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

για κάθε x είτε στο διάστημα $(-1,1)$, αν $\alpha\leq -1$, είτε στο $(-1,1]$, αν $-1<\alpha<0$, είτε στο $[-1,1]$, αν $\alpha\geq 0$ και ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος.
Το υπόλοιπο Lagrange είναι

$$R_{n,0}(x,\zeta)=\tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\zeta)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}=\tbinom{\alpha}{n+1}(1+\zeta)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

για κάποιον $\zeta\in[0,x]$ ή $\zeta\in[x,0]$.
Αν $x\in[0,1]$, τότε $x\leq 1\leq 1+\zeta\leq 2$ και, επομένως,

$$|R_{n,0}(x,\zeta)|=\left|\tbinom{\alpha}{n+1}\right|(1+\zeta)^\alpha\left(\tfrac{x}{1+\zeta}\right)^{n+1}.$$

Τώρα, αν $a>0$, εφαρμόζοντας προσεκτικά το Λήμμα 10.1, βρίσκουμε ότι για $n>[\alpha]$ είναι

$$|R_{n,0}(x,\zeta)|\leq c_2\tbinom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}2^\alpha,$$

οπότε $R_{n,0}(x,\zeta)\to 0$. Αν $-1<\alpha<0$, τότε, πάλι από το Λήμμα 10.1,

$$|R_{n,0}(x,\zeta)|\leq c_2(n+1)^{-\alpha-1},$$

οπότε $R_{n,0}(x,\zeta)\to 0$.
Αν $x\in[0,1)$ και $\alpha\leq -1$, τότε, από το Λήμμα 10.1,

$$|R_{n,0}(x,\zeta)|\leq\left|\tbinom{\alpha}{n+1}\right|x^{n+1}\leq c_2(n+1)^{-\alpha-1}x^{n+1},$$

οπότε $R_{n,0}(x,\zeta)\to 0$.
Αν $x\in(-1,0]$, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι

$$R_{n,0}(x)=\tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x(1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt,$$

οπότε

$$|R_{n,0}(x)|=\left|\tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right|\int_x^0(1+t)^{\alpha-n-1}(t-x)^n\,dt.$$

Επειδή $\frac{t-x}{1+t}\leq -x$ για $x\leq t\leq 0$, είναι

$$\begin{aligned}|R_{n,0}(x)|&\leq\left|\tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right||x|^n\int_x^0(1+t)^{\alpha-1}\,dt=\left|\tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right||x|^n\tfrac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha}\\&=(n+1)\left|\tbinom{\alpha}{n+1}\right||x|^n\tfrac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha}.\end{aligned}$$

Αν $\alpha>0$, τότε για $n>[\alpha]$ είναι

$$|R_{n,0}(x)|\leq c_2(n+1)\tbinom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}|x|^n\tfrac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha},$$

οπότε $R_{n,0}(x)\to 0$. Αν $\alpha<0$, τότε

$$|R_{n,0}(x)|\leq c_2(n+1)^{-\alpha}|x|^n\tfrac{(1+x)^\alpha-1}{|\alpha|},$$

οπότε $R_{n,0}(x) \to 0$.
Συνοψίζουμε: σε κάθε περίπτωση εκτός μιας έχουμε αποδείξει ότι

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n .$$

Η μόνη περίπτωση που απομένει είναι όταν $x = -1$ και $\alpha > 0$. Τότε, όμως, δε μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 10.11, οπότε κάνουμε το εξής. Χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις που ισχύουν όταν $-1 < x \leq 0$ και γράφουμε

$$\Big|(1+x)^\alpha - 1 - \binom{\alpha}{1}x - \cdots - \binom{\alpha}{n}x^n\Big| = |R_{n,0}(x)| \leq c_2(n+1)\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}|x|^n \frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha} .$$

Παίρνουμε όρια καθώς $x \to -1+$ και βρίσκουμε

$$\Big|0 - 1 - \binom{\alpha}{1}(-1) - \cdots - \binom{\alpha}{n}(-1)^n\Big| \leq c_2(n+1)\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}\frac{1}{\alpha} .$$

Συνεπάγεται ότι

$$1 + \binom{\alpha}{1}(-1) + \cdots + \binom{\alpha}{n}(-1)^n \to 0.$$

Άρα και στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha .$$

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους των $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(1-(-2)^n\big)x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$, $1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}x^n$, $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\log a)^n}{n!}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\big(\frac{x-1}{x+1}\big)^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$.

2. Χρησιμοποιώντας τις σειρές Taylor των sin, cos στον ξ, αποδείξτε τους τύπους $\sin x = \sin\xi\cos(x-\xi) + \cos\xi\sin(x-\xi)$, $\cos x = \cos\xi\cos(x-\xi) - \sin\xi\sin(x-\xi)$, οι οποίοι είναι ισοδύναμοι με τους τύπους για το ημίτονο και το συνημίτονο αθροίσματος γωνιών.

3. Βρείτε τις σειρές Taylor στον 0 των $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4. Βρείτε τους αρχικούς όρους των σειρών Taylor στον 0 των $\tan x$, $\frac{1}{\cos x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$. (Δείτε, κατόπιν, την άσκηση 8 της ενότητας 10.2.)

5. Υπολογίστε τα αθροίσματα $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2-1}$.

6. Η άσκηση 13 της ενότητας 5.8 λέει ότι η $h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x\leq 0 \end{cases}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι $h^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n$ η σειρά Taylor της h στον 0;

7. (i) Αν $x \leq -1$, αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = -\infty$.
(ii) Αν $x > 1$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ δεν έχει άθροισμα.

8. Έστω ότι ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος.
(i) Αν $\alpha < 0$ και $x \leq -1$ ή αν $\alpha > 0$, ο $[\alpha]$ είναι περιττός και $x < -1$, αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = +\infty$.
(ii) Αν $\alpha > 0$, ο $[\alpha]$ είναι άρτιος και $x < -1$, αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = -\infty$.
(iii) Αν $x > 1$ ή $x = 1$ και $\alpha \leq -1$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ δεν έχει άθροισμα.

10.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

10.4.1 Ορισμός μέσω δυναμοσειρών.

Στην υποενότητα αυτή θα δούμε έναν από τους "αναλυτικούς" ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και τις αποδείξεις των βασικών ιδιοτήτων τους. Όπως είχαμε αναφέρει στην ενότητα 3.2, μέχρι τώρα βασιστήκαμε στον "γεωμετρικό" ορισμό των συναρτήσεων αυτών, ο οποίος δε θεωρείται επαρκής από τη σκοπιά της Ανάλυσης, και θεωρήσαμε γνωστές τις ιδιότητές τους.

Ξεκινάμε με τις δυναμοσειρές $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$, για τις οποίες γνωρίζουμε, από την ενότητα 10.2, ότι έχουν ως διάστημα σύγκλισης το $\mathbb{R}$. Στην ίδια ενότητα, "γνωρίζοντας" τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είχαμε "αποδείξει" ότι η πρώτη δυναμοσειρά είναι ίση με την $\cos x$ και η δεύτερη με την $\sin x$. Τώρα, όμως, δεχόμαστε ότι *δε γνωρίζουμε* τις $\cos x$, $\sin x$ και *θα τις ορίσουμε*, χρησιμοποιώντας τις δυναμοσειρές και τις ιδιότητές τους.

Ορισμός. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά και τη συνάρτηση $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δεύτερη δυναμοσειρά. Δηλαδή, ορίζουμε:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Από το Θεώρημα 10.10 συνεπάγεται ότι οι cos, sin είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και

$$\cos' x = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k 2k\frac{x^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sin x$$

και

$$\sin' x = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)\frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\cos' x = -\sin x, \quad \sin' x = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 .$$

Τότε είναι

$$f'(x) = 2\sin x \sin' x + 2\cos x \cos' x = 2\sin x\cos x - 2\cos x\sin x = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $c = (\sin 0)^2 + (\cos 0)^2 = 1$, οπότε

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

και, επομένως,

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Μπορούμε, επίσης, να αποδείξουμε τις σχέσεις

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y , \qquad \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Οι σχέσεις αυτές μπορούν να αποδειχτούν χρησιμοποιώντας γινόμενα Cauchy σειρών, αλλά ο τρόπος αυτός είναι αρκετά περίπλοκος. Ένας δεύτερος τρόπος είναι ο εξής. Έστω $y \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \cos(y-x)\cos x - \sin(y-x)\sin x,$$

οπότε είναι

$$f'(x) = \sin(y-x)\cos x - \cos(y-x)\sin x + \cos(y-x)\sin x - \sin(y-x)\cos x = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $\cos(y-x)\cos x - \sin(y-x)\sin x = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε $c = \cos(y-0)\cos 0 - \sin(y-0)\sin 0 = \cos y$, οπότε

$$\cos(y-x)\cos x - \sin(y-x)\sin x = \cos y$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, μετατρέπουμε το y σε $y + x$ και καταλήγουμε στην $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται είτε με παρόμοιο τρόπο είτε παραγωγίζοντας την πρώτη ισότητα ως προς το x.

Θα αποδείξουμε, τώρα, μερικές επιπλέον ιδιότητες των συναρτήσεων cos, sin και, κυρίως, *θα ορίσουμε τον αριθμό* π. Υπενθυμίζουμε ότι σε ένα από τα παραδείγματα της ενότητας 2.5 είχαμε ορίσει δυο ακολουθίες (p_n), (q_n) και είχαμε αποδείξει ότι αυτές συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό, τον 2π. Βάσει αυτού, θα μπορούσαμε να *ορίσουμε*: $\pi = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} q_n$. Θα είχαμε, όμως, δυσκολία στο να συσχετίσουμε τον π με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Γι αυτό θα ακολουθήσουμε άλλη πορεία.

Πρόταση 10.4. *Υπάρχει ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης* $\cos x = 0$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, είναι $\cos 0 = 1$. Επίσης, είναι $\cos 2 = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}$, οπότε

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} \to \cos 2.$$

Αν ο k είναι άρτιος ≥ 4, τότε

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \cdots - \left(\frac{2^{2k-2}}{(2k-2)!} - \frac{2^{2k}}{(2k)!}\right) < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3}\,.$$

Άρα $\cos 2 \leq -\frac{1}{3} < 0$.
Επειδή η cos είναι συνεχής και $\cos 2 < 0 < \cos 0$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in (0,2)$ ώστε $\cos x = 0$. Άρα το σύνολο $\{x > 0 \,|\, \cos x = 0\}$, ως μη-κενό και κάτω φραγμένο, έχει infimum, έστω ξ. Επειδή ο 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου, συνεπάγεται $0 \leq \xi$. Επίσης, επειδή $\xi = \inf\{x > 0 \,|\, \cos x = 0\}$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο σύνολο αυτό - οπότε $\cos x_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ - ώστε $x_n \to \xi$. Λόγω συνέχειας της cos, συνεπάγεται $\cos x_n \to \cos\xi$ και, επομένως, $\cos\xi = 0$. Επειδή $\cos 0 = 1$, συνεπάγεται $\xi > 0$ και, επομένως, $\xi \in \{x > 0 \,|\, \cos x = 0\}$. Άρα ο ξ είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\{x > 0 \,|\, \cos x = 0\}$ ή, ισοδύναμα, είναι η ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης $\cos x = 0$. □

Ορισμός. Το σύμβολο π δηλώνει το διπλάσιο της ελάχιστης θετικής λύσης της εξίσωσης $\cos x = 0$.

Επομένως,

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{και} \qquad \cos x > 0 \quad \Big(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\Big).$$

Η σχέση $\sin' x = \cos x > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ συνεπάγεται ότι η sin είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Από την $(\sin\frac{\pi}{2})^2 + (\cos\frac{\pi}{2})^2 = 1$ παίρνουμε $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$ και, επειδή $\sin 0 = 0$ και η sin είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, συνεπάγεται $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Επομένως, η $\sin : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ είναι ένα-προς-ένα (ως γνησίως αύξουσα) και επί (ως συνεχής). Κατόπιν, η σχέση $\cos' x = -\sin x < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ συνεπάγεται ότι η cos είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως, η $\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ είναι και αυτή ένα-προς-ένα και επί.

Πρόταση 10.5. *Για κάθε* $a, b \in [0,1]$, $a^2 + b^2 = 1$ *υπάρχει μοναδικός* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *ώστε* $\sin x = a$ *και* $\cos x = b$.

Απόδειξη. Επειδή η sin : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ είναι ένα-προς-ένα και επί, υπάρχει μοναδικός $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε $\sin x = a$. Από την $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ συνεπάγεται $\cos x = \pm b$ και, επειδή $\cos x \geq 0$, έχουμε $\cos x = b$. □

Από τις ισότητες $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ και $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ βρίσκουμε τις τιμές των cos και sin στα σημεία π, $\frac{3\pi}{2}$ και 2π και, κατόπιν, παίρνουμε εύκολα τις σχέσεις

$$\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \cos(x+\pi) = -\cos x, \quad \cos\left(x + \tfrac{3\pi}{2}\right) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από τις σχέσεις αυτές καθώς και από τη συμπεριφορά της cos στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, διακρίνουμε τη συμπεριφορά της cos στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, δηλαδή συνολικά στο $[0, 2\pi]$. Επίσης, η τελευταία σχέση σημαίνει ότι η cos είναι περιοδική με περίοδο 2π. Παρόμοιες σχέσεις και συμπεράσματα ισχύουν και για την sin.

Πρόταση 10.6. *(1) Οι συναρτήσεις* sin, cos *είναι περιοδικές με ελάχιστη θετική περίοδο τον αριθμό* 2π. *(2) Για κάθε* $a, b \in [-1,1]$, $a^2 + b^2 = 1$ *υπάρχει μοναδικός* $x \in \left[0, 2\pi\right)$ *ώστε* $\sin x = a$ *και* $\cos x = b$.

Δε θα αποδείξουμε την Πρόταση 10.6, διότι οι λεπτομέρειες είναι εύκολες και άνευ ουσίας. Και τα δυο συμπεράσματα προκύπτουν από την προηγούμενη συζήτηση. Το δεύτερο συμπέρασμα είναι επέκταση του συμπεράσματος της Πρότασης 10.5 και η απόδειξή του χρησιμοποιεί την Πρόταση 10.5 και τη διάκριση των περιπτώσεων: $a \geq 0, b \geq 0$ ή $a \geq 0, b < 0$ ή $a < 0, b \geq 0$ ή $a < 0, b < 0$. Ασχοληθείτε εσείς με τις λεπτομέρειες.

Είναι εύλογο πολλοί να προτιμούν τον "γεωμετρικό" ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων λόγω της απλότητάς του. Επίσης, υπάρχουν και άλλοι, και μάλιστα "αναλυτικοί", ορισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Έναν από αυτούς θα δούμε στην επόμενη υποενότητα. Γι αυτό θα αποδείξουμε ότι, ασχέτως του τρόπου τον οποίο επιλέγουμε για να ορίσουμε τις συναρτήσεις αυτές, *καταλήγουμε στις ίδιες συναρτήσεις*. Θα σκεφτούμε ότι, ασχέτως του τρόπου ορισμού των sin, cos, αποδεικνύεται ότι έχουν τις εξής βασικές ιδιότητες: $\cos' x = -\sin x$, $\sin' x = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

Πρόταση 10.7. *Έστω δυο ζεύγη συναρτήσεων* $f_1, g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *και* $f_2, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ώστε* (i) ${f_1}' = -g_1$ *και* ${g_1}' = f_1$, (ii) ${f_2}' = -g_2$ *και* ${g_2}' = f_2$ *και* (iii) $f_1(0) = f_2(0)$ *και* $g_1(0) = g_2(0)$. *Τότε τα δυο ζεύγη είναι τα ίδια. Δηλαδή,* $f_1(x) = f_2(x)$ *και* $g_1(x) = g_2(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = ((f_1(x) - f_2(x))^2 + (g_1(x) - g_2(x))^2$$

και τότε

$$f'(x) = 2(f_1(x) - f_2(x))(-g_1(x) + g_2(x)) + 2(g_1(x) - g_2(x))(f_1(x) - f_2(x)) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα υπάρχει c ώστε $(f_1(x) - f_2(x))^2 + (g_1(x) - g_2(x))^2 = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι $c = (f_1(0) - f_2(0))^2 + (g_1(0) - g_2(0))^2 = 0$, οπότε

$$(f_1(x) - f_2(x))^2 + (g_1(x) - g_2(x))^2 = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f_1(x) = f_2(x)$ και $g_1(x) = g_2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε το εξής. Στα κεφάλαια 4 και 5 αποδείχτηκε η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με βάση τον γεωμετρικό ορισμό τους. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν οι ανισότητες

$$|\sin x| \leq |x|, \qquad |x| \leq |\tan x|$$

από τις οποίες η πρώτη ισχύει για κάθε x και η δεύτερη ισχύει αν $|x| < \frac{\pi}{2}$. Οι ανισότητες αυτές, σ' αυτό το πλαίσιο, αποδεικνύονται, φυσικά, με γεωμετρικό τρόπο. Από τη στιγμή, όμως, που η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποδεικνύονται με βάση τον αναλυτικό ορισμό τους (ως παραδείγματα δυναμοσειρών), οι ανισότητες αυτές πρέπει να αποδειχτούν με αναλυτικό τρόπο. Ιδού η απόδειξή τους.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x \pm \sin x$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 1 \pm \cos x \geq 0$ για κάθε x, οπότε οι f είναι αύξουσες. Επομένως, είναι $x \pm \sin x = f(x) \geq f(0) = 0$ για κάθε $x \geq 0$ και $x \pm \sin x = f(x) \leq f(0) = 0$ για κάθε $x \leq 0$. Άρα είναι $|\sin x| \leq |x|$ για κάθε x.
Κατόπιν θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x\cos x - \sin x$ για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Είναι $g'(x) = -x\sin x \leq 0$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, οπότε η g είναι φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Άρα $x\cos x - \sin x = g(x) \leq g(0) = 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ και $x\cos x - \sin x = g(x) \geq g(0) = 0$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$. Άρα είναι $|x| \leq |\tan x|$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

10.4.2 Ορισμός μέσω ολοκληρώματος.

Τώρα θα δούμε έναν εναλλακτικό ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω ολοκληρώματος. Ακολουθούμε την εξής πορεία: πρώτα ορίζουμε την συνάρτηση $\arctan y$, κατόπιν την αντίστροφή της, την $\tan x$, και, τέλος τις $\sin x$ και $\cos x$. Ειδικά προς το τέλος θα παραλείψουμε αρκετές λεπτομέρειες.

Ορισμός. Σ' αυτήν την υποενότητα ορίζουμε

$$\arctan y = \int_0^y \frac{1}{1+s^2}\, ds \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Δηλαδή, ορίζουμε τη συνάρτηση $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $\frac{1}{1+y^2}$ στο $\mathbb{R}$. Η $\frac{1}{1+y^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η arctan είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\arctan' y = \frac{1}{1+y^2} \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Προφανώς, $\arctan 0 = 0$ και, επειδή η παράγωγος είναι θετική, η arctan είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η arctan είναι περιττή στο $\mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\arctan(-y) = \int_0^{-y} \tfrac{1}{1+s^2}\, ds = -\int_0^y \tfrac{1}{1+(-s)^2}\, ds = -\arctan y$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $y \geq 1$ ισχύει

$$\arctan y = \int_0^y \tfrac{1}{1+s^2}\, ds = \int_0^1 \tfrac{1}{1+s^2}\, ds + \int_1^y \tfrac{1}{1+s^2}\, ds \leq \int_0^1 1\, ds + \int_1^y \tfrac{1}{s^2}\, ds = 1 + 1 - \tfrac{1}{y} \leq 2.$$

Άρα η arctan είναι άνω φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και, επομένως, το $\lim_{y\to+\infty} \arctan y$ υπάρχει και είναι αριθμός.

Ορισμός. Ορίζουμε

$$\pi = 2 \lim_{y\to+\infty} \arctan y.$$

Επειδή η arctan είναι περιττή, είναι

$$\lim_{y\to-\infty}\arctan y=\lim_{y\to+\infty}\arctan(-y)=-\lim_{y\to+\infty}\arctan y=-\tfrac{\pi}{2}\,.$$

Άρα το σύνολο τιμών της arctan είναι το $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Ορισμός. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, την οποία συμβολίζουμε

$$\tan:\Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\to\mathbb{R}$$

Η $\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}\tan x=-\infty,\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x=+\infty.$$

Κατόπιν, έστω $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$. Τότε για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ είναι $x-k\pi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε έχει οριστεί η τιμή $\tan(x-k\pi)$. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε $\tan x=\tan(x-k\pi)$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση tan ορίζεται σε κάθε διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbb{Z})$. Καθώς ο x διατρέχει το $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, ο $x-k\pi$ διατρέχει το $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και μπορούμε εύκολα να δούμε ότι όλες οι ιδιότητες της tan στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ "μεταφέρονται" ως ιδιότητές της στο $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$. Για παράδειγμα, η tan είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$:

$$\tan:\Big(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\Big)\to\mathbb{R}$$

Επίσης, είναι $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2}+k\pi)+}\tan x=-\infty$ και $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)-}\tan x=+\infty$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η tan ορίζεται στην ένωση $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ ή, ισοδύναμα, στο σύνολο $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ και είναι φανερό ότι η tan είναι περιοδική με περίοδο π.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης, υπολογίζουμε την παράγωγο της tan στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και τον αντίστοιχο $y=\tan x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\tan' x=\tfrac{1}{\arctan' y}=\tfrac{1}{1/(1+y^2)}=1+y^2=1+(\tan x)^2\,.$$

Λόγω περιοδικότητας, αυτό ισχύει σε κάθε διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbb{Z})$. Δηλαδή,

$$\tan' x=1+(\tan x)^2\qquad\Big(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Big).$$

Ορισμός. Τέλος, ορίζουμε τις συναρτήσεις $\cos,\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους:

$$\cos x=\begin{cases}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{1+(\tan x)^2}}\,, & \text{αν } -\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\\ 0, & \text{αν } x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

$$\sin x=\begin{cases}(-1)^k\frac{\tan x}{\sqrt{1+(\tan x)^2}}\,, & \text{αν } -\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\\ (-1)^k\,, & \text{αν } x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

Είναι, τώρα, πολύ εύκολο να αποδειχθούν όλες οι ιδιότητες των cos, sin. Για παράδειγμα, αμέσως αποδεικνύεται ότι ισχύει $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$ για κάθε x, ότι οι cos, sin είναι παραγωγίσιμες σε κάθε $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbb{Z})$ και ότι ισχύει $\cos'=-\sin$ και $\sin'=\cos$ σε κάθε τέτοιο διάστημα. Επίσης, μέσω του ορισμού της παραγώγου, βλέπουμε ότι είναι παραγωγίσιμες σε κάθε $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ και ότι οι σχέσεις $\cos'=-\sin$ και $\sin'=\cos$ ισχύουν και στα σημεία αυτά και, επομένως, ότι ισχύουν σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Φυσικά, θα αποφύγουμε την επίπονη αλλά και βαρετή διεκπεραίωση των πράξεων.

Κεφάλαιο 11

Γενικευμένα ολοκληρώματα.

11.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.

Στο Κεφάλαιο 6 εξετάσαμε πότε μια *φραγμένη* συνάρτηση ορισμένη σε *κλειστό και φραγμένο* διάστημα είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε αυτό. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι κατά τμήματα συνεχείς και οι κατά τμήματα μονότονες συναρτήσεις. Όμως, από τον ορισμό των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων δεν καλύπτονται δύο σημαντικές κατηγορίες συναρτήσεων: οι συναρτήσεις που δεν είναι φραγμένες και οι συναρτήσεις που ορίζονται σε μη-φραγμένα ή μη-κλειστά διαστήματα.
Περίπτωση 1. Έστω $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a, b)$ και, ειδικώτερα, στο $[a, x]$ για κάθε $x \in [a, b)$.

Ορισμός. Το σύμβολο

$$\int_a^{\to b} f$$

ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b)$ και η τιμή του, αν αυτή υπάρχει, καθορίζεται ως εξής. Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f$, τότε λέμε ότι το γεικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f$ **αποκλίνει** και ότι **δεν έχει τιμή**. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε αυτό το όριο ορίζεται να είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^{\to b} f$ και γράφουμε

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{x\to b-} \int_a^x f.$$

Αν το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f$ είναι αριθμός, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f$ **συγκλίνει** και, αν $\lim_{x\to b-} \int_a^x f = \pm\infty$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f$ **αποκλίνει στο** $\pm\infty$.

Παρατηρήστε ότι το σύμβολο $\int_a^{\to b} f$ έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός συμβολίζει το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a, b)$, ανεξάρτητα από το αν αυτό έχει τιμή ή όχι. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση που το γενικευμένο ολοκλήρωμα έχει τιμή, συμβολίζει και την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Παραδείγματα. (1) Είναι

$$\int_1^{\to+\infty} \tfrac{1}{x^2}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \tfrac{1}{t^2}\, dt = \lim_{x\to+\infty}(1 - \tfrac{1}{x}) = 1.$$

Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ συγκλίνει και έχει τιμή 1.
(2) Είναι

$$\int_1^{\to+\infty} \tfrac{1}{x}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \tfrac{1}{t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty.$$

Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\to+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$ και έχει τιμή $+\infty$.
(3) Είναι
$$\int_0^{\to 1}\frac{1}{x-1}\,dx=\lim_{x\to 1-}\int_0^x\frac{1}{t-1}\,dt=\lim_{x\to 1-}\log(1-x)=-\infty.$$
Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\to 1}\frac{1}{x-1}\,dx$ αποκλίνει στο $-\infty$ και έχει τιμή $-\infty$.
(4) Είναι
$$\int_0^{\to 1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx=\lim_{x\to 1-}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt=\lim_{x\to 1-}(2-2\sqrt{1-x})=2$$
και, επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\to 1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή 2.
(5) Το
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\cos t\,dt=\lim_{x\to+\infty}\sin x$$
δεν υπάρχει. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\to+\infty}\cos x\,dx$ δεν έχει τιμή.

Η Πρόταση 11.1 αποδεικνύει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι γενίκευση του ολοκληρώματος.

Πρόταση 11.1. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b}f$ συγκλίνει και*
$$\int_a^{\to b}f=\int_a^b f.$$

Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)|\le M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Ακόμη, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$ και, επομένως, σε κάθε $[a,x]$ $(a\le x<b)$. Επίσης,
$$\Big|\int_a^x f-\int_a^b f\Big|=\Big|-\int_x^b f\Big|\le M(b-x)$$
για κάθε $x\in[a,b)$, οπότε $\lim_{x\to b-}\int_a^x f=\int_a^b f$. □

Περίπτωση 2. Έστω $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ και $f:(a,b]\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(a,b]$ και, ειδικότερα, στο $[x,b]$ για κάθε $x\in(a,b]$.

Ορισμός. Το σύμβολο $\int_{a\leftarrow}^b f$ ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f στο $(a,b]$ και η τιμή του, αν αυτή υπάρχει, καθορίζεται ως εξής. Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a+}\int_x^b f$, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^b f$ **αποκλίνει** και ότι **δεν έχει τιμή**. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to a+}\int_x^b f\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε αυτό το όριο ορίζεται να είναι η **τιμή** του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{a\leftarrow}^b f$ και γράφουμε
$$\int_{a\leftarrow}^b f=\lim_{x\to a+}\int_x^b f.$$
Αν το $\lim_{x\to a+}\int_x^b f$ είναι αριθμός, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^b f$ **συγκλίνει** και, αν $\lim_{x\to a+}\int_x^b f=\pm\infty$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^b f$ **αποκλίνει στο** $\pm\infty$.

Παραδείγματα. (1) Είναι
$$\int_{0\leftarrow}^2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{x\to 0+}\int_x^2\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\lim_{x\to 0+}(2\sqrt{2}-2\sqrt{x})=2\sqrt{2}\,.$$
Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0\leftarrow}^2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή $2\sqrt{2}\,$.
(2) Είναι
$$\int_{0\leftarrow}^2\frac{1}{x}\,dx=\lim_{x\to 0+}\int_x^2\frac{1}{t}\,dt=\lim_{x\to 0+}(\log 2-\log x)=+\infty.$$

Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0\leftarrow}^{2} \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$ και έχει τιμή $+\infty$.
(3) Είναι

$$\int_{-\infty\leftarrow}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{0} \frac{1}{(t-1)^2}\,dt = \lim_{x\to-\infty}(1 - \frac{1}{1-x}) = 1.$$

Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty\leftarrow}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ συγκλίνει και η τιμή του είναι 1.

Ισχύει, επίσης, η Πρόταση 11.1, καταλλήλως προσαρμοσμένη.

Πρόταση 11.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{b} f$ συγκλίνει και*

$$\int_{a\leftarrow}^{b} f = \int_{a}^{b} f.$$

Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ακόμη, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$ και, επομένως, σε κάθε $[x,b]$ $(a < x \leq b)$. Επίσης,

$$\big| \int_{x}^{b} f - \int_{a}^{b} f \big| = \big| - \int_{a}^{x} f \big| \leq M(x-a)$$

για κάθε $x \in (a,b]$, οπότε $\lim_{x\to a+} \int_{x}^{b} f = \int_{a}^{b} f$. □

Περίπτωση 3. Έστω $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του (a,b).

Ορισμός. Το σύμβολο $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$ ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f στο (a,b) και η τιμή του, αν υπάρχει, καθορίζεται ως εξής. Θεωρούμε οποιονδήποτε d, $a < d < b$. Αν ένα τουλάχιστον από τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{a\leftarrow}^{d} f$ και $\int_{d}^{\to b} f(x)\,dx$ δεν έχει τιμή, τότε και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$ **δεν έχει τιμή**. Επίσης, αν και τα δυο γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{a\leftarrow}^{d} f$, $\int_{d}^{\to b} f$ έχουν τιμή και το $\int_{a\leftarrow}^{d} f + \int_{d}^{\to b} f$ είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$ **δεν έχει τιμή**. Τέλος, αν και τα δυο γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{a\leftarrow}^{d} f$, $\int_{d}^{\to b} f$ έχουν τιμή και το $\int_{a\leftarrow}^{d} f + \int_{d}^{\to b} f$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$ **έχει τιμή** η οποία ορίζεται να είναι

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f = \int_{a\leftarrow}^{d} f + \int_{d}^{\to b} f.$$

Αν η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$ είναι αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$ **συγκλίνει** και, αν η τιμή του είναι $\pm\infty$, τότε λέμε ότι **αποκλίνει στο** $\pm\infty$, αντιστοίχως.

Το Λήμμα 11.1 λέει ότι, αν γίνει διαφορετική επιλογή του ενδιάμεσου d, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση ή η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$.

Λήμμα 11.1. *Έστω $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του (a,b). Έστω $a < d < d' < b$. Αν ορίζεται το άθροισμα $\int_{a\leftarrow}^{d} f + \int_{d}^{\to b} f$, τότε ορίζεται και το άθροισμα $\int_{a\leftarrow}^{d'} f + \int_{d'}^{\to b} f$ και έχουν τις ίδιες τιμές.*

Απόδειξη. Είναι

$$\int_{d'}^{x} f = \int_{d}^{x} f + \int_{d'}^{d} f$$

για κάθε $x \in (a,b)$ και το $\int_{d'}^{d} f$ είναι αριθμός. Επομένως, επειδή υπάρχει το $\lim_{x\to b-}\int_d^x f$, υπάρχει και το $\lim_{x\to b-}\int_{d'}^x f$ και ισχύει

$$\lim_{x\to b-}\int_{d'}^x f = \lim_{x\to b-}\int_d^x f + \int_{d'}^d f.$$

Δηλαδή,

$$\int_{d'}^{\to b} f = \int_d^{\to b} f + \int_{d'}^d f.$$

Ομοίως, είναι

$$\int_x^{d'} f = \int_x^d f - \int_{d'}^d f$$

για κάθε $x \in (a,b)$. Επομένως, επειδή υπάρχει το $\lim_{x\to a+}\int_x^d f$, υπάρχει και το $\lim_{x\to a+}\int_x^{d'} f$ και ισχύει

$$\lim_{x\to a+}\int_x^{d'} f = \lim_{x\to a+}\int_x^d f - \int_{d'}^d f.$$

Δηλαδή,

$$\int_{a\leftarrow}^{d'} f = \int_{a\leftarrow}^d f - \int_{d'}^d f.$$

Το $\int_{d'}^d f$ είναι αριθμός, οπότε, προσθέτοντας τις δύο ισότητες, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{a\leftarrow}^{d'} f + \int_{d'}^{\to b} f = \int_{a\leftarrow}^d + \int_d^{\to b} f.$$

$\square$

Η Πρόταση 11.3 είναι ανάλογη των Προτάσεων 11.1, 11.2.

Πρόταση 11.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$ συγκλίνει και*

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f = \int_a^b f.$$

Απόδειξη. Έστω $a < d < b$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,d]$ και στο $[d,b]$. Από τις Προτάσεις 11.1, 11.2 συνεπάγεται $\int_{a\leftarrow}^d f = \int_a^d f$ και $\int_d^{\to b} f = \int_d^b f$ και, προσθέτοντας, $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f = \int_a^b f$. $\square$

Παραδείγματα. (1) Είναι

$$\int_0^{\to+\infty} \tfrac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \tfrac{t}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\tfrac{1}{2}\log(x^2+1) = +\infty$$

και

$$\int_{-\infty\leftarrow}^0 \tfrac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \tfrac{t}{t^2+1}\,dt = -\lim_{x\to-\infty}\tfrac{1}{2}\log(x^2+1) = -\infty.$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ αποκλίνει και δεν ορίζεται τιμή του.
(2) Είναι

$$\int_0^{\to+\infty} \tfrac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \tfrac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\arctan x = \tfrac{\pi}{2}$$

και

$$\int_{-\infty\leftarrow}^0 \tfrac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \tfrac{1}{t^2+1}\,dt = -\lim_{x\to-\infty}\arctan x = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Άρα

$$\int_{-\infty\leftarrow}^{\to+\infty} \tfrac{1}{x^2+1}\,dx = \pi.$$

Στο εξής, τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{\to b} f$, $\int_{a\leftarrow}^{b} f$, $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$, που εξετάσαμε στις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις, θα τα συμβολίζουμε όλα

$$\int_a^b f.$$

Δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης του γενικευμένου ολοκληρώματος με το ολοκλήρωμα, διότι, σύμφωνα με τις Προτάσεις 11.1 - 11.3, αν ορίζεται το ολοκλήρωμα - δηλαδή, αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη - τότε ορίζεται και το γενικευμένο ολοκλήρωμα και οι τιμές τους συμπίπτουν. Εξυπακούεται, φυσικά, και θεωρείται δεδομέμο ότι, ανάλογα με τη συγκεκριμένη συνάρτηση και το συγκεκριμένο διάστημα, μπορούμε να διακρίνουμε αν πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα ή για ολοκλήρωμα.

Περίπτωση 4. Η περίπτωση αυτή συνδυάζει όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις. Έστω $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ και f ορισμένη στο διάστημα (a, b) εκτός, ίσως, από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Δηλαδή, μπορεί να υπάρχουν $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ ώστε

$$f : (a, \xi_1) \cup (\xi_1, \xi_2) \cup \cdots \cup (\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) \cup (\xi_{n-1}, b) \to \mathbb{R}.$$

Ορισμός. Αν όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{\xi_1} f$, $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f$, ... ,$\int_{\xi_{n-2}}^{\xi_{n-1}} f$, $\int_{\xi_{n-1}}^{b} f$ συγκλίνουν, λέμε ότι **το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a, b) συγκλίνει** και η **τιμή** του είναι

$$\int_a^b f = \int_a^{\xi_1} f + \int_{\xi_1}^{\xi_2} f + \cdots + \int_{\xi_{n-2}}^{\xi_{n-1}} f + \int_{\xi_{n-1}}^{b} f.$$

Αν όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα έχουν τιμή και ένα τουλάχιστον από τα ολοκληρώματα αποκλίνει στο $+\infty$ και κανένα δεν αποκλίνει στο $-\infty$, τότε λέμε ότι **το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a, b) αποκλίνει στο $+\infty$** και γράφουμε $\int_a^b f = +\infty$. Ομοίως, αν όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα έχουν τιμή και ένα τουλάχιστον από τα ολοκληρώματα αποκλίνει στο $-\infty$ και κανένα δεν αποκλίνει στο $+\infty$, τότε λέμε ότι **το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a, b) αποκλίνει στο $-\infty$** και γράφουμε $\int_a^b f = -\infty$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a, b) **αποκλίνει** και ότι **δεν έχει τιμή**.

Σημείωση. Στη θεωρητική μας συζήτηση από εδώ και πέρα θα περιοριστούμε στην περίπτωση 1. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ θα είναι το $\int_a^{\to b} f$. Αυτό σημαίνει ότι η $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ θα είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a, b)$ και $\int_a^b f = \int_a^{\to b} f = \lim_{x\to b-} \int_a^x f$, αν το όριο υπάρχει. Σε κάθε άλλη περίπτωση τα αποτελέσματα είναι ανάλογα και αποδεικνύονται με ανάλογο τρόπο.

Πρόταση 11.4. *Έστω $a < c < b$. Τότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ έχει τιμή αν και μόνο αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^b f$ έχει τιμή και*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Απόδειξη. Ισχύει

$$\textstyle\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$$

για κάθε $x \in [a, b)$. Το $\int_a^c f$ είναι αριθμός, οπότε το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f$ υπάρχει αν και μόνο αν το $\lim_{x\to b-} \int_c^x f$ υπάρχει και, σ' αυτήν την περίπτωση, είναι

$$\textstyle\int_a^b f = \lim_{x\to b-} \int_a^x f = \int_a^c f + \lim_{x\to b-} \int_c^x f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

Πρόταση 11.5. *Αν οι f, g ταυτίζονται κοντά στο b, τότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ έχει τιμή αν και μόνο αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b g$ έχει τιμή. Ακόμη, οι τιμές των δυο γεν. ολοκληρωμάτων είναι είτε και οι δυο αριθμοί είτε και οι δυο $+\infty$ είτε και οι δυο $-\infty$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $c \in [a, b)$ ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [c, b)$. Τότε, προφανώς, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^b f$ έχει τιμή αν και μόνο αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^b g$ έχει τιμή και είναι $\int_c^b f = \int_c^b g$. Τα υπόλοιπα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 11.4. □

Πρόταση 11.6. *Αν τα γεν. ολοκληρώματα $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ έχουν τιμή και το $\int_a^b f + \int_a^b g$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b (f+g)$ έχει τιμή και*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\int_a^x (f+g) = \int_a^x f + \int_a^x g$$

για κάθε $x \in [a, b)$ και, επομένως,

$$\int_a^b (f+g) = \lim_{x\to b-} \int_a^x (f+g) = \lim_{x\to b-} \int_a^x f + \lim_{x\to b-} \int_a^x g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

□

Πρόταση 11.7. *Αν το $\int_a^b f$ έχει τιμή και το $\lambda \int_a^b f$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το $\int_a^b \lambda f$ έχει τιμή και*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\int_a^x \lambda f = \lambda \int_a^x f$$

για κάθε $x \in [a, b)$. Άρα

$$\int_a^b \lambda f = \lim_{x\to b-} \int_a^x \lambda f = \lambda \lim_{x\to b-} \int_a^x f = \lambda \int_a^b f.$$

□

Πρόταση 11.8. *Έστω $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b)$.*
(1) Αν τα γεν. ολοκληρώματα $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ έχουν τιμή, τότε

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(2) Αν $\int_a^b f = +\infty$, τότε $\int_a^b g = +\infty$.
(3) Αν $\int_a^b g = -\infty$, τότε $\int_a^b f = -\infty$.

Απόδειξη. (1) Ισχύει

$$\int_a^x f \leq \int_a^x g$$

για κάθε $x \in [a, b)$, οπότε

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b-} \int_a^x f \leq \lim_{x\to b-} \int_a^x g = \int_a^b g.$$

(2) Όπως πριν, είναι $\int_a^x f \leq \int_a^x g$ για κάθε $x \in [a, b)$. Επειδή $\lim_{x\to b-} \int_a^x f = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to b-} \int_a^x g = +\infty$.
(3) Όπως στο (2). □

Τα δύο αποτελέσματα της Πρότασης 11.9 είναι πολύ χρήσιμα. Ο ρόλος τους είναι ο ίδιος με τον ρόλο των ανάλογων αποτελεσμάτων για τα συνήθη ολοκληρώματα: χρησιμεύουν σε υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 11.9. *(1) Έστω ότι οι f, g έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a,b)$. Αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f'g$ έχει τιμή, αν υπάρχει το $\lim_{x\to b-} f(x)g(x)$ και αν το $\lim_{x\to b-} f(x)g(x) - \int_a^b f'g$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b fg'$ έχει τιμή και είναι:*

$$\int_a^b fg' = \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

(2) Έστω ότι η $\phi : [a,b) \to [A,B)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[a,b)$, ότι $\phi(a) = A$, $\lim_{x\to b-} \phi(x) = B$ και ότι η f είναι συνεχής στο $[A,B)$. Τότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_A^B f$ έχει τιμή αν και μόνο αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b (f\circ\phi)\phi'$ έχει τιμή και, σ' αυτήν την περίπτωση,

$$\int_A^B f = \int_a^b (f\circ\phi)\phi'.$$

Απόδειξη. (1) Για κάθε $x \in [a,b)$ ισχύει

$$\textstyle\int_a^x fg' = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'g.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\textstyle\int_a^b fg' &= \textstyle\lim_{x\to b-} \int_a^x fg' = \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \lim_{x\to b-} \int_a^x f'g \\ &= \textstyle\lim_{x\to b-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.\end{aligned}$$

(2) Για κάθε $x \in [a,b)$ είναι

$$\textstyle\int_a^x (f\circ\phi)\phi' = \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f = \int_A^{\phi(x)} f.$$

Άρα

$$\textstyle\int_a^b (f\circ\phi)\phi' = \lim_{x\to b-} \int_a^x (f\circ\phi)\phi' = \lim_{x\to b-} \int_A^{\phi(x)} f = \lim_{y\to B-} \int_A^y f = \int_A^B f.$$

□

Ορισμός. Έστω $f : [a,c) \cup (c,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,c)$ και του $(c,b]$. Ονομάζουμε **πρωτεύουσα τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος** $\int_a^b f$ το όριο, αν υπάρχει, $\lim_{\varepsilon\to 0+} \big(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f\big)$ και τη συμβολίζουμε $P.V. \int_a^b f$. Δηλαδή,

$$P.V. \int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f\Big).$$

Υπάρχουν παραδείγματα όπου το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν έχει τιμή ενώ έχει πρωτεύουσα τιμή.

Παράδειγμα. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ δεν έχει τιμή. Πράγματι,

$$\textstyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0+}(-\log x) = +\infty$$

και

$$\textstyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to 0-} \int_{-1}^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0-} \log|x| = -\infty.$$

Επομένως, το

$$\textstyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = (-\infty) + (+\infty)$$

είναι απροσδιόριστη μορφή. Από την άλλη μεριά,

$$\textstyle P.V. \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \big(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx\big) = \lim_{\varepsilon\to 0+} 0 = 0.$$

Πρόταση 11.10. *Έστω $f:[a,c)\cup(c,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,c)$ και του $(c,b]$. Αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ έχει τιμή, τότε υπάρχει και η πρωτεύουσα τιμή $P.V.\int_a^b f$ και είναι ίση με την τιμή του γεν. ολοκληρώματος $\int_a^b f$.*

Απόδειξη. Επειδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ έχει τιμή, συνεπάγεται ότι και τα γεν. ολοκληρώματα $\int_a^c f$, $\int_c^b f$ έχουν τιμή. Άρα

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_a^{c-\varepsilon} f=\int_a^c f$$

και

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{c+\varepsilon}^b f=\int_c^b f.$$

Επίσης, το $\int_a^c f+\int_c^b f$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, οπότε

$$P.V.\int_a^b f=\lim_{\varepsilon\to0+}\Big(\int_a^{c-\varepsilon} f+\int_{c+\varepsilon}^b f\Big)=\int_a^c f+\int_c^b f=\int_a^b f.$$

□

Ασκήσεις.

1. Ποιά από τα παρακάτω είναι γενικευμένα ολοκληρώματα; $\int_1^3\frac{1}{x}\,dx$, $\int_{-1}^7\frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$, $\int_1^3\frac{2}{x-2}\,dx$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$, $\int_2^7\log\big(\frac{x}{x-1}\big)\,dx$, $\int_0^{+\infty}\log x\,dx$.

2. Είναι σαφές ότι τα $\int_0^1 x\log x\,dx$, $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int_1^5\frac{\log x}{x-1}\,dx$, $\int_0^1\log x\log(1+x)\,dx$ είναι γενικευμένα ολοκληρώματα. Πώς πρέπει να χειριστούμε τις συναρτήσεις που εμφανίζονται μέσα στα γενικευμένα ολοκληρώματα ώστε αυτά να μπορούν να θεωρηθούν (απλά) ολοκληρώματα;

3. Μπορούν να θεωρηθούν ως γενικευμένα ολοκληρώματα τα $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sin x}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\log|\cos x|\,dx$, $\int_0^1\frac{1}{\sin(1/x)}\,dx$;

4. Υπολογίστε τα $\int_1^{+\infty}\big(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\big)\,dx$, $\int_1^{+\infty}\big(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\big)\,dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\,dx$ $(a>0)$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ $(a>0)$.

5. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 x^p\log x\,dx=-\frac{1}{(p+1)^2}$ $(p>-1)$ και $\int_1^{+\infty}x^p\log x\,dx=\frac{1}{(p+1)^2}$ $(p<-1)$.

6. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}}\,dx=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$ για κάθε $n,m\in\mathbb{N}$.

7. Εστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(0,+\infty)$ και $0<A\le B<+\infty$.
(i) Ορίζουμε την $g(x)=\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ $(0<x<+\infty)$ και έστω ότι το όριο $L=\lim_{x\to+\infty}g(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι
(α) $\int_A^B\frac{f(x)}{x}\,dx=g(B)-g(A)+\int_A^B\frac{g(x)}{x}\,dx$,
(β) $\lim_{T\to+\infty}\int_{AT}^{BT}\frac{f(x)}{x}\,dx=L\log\frac{B}{A}$,
(γ) $\int_1^{+\infty}\frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx=-L\log\frac{B}{A}+\int_A^B\frac{f(x)}{x}\,dx$.
(ii) Ορίζουμε την $h(x)=x\int_x^1\frac{f(t)}{t^2}\,dt$ $(0<x<+\infty)$ και έστω ότι το όριο $l=\lim_{x\to0+}h(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι
(α) $\int_A^B\frac{f(x)}{x}\,dx=h(A)-h(B)+\int_A^B\frac{h(x)}{x}\,dx$,
(β) $\lim_{t\to0+}\int_{At}^{Bt}\frac{f(x)}{x}\,dx=l\log\frac{B}{A}$,
(γ) $\int_0^1\frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx=l\log\frac{B}{A}-\int_A^B\frac{f(x)}{x}\,dx$.
(iii) Με τις υποθέσεις των (i), (ii), αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx=(L-l)\log\frac{A}{B}$.
(iv) Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(Ax)-\cos(Bx)}{x}\,dx=\log\frac{B}{A}$ και $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-Ax}-e^{-Bx}}{x}\,dx=\log\frac{B}{A}$.

11.2 Μη-αρνητικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 11.1. *Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b)$, τότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ έχει τιμή και αυτή είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Δηλαδή, $0 \leq \int_a^b f \leq +\infty$.*
Ειδικώτερα, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ συγκλίνει, αν η συνάρτηση $\int_a^x f \ \ (x \in [a, b))$ είναι άνω φραγμένη, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν η ίδια συνάρτηση δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. Αν $a \leq x_1 < x_2 < b$, συνεπάγεται

$$\int_a^{x_2} f = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f \geq \int_a^{x_1} f.$$

Άρα η $\int_a^x f \ \ (x \in [a, b))$ είναι, ως συνάρτηση του x, αύξουσα στο $[a, b)$. Επομένως, το $\lim_{x \to b-} \int_a^x f$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $+\infty$. Μάλιστα, είναι $\int_a^x f \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b)$, οπότε $\lim_{x \to b-} \int_a^x f \geq 0$. Τέλος, αν η $\int_a^x f \ \ (x \in [a, b))$ είναι άνω φραγμένη, τότε το $\lim_{x \to b-} \int_a^x f$ είναι αριθμός, ενώ αν δεν είναι άνω φραγμένη, το $\lim_{x \to b-} \int_a^x f$ είναι $+\infty$. □

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα μη-αρνητικής συνάρτησης έχει πάντοτε τιμή, η οποία είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Μπορούμε, επίσης, να πούμε ότι η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος ισοδυναμεί με $\int_a^b f < +\infty$ ενώ η απόκλισή του ισοδυναμεί με $\int_a^b f = +\infty$.

Πρόταση 11.11. *(1) Έστω $0 \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b)$. Τότε*

$$0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Αν, επιπλέον, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b g$ συγκλίνει, τότε και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ συγκλίνει.
(2) Έστω $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b)$ και έστω ότι το $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και είναι αριθμός ή, γενικότερα, ότι η συνάρτηση $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι φραγμένη κοντά στο b. Αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b g$ συγκλίνει, τότε και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ συγκλίνει.

Απόδειξη. (1) Τα γεν. ολοκληρώματα $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ έχουν τιμή, οπότε $0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g$. Αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b g$ συγκλίνει, συνεπάγεται $\int_a^b g < +\infty$, οπότε $\int_a^b f < +\infty$ και, επομένως, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ συγκλίνει.
(2) Υπάρχουν M και $c \in [a, b)$ ώστε να ισχύει $0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$ για κάθε $x \in [c, b)$. Το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b g$ συγκλίνει, οπότε και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^b g$ συγκλίνει. Άρα

$$\int_c^b f \leq \int_c^b Mg = M \int_c^b g < +\infty.$$

Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^b f$ συγκλίνει και, επομένως, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ συγκλίνει. □

Ας δούμε, τώρα, μερικά παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνότατα ως *συναρτήσεις σύγκρισης* εφαρμόζοντας είτε την Πρόταση 11.11 είτε, αργότερα, την Πρόταση 11.12.

Παραδείγματα. (1) Θα μελετήσουμε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$.
Αν $p \neq 1$, τότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^p}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1-p} - 1}{1-p}\ .$$

Άρα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = +\infty,$$

αν $p < 1$, και

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1}{p-1}\,,$$

αν $p > 1$. Τέλος,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty.$$

Συνοψίζουμε:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}\,, & \text{αν } p > 1 \\ +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \end{cases}$$

(2) Όπως πριν, θα μελετήσουμε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$.
Αν $p \neq 1$, τότε

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t^p}\, dt = \lim_{x\to 0+} \frac{1-x^{1-p}}{1-p}\,.$$

Άρα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1}{1-p}\,,$$

αν $p < 1$, και

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = +\infty,$$

αν $p > 1$. Τέλος,

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t}\, dt = -\lim_{x\to 0+} \log x = +\infty.$$

Συνοψίζουμε:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\,, & \text{αν } p < 1 \\ +\infty, & \text{αν } p \geq 1 \end{cases}$$

(3) Έστω $c, q > 0$. Θα μελετήσουμε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} x^p e^{-cx^q}\, dx$.
Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{p+1}{q}$. Για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$e^x \geq \frac{x^n}{n!}\,.$$

Αντικαθιστούμε το x με το cx^q και βρίσκουμε

$$e^{cx^q} \geq \frac{c^n}{n!} x^{qn}.$$

Άρα

$$0 < x^p e^{-cx^q} \leq \frac{n!}{c^n} \frac{1}{x^{qn-p}}$$

για κάθε $x > 0$. Επειδή $qn - p > 1$, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{qn-p}}\, dx$ συγκλίνει. Άρα

$$0 \leq \int_1^{+\infty} x^p e^{-cx^q}\, dx \leq \frac{n!}{c^n} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{qn-p}}\, dx < +\infty.$$

Δηλαδή, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} x^p e^{-cx^q}\, dx$ συγκλίνει σε μη-αρνητικό αριθμό:

$$0 \leq \int_1^{+\infty} x^p e^{-cx^q}\, dx < +\infty\,.$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το Κριτήριο Ολοκληρώματος για σειρές αριθμών μπορεί να αναδιατυπωθεί ως αποτέλεσμα που συνδυάζει σειρές και γενικευμένα ολοκληρώματα.

Κριτήριο Ολοκληρώματος. *Έστω φθίνουσα ακολουθία* (x_n) *ώστε* $x_n \geq 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Έστω ότι υπάρχει* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *φθίνουσα στο* $[1, +\infty)$ *ώστε να ισχύει* $f(n) = x_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε το γεν. ολοκλήρωμα* $\int_1^{+\infty} f$ *έχει τιμή, η οποία είναι αριθμός* ≥ 0 *ή* $+\infty$ *και*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ *αν και μόνο αν* $\int_1^{+\infty} f < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ *αν και μόνο αν* $\int_1^{+\infty} f = +\infty$.
Επιπλέον,

$$\int_1^{n+1} f \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\int_1^{+\infty} f \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \int_1^{+\infty} f.$$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι $\int_1^{+\infty} (\sin \frac{1}{x})^2 \, dx \leq 1$.

2. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2} \, dx \leq 2$.

3. Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p, q > -1$.

4. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} \, dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < p + 1 < q$.

5. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} e^{-(x+x^{-1})} \, dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx$ συγκλίνουν.

6. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} x^x e^{-x^p} \, dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 0$.

7. Αποδείξτε ότι το $\int_2^{+\infty} x^p (\log x)^q \, dt$ συγκλίνει αν και μόνο αν είτε $p < -1$ είτε $p = -1$, $q < -1$.

8. (i) Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^8 (\sin x)^2} \, dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^4 (\sin x)^2} \, dx$ συγκλίνουν.
   (ii) Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^8 (\sin x)^2} \, dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 (\sin x)^2} \, dx$ αποκλίνουν στο $+\infty$.

11.3 Κριτήρια σύγκλισης.

Κριτήριο του Cauchy. *Το γεν. ολοκλήρωμα* $\int_a^b f$ *συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $c_0 \in [a, b)$ *ώστε να ισχύει* $\left| \int_{x'}^{x''} f \right| < \varepsilon$ *για κάθε* $x', x'' \in (c_0, b)$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f \ \ (x \in [a, b))$. Τότε είναι

$$F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x''} f$$

και, επομένως, το αποτέλεσμα είναι άμεση εφαρμογή στη συνάρτηση F του Κριτηρίου του Cauchy για όρια συναρτήσεων. $\square$

11.3.1 Απόλυτη σύγκλιση.

Ορισμός. Λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ **συγκλίνει απολύτως** αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b |f|$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, $\int_a^b |f| < +\infty$.

Κριτήριο Απόλυτης Σύγκλισης. *Αν το γεν. ολοκλήρωμα* $\int_a^b f$ *συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\Big| \int_a^b f \Big| \le \int_a^b |f|.$$

Πρώτη απόδειξη. Έστω ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b |f|$ συγκλίνει. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $c_0 \in [a, b)$ ώστε να ισχύει

$$\big| \int_{x'}^{x''} |f| \big| < \varepsilon$$

και, επομένως,

$$\big| \int_{x'}^{x''} f \big| \le \int_{x'}^{x''} |f| < \varepsilon$$

για κάθε $x', x'' \in (c_0, b)$. Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ συγκλίνει.
Τέλος, επειδή για κάθε $x \in [a, b)$ ισχύει $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, συνεπάγεται

$$- \int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|) \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|.$$

Άρα $\big| \int_a^b f \big| \le \int_a^b |f|$.
Δεύτερη απόδειξη. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f^+, f^- : [a, b) \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f^+(x) = (f(x))^+ , \quad f^-(x) = (f(x)^- .$$

Ισχύει

$$0 \le f^+(x) \le |f|(x),\ 0 \le f^-(x) \le |f|(x),\ f^+(x) + f^-(x) = |f|(x),\ f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in [a, b)$.
Επειδή $\int_a^b |f| < +\infty$, συνεπάγεται ότι τα γεν. ολοκληρώματα $\int_a^b f^+$, $\int_a^b f^-$ συγκλίνουν. Επειδή $f = f^+ - f^-$ το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ συγκλίνει και

$$\int_a^b f = \int_a^b (f^+ - f^-) = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- .$$

Επίσης,

$$\big| \int_a^b f \big| = \big| \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- \big| \le \big| \int_a^b f^+ \big| + \big| \int_a^b f^- \big| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b (f^+ + f^-) = \int_a^b |f|.$$

□

Πρόταση 11.12. *(1) Αν ισχύει* $|f(x)| \le g(x)$ *για κάθε* $x \in [a, b)$ *και το γεν. ολοκλήρωμα* $\int_a^b g$ *συγκλίνει, τότε το γεν. ολοκλήρωμα* $\int_a^b f$ *συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει. Επίσης,*

$$\Big| \int_a^b f \Big| \le \int_a^b g.$$

(2) Έστω $g(x) > 0$ *για κάθε* $x \in [a, b)$ *και έστω ότι το* $\lim_{x \to b-} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ *υπάρχει και είναι αριθμός ή, γενικότερα, ότι η συνάρτηση* $\frac{|f(x)|}{g(x)}$ *είναι φραγμένη κοντά στο* b. *Αν το γεν. ολοκλήρωμα* $\int_a^b g$ *συγκλίνει, τότε το γεν. ολοκλήρωμα* $\int_a^b f$ *συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.*

Απόδειξη. (1) Επειδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b g$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b |f|$ συγκλίνει, οπότε και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ συγκλίνει και

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b g.$$

(2) Άμεση συνέπεια της Πρότασης 11.11 και του Κριτηρίου Απόλυτης Σύγκλισης. □

Παραδείγματα. (1) Το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ συγκλίνει απολύτως, διότι ισχύει $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ συγκλίνει.
(2) Θα αποδείξουμε ότι

$$\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty,$$

δηλαδή ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ δε συγκλίνει απολύτως.
Είναι

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

Επειδή

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty,$$

συνεπάγεται

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \to +\infty,$$

οπότε

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty.$$

Σε λίγο θα δούμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ συγκλίνει.

11.3.2 Υπό συνθήκη σύγκλιση.

Ορισμός. Λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\, dx$ **συγκλίνει υπό συνθήκη**, αν συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απολύτως.

Θεώρημα 11.2. *Έστω $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ και $F(x) = \int_a^x f \;\; (x \in [a, b))$ και έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b)$ και η g έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b)$.*
(1) Έστω ότι η g είναι φθίνουσα στο $[a, b)$, ότι $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$ και ότι η F είναι φραγμένη στο $[a, b)$. Τότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b fg$ συγκλίνει.
(2) Έστω ότι η g είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη στο $[a, b)$ και ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ συγκλίνει. Τότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b fg$ συγκλίνει.

Απόδειξη. (1) Υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|F(x)| \leq M$$

για κάθε $x \in [a, b)$. Επειδή η f είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$F'(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in [a,b)$. Επίσης, είναι
$$g'(x) \le 0$$
για κάθε $x \in [a,b)$.
Ισχύει
$$\int_a^x fg = \int_a^x F'g = F(x)g(x) - \int_a^x Fg'$$
για κάθε $x \in [a,b)$. Το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b Fg'$ συγκλίνει απολύτως, διότι
$$\begin{aligned} \int_a^b |Fg'| &\le M \int_a^b |g'| = -M \int_a^b g' = -M \lim_{x\to b-} \int_a^x g' \\ &= -M \lim_{x\to b-}(g(x) - g(a)) = Mg(a) < +\infty. \end{aligned}$$
Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b Fg'$ συγκλίνει και, επομένως, το $\lim_{x\to b-} \int_a^x Fg'$ υπάρχει και είναι αριθμός. Επειδή ισχύει
$$|F(x)g(x)| \le Mg(x)$$
για κάθε $x \in [a,b)$, είναι
$$\lim_{x\to b-} F(x)g(x) = 0.$$
Από την $\int_a^x fg = F(x)g(x) - \int_a^x Fg'$ συνεπάγεται ότι το
$$\lim_{x\to b-} \int_a^x fg = - \lim_{x\to b-} \int_a^x Fg'$$
υπάρχει και είναι αριθμός, οπότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b fg$ συγκλίνει.
(2) Το
$$l = \lim_{x\to b-} g(x)$$
υπάρχει και είναι αριθμός. Βάσει του (1), το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f(g-l)$ συγκλίνει. Τότε
$$\int_a^b fg = \int_a^b f(g-l) + \int_a^b fl = \int_a^b f(g-l) + l \int_a^b f.$$
□

`Παραδείγματα.` (1) Θα δούμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει, δηλαδή ότι συγκλίνει υπό συνθήκη.
Η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα με συνεχή παράγωγο στο $[\pi, +\infty)$ και είναι
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$
Η συνάρτηση $\sin x$ είναι συνεχής στο $[\pi, +\infty)$ και ισχύει
$$\Big| \int_\pi^x \sin t\, dt \Big| = |\cos\pi - \cos x| \le 2$$
για κάθε $x \ge \pi$. Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.
(2) Για το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$ η κατάσταση είναι πιο απλή.
Παρατηρούμε ότι η $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{αν } 0 < x \le \pi \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[0,\pi]$. Άρα το *γενικευμένο* ολοκλήρωμα
$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\pi g$$
έχει τιμή ίση με την τιμή του *απλού* ολοκληρώματος $\int_0^\pi g$.

(3) Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, βλέπουμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

συγκλίνει. Θα υπολογίσουμε την τιμή του γεν. ολοκληρώματος $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ λίγο αργότερα, αλλά προς το παρόν θα δούμε ότι η τιμή αυτή είναι θετικός αριθμός.
Με ολοκλήρωση κατά μέρη, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos x)'}{x}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x} - \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx \geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx.$$

Επειδή είναι $1-\cos x \geq 1-\cos\frac{\pi}{4}$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$, συνεπάγεται

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \geq \left(1-\cos\tfrac{\pi}{4}\right) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{12(2-\sqrt{2})}{7\pi} > 0.$$

Ασκήσεις.

1. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n-1 \leq x < n, n \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} f$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

2. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x\, dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}\, dx$ συγκλίνουν απολύτως.

3. Αποδείξτε ότι, αν $p > 1$, το $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ συγκλίνει απολύτως ενώ, αν $0 < p \leq 1$, το ίδιο ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη.

4. Αν $1 < x < +\infty$ ορίζουμε $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. (Δείτε τις ασκήσεις 11 της ενότητας 10.1 και 18 της ενότητας 7.3.)
(i) Αποδείξτε ότι $\zeta(x) = x \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{x+1}}\, dt$ για κάθε $x > 1$ καθώς και ότι $\frac{1}{x-1} \leq x \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{x+1}}\, dt \leq \frac{x}{x-1}$ για κάθε $x > 1$, βρίσκοντας έτσι με δεύτερο τρόπο τις ήδη γνωστές ανισότητες $\frac{1}{x-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{x}{x-1}$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\zeta(x) = \frac{x}{x-1} - x \int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^{x+1}}\, dt$ για κάθε $x > 1$. Αποδείξτε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x > 0$. Επομένως, η συνάρτηση ζ επεκτείνεται, μέσω του τύπου αυτού, και στο διάστημα $(0,1)$.

5. Έστω ότι η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ότι $f(0) = 0$ και η $f'(0)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 f(x) x^{-\frac{3}{2}}\, dx$ συγκλίνει απολύτως.
Υπόδειξη: Συγκρίνατε με το $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx$.

6. Για ποιες τιμές των p, q τα $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{x-1}\, dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^p)}{x^q}\, dx$ συγκλίνουν είτε απολύτως είτε υπό συνθήκη;

7. Αποδείξτε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^p}\, dx$ συγκλίνει για κάθε $p > 0$.

8. Με τις ισότητες της υπόδειξης της άσκησης 4 της ενότητας 6.2, αποδείξτε ότι:
(i) $\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}\, dx = \pi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\, dx = \pi$ ή 0, αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός ή άρτιος, αντιστοίχως,
(iii) $\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\right)^2 dx = n\pi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

11.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα με παράμετρο.

11.4.1 Συνεχείς συναρτήσεις δυο μεταβλητών.

Σ' αυτήν την υποενότητα θα μελετήσουμε, πολύ συνοπτικά και κάπως πρόχειρα, τις συνεχείς συναρτήσεις δυο μεταβλητών. Θα δούμε μόνο τα αποτελέσματα που θα χρειαστούμε στις επόμενες δυο υποενότητες.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$. Μια ειδική κατηγορία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ είναι τα καρτεσιανά γινόμενα $B\times C = \{(x,y)\,|\,x\in B, y\in C\}$, όπου B,C είναι οποιαδήποτε υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε, επίσης, συναρτήσεις $f : A\to\mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού οποιοδήποτε $A\subseteq\mathbb{R}^2$ και τιμές στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^2$, συνάρτηση $f : A\to\mathbb{R}$ και $(\xi,\eta)\in A$. Η f χαρακτηρίζεται **συνεχής στο** (ξ,η) αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x,y)-f(\xi,\eta)|<\varepsilon$$

για κάθε $(x,y)\in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\delta_0$.
Αν η $f : A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $A\subseteq\mathbb{R}^2$, τότε λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο** A.

Θυμηθείτε: η παράσταση $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ εκφράζει την ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα σημεία (x,y), (ξ,η) του επιπέδου.

Παραδείγματα. (1) Οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση $c : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο $c(x,y)=c$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$.
Πράγματι, έστω $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ και $\varepsilon>0$. Θεωρούμε οποιονήποτε $\delta_0>0$, για παράδειγμα τον $\delta_0=1$, και, τότε, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\delta_0$ συνεπάγεται

$$|c(x,y)-c(\xi,\eta)|=|c-c|=0<\varepsilon.$$

Άρα η c είναι συνεχής στο (ξ,η).
(2) Οι συναρτήσεις $\pi_1,\pi_2 : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ορίζονται με τύπους

$$\pi_1(x,y)=x, \qquad \pi_2(x,y)=y.$$

Η π_1 ονομάζεται **προβολή στον x-άξονα** και η π_2 ονομάζεται **προβολή στον y-άξονα**. Οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$.
Πράγματι, έστω $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ και $\varepsilon>0$. Θεωρούμε $\delta_0=\varepsilon$ και, τότε, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\delta_0$ συνεπάγεται

$$|\pi_1(x,y)-\pi_1(\xi,\eta)|=|x-\xi|\leq\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\delta_0=\varepsilon.$$

Άρα η π_1 είναι συνεχής στο (ξ,η) και, ομοίως, η π_2 είναι συνεχής στο (ξ,η).

Πρόταση 11.13. *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^2$ και $f : A\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $(\xi,\eta)\in A$. Τότε η $f(x,\eta)$, ως συνάρτηση του x ορισμένη στο σύνολο $\{x\,|\,(x,\eta)\in A\}$, είναι συνεχής στον ξ. Επίσης, η $f(\xi,y)$, ως συνάρτηση του y ορισμένη στο σύνολο $\{y\,|\,(\xi,y)\in A\}$, είναι συνεχής στον η.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x,y)-f(\xi,\eta)|<\varepsilon$$

για κάθε $(x,y)\in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\delta_0$. Άρα για κάθε x, $(x,\eta)\in A$, $|x-\xi|<\delta_0$ συνεπάγεται $\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-\eta)^2}=|x-\xi|<\delta_0$ και, επομένως,

$$|f(x,\eta)-f(\xi,\eta)|<\varepsilon.$$

Άρα η συνάρτηση $f(x,\eta)$ είναι συνεχής στον ξ.
Η απόδειξη του δεύτερου μέρους είναι παρόμοια. $\square$

Η Πρόταση 11.14 είναι ανάλογη της Πρότασης 4.8.

Πρόταση 11.14. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f, g : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $(\xi, \eta) \in A$. Τότε οι $f+g, f-g, fg, |f| : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο (ξ, η). Αν, επιπλέον, ισχύει $g(x,y) \neq 0$ για κάθε $(x,y) \in A$, τότε και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο (ξ, η).*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x,y) - f(\xi,\eta)| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|g(x,y) - g(\xi,\eta)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $(x,y) \in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta_0$. Επομένως, για κάθε $(x,y) \in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\big|(f(x,y) + g(x,y)) - (f(\xi,\eta) + g(\xi,\eta))\big| &\leq |f(x,y) - f(\xi,\eta)| + |g(x,y) - g(\xi,\eta)| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα η $f+g$ είναι συνεχής στο (ξ,η).
Οι υπόλοιπες αποδείξεις είναι παρόμοιες. □

Η Πρόταση 11.15 είναι ανάλογη της Πρότασης 4.9.

Πρόταση 11.15. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to B$ και $g : B \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $(\xi,\eta) \in A$ και η g είναι συνεχής στον $\zeta = f(\xi,\eta) \in B$, τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο (ξ,η).*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0' > 0$ ώστε να ισχύει $|g(z) - g(\zeta)| < \varepsilon$ για κάθε $z \in B$, $|z - \zeta| < \delta_0'$. Κατόπιν, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x,y) - \zeta| = |f(x,y) - f(\xi,\eta)| < \delta_0'$ για κάθε $(x,y) \in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta_0$. Άρα για κάθε $(x,y) \in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta_0$ ισχύει $|(g \circ f)(x,y) - (g \circ f)(\xi,\eta)| = |g(f(x,y)) - g(\zeta)| < \varepsilon$. Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στο (ξ,η). □

Βάσει των Προτάσεων 11.13 - 11.15 και των προηγούμενων παραδειγμάτων, μπορούμε να αποδείξουμε ότι πολλές συναρτήσεις δυο μεταβλητών είναι συνεχείς.

Παραδείγματα. (1) Ένα μονώνυμο δυο μεταβλητών $cx^n y^m$ $(n, m \in \mathbb{Z}, n, m \geq 0)$ είναι συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$, διότι η συνάρτηση $cx^n y^m$ γράφεται

$$cx^n y^m = c(\pi_1(x,y))^n (\pi_2(x,y))^m = c\pi_1(x,y) \cdots \pi_1(x,y)\pi_2(x,y) \cdots \pi_2(x,y).$$

Άρα κάθε πολυώνυμο δυο μεταβλητών, δηλαδή άθροισμα μονωνύμων, όπως, για παράδειγμα, το $3 + 2x^3y^2 - 4xy^5 - 2x^3y^8$, είναι συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$.
Τέλος, κάθε ρητή συνάρτηση δυο μεταβλητών, δηλαδή λόγος πολυωνύμων δυο μεταβλητών, όπως, για παράδειγμα, η $\frac{xy - 2xy^3 + 4x^2y^5}{x^2y - 3x^2y^3 + 2x^5y}$, είναι συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ στο οποίο δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής της ρητής συνάρτησης.
(2) Η $e^{xy^2} \sin(xy + y^2)$ είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$.
Πράγματι, η xy^2 είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$ και έχει τιμές στο $\mathbb{R}$. Επίσης, η e^z είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$. Άρα η σύνθετη συνάρτηση e^{xy^2} είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι η $\sin(xy + y^2)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$. Άρα το γινόμενο $e^{xy^2} \sin(xy + y^2)$ είναι συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^2$.

Η Πρόταση 11.16 είναι ανάλογη της μιας από τις δυο κατευθύνσεις του Θεωρήματος 4.1.

Πρόταση 11.16. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $(\xi,\eta) \in A$. Έστω ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $(x_n, y_n) \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to \xi$ και $y_n \to \eta$. Τότε $f(x_n, y_n) \to f(\xi,\eta)$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x,y) - f(\xi,\eta)| < \varepsilon$ για κάθε $(x,y) \in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta_0$. Κατόπιν, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|x_n - \xi| < \frac{\delta_0}{\sqrt{2}}$ και $|y_n - \eta| < \frac{\delta_0}{\sqrt{2}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $\sqrt{(x_n-\xi)^2 + (y_n-\eta)^2} < \sqrt{\frac{{\delta_0}^2}{2} + \frac{{\delta_0}^2}{2}} = \delta_0$ και, επομένως, $|f(x_n,y_n) - f(\xi,\eta)| < \varepsilon$. Άρα $f(x_n,y_n) \to f(\xi,\eta)$. $\square$

Τέλος, το Θεώρημα 11.3 είναι ανάλογο του Θεωρήματος 4.2.

Θεώρημα 11.3. *Έστω $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b] \times [c,d]$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x',y') - f(x'',y'')| < \varepsilon$ για κάθε $(x',y'), (x'',y'') \in [a,b] \times [c,d]$, $\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2} < \delta_0$.*

Απόδειξη. Έστω - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $(x',y'), (x'',y'') \in [a,b] \times [c,d]$,

$$\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2} < \delta$$

ώστε

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| \geq \varepsilon_0 .$$

Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $({x_n}',{y_n}'), ({x_n}'',{y_n}'') \in [a,b] \times [c,d]$,

$$\sqrt{({x_n}'-{x_n}'')^2 + ({y_n}'-{y_n}'')^2} < \tfrac{1}{n}$$

ώστε

$$|f({x_n}',{y_n}') - f({x_n}'',{y_n}'')| \geq \varepsilon_0 .$$

Από την $\sqrt{({x_n}'-{x_n}'')^2 + ({y_n}'-{y_n}'')^2} < \frac{1}{n}$ συνεπάγεται

$$|{x_n}' - {x_n}''| < \tfrac{1}{n}, \qquad |{y_n}' - {y_n}''| < \tfrac{1}{n}.$$

Η ακολουθία $({x_n}')$ είναι στο $[a,b]$ οπότε υπάρχει υποακολουθία $({x_{n_k}}')$ η οποία συγκλίνει, έστω στον ξ. Επειδή

$$|{x_{n_k}}' - {x_{n_k}}''| < \tfrac{1}{n_k} \leq \tfrac{1}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται ότι και η $({x_{n_k}}'')$ συγκλίνει στον ξ. Δηλαδή,

$${x_{n_k}}' \to \xi, \qquad {x_{n_k}}'' \to \xi.$$

Η ακολουθία $({y_n}')$ και, επομένως, η υποακολουθία $({y_{n_k}}')$ είναι στο $[c,d]$. Άρα υπάρχει υποακολουθία $({y_{n_{k_l}}}')$ η οποία συγκλίνει, έστω στον η. Επειδή

$$|{y_{n_{k_l}}}' - {y_{n_{k_l}}}''| < \tfrac{1}{n_{k_l}} \leq \tfrac{1}{k_l} \leq \tfrac{1}{l}$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται ότι και η $({y_{n_{k_l}}}'')$ συγκλίνει στον η. Δηλαδή,

$${y_{n_{k_l}}}' \to \eta, \qquad {y_{n_{k_l}}}'' \to \eta.$$

Συνεπάγεται, επίσης, ότι

$${x_{n_{k_l}}}' \to \xi, \qquad {x_{n_{k_l}}}'' \to \xi.$$

Επειδή η $({x_{n_{k_l}}}')$ είναι στο $[a,b]$, συνεπάγεται $\xi \in [a,b]$ και, επειδή η $({y_{n_{k_l}}}')$ είναι στο $[c,d]$, συνεπάγεται $\eta \in [c,d]$. Άρα $(\xi,\eta) \in [a,b] \times [c,d]$, οπότε η f είναι συνεχής στο (ξ,η). Άρα

$$f({x_{n_{k_l}}}',{y_{n_{k_l}}}') \to f(\xi,\eta), \qquad f({x_{n_{k_l}}}'',{y_{n_{k_l}}}'') \to f(\xi,\eta).$$

Άρα

$$f({x_{n_{k_l}}}',{y_{n_{k_l}}}') - f({x_{n_{k_l}}}'',{y_{n_{k_l}}}'') \to 0.$$

Αυτό αντιφάσκει με το ότι ισχύει $\big|f({x_{n_{k_l}}}',{y_{n_{k_l}}}') - f({x_{n_{k_l}}}'',{y_{n_{k_l}}}'')\big| \geq \varepsilon_0$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$. $\square$

11.4.2 Ολοκληρώματα με παράμετρο.

Ορισμός. Έστω διάστημα I και συνάρτηση δυο μεταβλητών $f : I \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Αν για κάποιον $x \in I$ η $f(x,y)$, ως συνάρτηση του $y \in [c,d]$, είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$, τότε ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$. Αν αυτό ισχύει για *κάθε* $x \in I$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \qquad (x \in I).$$

Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι θεωρούμε το **ολοκλήρωμα** $\int_c^d f(x,y)\,dy$ **με παράμετρο** $x \in I$. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d]$, τότε για κάθε $x \in I$ η $f(x,y)$, ως συνάρτηση του $y \in [c,d]$, είναι συνεχής στο $[c,d]$ και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$.

Στα Θεωρήματα 11.4, 11.5 θα δούμε ότι, με κατάλληλες υποθέσεις, η g είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη, αντιστοίχως, στο I.

Θεώρημα 11.4. *Έστω διάστημα I και $f : I \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d]$, τότε η $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω $\xi \in I$. Θεωρούμε διάστημα $[a,b] \subseteq I$ ώστε: αν ο ξ είναι δεξιό ή αριστερό άκρο του I, τότε ο ξ να είναι, ομοίως, δεξιό ή αριστερό άκρο του $[a,b]$ και, αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I, τότε ο ξ να είναι, ομοίως, εσωτερικό σημείο του $[a,b]$. Άρα για να αποδείξουμε ότι η g είναι συνεχής στον ξ αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ είναι συνεχής στον ξ.
Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b] \times [c,d]$, οπότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| < \tfrac{\varepsilon}{d-c+1}$$

για κάθε $(x',y'), (x'',y'') \in [a,b] \times [c,d]$, $\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2} < \delta_0$. Τότε για κάθε $x \in [a,b]$, $|x-\xi| < \delta_0$ και για κάθε $y \in [c,d]$ είναι $(x,y), (\xi,y) \in [a,b] \times [c,d]$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-y)^2} = |x-\xi| < \delta_0$ και, επομένως,

$$|f(x,y) - f(\xi,y)| < \tfrac{\varepsilon}{d-c+1}.$$

Άρα για κάθε $x \in [a,b]$, $|x-\xi| < \delta_0$ ισχύει

$$|g(x) - g(\xi)| = \big|\int_c^d (f(x,y) - f(\xi,y))\,dy\big| \le \tfrac{\varepsilon}{d-c+1}(d-c) < \varepsilon.$$

Άρα ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ είναι συνεχής στον ξ. □

Ορισμός. Το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x,\eta)-f(\xi,\eta)}{x-\xi}$, αν υπάρχει, ονομάζεται **μερική παράγωγος ως προς** x **της** f **στο σημείο** (ξ,η). Ομοίως, το όριο $\lim_{y\to\eta} \frac{f(\xi,y)-f(\xi,\eta)}{y-\eta}$, αν υπάρχει, ονομάζεται **μερική παράγωγος ως προς** y **της** f **στο σημείο** (ξ,η). Συμβολίζουμε

$$f_1'\xi,\eta) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x,\eta) - f(\xi,\eta)}{x-\xi}\,, \qquad f_2'(\xi,\eta) = \lim_{y\to\eta} \frac{f(\xi,y) - f(\xi,\eta)}{y-\eta}\,.$$

Θεώρημα 11.5. *Έστω διάστημα I και $f : I \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d]$ και η f_1' είναι, επίσης, συνεχής στο $I \times [c,d]$. Τότε η $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ $(x \in I)$ είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει*

$$g'(x) = \int_c^d f_1'(x,y)\,dy$$

για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη. Έστω $\xi \in I$. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 11.4, θεωρούμε διάστημα $[a,b] \subseteq I$ που περιέχει τον ξ στο εσωτερικό του, αν ο ξ είναι στο εσωτερικό του I, ή ως άκρο του, αν ο ξ είναι άκρο του I. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ έχει παράγωγο στον ξ ίση με $g'(\xi) = \int_c^d f_1'(\xi,y)\,dy$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Η f_1' είναι συνεχής στο $[a,b] \times [c,d]$, οπότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f_1'(x',y') - f_1'(x'',y'')| < \tfrac{\varepsilon}{d-c+1}$$

για κάθε $(x',y'),(x'',y'') \in [a,b]\times[c,d]$, $\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2} < \delta_0$. Έστω $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $|x-\xi| < \delta_0$. Τότε υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, ξ ώστε

$$\tfrac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} = f_1'(\zeta,y)$$

και, επειδή $|\zeta-\xi| \leq |x-\xi| < \delta_0$, συνεπάγεται

$$\big|\tfrac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} - f_1'(\xi,y)\big| = |f_1'(\zeta,y) - f_1'(\xi,y)| < \tfrac{\varepsilon}{d-c+1}.$$

Άρα για κάθε $x \in [a,b]$, $|x-\xi| < \delta_0$ ισχύει

$$\big|\tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} - \int_c^d f_1'(\xi,y)\,dy\big| = \big|\int_c^d \big(\tfrac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} - f_1'(\xi,y)\big)\,dy\big| \leq \tfrac{\varepsilon}{d-c+1}(d-c) < \varepsilon.$$

Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = \int_c^d f_1'(\xi,y)\,dy$ και, επομένως, ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ έχει παράγωγο στον ξ ίση με $g'(\xi) = \int_c^d f_1'(\xi,y)\,dy$. □

Παράδειγμα. Έστω $f(x) = \big(\int_0^x e^{-s^2}\,ds\big)^2$ και $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}\,dy$. Τότε, κατ' αρχάς, ισχύει

$$f'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-s^2}\,ds$$

για κάθε x. Η μερική παράγωγος ως προς x της $\frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}$, δηλαδή η $-2xe^{-x^2(y^2+1)}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \times [0,1]$, οπότε είναι

$$g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(y^2+1)}\,dy = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2y^2}\,dy = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-s^2}\,ds$$

για κάθε x. Συνεπάγεται $f'(x) + g'(x) = 0$ για κάθε x. Άρα η $f+g$ είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι

$$f(x) + g(x) = f(0) + g(0) = 0 + \int_0^1 \tfrac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan 1 - \arctan 0 = \tfrac{\pi}{4}$$

για κάθε x. Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^1 \tfrac{e^{-x^2}}{1+y^2}\,dy = \tfrac{\pi}{4}e^{-x^2}$$

για κάθε x και, επομένως,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \tfrac{\pi}{4} - \lim_{x\to+\infty} g(x) = \tfrac{\pi}{4}.$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Τέλος, επειδή η e^{-x^2} είναι άρτια, εύκολα βλέπουμε ότι $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Καταλήγουμε, επομένως, στο πολύ σημαντικό για την επιστήμη **ολοκλήρωμα του Gauss**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

11.4.3 Γενικευμένα ολοκληρώματα με παράμετρο.

Ορισμός. Έστω $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, διάστημα I και $f : I \times [c, d) \to \mathbb{R}$. Έστω ότι για κάποιον $x \in I$ η $f(x, y)$, ως συνάρτηση του $y \in [c, d)$, είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[c, d)$ και ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x, y)\, dy$ συγκλίνει. Αν αυτό ισχύει για κάθε $x \in I$, τότε ορίζεται, και πάλι, συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy \qquad (x \in I)$$

και λέμε ότι πρόκειται για **γενικευμένο ολοκλήρωμα με παράμετρο** $x \in I$ και ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x, y)\, dy$ **συγκλίνει στην** $g(x)$ **κατά σημείο στο διάστημα** I.

Θα δούμε κάτω από ποιές υποθέσεις η g είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη στο διάστημα I.

Παραδείγματα. (1) Θεωρούμε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy$ με παράμετρο x.
Για κάθε $y \geq 0$ είναι $\int_0^y e^{-xt}\, dt = \begin{cases} -\frac{e^{-xy}-1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ y, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ οπότε, θεωρώντας το $\lim_{y\to+\infty}$, βρίσκουμε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ κατά σημείο στο $(0, +\infty)$.
Βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής και, μάλιστα, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
(2) Θεωρούμε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy$ με παράμετρο x.
Κατ' αρχάς, αν $x = 0$, το γεν. ολοκλήρωμα έχει τιμή 0.
Έστω, τώρα, ότι $x > 0$. Με αλλαγή μεταβλητής βρίσκουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy.$$

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy$ συγκλίνει και έστω A η τιμή του. Άρα $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy = A$ για κάθε $x > 0$.
Αν $x < 0$, τότε

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-|x|y)}{y}\, dy = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(|x|y)}{y}\, dy = -A.$$

Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} A, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -A, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Έχουμε, επίσης, δει ότι $A > 0$ και, επομένως, η g δεν είναι συνεχής στον 0 ενώ είναι συνεχής και, μάλιστα, παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Ορισμός. Λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x, y)\, dy$ **συγκλίνει στη συνάρτηση** $g(x)$ **ομοιόμορφα στο διάστημα** I αν

$$\lim_{y\to d-} \sup\left\{ \left| g(x) - \int_c^y f(x, t)\, dt \right| \,\middle|\, x \in I \right\} = 0$$

ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $c_0 \in [c, d)$ ώστε να ισχύει $\left| g(x) - \int_c^y f(x, t)\, dt \right| \leq \varepsilon$ για κάθε $x \in I$, $y \in (c_0, d)$.

Τώρα, για κάθε $y \in [c, d)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_y : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g_y(x) = \int_c^y f(x,t)\,dt \qquad (x \in I).$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\sup\left\{\left|g(x) - \int_c^y f(x,t)\,dt\right| \,\middle|\, x \in I\right\} = \sup\{|g(x) - g_y(x)| \mid x \in I\} = \|g_y - g\|_I\,.$$

Άρα ο παραπάνω ορισμός αναδιατυπώνεται ως εξής: το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο διάστημα I αν

$$\lim_{y\to d-} \|g_y - g\|_I = 0.$$

Πρόταση 11.17. *Αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο διάστημα I, τότε συγκλίνει στην $g(x)$ και κατά σημείο στο I.*

Απόδειξη. Έστω $\xi \in I$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $c_0 \in [c, d)$ ώστε να ισχύει

$$\left|g(x) - \int_c^y f(x,t)\,dt\right| \le \varepsilon$$

για κάθε $x \in I$, $y \in (c_0, d)$. Συνεπάγεται

$$\left|g(\xi) - \int_c^y f(\xi,t)\,dt\right| \le \varepsilon$$

για κάθε $y \in (c_0, d)$. Άρα $\lim_{y\to d-} \int_c^y f(\xi,t)\,dt = g(\xi)$, οπότε

$$\int_c^d f(\xi,y)\,dy = g(\xi).$$

Τέλος, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\xi \in I$, συμπεραίνουμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο I. □

Παράδειγμα. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ κατά σημείο στο $(0, +\infty)$. Θα δούμε, τώρα, ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0, +\infty)$. Είναι

$$\left|\tfrac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| = \tfrac{e^{-xy}}{x}$$

για κάθε $x > 0$ και $y \ge 0$. Άρα

$$\sup\left\{\left|\tfrac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \,\middle|\, x \in (0, +\infty)\right\} = \sup\{\tfrac{e^{-xy}}{x} \mid x > 0\} = +\infty$$

για κάθε $y \ge 0$. Άρα δεν ισχύει ότι $\lim_{y\to+\infty} \sup\left\{\left|\frac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \,\middle|\, x \in (0, +\infty)\right\} = 0$, οπότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ δε συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ ομοιόμορφα στο $(0, +\infty)$.
Από την άλλη μεριά, θεωρώντας οποιονδήποτε $a > 0$, θα αποδείξουμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
Πράγματι,

$$\sup\left\{\left|\tfrac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \,\middle|\, x \in [a, +\infty)\right\} = \sup\{\tfrac{e^{-xy}}{x} \mid x \ge a\} = \tfrac{e^{-ay}}{a}$$

για κάθε $y > 0$ και, επομένως,

$$\lim_{y\to+\infty} \sup\left\{\left|\tfrac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \,\middle|\, x \in [a, +\infty)\right\} = \lim_{y\to+\infty} \tfrac{e^{-ay}}{a} = 0.$$

Έστω ακολουθία (y_n) στο $[c,d)$ ώστε $y_n \to d$. Έχουμε ήδη ορίσει τις συνάρτησεις $g_{y_n} : I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με τύπους

$$g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt \qquad (x \in I).$$

Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τους ορισμούς, αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο ή ομοιόμορφα στο I, τότε, αντιστοίχως, $g_{y_n} \overset{\text{κ.σ.}}{\to} g$ ή $g_{y_n} \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I. Αυτή η παρατήρηση θα μας βοηθήσει να μελετήσουμε τις ιδιότητες συνέχειας και παραγωγισιμότητας της g, διότι θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε τα σχετικά αποτελέσματα για ακολουθίες συναρτήσεων.

Θεώρημα 11.6. *Έστω $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, διάστημα I και $f : I \times [c,d) \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d)$ και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο I, τότε η $g : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ακολουθία (y_n) στο $[c,d)$ ώστε $y_n \to d$. Κατόπιν, ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_{y_n} : I \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt.$$

Τότε

$$g_{y_n} \overset{\text{ομ}}{\to} g$$

στο I. Η f είναι συνεχής στο $I \times [c, y_n]$, αφού αυτό είναι υποσύνολο του $I \times [c,d)$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.4, κάθε g_{y_n} $(n \in \mathbb{N})$ είναι συνεχής στο I. Άρα η g είναι συνεχής στο I. $\square$

Θεώρημα 11.7. *Έστω $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, διάστημα I και $f : I \times [c,d) \to \mathbb{R}$. Έστω ότι οι f, f_1' είναι συνεχείς στο $I \times [c,d)$, ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f_1'(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο I και ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(\xi,y)\,dy$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$. Τότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η g είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $g'(x) = h(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (y_n) στο $[c,d)$ ώστε $y_n \to d$ και ορίζουμε τις $g_{y_n} :$ $I \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.5, ισχύει

$$g_{y_n}{}'(x) = \int_c^{y_n} f_1'(x,t)\,dt$$

για κάθε $x \in I$. Λόγω της υπόθεσης, ισχύει

$$g_{y_n}{}' \overset{\text{ομ}}{\to} h$$

στο I. Επίσης, λόγω της υπόθεσης, η ακολουθία $(g_{y_n}(\xi))$ συγκλίνει.
Από το Θεώρημα 9.3 συνεπάγεται ότι η (g_{y_n}) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση g κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι ισχύει $g'(x) = h(x)$ για κάθε $x \in I$. Ειδικότερα, ισχύει

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_{y_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

για κάθε $x \in I$. Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο I.

Μένει να αποδείξουμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ *ομοιόμορφα* σε κάθε $[a,b]\subseteq I$.
Ορίζουμε την $F:[c,d)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$F(y)=\|g_y-g\|_{[a,b]}\,.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ αν και μόνο αν $\lim_{y\to d-}F(y)=0$. Τώρα, θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (y_n) στο $[c,d)$ ώστε $y_n\to d$ και τις αντίστοιχες συναρτήσεις $g_{y_n}(x)=\int_c^{y_n}f(x,t)\,dt\ \ (x\in I)$. Επειδή η (g_{y_n}) συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $[a,b]$, συνεπάγεται

$$F(y_n)=\|g_{y_n}-g\|_{[a,b]}\to 0.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4, συνεπάγεται $\lim_{y\to d-}F(y)=0$. □

Για την εφαρμογή των Θεωρημάτων 11.6 και 11.7 χρειαζόμαστε ένα κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Θα δούμε, τώρα, ένα πολύ σημαντικό κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων, το οποίο μοιάζει πολύ με το κριτήριο Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

Θεώρημα 11.8. *Έστω διάστημα I, $f:I\times[c,d)\to\mathbb{R}$ και $F:[c,d)\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $|f(x,y)|\le F(y)$ για κάθε $y\in[c,d)$, $x\in I$. Αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d F(y)\,dy$ συγκλίνει, τότε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη. Βάσει της Πρότασης 11.12, για κάθε $x\in I$ το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει. Άρα ορίζεται η $g:I\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Ορίζουμε, επίσης, και τις $g_y:I\to\mathbb{R}$ με τύπους

$$g_y(x)=\int_c^y f(x,t)\,dt.$$

Μένει να δούμε αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ *ομοιόμορφα* στο I ή, ισοδύναμα, αν $\lim_{y\to d-}\|g_y-g\|_I=0$.
Για κάθε $y\in[c,d)$, $x\in I$ είναι

$$\begin{aligned}|g(x)-g_y(x)|&=\Big|\int_c^d f(x,t)\,dt-\int_c^y f(x,t)\,dt\Big|=\Big|\int_y^d f(x,t)\,dt\Big|\\&\le\int_y^d|f(x,t)|\,dt\le\int_y^d F(t)\,dt,\end{aligned}$$

οπότε

$$\|g_y-g\|_I\le\int_y^d F(t)\,dt=\int_c^d F(t)\,dt-\int_c^y F(t)\,dt.$$

Επειδή $\lim_{y\to d-}\int_c^y F(t)\,dt=\int_c^d F(t)\,dt$, συνεπάγεται $\lim_{y\to d-}\|g_y-g\|_I=0$. □

Παραδείγματα. (1) Θεωρούμε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}e^{-y}\sin(xy)\,dy$ με παράμετρο x.
Είναι $|e^{-y}\sin(xy)|\le e^{-y}$ για κάθε $y\in[0,+\infty)$, $x\in\mathbb{R}$. Το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}e^{-y}\,dy$ συγκλίνει:

$$\int_0^{+\infty}e^{-y}\,dy<+\infty.$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.8, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Ειδικώτερα, ισχύει

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$$

για κάθε x.
Η συνάρτηση $e^{-y}\sin(xy)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.6, η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Η μερική παράγωγος ως προς x της συνάρτησης $e^{-y}\sin(xy)$ είναι η $ye^{-y}\cos(xy)$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$. Επίσης, ισχύει $|ye^{-y}\cos(xy)| \leq ye^{-y}$ για κάθε $y\in[0,+\infty)$, $x\in\mathbb{R}$ και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,dy$ συγκλίνει:

$$\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,dy < +\infty.$$

Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} ye^{-y}\cos(xy)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Έχουμε, επίσης, ήδη αποδείξει ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 11.7 συνεπάγεται ότι

$$g'(x) = h(x) = \int_0^{+\infty} ye^{-y}\cos(xy)\,dy$$

για κάθε x.
Παρεμπιπτόντως, μπορούμε να υπολογίσουμε το $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ με ολοκληρώσεις κατά μέρη:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy &= -\int_0^{+\infty} \tfrac{d\,e^{-y}}{dy}\sin(xy)\,dy \\
&= -\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\sin(xy) + x\int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(xy)\,dy \\
&= -x\int_0^{+\infty} \tfrac{d\,e^{-y}}{dy}\cos(xy)\,dy \\
&= -x\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\cos(xy) + x - x^2\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)dy \\
&= x - x^2\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)dy.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε τα όρια $\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\sin(xy) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\cos(xy) = 0$, τα οποία ισχύουν διότι είναι $|e^{-y}\sin(xy)| \leq e^{-y}$ και $|e^{-y}\cos(xy)| \leq e^{-y}$.
Άρα

$$\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy = \frac{x}{1+x^2}.$$

(2) Θεωρούμε το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ με παράμετρο $x>0$.
Είναι $\left|e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right| \leq e^{-xy}$ για κάθε $y\in(0,+\infty)$, $x\in(0,+\infty)$. Το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει:

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy < +\infty.$$

Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 11.12, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ συγκλίνει για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και ορίζει συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$$

στο $(0,+\infty)$.
Έστω $a>0$. Παρατηρούμε ότι $\left|e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right| \leq e^{-xy} \leq e^{-ay}$ για κάθε $y\in(0,+\infty)$ και $x\in[a,+\infty)$. Το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-ay}\,dy$ συγκλίνει, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.8, το γεν. ολοκλήρωμα

$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Η συνάρτηση $e^{-xy}\frac{\sin y}{y}$ είναι συνεχής στο $[a,+\infty)\times(0,+\infty)$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.6, η g είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $a>0$, συνεπάγεται ότι η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.
Η μερική παράγωγος ως προς x της συνάρτησης $e^{-xy}\frac{\sin y}{y}$ είναι η $-e^{-xy}\sin y$, η οποία είναι συνεχής στο $[a,+\infty)\times(0,+\infty)$. Επίσης, ισχύει $|-e^{-xy}\sin y|\leq e^{-xy}\leq e^{-ay}$ για κάθε $y\in(0,+\infty)$, $x\in[a,+\infty)$ και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-ay}\,dy$ συγκλίνει. Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Από το Θεώρημα 11.7 συνεπάγεται ότι

$$g'(x)=h(x)=-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy$$

για κάθε $x\in[a,+\infty)$. Μετά από αλλαγή μεταβλητής,

$$g'(x)=-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy,$$

οπότε, από το προηγούμενο παράδειγμα,

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2+1}$$

για κάθε $x\in[a,+\infty)$.
Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $a>0$, συμπεραίνουμε ότι $g'(x)=-\frac{1}{x^2+1}$ για κάθε $x>0$. Άρα $g'(x)=-\arctan' x$ για κάθε $x>0$, οπότε υπάρχει σταθερά c ώστε να είναι

$$g(x)=-\arctan x+c$$

για κάθε $x>0$.
Τώρα, είναι

$$|g(x)|\leq\int_0^{+\infty} e^{-xy}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy\leq\int_0^{-\infty} e^{-xy}\,dy=\frac{1}{x}$$

για κάθε $x>0$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0.$$

Άρα $0=-\lim_{x\to+\infty}\arctan x+c$, οπότε $c=\frac{\pi}{2}$. Άρα

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}-\arctan x\qquad(x>0).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(y)=\int_0^y \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Γνωρίζουμε, από το τελευταίο παράδειγμα της ενότητας 3, ότι υπάρχει το

$$A=\lim_{y\to+\infty} F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

και ότι είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy=A$.
Κατ' αρχάς, είναι σαφές ότι $F'(y)=\frac{\sin y}{y}$ για κάθε $y>0$.
Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει $y_0>0$ ώστε να ισχύει

$$|F(y)-A|<\frac{\varepsilon}{4}$$

για κάθε $y\geq y_0$ και, επομένως,

$$|F(y)-F(y_0)|<|F(y)-A|+|F(y_0)-A|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε $y \geq y_0$. Τότε συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\Big|\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy\Big| &= \Big|\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\tfrac{d\,(F(y)-F(y_0))}{dy}\,dy\Big| = \Big|x\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}(F(y)-F(y_0))\,dy\Big| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2}x\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\,dy = \tfrac{\varepsilon}{2}e^{-xy_0} < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\Big|\int_{y_0}^{+\infty}\tfrac{\sin y}{y}\,dy\Big| = |A-F(y_0)| < \tfrac{\varepsilon}{4}\,.$$

Κατόπιν,

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{+\infty} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy - A\Big| &= \Big|\int_0^{y_0} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy + \int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy - \int_0^{y_0}\tfrac{\sin y}{y}\,dy - \int_{y_0}^{+\infty}\tfrac{\sin y}{y}\,dy\Big| \\ &\leq \Big|\int_0^{y_0} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy - \int_0^{y_0}\tfrac{\sin y}{y}\,dy\Big| \\ &\quad + \Big|\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy\Big| + \Big|\int_{y_0}^{+\infty}\tfrac{\sin y}{y}\,dy\Big| \\ &< \Big|\int_0^{y_0}(e^{-xy}-1)\tfrac{\sin y}{y}\,dy\Big| + \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{4} \leq \int_0^{y_0}(1-e^{-xy})\,dy + \tfrac{3\varepsilon}{4}\,.\end{aligned}$$

Από τη γνωστή ανισότητα $1+t \leq e^t$ συνεπάγεται $\int_0^{y_0}(1-e^{-xy})\,dy \leq x\int_0^{y_0} y\,dy = \frac{x{y_0}^2}{2}$. Άρα είναι

$$\Big|\int_0^{+\infty} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy - A\Big| < \tfrac{x{y_0}^2}{2} + \tfrac{3\varepsilon}{4}\,.$$

Τέλος, θεωρούμε $\delta_0 = \frac{\varepsilon}{2{y_0}^2}$. Αν $0 < x < \delta_0$, τότε

$$\Big|\int_0^{+\infty} e^{-xy}\tfrac{\sin y}{y}\,dy - A\Big| < \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Άρα $\lim_{x\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy = A.$
Συνεπάγεται ότι $A = \lim_{x\to 0+}(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \frac{\pi}{2}$. Άρα

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}\,.$$

Ασκήσεις.

1. Έστω $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\cos(2xy)\,dy$. Αποδείξτε ότι $F'(x)+2xF(x) = 0$ για κάθε x. Κατόπιν, αποδείξτε ότι $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$ για κάθε x.
   Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι η $e^{x^2}F(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση.

2. (Συνέχεια της άσκησης 4 της ενότητας 11.3.) (i) Αποδείξτε ότι το $\int_1^{+\infty}\frac{[y]}{y^{x+1}}\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a,b] \subseteq (1,+\infty)$.
   (ii) Αποδείξτε ότι το $\int_1^{+\infty}\frac{y-[y]}{y^{x+1}}\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a,b] \subseteq (0,+\infty)$.
   (iii) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση ζ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ και ότι η $(x-1)\zeta(x)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

3. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$, $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^2}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^4}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$, $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^4}{x^4}\,dx = \frac{\pi}{3}$.

4. (i) Έστω $F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y(y^2+1)}\,dy$ για $x > 0$. Αποδείξτε ότι $F''(x) - F(x) = -\frac{\pi}{2}$ για κάθε $x > 0$, οπότε $F(x) = \frac{\pi}{2}(1-e^{-x})$ για κάθε $x > 0$.
   (ii) Αν $a, x > 0$, αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y(y^2+a^2)}\,dy = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ax})$, $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{y^2+a^2}\,dy = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}$, $\int_0^{+\infty}\frac{y\sin(xy)}{y^2+a^2}\,dy = \frac{\pi}{2}e^{-ax}$,
   (iii) Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}$.

5. Έστω ότι η $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι μονότονη στο $[0,+\infty)$ και $l=\lim_{x\to+\infty}f(x)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to0+}x\int_0^{+\infty}e^{-xy}f(y)\,dy=l$.

6. Έστω ότι η $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ είναι μονότονη στο $(0,1]$ και $l=\lim_{x\to0+}f(x)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to0+}x\int_0^1 y^{x-1}f(y)\,dy=l$.

11.5 Η συνάρτηση Γ.

Θεωρούμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$$

με παράμετρο $x\in(0,+\infty)$.

Λήμμα 11.2. *Αν $x>0$, τα γεν. ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty}y^{x-1}e^{-y}\,dy$, $\int_0^{+\infty}y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ $(n\in\mathbb{N})$ συγκλίνουν. Επίσης, τα γενικευμένα αυτά ολοκληρώματα συγκλίνουν σε αντίστοιχες συναρτήσεις ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a,b]\subseteq(0,+\infty)$.*

Απόδειξη. Το πρώτο γεν. ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του δεύτερου με $n=0$. Το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ χωρίζεται σε δύο γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy, \qquad \int_1^{+\infty}y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy.$$

Θεωρούμε a,b ώστε $0<a\le b<+\infty$ και $x\in[a,b]$. Αν $y\ge1$, τότε είναι

$$|y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}|\le y^{n+x-1}e^{-y}\le y^{n+b-1}e^{-y}$$

και, επειδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty}y^{n+b-1}e^{-y}\,dy$ συγκλίνει,

$$\int_1^{+\infty}y^{n+b-1}e^{-y}\,dy<+\infty,$$

το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty}y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,b]$.
Αν $0<y\le1$, τότε

$$|y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}|\le y^{a-1}|\log y|^n$$

και, επειδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^1 y^{a-1}|\log y|^n\,dy$ συγκλίνει,

$$\int_0^1 y^{a-1}|\log y|^n\,dy<+\infty,$$

το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^1 y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,b]$.
Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,b]$.
Για να αποδείξουμε, τώρα, ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x>0$, εφαρμόζουμε τη γνωστή διαδικασία. Δηλαδή, παίρνουμε τυχόν $\xi>0$ και, κατόπιν, διαλέγουμε διάστημα $[a,b]$ ώστε $0<a<\xi<b<+\infty$. Αφού έχουμε αποδείξει ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει (σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα) στο $[a,b]$, συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει και στον ξ. □

Ορισμός. Η συνάρτηση που ορίζεται από το $\int_0^{+\infty}y^{x-1}e^{-y}\,dy$ συμβολίζεται

$$\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$$

και ονομάζεται **συνάρτηση** Γ. Δηλαδή,

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}y^{x-1}e^{-y}\,dy \qquad (0<x<+\infty).$$

Η συνάρτηση Γ είναι εξαιρετικά σημαντική.

Πρόταση 11.18. *Η Γ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και*

$$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy \qquad (0<x<+\infty, n\in\mathbb{N}).$$

Απόδειξη. Έστω $\xi\in(0,+\infty)$. Θεωρούμε a,b ώστε $0<a<\xi<b<+\infty$ και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $y^{x-1}e^{-y}$ και η μερική παράγωγός της ως προς x, δηλαδή η $y^{x-1}\log y\, e^{-y}$, είναι συνεχείς στο $[a,b]\times(0,+\infty)$. Επίσης, τα γεν. ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ και $\int_0^{+\infty} y^{x-1}\log y\, e^{-y}\,dy$ συγκλίνουν σε κάποιες συναρτήσεις - το πρώτο στην $\Gamma(x)$ - ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.7, είναι

$$\Gamma'(\xi)=\int_0^{+\infty} y^{\xi-1}\log y\, e^{-y}\,dy.$$

Επαναλαμβάνουμε με τη συνάρτηση $y^{x-1}\log y\, e^{-y}$ και τη μερική της παράγωγο ως προς x, δηλαδή την $y^{x-1}(\log y)^2e^{-y}$, οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a,b]\times(0,+\infty)$. Τα γεν. ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} y^{x-1}\log y\, e^{-y}\,dy$ και $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^2e^{-y}\,dy$ συγκλίνουν σε κάποιες συναρτήσεις ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.7, είναι

$$\Gamma''(\xi)=\int_0^{+\infty} y^{\xi-1}(\log y)^2e^{-y}\,dy.$$

Η επαγωγική γενίκευση για παραγώγους ανώτερης τάξης είναι προφανής. □

Πρόταση 11.19. *Η συνάρτηση Γ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*
(1) $\Gamma(x)>0$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$.
(2) $\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty$ *και* $\lim_{x\to0+}\Gamma(x)=+\infty$.
(3) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$.
(4) $\Gamma(1)=1$ *και* $\Gamma(n)=(n-1)!$ *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.
(5) Η Γ *είναι κυρτή στο* $(0,+\infty)$.

Απόδειξη. (1) Επειδή ισχύει $y^{x-1}e^{-y}>0$ για κάθε $y\in(0,+\infty)$, συνεπάγεται ότι

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy\geq 0.$$

Για τη γνήσια ανισότητα, παρατηρούμε ότι η τιμή της $y^{x-1}e^{-y}$ για $y=1$ είναι $\frac{1}{e}>0$, οπότε, λόγω συνέχειας, υπάρχουν c,d, $0<c<1<d<+\infty$ ώστε να ισχύει $y^{x-1}e^{-y}\geq\frac{1}{2e}$ για κάθε $y\in[c,d]$. Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\Gamma(x)&=\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy=\int_0^{c} y^{x-1}e^{-y}\,dy+\int_c^{d} y^{x-1}e^{-y}\,dy+\int_d^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy\\&\geq 0+\int_c^d\tfrac{1}{2e}\,dy+0=\tfrac{d-c}{2e}>0.\end{aligned}$$

(2) Για κάθε $x>0$ είναι

$$\Gamma(x)\geq\int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\,dy\geq e^{-1}\int_0^1 y^{x-1}\,dy=\tfrac{1}{ex}\,.$$

Άρα $\lim_{x\to0+}\Gamma(x)=+\infty$.
Επίσης, για κάθε $x\geq1$ ισχύει

$$\Gamma(x)\geq\int_2^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy\geq 2^{x-1}\int_2^{+\infty} e^{-y}\,dy=2^{x-1}e^{-2}.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty$.
(3) Με ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ότι

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} y^{x}e^{-y}\,dy=x\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy=x\Gamma(x).$$

(4) $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy=1$. Από την $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, με την αρχή της επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2\cdot 1=2!, \quad \Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\cdot 2!=3!$$

και, γενικώτερα, $\Gamma(n)=(n-1)!$.

(5) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε

$$\Gamma''(x)=\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^2 e^{-y}\,dy\geq 0.$$

□

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση Γ είναι ορισμένη σε ολόκληρο το διάστημα $(0,+\infty)$ και στα σημεία του $\mathbb{N}$ ταυτίζεται με τη συνάρτηση *παραγοντικό*.

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιώντας ότι $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής αποδείξτε ότι $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)=\sqrt{\pi}$. Αποδείξτε ότι

$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big)=\frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}\,, \qquad (n\in\mathbb{Z}, n\geq 0).$$

2. Σε όλα τα επόμενα υποθέτουμε ότι $x>1$.
(i) Αποδείξτε ότι, αν $a>0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $\frac{y^{x-1}}{e^y-1}$ στο $[a,+\infty)$.
Υπόδειξη: Αν $n\in\mathbb{N}$, $n\geq\frac{x-1}{a}$, η $y^{x-1}e^{-ny}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του y στο $[a,+\infty)$. Άρα, αν $n\in\mathbb{N}$, $n\geq\frac{x-1}{a}$, ισχύει $\big|\sum_{k=1}^{n} e^{-ky}y^{x-1}-\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\big|=\frac{y^{x-1}e^{-ny}}{e^y-1}\leq\frac{a^{x-1}e^{-na}}{e^a-1}$ για κάθε $y\in[a,+\infty)$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\int_a^b \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b e^{-ny}y^{x-1}\,dy\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy$, αν $0<a<b<+\infty$.
(iii) Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy$.
(iv) Αποδείξτε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} e^{-ky}y^{x-1}\,dy\leq\int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy$.
Υπόδειξη: $\sum_{k=1}^{n} e^{-ky}y^{x-1}\leq\frac{y^{x-1}}{e^y-1}$.
(v) Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy\leq\int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy$.
Από τα (iii), (v) συνεπάγεται αμέσως ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy=\int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy \qquad (x>1).$$

(vi) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy=\frac{\Gamma(x)}{n^x}$.
(vii) (Συνέχεια της άσκησης 2 της ενότητας 4.) Αποδείξτε ότι

$$\zeta(x)\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy \qquad (x>1).$$

Μέρος IV

Τα θεμέλια.

Κεφάλαιο 12

Η αξιωματική θεμελίωση.

12.1 Οι φυσικοί και τα αξιώματα του Peano.

Θεωρούμε δεδομένο ένα σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε $\mathbb{N}$ και του οποίου τα στοιχεία ονομάζουμε **φυσικούς**. Δεχόμαστε, επίσης, ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ έχει τις εξής πρωταρχικές ιδιότητες, οι οποίες δεν αποδεικνύονται και γι αυτό ονομάζονται **αξιώματα**, τα αξιώματα του **Peano**, και από τις οποίες αποδεικνύονται (σύμφωνα με τους στοιχειώδεις κανόνες της λογικής) όλες οι άλλες ιδιότητες του $\mathbb{N}$.

Αξίωμα 1. Το $\mathbb{N}$ έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, το οποίο συμβολίζουμε 1.

Αξίωμα 2. Σε κάθε $n \in \mathbb{N}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένας $n' \in \mathbb{N}$, ο οποίος ονομάζεται **ο επόμενος του** n.

Αξίωμα 3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $n' \neq 1$.

Δηλαδή, ο 1 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού.

Αξίωμα 4. Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n' = m'$, τότε $n = m$.

Ισοδύναμα, αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n \neq m$, τότε $n' \neq m'$.

Αξίωμα της Επαγωγής. Έστω ότι ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{N}$ έχει τις εξής δυο ιδιότητες: (i) $1 \in K$ και (ii) αν $n \in K$, τότε $n' \in K$. Τότε $K = \mathbb{N}$.

Το Αξίωμα 2 λέει ότι η απεικόνιση $n \mapsto n'$ είναι *συνάρτηση* με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και σύνολο τιμών υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τώρα, το Αξίωμα 3 λέει ότι ο 1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής και το Αξίωμα 4 λέει ότι η συνάρτηση αυτή είναι ένα-προς-ένα.

12.1.1 Πρόσθεση.

Πρόταση 12.1. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *είναι* $n' \neq n$.

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ για τους οποίους είναι $n' \neq n$. Από τα Αξιώματα 1 και 3 συνεπάγεται $1 \in K$. Έστω $n \in K$. Τότε $n \in \mathbb{N}$ και $n' \neq n$. Από το Αξίωμα 4 συνεπάγεται $(n')' \neq n'$ και, επομένως, $n' \in K$. Από το Αξίωμα της Επαγωγής συνεπάγεται $K = \mathbb{N}$. □

Πρόταση 12.2. *Για κάθε* $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$ *υπάρχει ακριβώς ένας* $n \in \mathbb{N}$ *ώστε* $n' = m$.

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο με στοιχεία τον 1 και κάθε $m \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n' = m$. Τότε, κατ' αρχάς, $1 \in K$. Έστω $m \in K$. Τότε $m' \in \mathbb{N}$ και υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ (συγκεκριμένα: ο m) ώστε $n' = m'$. Άρα $m' \in K$. Από το Αξίωμα της Επαγωγής συνεπάγεται $K = \mathbb{N}$. Άρα κάθε $m \in \mathbb{N}$ ανήκει στο K, οπότε, αν $m \neq 1$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n' = m$. Από το Αξίωμα 4 συνεπάγεται ότι ο $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $n' = m$ είναι μοναδικός. □

Η Πρόταση 12.2 λέει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $n \mapsto n'$ είναι ακριβώς το $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, οπότε, σύμφωνα και με τα προηγούμενα συμπεράσματα, η συνάρτηση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Θεώρημα 12.1. *Υπάρχει μοναδική συνάρτηση* $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με τις εξής ιδιότητες:* (i) *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *είναι* $\phi(n, 1) = n'$ *και* (ii) *για κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *είναι* $\phi(n, m') = (\phi(n, m))'$.

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $f_n(m') = (f_n(m))'$.
Κατ' αρχάς, $1 \in K$. Πράγματι, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_1(m) = m'$. Τότε (i) $f_1(1) = 1'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $f_1(m') = (m')' = (f_1(m))'$.
Τώρα, έστω $n \in K$. Δηλαδή, έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $f_n(m') = (f_n(m))'$. Θα αποδείξουμε ότι $n' \in K$. Ορίζουμε συνάρτηση $f_{n'} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_{n'}(m) = (f_n(m))'$. Τότε (i) $f_{n'}(1) = (f_n(1))' = (n')'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $f_{n'}(m') = (f_n(m'))' = ((f_n(m))')' = (f_{n'}(m))'$. Άρα $n' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $f_n(m') = (f_n(m))'$.
Τώρα, ορίζουμε $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $\phi(n, m) = f_n(m)$. Η ϕ έχει τις ιδιότητες: (i) $\phi(n, 1) = f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ είναι $\phi(n, m') = f_n(m') = (f_n(m))' = (\phi(n, m))'$.
Τώρα θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση ϕ με τις ιδιότητες $(i), (ii)$ είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχει και συνάρτηση $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $\psi(n, 1) = n'$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ είναι $\psi(n, m') = (\psi(n, m))'$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $1 \in K$, διότι $\phi(n, 1) = n' = \psi(n, 1)$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, δηλαδή $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $\phi(n, m') = (\phi(n, m))' = (\psi(n, m))' = \psi(n, m')$ και, επομένως, $m' \in K$. Άρα $K = \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ και, επειδή αυτό ισχύει για οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Άρα οι ϕ, ψ ταυτίζονται. □

Ορισμός. Το στοιχείο $\phi(n, m) \in \mathbb{N}$ που, σύμφωνα με το Θεώρημα 12.1, αντιστοιχίζεται στους $n, m \in \mathbb{N}$ ονομάζεται **άθροισμα** των n, m και συμβολίζεται

$$n + m.$$

Δηλαδή, $n + m = \phi(n, m)$. Η πράξη που σε κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ αντιστοιχίζει το άθροισμά τους ονομάζεται **πρόσθεση στο** $\mathbb{N}$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.1 και με την απόδειξή του, η πρόσθεση έχει τις εξής ιδιότητες: $n + 1 = \phi(n, 1) = n'$, $1 + n = \phi(1, n) = f_1(n) = n'$, $n + m' = \phi(n, m') = (\phi(n, m))' = (n + m)'$ και $n' + m = \phi(n', m) = f_{n'}(m) = (f_n(m))' = (\phi(n, m))' = (n + m)'$. Συνοπτικά:

$$n + 1 = n' = 1 + n, \qquad n + m' = (n + m)' = n' + m.$$

Πρόταση 12.3. *Για κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *είναι* $n + m = m + n$.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $n + m = m + n$.
Είναι $n + 1 = n' = 1 + n$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, οπότε $n + m = m + n$. Τότε $n + m' = (n + m)' = (m + n)' = m' + n$, οπότε $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

Πρόταση 12.4. *Για κάθε* $n, m, k \in \mathbb{N}$ *είναι* $(n + m) + k = n + (m + k)$.

Απόδειξη. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $(n+m)+k = n+(m+k)$.
Είναι $(n+m)+1 = (n+m)' = n+m' = n+(m+1)$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $(n+m)+k = n+(m+k)$. Τότε $(n+m)+k' = ((n+m)+k)' = (n+(m+k))' = n+(m+k)' = n+(m+k')$, οπότε $k' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

Βάσει της Μεταθετικής και της Προσεταιριστικής ιδιότητας, οι οποίες εκφράζονται στις Προτάσεις 12.3 και 12.4, αντιστοίχως, αποδεικνύεται ότι το τελικό αποτέλεσμα διαδοχικών προσθέσεων δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία γίνονται αυτές οι προσθέσεις. Για παράδειγμα: $(m+n)+(k+l) = ((n+l)+m)+k$, διότι $(m+n)+(k+l) = (n+m)+(l+k) = ((n+m)+l)+k = (n+(m+l))+k = (n+(l+m))+k = ((n+l)+m)+k$. Επομένως, στο εξής θα ακολουθούμε τη συνήθη πρακτική να παραλείπουμε τις παρενθέσεις σε παραστάσεις με αθροίσματα καθώς και να αλλάζουμε τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων. Για παράδειγμα: τα δυο ίσα αθροίσματα $(m+n)+(k+l)$, $((n+l)+m)+k$ θα τα γράφουμε $n+m+k+l$ (ή $n+l+k+m$ ή $k+m+l+n$ κλπ).

Πρόταση 12.5. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ είναι $m \neq n+m$.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $m \neq n+m$.
Είναι $1 \neq n' = n+1$, οπότε $1 \in K$. Τώρα, έστω $m \in K$, οπότε $m \neq n+m$. Τότε $m' \neq (n+m)' = n+m'$, οπότε $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

Πρόταση 12.6. *Έστω $n, m, k \in \mathbb{N}$. Αν $m \neq k$, τότε $n+m \neq n+k$.*

Απόδειξη. Έστω $m, k \in \mathbb{N}$, $m \neq k$ και έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $n+m \neq n+k$.
Είναι $1+m = m' \neq k' = 1+k$, οπότε $1 \in K$. Τώρα, έστω $n \in K$, οπότε $n+m \neq n+k$. Τότε $n'+m = (n+m)' \neq (n+k)' = n'+k$, οπότε $n' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

Πρόταση 12.7. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: (i) $n = m$, (ii) υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m+k$ και (iii) υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n+k$. Ο k στα (ii), (iii) είναι μοναδικός.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i)-(iii)$.
Κατ' αρχάς, $1 \in K$. Πράγματι, αν $n = 1$, τότε ισχύει το (i) για τον 1. Και, αν $n \neq 1$, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = k' = 1+k$, οπότε ισχύει το (ii) για τον 1.
Έστω $m \in K$, οπότε ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i)-(iii)$ για τον m. Αν ισχύει το (i) για τον m, τότε $n = m$, οπότε $n+1 = n' = m'$ και, επομένως, ισχύει το (iii) για τον m'. Έστω ότι ισχύει το (ii) για τον m, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m+k$. Αν $k = 1$, τότε $n = m+1 = m'$, οπότε ισχύει το (i) για τον m'. Αν $k \neq 1$, τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $k = l'$, οπότε $n = m+l' = (m+l)' = m'+l$ και, επομένως, ισχύει το (ii) για τον m'. Τέλος, έστω ότι ισχύει το (iii) για τον m, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n+k$. Τότε $m' = (n+k)' = n+k'$, οπότε ισχύει το (iii) για τον m'. Άρα, σε κάθε περίπτωση, για τον m' ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i)-(iii)$ και, επομένως, $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$.
Το ότι ο k στα (ii), (iii) είναι μοναδικός είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 12.6.
Τα (i), (ii) δε μπορούν να ισχύουν συγχρόνως λόγω της Πρότασης 12.5. Για τον ίδιο λόγο, τα (i), (iii) δε μπορούν να ισχύουν συγχρόνως. Αν ίσχυαν συγχρόνως τα (ii), (iii), δηλαδή αν $n = m+k$ και $m = n+l$ για κάποιους $k, l \in \mathbb{Z}$, τότε θα ήταν $n = m+k = n+l+k = (l+k)+n$, που απαγορεύεται από την Πρόταση 12.5. Άρα ισχύει ακριβώς ένα από τα $(i)-(iii)$. □

12.1.2 Διάταξη.

Ορισμός. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m+k$, τότε λέμε ότι ο n είναι **μεγαλύτερος από** τον m και γράφουμε $n > m$ ή, ισοδύναμα, ότι ο m είναι **μικρότερος από** τον n και γράφουμε $m < n$.
Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Αν $n > m$, τότε ο $k \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $n = m + k$ ονομάζεται **διαφορά** των n, m και συμβολίζεται

$$n - m.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ αντιστοιχίζει τον $n - m$ ονομάζεται **αφαίρεση στο** $\mathbb{N}$.

Πρόταση 12.8. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: $n = m$, $n > m$, $n < m$.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 12.7. □

Ορισμός. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Αν $n > m$ ή $n = m$ ή, ισοδύναμα, αν $m < n$ ή $m = n$, τότε λέμε ότι ο n είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον m και γράφουμε $n \geq m$ ή, ισοδύναμα, ότι ο m είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον n και γράφουμε $m \leq n$.

Πρόταση 12.9. *Έστω $m, n, k \in \mathbb{N}$.*
(1) Αν $n < m$ και $m < k$, τότε $n < k$.
(2) Αν $n \leq m$ και $m < k$ ή αν $n < m$ και $m \leq k$, τότε $n < k$.
(3) Αν $n \leq m$ και $m \leq k$, τότε $n \leq k$.

Απόδειξη. (1) Έστω $n < m$ και $m < k$. Τότε υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n + p$ και $k = m + q$. Συνεπάγεται $k = m + q = n + p + q = n + (p + q)$, οπότε $n < k$.
$(2), (3)$ Προφανή, λόγω του (1). □

Πρόταση 12.10. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ είναι $n + m > n$.*

Απόδειξη. Προφανής. □

Πρόταση 12.11. *Έστω $m, n, k \in \mathbb{N}$. Είναι $n < m$ αν και μόνο αν $n + k < m + k$. Επίσης, είναι $n = m$ αν και μόνο αν $n + k = m + k$.*

Απόδειξη. Έστω $n < m$. Τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n+l$. Άρα $m+k = n+l+k = (n+k)+l$ και, επομένως, $n + k < m + k$.
Έστω $n + k < m + k$. Αν $n = m$, τότε $n + k = m + k$ και, αν $m < n$, τότε $m + k < n + k$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n < m$.
Προφανώς, αν $n = m$, τότε $n + k = m + k$. Έστω $n + k = m + k$. Αν $n < m$, τότε $n + k < m + k$ και, αν $m < n$, τότε $m + k < n + k$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n = m$. □

Πρόταση 12.12. *Έστω $m, n, k, l \in \mathbb{N}$.*
(1) Αν $n < m$ και $k < l$, τότε $n + k < m + l$.
(2) Αν $n \leq m$ και $k < l$ ή αν $n < m$ και $k \leq l$, τότε $n + k < m + l$.
(3) Αν $n \leq m$ και $k \leq l$, τότε $n + k \leq m + l$.

Απόδειξη. (1) Έστω $n < m$ και $k < l$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 12.11, $n+k < m+k < m+l$.
$(2), (3)$ Προφανή, λόγω του (1). □

Πρόταση 12.13. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $n \geq 1$.*

Απόδειξη. Αν $n = 1$, τότε $n \geq 1$. Αν $n \neq 1$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m' = m + 1 > 1$. $\square$

Πρόταση 12.14. *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$.*
(1) Αν $n > m$, τότε $n \geq m + 1$.
(2) Αν $n < m + 1$, τότε $n \leq m$.

Απόδειξη. (1) Αν $n > m$, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m + k$. Επειδή $k \geq 1$, είναι $n \geq m + 1$.
(2) Προφανές, λόγω του (1). $\square$

Αρχή της Καλής Διάταξης. *Κάθε μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω μη-κενό $M \subseteq \mathbb{N}$ και έστω $m_0 \in M$. Θεωρούμε το σύνολο K των $n \in \mathbb{N}$ οι οποίοι είναι $\leq m$ για κάθε $m \in M$.
Προφανώς, $1 \in K$. Επειδή $m_0 + 1 > m_0$ και $m_0 \in M$, ο $m_0 + 1$ δεν ανήκει στο K. Άρα το K είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, οπότε, σύμφωνα με το Αξίωμα της Επαγωγής, υπάρχει $n_0 \in K$ ώστε $n_0 + 1 = {n_0}' \notin K$.
Κατ' αρχάς, είναι (i) $n_0 \leq m$ για κάθε $m \in M$. Αυτό είναι προφανές, διότι $n_0 \in K$. Κατόπιν, έστω $n_0 \notin M$. Τότε για κάθε $m \in M$ ισχύει $n_0 < m$ και, επομένως, $n_0 + 1 \leq m$. Άρα $n_0 + 1 \in K$ και αυτό είναι άτοπο. Άρα (ii) $n_0 \in M$.
Από τα (i), (ii) συνεπάγεται ότι ο n_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του M. $\square$

12.1.3 Πολλαπλασιασμός.

Θεώρημα 12.2. *Υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τις εξής ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $\phi(n, 1) = n$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ είναι $\phi(n, m') = \phi(n, m) + n$.*

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $f_n(m') = f_n(m) + n$.
Κατ' αρχάς, $1 \in K$. Πράγματι, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_1(m) = m$. Τότε (i) $f_1(1) = 1$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $f_1(m') = m' = m + 1 = f_1(m) + 1$.
Τώρα, έστω $n \in K$. Δηλαδή, έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $f_n(m') = f_n(m) + n$. Θα αποδείξουμε ότι $n' \in K$. Ορίζουμε συνάρτηση $f_{n'} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_{n'}(m) = f_n(m) + m$. Τότε (i) $f_{n'}(1) = f_n(1) + 1 = n + 1 = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $f_{n'}(m') = f_n(m') + m' = f_n(m) + n + m' = f_n(m) + n' + m = f_{n'}(m) + n'$.
Άρα $n' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $f_n(m') = f_n(m) + n$.
Τώρα, ορίζουμε $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $\phi(n, m) = f_n(m)$. Η ϕ έχει τις ιδιότητες: (i) $\phi(n, 1) = f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ είναι $\phi(n, m') = f_n(m') = f_n(m) + n = \phi(n, m) + n$.
Τώρα θα αποδείξουμε η συνάρτηση ϕ με τις ιδιότητες $(i), (ii)$ είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχει και συνάρτηση $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $\psi(n, 1) = n$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ είναι $\psi(n, m') = \psi(n, m) + n$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $1 \in K$, διότι $\phi(n, 1) = n = \psi(n, 1)$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, δηλαδή $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $\phi(n, m') = \phi(n, m) + n = \psi(n, m) + n = \psi(n, m')$ και, επομένως, $m' \in K$. Άρα $K = \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $m \in \mathbb{N}$ είναι $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ και, επειδή αυτό ισχύει για οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Άρα οι ϕ, ψ ταυτίζονται. $\square$

Ορισμός. Το στοιχείο $\phi(n, m) \in \mathbb{N}$ που, σύμφωνα με το Θεώρημα 12.2, αντιστοιχίζεται στους $n, m \in \mathbb{N}$ ονομάζεται **γινόμενο** των n, m και συμβολίζεται

$$n \cdot m.$$

Δηλαδή, $n \cdot m = \phi(n, m)$. Η πράξη που σε κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ αντιστοιχίζει το γινόμενό τους ονομάζεται **πολλαπλασιασμός στο** $\mathbb{N}$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.2 και με την απόδειξή του, ο πολλαπλασιασμός έχει τις εξής ιδιότητες: $n \cdot 1 = \phi(n, 1) = n$, $1 \cdot n = \phi(1, n) = f_1(n) = n$, $n \cdot m' = \phi(n, m') = \phi(n, m) + n = n \cdot m + n$ και $n' \cdot m = \phi(n', m) = f_{n'}(m) = f_n(m) + m = \phi(n, m) + m = n \cdot m + m$. Συνοπτικά:

$$n \cdot 1 = n = 1 \cdot n, \qquad n \cdot m' = n \cdot m + n, \qquad n' \cdot m = n \cdot m + m.$$

Το $n \cdot m$ θα το γράφουμε πιο συνοπτικά nm και οι παραπάνω ιδιότητες γράφονται

$$n1 = n = 1n, \qquad nm' = nm + n, \qquad n'm = nm + m.$$

Πρόταση 12.15. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ είναι $nm = mn$.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $nm = mn$.
Είναι $n1 = n = 1n$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, οπότε $nm = mn$. Τότε $nm' = nm + n = mn + n = m'n$, οπότε $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

Πρόταση 12.16. *Για κάθε $n, m, k \in \mathbb{N}$ είναι $n(m + k) = nm + nk$.*

Απόδειξη. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $n(m+k) = nm+nk$.
Είναι $n(m + 1) = nm' = nm + n = nm + n1$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $n(m+k) = nm+nk$. Τότε $n(m+k') = n(m+k)' = n(m+k)+n = nm+nk+n = nm+nk'$, οπότε $k' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

Πρόταση 12.17. *Για κάθε $n, m, k \in \mathbb{N}$ είναι $(nm)k = n(mk)$.*

Απόδειξη. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $(nm)k = n(mk)$.
Είναι $(nm)1 = nm = n(m1)$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $(nm)k = n(mk)$. Τότε $(nm)k' = (nm)k + nm = n(mk) + nm = n(mk + m) = n(mk')$, οπότε $k' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση της πρόσθεσης, η Μεταθετική και η Προσεταιριστική Ιδιότητα, οι οποίες εκφράζονται στις Προτάσεις 12.15 και 12.17, αντιστοίχως, μας επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

Πρόταση 12.18. *Έστω $m, n, k \in \mathbb{N}$. Είναι $n < m$ αν και μόνο αν $nk < mk$. Επίσης, είναι $n = m$ αν και μόνο αν $nk = mk$.*

Απόδειξη. Έστω $n < m$. Τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n + l$. Άρα $mk = nk + lk$ και, επομένως, $nk < mk$.
Έστω $nk < mk$. Αν $n = m$, τότε $nk = mk$ και, αν $m < n$, τότε $mk < nk$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n < m$.
Προφανώς, αν $n = m$, τότε $nk = mk$. Έστω $nk = mk$. Αν $n < m$, ότε $nk < mk$ και, αν $m < n$, τότε $mk < nk$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n = m$. □

Πρόταση 12.19. *Έστω $m, n, k, l \in \mathbb{N}$.*
(1) Αν $n < m$ και $k < l$, τότε $nk < ml$.
(2) Αν $n \leq m$ και $k < l$ ή αν $n < m$ και $k \leq l$, τότε $nk < ml$.
(3) Αν $n \leq m$ και $k \leq l$, τότε $nk \leq ml$.

Απόδειξη. (1) Έστω $n < m$ και $k < l$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 12.18, $nk < mk < ml$.
$(2), (3)$ Προφανή, λόγω του (1). □

12.2 Οι θετικοί ρητοί.

Θεωρούμε όλα τα ζεύγη φυσικών (n_1, n_2), δηλαδή τα στοιχεία του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Λέμε ότι δυο τέτοια ζεύγη (n_1, n_2), (m_1, m_2) είναι **ισοδύναμα** και γράφουμε

$$(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$$

αν $n_1 m_2 = m_1 n_2$.

Πρόταση 12.20. *Έστω* $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
(1) $(n_1, n_2) \sim (n_1, n_2)$.
(2) Αν $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, *τότε* $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$.
(3) Αν $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ *και* $(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$, *τότε* $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$.

Απόδειξη. (1) Είναι $n_1 n_2 = n_1 n_2$, οπότε $(n_1, n_2) \sim (n_1, n_2)$.
(2) Έστω $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, οπότε $n_1 m_2 = m_1 n_2$. Συνεπάγεται $m_1 n_2 = n_1 m_2$, οπότε $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$.
(3) Έστω $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$, οπότε $n_1 m_2 = m_1 n_2$ και $m_1 k_2 = k_1 m_2$. Συνεπάγεται $n_1 m_2 m_1 k_2 = m_1 n_2 k_1 m_2$, οπότε $n_1 k_2 = k_1 n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$. $\square$

Ορισμός. Άρα η σχέση $\sim$ ανάμεσα στα ζεύγη φυσικών είναι **σχέση ισοδυναμίας** και, επομένως, το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *διαμερίζεται* σε ξένες ανά δύο κλάσεις ισοδυναμίας: κάθε δυο ζεύγη φυσικών, τα οποία είναι ισοδύναμα, ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας και κάθε δυο ζεύγη φυσικών, τα οποία δεν είναι ισοδύναμα, ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε τέτοια κλάση ισοδυναμίας ονομάζεται **θετικός ρητός** και το σύνολο των θετικών ρητών συμβολίζεται $\mathbb{Q}_+$. Αν r είναι οποιοσδήποτε θετικός ρητός (δηλαδή, κλάση ισοδυναμίας), τότε *κάθε* ζεύγος φυσικών που ανήκει στον r ονομάζεται **αντιπρόσωπος** του r. Επομένως, δυο ισοδύναμα ζεύγη φυσικών είναι αντιπρόσωποι του ίδιου θετικού ρητού και δυο μη-ισοδύναμα ζεύγη φυσικών είναι αντιπρόσωποι διαφορετικών θετικών ρητών.

12.2.1 Διάταξη.

Ορισμός. Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Λέμε ότι το (n_1, n_2) είναι **μεγαλύτερο από** το (m_1, m_2) και γράφουμε $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι το (m_1, m_2) είναι **μικρότερο από** το (n_1, n_2) και γράφουμε $(m_1, m_2) \prec (n_1, n_2)$ αν είναι $n_1 m_2 > m_1 n_2$ ή, ισοδύναμα, $m_1 n_2 < n_1 m_2$.

Πρόταση 12.21. *Έστω* $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *Αν είναι* $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$, $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, *τότε* $(k_1, k_2) \succ (l_1, l_2)$.

Απόδειξη. Έστω $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$. Τότε $n_1 m_2 > m_1 n_2$, $n_1 k_2 = k_1 n_2$ και $m_1 l_2 = l_1 m_2$. Τότε $k_1 n_2 m_1 l_2 = l_1 m_2 n_1 k_2 > l_1 k_2 n_2 m_1$. Άρα $k_1 l_2 > l_1 k_2$ και, επομένως, $(k_1, k_2) \succ (l_1, l_2)$. $\square$

Η Πρόταση 12.21 λέει ότι αν κάποιος αντιπρόσωπος ενός θετικού ρητού r είναι μεγαλύτερος από κάποιον αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s, τότε κάθε αντιπρόσωπος του r είναι μεγαλύτερος από κάθε αντιπρόσωπο του s. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός. Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Λέμε ότι ο r είναι **μεγαλύτερος από** τον s και γράφουμε $r > s$ ή, ισοδύναμα, ότι ο s είναι **μικρότερος από** τον r και γράφουμε $s < r$ αν είναι $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$ για οποιονδήποτε (και, επομένως, για κάθε) αντιπρόσωπο (n_1, n_2) του r και για οποιονδήποτε (και, επομένως, για κάθε) αντιπρόσωπο (m_1, m_2) του s.

Πρόταση 12.22. *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: $r = s$, $r > s$, $r < s$.*

Απόδειξη. Έστω οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2) των r, s, αντιστοίχως. Βάσει των ορισμών, το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $r = s$, $r > s$, $r < s$ είναι ισοδύναμο με το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ και αυτό είναι ισοδύναμο με το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $n_1m_2 = m_1n_2$, $n_1m_2 > m_1n_2$, $n_1m_2 < m_1n_2$. $\square$

Ορισμός. Επίσης, λέμε ότι ο r είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον s και γράφουμε $r \geq s$ ή, ισοδύναμα, ότι ο s είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον r και γράφουμε $s \leq r$ αν είναι $r > s$ ή $r = s$ ή, ισοδύναμα, αν είναι $s < r$ ή $s = r$.

Πρόταση 12.23. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$.*
(1) Αν $r < s$ και $s < t$, τότε $r < t$.
(2) Αν $r \leq s$ και $s < t$ ή αν $r < s$ και $s \leq t$, τότε $r < t$.
(3) Αν $r \leq s$ και $s \leq t$, τότε $r \leq t$.

Απόδειξη. (1) Έστω $r < s$ και $s < t$. Έστω οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε είναι $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ και $(m_1, m_2) \prec (k_1, k_2)$, οπότε $n_1m_2 < m_1n_2$ και $m_1k_2 < k_1m_2$. Συνεπάγεται $n_1m_2m_1k_2 < m_1n_2k_1m_2$ και, επομένως, $n_1k_2 < k_1n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \prec (k_1, k_2)$, οπότε $r < t$.
$(2), (3)$ Προφανή, λόγω του (1). $\square$

Πρόταση 12.24. *(1) Για κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s > r$.*
(2) Για κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s < r$.
(3) Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$ υπάρχει $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r < t < s$.

Απόδειξη. (1) Έστω $r \in \mathbb{Q}_+$ και οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος (n_1, n_2) του r. Θεωρούμε το ζεύγος (n_1+n_1, n_2) και τον $s \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει το (n_1+n_1, n_2) ως αντιπρόσωπο. Είναι $(n_1+n_1, n_2) \succ (n_1, n_2)$ διότι $(n_1 + n_1)n_2 = n_1n_2 + n_1n_2 > n_1n_2$. Άρα $s > r$.
(2) Έστω $r \in \mathbb{Q}_+$ και οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος (n_1, n_2) του r. Θεωρούμε το ζεύγος (n_1, n_2+n_2) και τον $s \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει το $(n_1, n_2 + n_2)$ ως αντιπρόσωπο. Είναι $(n_1, n_2 + n_2) \prec (n_1, n_2)$ διότι $n_1(n_2 + n_2) = n_1n_2 + n_1n_2 > n_1n_2$. Άρα $s < r$.
(3) Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$ και οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι (n_1, n_2) και (m_1, m_2) των r, s, αντιστοίχως. Επομένως, είναι $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$, οπότε $n_1m_2 < m_1n_2$. Θεωρούμε το ζεύγος $(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ και τον $t \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει το $(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ ως αντιπρόσωπο.
Από την $n_1m_2 < m_1n_2$ συνεπάγεται $n_1n_2 + n_1m_2 < n_1n_2 + m_1n_2$, οπότε $n_1(n_2 + m_2) < (n_1 + m_1)n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \prec (n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ και, επομένως, $r < t$.
Από την $n_1m_2 < m_1n_2$ συνεπάγεται $n_1m_2 + m_1m_2 < m_1n_2 + m_1m_2$, οπότε $(n_1 + m_1)m_2 < m_1(n_2 + m_2)$. Άρα $(n_1 + m_1, n_2 + m_2) \prec (m_1, m_2)$ και, επομένως, $t < s$. $\square$

12.2.2 Πρόσθεση.

Ορισμός. Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ορίζουμε ως **άθροισμα** των ζευγών αυτών και το συμβολίζουμε $(n_1, n_2) + (m_1, m_2)$ το ζεύγος $(n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2)$.

Πρόταση 12.25. *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Αν είναι $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, τότε $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) + (l_1, l_2)$.*

Απόδειξη. Έστω $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$. Τότε $n_1k_2 = k_1n_2$ και $m_1l_2 = l_1m_2$. Για να αποδείξουμε ότι $(n_1, n_2)+(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)+(l_1, l_2)$ ή, ισοδύναμα, $(n_1m_2+m_1n_2, n_2m_2) \sim (k_1l_2 + l_1k_2, k_2l_2)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2 + m_1n_2)k_2l_2 = (k_1l_2 + l_1k_2)n_2m_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια των $n_1k_2 = k_1n_2$ και $m_1l_2 = l_1m_2$. $\square$

Η Πρόταση 12.25 λέει το εξής. Έστω ότι προσθέτουμε έναν αντιπρόσωπο ενός θετικού ρητού r και έναν αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s και βρίσκουμε κάποιο άθροισμα. Το άθροισμα αυτό είναι αντιπρόσωπος κάποιου τρίτου θετικού ρητού t. Αν προσθέσουμε έναν άλλο αντιπρόσωπο του r και έναν άλλο αντιπρόσωπο του s, τότε το νέο άθροισμα θα είναι ισοδύναμο με το προηγούμενο άθροισμα, οπότε θα είναι αντιπρόσωπος του ίδιου t. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός. Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Ορίζουμε ως **άθροισμα** των r, s και το συμβολίζουμε

$$r + s$$

τον θετικό ρητό ο οποίος έχει αντιπρόσωπο το άθροισμα $(n_1, n_2) + (m_1, m_2)$ οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπροσώπου (n_1, n_2) του r και οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπροσώπου (m_1, m_2) του s. Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $r + s$ ονομάζεται **πρόσθεση** στο $\mathbb{Q}_+$.

Πρόταση 12.26. *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ είναι $r + s = s + r$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Τότε ο $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + s$ και ο $(m_1, m_2) + (n_1, n_2) = (m_1n_2 + n_1m_2, m_2n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $s + r$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2) \sim (m_1n_2 + n_1m_2, m_2n_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο αυτά ζεύγη είναι ίδια. □

Πρόταση 12.27. *Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$ είναι $(r + s) + t = r + (s + t)$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) και (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s και t, αντιστοίχως. Τότε ο $((n_1, n_2) + (m_1, m_2)) + (k_1, k_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2) + (k_1, k_2) = (n_1m_2k_2 + m_1n_2k_2 + k_1n_2m_2, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $(r + s) + t$ και ο $(n_1, n_2) + ((m_1, m_2) + (k_1, k_2)) = (n_1, n_2) + (m_1k_2 + k_1m_2, m_2k_2) = (n_1m_2k_2 + m_1k_2n_2 + k_1m_2n_2, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + (s + t)$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2k_2 + m_1n_2k_2 + k_1n_2m_2, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_2k_2 + m_1k_2n_2 + k_1m_2n_2, n_2m_2k_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο ζεύγη είναι ίδια. □

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα, οι οποίες εκφράζονται στις Προτάσεις 12.26 και 12.27, αντιστοίχως, επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικές προσθέσεις καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων.

Πρόταση 12.28. *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ είναι $r + s > r$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Τότε ο $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + s$, οπότε, για να αποδείξουμε ότι $r + s > r$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2) \succ (n_1, n_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2n_2 + m_1n_2n_2 > n_1n_2m_2$, το οποίο είναι σωστό. □

Πρόταση 12.29. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$. Είναι $r < s$ αν και μόνο αν $r + t < s + t$. Επίσης, είναι $r = s$ αν και μόνο αν $r + t = s + t$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε είναι $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2 < m_1n_2$. Οι $(n_1, n_2) + (k_1, k_2) = (n_1k_2 + k_1n_2, n_2k_2)$, $(m_1, m_2) + (k_1, k_2) = (m_1k_2 + k_1m_2, m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωποι των $r + t$, $s + t$, αντιστοίχως. Επομένως, για να αποδείξουμε ότι $r + t < s + t$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1k_2 + k_1n_2, n_2k_2) \prec (m_1k_2 + k_1m_2, m_2k_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι $n_1k_2m_2k_2 + k_1n_2m_2k_2 < m_1k_2n_2k_2 + k_1m_2n_2k_2$. Αυτό,

όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1m_2 < m_1n_2$.
Έστω $r+t < s+t$. Αν $r = s$, τότε $r+t = s+t$ και, αν $s < r$, τότε $s+t < r+t$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r < s$.
Προφανώς, αν $r = s$, τότε $r+t = s+t$. Έστω $r+t = s+t$. Αν $r < s$, τότε $r+t < s+t$ και, αν $s < r$, τότε $s+t < r+t$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r = s$. □

Πρόταση 12.30. *Έστω $r, s, t, u \in \mathbb{Q}_+$.*
(1) Αν $r < s$ και $t < u$, τότε $r+t < s+u$.
(2) Αν $r \leq s$ και $t < u$ ή αν $r < s$ και $t \leq u$, τότε $r+t < s+u$.
(3) Αν $r \leq s$ και $t \leq u$, τότε $r+t \leq s+u$.

Απόδειξη. (1) Έστω $r < s$ και $t < u$. Τότε, $r+t < s+t < s+u$.
$(2), (3)$ Προφανή, λόγω του (1). □

Πρόταση 12.31. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Αν $r < s$, τότε υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r+t = s$. Αντιθέτως, αν $r \geq s$, τότε δεν υπάρχει κανένας $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r+t = s$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Τότε είναι $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2 < m_1n_2$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n_1m_2 + k = m_1n_2$. Θεωρούμε τον $t \in \mathbb{Q}_+$ ο οποίος έχει ως αντιπρόσωπο το ζεύγος (k, n_2m_2). Τότε ο $r+t$ έχει ως αντιπρόσωπο το $(n_1, n_2) + (k, n_2m_2) = (n_1n_2m_2 + kn_2, n_2n_2m_2)$ και, για να αποδείξουμε ότι $r+t = s$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1n_2m_2 + kn_2, n_2n_2m_2) \sim (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1n_2m_2m_2 + kn_2m_2 = m_1n_2n_2m_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1m_2 + k = m_1n_2$.
Το ότι ο t είναι μοναδικός είναι συνέπεια της Πρότασης 12.29.
Γνωρίζουμε ότι από $r+t = s$ συνεπάγεται $s > r$. Άρα, αν $r \geq s$, τότε δεν υπάρχει κανένας $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r+t = s$. □

Ορισμός. Αν $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$, τότε ο μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ που ικανοποιεί την $r+t = s$ ονομάζεται **διαφορά** των s, r και συμβολίζεται

$$s - r.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$ αντιστοιχίζει τον $s - r$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbb{Q}_+$.

12.2.3 Πολλαπλασιασμός.

Ορισμός. Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ορίζουμε ως **γινόμενο** των ζευγών αυτών και το συμβολίζουμε $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2)$ το ζεύγος (n_1m_1, n_2m_2).

Πρόταση 12.32. *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Αν είναι $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, τότε $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) \cdot (l_1, l_2)$.*

Απόδειξη. Έστω $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$. Τότε $n_1k_2 = k_1n_2$ και $m_1l_2 = l_1m_2$. Συνεπάγεται $n_1k_2m_1l_2 = k_1n_2l_1m_2$ και, επομένως, $(n_1m_1, n_2m_2) \sim (k_1l_1, k_2l_2)$, δηλαδή $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) \cdot (l_1, l_2)$. □

Η Πρόταση 12.32 λέει το εξής. Έστω ότι πολλαπλασιάζουμε έναν αντιπρόσωπο ενός θετικού ρητού r και έναν αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s και βρίσκουμε κάποιο γινόμενο. Το γινόμενο αυτό είναι αντιπρόσωπος κάποιου τρίτου θετικού ρητού t. Αν πολλαπλασιάσουμε έναν άλλο αντιπρόσωπο του r και έναν άλλο αντιπρόσωπο του s, τότε το νέο γινόμενο θα είναι αντιπρόσωπος του ίδιου t. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός. Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Ορίζουμε ως **γινόμενο** των r, s και το συμβολίζουμε

$$r \cdot s$$

τον θετικό ρητό ο οποίος έχει αντιπρόσωπο το γινόμενο $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2)$ οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (n_1, n_2) του r και οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (m_1, m_2) του s. Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $r \cdot s$ ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbb{Q}_+$.

Στο εξής, θα γράφουμε rs αντί $r \cdot s$.

Πρόταση 12.33. *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ είναι $rs = sr$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Τότε ο $(n_1, n_2)(m_1, m_2) = (n_1m_1, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του rs και ο $(m_1, m_2)(n_1, n_2) = (m_1n_1, m_2n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του sr. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1, n_2m_2) \sim (m_1n_1, m_2n_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο ζεύγη είναι ίδια. $\square$

Πρόταση 12.34. *Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$ είναι $(rs)t = r(st)$.*

Απόδειξη. Έστω αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), αντιστοίχως, των r, s, t. Τότε ο $((n_1, n_2)(m_1, m_2))(k_1, k_2) = (n_1m_1, n_2m_2)(k_1, k_2) = (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $(rs)t$ και ο $(n_1, n_2)((m_1, m_2)(k_1, k_2)) = (n_1, n_2)(m_1k_1, m_2k_2) = (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r(st)$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1k_1, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο ζεύγη είναι ίδια. $\square$

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα που εκφράζονται από τις Προτάσεις 12.33 και 12.34, αντιστοίχως, επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

Πρόταση 12.35. *Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $r(s + t) = rs + rt$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) αντιπρόσωποι, αντιστοίχως, των r, s, t. Τότε ο $(n_1, n_2)((m_1, m_2) + (k_1, k_2)) = (n_1m_1k_2 + n_1k_1m_2, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r(s + t)$ και ο $(n_1, n_2)(m_1, m_2) + (n_1, n_2)(k_1, k_2) = (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2, n_2m_2n_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $rs + rt$. Άρα, για να αποδείξουμε ότι $r(s + t) = rs + rt$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1k_2 + n_1k_1m_2, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2, n_2m_2n_2k_2)$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με $(n_1m_1k_2 + n_1k_1m_2)n_2m_2n_2k_2 = (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2)n_2m_2k_2$, που είναι προφανές. $\square$

Πρόταση 12.36. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$. Είναι $r < s$ αν και μόνο αν $rt < st$. Επίσης, είναι $r = s$ αν και μόνο αν $rt = st$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε είναι $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2 < m_1n_2$. Οι $(n_1, n_2)(k_1, k_2) = (n_1k_1, n_2k_2)$, $(m_1, m_2)(k_1, k_2) = (m_1k_1, m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωποι των rt, st, αντιστοίχως. Άρα για να αποδείξουμε ότι $rt < st$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1k_1, n_2k_2) \prec (m_1k_1, m_2k_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι $n_1k_1m_2k_2 < m_1k_1n_2k_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1m_2 < m_1n_2$.
Έστω $rt < st$. Αν $r = s$, τότε $rt = st$ και, αν $s < r$, τότε $st < rt$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r < s$.
Προφανώς, αν $r = s$, τότε $rt = st$. Έστω $rt = st$. Αν $r < s$, τότε $rt < st$ και, αν $s < r$, τότε $st < rt$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r = s$. $\square$

Πρόταση 12.37. *Έστω $r, s, t, u \in \mathbb{Q}_+$.*
(1) Αν $r < s$ και $t < u$, τότε $rt < su$.
(2) Αν $r \leq s$ και $t < u$ ή αν $r < s$ και $t \leq u$, τότε $rt < su$.
(3) Αν $r \leq s$ και $t \leq u$, τότε $rt \leq su$.

Απόδειξη. (1) Έστω $r < s$ και $t < u$. Τότε $rt < st < su$.
$(2), (3)$ Προφανή, λόγω του (1). □

Πρόταση 12.38. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Τότε υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $rt = s$.*

Απόδειξη. Έστω οι αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2), αντιστοίχως, των r, s. Θεωρούμε τον $t \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει ως αντιπρόσωπο το ζεύγος (m_1n_2, n_1m_2). Τότε το $(n_1, n_2)(m_1n_2, n_1m_2) = (n_1m_1n_2, n_2n_1m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του rt. Άρα, για να αποδείξουμε ότι $rt = s$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1n_2, n_2n_1m_2) \sim (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_1n_2m_2 = m_1n_2n_1m_2$, το οποίο είναι προφανές.
Το ότι ο t είναι μοναδικός είναι συνέπεια της Πρότασης 12.36. □

Ορισμός. Αν $r, s \in \mathbb{Q}_+$, τότε ο μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ που ικανοποιεί την $rt = s$ ονομάζεται **λόγος** των s, r και συμβολίζεται

$$\frac{s}{r}.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $\frac{s}{r}$ ονομάζεται **διαίρεση** στο $\mathbb{Q}_+$.

12.2.4 Οι θετικοί ακέραιοι και οι φυσικοί.

Ορισμός. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον θετικό ρητό με αντιπρόσωπο το ζεύγος $(n, 1)$ και τον συμβολίζουμε $\overline{n}$. Κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος γράφεται $r = \overline{n}$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται **θετικός ακέραιος**. Το σύνολο των θετικών ακεραίων συμβολίζεται $\mathbb{Z}_+$. Δηλαδή, $\mathbb{Z}_+ = \{\overline{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ και είναι $\mathbb{Z}_+ \subseteq \mathbb{Q}_+$.

Πρόταση 12.39. *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Τότε είναι $n < m$ αν και μόνο αν $\overline{n} < \overline{m}$. Επίσης, είναι $n = m$ αν και μόνο αν $\overline{n} = \overline{m}$.*

Απόδειξη. Οι $\overline{n}$ και $\overline{m}$ έχουν αντιπροσώπους τους $(n, 1)$ και $(m, 1)$, αντιστοίχως. Άρα το $\overline{n} < \overline{m}$ είναι ισοδύναμο με το $(n, 1) \prec (m, 1)$ κι αυτό είναι ισοδύναμο με το $n1 < m1$. Ομοίως, το $\overline{n} = \overline{m}$ είναι ισοδύναμο με το $(n, 1) \sim (m, 1)$ κι αυτό είναι ισοδύναμο με το $n1 = m1$. □

Μια άμεση συνέπεια της Πρότασης 12.39 είναι ότι για κάθε θετικό ακέραιο $r \in \mathbb{Z}_+$ υπάρχει *ακριβώς* ένας $n \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \overline{n}$.

Πρόταση 12.40. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\overline{n}r > s$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $t = \frac{s}{r} \in \mathbb{Q}_+$, για τον οποίο είναι $tr = s$. Έστω (n_1, n_2) οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος του t και έστω $n = n_1 + 1$. Επειδή $n_2 \geq 1$, είναι $nn_2 \geq n > n_1 = n_1 1$, οπότε $(n, 1) \succ (n_1, n_2)$. Άρα $\overline{n} > t$ και, επομένως, $\overline{n}r > tr = s$. □

Πρόταση 12.41. *Έστω $r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$. Ειδικότερα, το ζεύγος (n_1, n_2) είναι αντιπρόσωπος του r αν και μόνο αν $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιονδήποτε αντιπρόσωπο (n_1, n_2) του $r \in \mathbb{Q}_+$. Οι $(n_1, 1)$ και $(n_2, 1)$ είναι αντιπρόσωποι των $\overline{n_1}$ και $\overline{n_2}$, αντιστοίχως. Άρα ο $(n_2, 1)(n_1, n_2) = (n_2n_1, n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n_2}\,r$ και, επειδή, $(n_2n_1, n_2) \sim (n_1, 1)$, συνεπάγεται ότι $\overline{n_2}\,r = \overline{n_1}$. Άρα $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$.
Αντιστρόφως, έστω $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$ και, επομένως $\overline{n_2}\,r = \overline{n_1}$. Αν (m_1, m_2) είναι οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος του r, τότε το $(n_2, 1)(m_1, m_2) = (n_2m_1, m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n_2}\,r$, οπότε είναι $(n_2m_1, m_2) \sim (n_1, 1)$ ή, ισοδύναμα, $n_2m_1 = n_1m_2$ ή, ισοδύναμα, $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$.
Άρα το (n_1, n_2) είναι αντιπρόσωπος του r. □

Πρόταση 12.42. *Έστω $n, m, k \in \mathbb{N}$.*
(1) Είναι $n+m=k$ αν και μόνο αν $\overline{n}+\overline{m}=\overline{k}$.
(2) Είναι $nm=k$ αν και μόνο αν $\overline{n}\,\overline{m}=\overline{k}$.

Απόδειξη. (1) Οι $(n,1)$, $(m,1)$, $(k,1)$ είναι αντιπρόσωποι των $\overline{n}$, $\overline{m}$, $\overline{k}$. Άρα ο $(n,1)+(m,1)=(n1+m1,11)=(n+m,1)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n}+\overline{m}$. Άρα είναι $\overline{n}+\overline{m}=\overline{k}$ αν και μόνο αν $(n+m,1)\sim(k,1)$ αν και μόνο αν $(n+m)1=k1$ αν και μόνο αν $n+m=k$.
(2) Ο $(n,1)(m,1)=(nm,11)=(nm,1)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n}\,\overline{m}$. Άρα είναι $\overline{n}\,\overline{m}=\overline{k}$ αν και μόνο αν $(nm,1)\sim(k,1)$ αν και μόνο αν $nm1=k1$ αν και μόνο αν $nm=k$. □

Μια συνέπεια της Πρότασης 12.42 είναι η εξής: *το άθροισμα και το γινόμενο θετικών ακεραίων είναι θετικοί ακέραιοι.* Πράγματι, το άθροισμα $\overline{n}+\overline{m}$ των θετικών ακεραίων $\overline{n}$, $\overline{m}$ είναι ίσο με τον θετικό ακέραιο $\overline{k}$, όπου $k=n+m$. Με άλλα λόγια, είναι $\overline{n}+\overline{m}=\overline{n+m}$. Ομοίως, το γινόμενο $\overline{n}\,\overline{m}$ των θετικών ακεραίων $\overline{n}$, $\overline{m}$ είναι ίσο με τον θετικό ακέραιο $\overline{k}$, όπου $k=nm$. Δηλαδή, είναι $\overline{n}\,\overline{m}=\overline{nm}$.

Μια πιο σημαντική συνέπεια των Προτάσεων 12.39 και 12.42 είναι η εξής. Ας υποθέσουμε ότι αντικαθιστούμε κάθε $n\in\mathbb{N}$ με τον αντίστοιχο $\overline{n}\in\mathbb{Z}_+$ ή, αντιστρόφως, ότι αντικαθιστούμε κάθε $\overline{n}\in\mathbb{Z}_+$ με τον αντίστοιχο $n\in\mathbb{N}$. Τότε *οι σχέσεις διάταξης καθώς και οι αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του $\mathbb{N}$ μένουν αμετάβλητες ως σχέσεις διάταξης καθώς και αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα αντίστοιχα στοιχεία του $\mathbb{Z}_+$ και αντιστρόφως.* Πιο συγκεκριμένα: (i) είναι $n<m$ αν και μόνο αν είναι $\overline{n}<\overline{m}$ και είναι $n=m$ αν και μόνο αν είναι $\overline{n}=\overline{m}$, (ii) είναι $n+m=k$ αν και μόνο αν είναι $\overline{n}+\overline{m}=\overline{k}$ και (iii) είναι $nm=k$ αν και μόνο αν είναι $\overline{n}\,\overline{m}=\overline{k}$. Αυτό μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ με το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ ή, αντιστρόφως, το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ με το σύνολο $\mathbb{N}$ χωρίς καμιά ουσιαστική αλλαγή στις βασικές δομές των δυο συνόλων, τη δομή διάταξης και τις αλγεβρικές δομές. Μπορούμε να φανταστούμε ότι πρόκειται για το ίδιο βασικό σύνολο του οποίου κάθε στοιχείο εμφανίζεται με δυο ονόματα: ένα όνομα n και ένα άλλο όνομα $\overline{n}$.

Ορισμός. Στο εξής, θεωρούμε ότι κάθε φυσικός n έχει αντικατασταθεί από τον αντίστοιχο θετικό ακέραιο $\overline{n}$ και, επομένως, ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ έχει αντικατασταθεί από το σύνολο $\mathbb{Z}_+$. Αφού, λοιπόν, "πετάξουμε" και "ξεχάσουμε" τους n και το σύνολό τους $\mathbb{N}$, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο n στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου $\overline{n}$ του $\mathbb{Z}_+$. Επίσης, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε εναλλακτικά και τα δυο σύμβολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$ για το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ και να χρησιμοποιούμε και τις δυο ονομασίες "φυσικός" και "θετικός ακέραιος" για τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_+$. Ουσιαστικά, λοιπόν, ταυτίζουμε τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, έτσι ώστε κάθε φυσικός να θεωρείται θετικός ρητός και το σύνολο $\mathbb{N}$ να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{Q}_+$.

Για παράδειγμα, στην Πρόταση 12.40 θα αντικαταστήσουμε το σύμβολο $\overline{n}$ με το n και θα πούμε: *για κάθε δυο θετικούς ρητούς r, s υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $nr>s$.* Και, επειδή τους θετικούς ακεραίους θα τους λέμε και φυσικούς, θα πούμε:

Για κάθε δυο θετικούς ρητούς r, s υπάρχει φυσικός n ώστε $nr>s$.

Ένα ακόμη παράδειγμα. Η Πρόταση 12.41 λέει: *κάθε θετικός ρητός r είναι ίσος με τον λόγο $\frac{n_1}{n_2}$ δυο θετικών ακεραίων* ή, ισοδύναμα,

Κάθε θετικός ρητός r είναι ίσος με τον λόγο $\frac{n_1}{n_2}$ δυο φυσικών.

Με άλλα λόγια, η Πρόταση 12.41 διατυπώνει τη γνωστή μας σχέση ανάμεσα σε θετικούς ρητούς και φυσικούς.

12.3 Οι θετικοί πραγματικοί.

Ορισμός. Ονομάζουμε **θετικό πραγματικό** κάθε *υποσύνολο* x του $\mathbb{Q}_+$, το οποίο έχει τις εξής τρεις ιδιότητες: (i) το x δεν είναι κενό και δεν είναι ολόκληρο το $\mathbb{Q}_+$, (ii) κάθε στοιχείο του συνόλου x

είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του $\mathbb{Q}_+$ το οποίο δεν ανήκει στο σύνολο x και (iii) το x δεν έχει μέγιστο στοιχείο, δηλαδή για κάθε στοιχείο του x υπάρχει άλλο μεγαλύτερο στοιχείο του x. Το σύνολο των θετικών πραγματικών συμβολίζεται $\mathbb{R}_+$.

Τονίζουμε: *κάθε θετικός πραγματικός είναι (σύμφωνα με τον ορισμό του) σύνολο θετικών ρητών.*

Ορισμός. Τα σύνολα με τις ιδιότητες $(i) - (iii)$, τα οποία ονομάσαμε θετικούς πραγματικούς, ονομάζονται, επίσης, **τομές** ή και **τομές Dedekind**.

Η επόμενη πρόταση εκφράζει μερικές απλές ιδιότητες των θετικών πραγματικών.

Πρόταση 12.43. *Έστω $x \in \mathbb{R}_+$.*
(1) Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$: αν $r \notin x$ και $s > r$, τότε $s \notin x$.
(2) Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$: αν $r \in x$ και $s < r$, τότε $s \in x$.
(3) Για κάθε $r \in x$ υπάρχει $s \in x$, $s > r$.

Απόδειξη. Καθένα από τα (1), (2) είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα (ii) του x. Το (3) είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα (iii) του x. □

Ορισμός. Έστω $x \in \mathbb{R}_+$. Λόγω της ιδιότητας (ii) του x, κάθε στοιχείο του x χαρακτηρίζεται **κατώτερος αριθμός** του x και κάθε στοιχείο εκτός του x χαρακτηρίζεται **ανώτερος αριθμός** του x.

Το να αποδείξουμε ότι κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{Q}_+$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή ότι έχει τις ιδιότητες $(i) - (iii)$, είναι ισοδύναμο με το να αποδείξουμε τα εξής: (i) το σύνολο περιέχει τουλάχιστον έναν θετικό ρητό και δεν περιέχει τουλάχιστον έναν θετικό ρητό, (ii) για κάθε θετικό ρητό που περιέχεται στο σύνολο, στο σύνολο περιέχεται και *κάθε* θετικός ρητός μικρότερός του και (iii) για κάθε θετικό ρητό που περιέχεται στο σύνολο, στο σύνολο περιέχεται και *κάποιος* θετικός ρητός μεγαλύτερός του.

12.3.1 Διάταξη.

Ορισμός. Αν $x, y \in \mathbb{R}_+$, λέμε ότι ο y είναι **μεγαλύτερος από** τον x και γράφουμε $y > x$ ή, ισοδύναμα, ότι ο x είναι **μικρότερος από** τον y και γράφουμε $x < y$ αν είναι $y \supset x$ ή, ισοδύναμα, $x \subset y$.

Θυμηθείτε: το σύμβολο $\supset$ σημαίνει γνήσιο υπερσύνολο και το $\subset$ σημαίνει γνήσιο υποσύνολο ενώ το $\supseteq$ σημαίνει υπερσύνολο και το $\subseteq$ σημαίνει υποσύνολο.

Πρόταση 12.44. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Είναι $x < y$ αν και μόνο αν υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$, δηλαδή $x \subset y$. Τότε υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$.
Έστω ότι υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$. Έστω $s \in x$. Τότε $s < r$ και, επομένως, $s \in y$. Άρα $x \subseteq y$ και, λόγω του r, είναι $x \subset y$. □

Πρόταση 12.45. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: $x = y$, $x > y$, $x < y$.*

Απόδειξη. Επειδή τα $x = y$, $x > y$, $x < y$ είναι ισοδύναμα, αντιστοίχως, με τα $x = y$, $x \supset y$, $x \subset y$, είναι σαφές ότι τα τρία αυτά ενδεχόμενα αλληλοαποκλείονται.
Έστω $x \neq y$. Τότε είτε (i) υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$ είτε (ii) υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in x$ και $r \notin y$. Στην περίπτωση (i) είναι, σύμφωνα με την Πρόταση 12.44, $x < y$ και στην περίπτωση (ii) είναι, για τον ίδιο λόγο, $x > y$. □

Ορισμός. Αν $x, y \in \mathbb{R}_+$, λέμε ότι ο y είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον x και γράφουμε $y \geq x$ ή, ισοδύναμα, ότι ο x είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον y και γράφουμε $x \leq y$ αν είναι $y > x$ ή $y = x$ ή, ισοδύναμα, $x < y$ ή $x = y$. Με άλλα λόγια, είναι $y \geq x$ ή, ισοδύναμα, $x \leq y$ αν και μόνο αν $y \supseteq x$ ή, ισοδύναμα, $x \subseteq y$.

Πρόταση 12.46. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}_+$.*
(1) Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.
(2) Αν $x \leq y$ και $y < z$ ή αν $x < y$ και $y \leq z$, τότε $x < z$.
(3) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.

Απόδειξη. (1) Έστω $x < y$ και $y < z$. Τότε $x \subset y$ και $y \subset z$ και, επομένως, $x \subset z$. Άρα $x < z$.
$(2), (3)$. Ομοίως. □

12.3.2 Πρόσθεση.

Θεώρημα 12.3. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το σύνολο $z = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\}$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του $\mathbb{R}_+$. Επίσης, για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ είναι $t + u \notin z$.*

Απόδειξη. Υπάρχουν $r \in x$, $s \in y$ και, τότε, $r + s \in z$. Άρα το σύνολο z δεν είναι κενό. Επίσης, υπάρχουν $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$. Τότε, για κάθε $r \in x$, $s \in y$ είναι $r < t$, $s < u$, οπότε $r + s < t + u$. Άρα κάθε στοιχείο του z είναι $\neq t + u$, οπότε $t + u \notin z$. Συμπεραίνουμε ότι το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Αποδείξαμε, επίσης, ότι για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ είναι $t + u \notin z$.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το $r+s$, όπου $r \in x$, $s \in y$. Έστω οποιοσδήποτε $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < r + s$. Επειδή $\frac{t}{r+s}(r + s) = t < r + s = 1(r + s)$, συνεπάγεται $\frac{t}{r+s} < 1$. Άρα $r\frac{t}{r+s} < r1 = r$ και $s\frac{t}{r+s} < s1 = s$. Συνεπάγεται $r\frac{t}{r+s} \in x$ και $s\frac{t}{r+s} \in y$ και, επομένως, $r\frac{t}{r+s} + s\frac{t}{r+s} \in z$. Όμως, $r\frac{t}{r+s} + s\frac{t}{r+s} = (r+s)\frac{t}{r+s} = t$, οπότε $t \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Πάλι, έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το $r + s$, όπου $r \in x$, $s \in y$. Υπάρχουν $t \in x$, $u \in y$ ώστε $r < t$, $s < u$. Συνεπάγεται $r + s < t + u$ και το $t + u$ είναι στοιχείο του z. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $z \in \mathbb{R}_+$. □

Ορισμός. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το στοιχείο $z \in \mathbb{R}_+$ στο Θεώρημα 12.3 ονομάζεται **άθροισμα** των x, y και συμβολίζεται

$$x + y.$$

Δηλαδή, $x + y = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\}$. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ αντιστοιχίζει το άθροισμα $x + y$ ονομάζεται **πρόσθεση** στο $\mathbb{R}_+$.

Πρόταση 12.47. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ είναι $x + y = y + x$.*

Απόδειξη. $x + y = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\} = \{s + r \,|\, s \in y, r \in x\} = y + x$. □

Πρόταση 12.48. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ είναι $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

Απόδειξη. Είναι $x + y = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\}$ και $y + z = \{s + t \,|\, s \in y, t \in z\}$. Άρα $(x + y) + z = \{(r + s) + t \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = \{r + (s + t) \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = x + (y + z)$. □

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικές προσθέσεις καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων.

Πρόταση 12.49. *Έστω $t \in \mathbb{Q}_+$ και $x \in \mathbb{R}_+$. Υπάρχουν $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ ώστε $s - r = t$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $r_1 \in x$ και $s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 \notin x$. Τότε είναι $s_1 > r_1$, οπότε $s_1 - r_1 \in \mathbb{Q}_+$. Σύμφωνα με την Πρόταση 12.40, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $nt > s_1 - r_1$, οπότε $r_1 + nt > s_1$. Άρα το $\{n \in \mathbb{N} \,|\, r_1 + nt \notin x\}$ δεν είναι κενό, οπότε έχει ελάχιστο στοιχείο n_0.
Αν $n_0 = 1$, τότε ορίζουμε $r = r_1$, $s = r_1 + n_0 t = r_1 + t$, οπότε είναι $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και $s - r = t$. Αν $n_0 > 1$, τότε ορίζουμε $r = r_1 + (n_0 - 1)t \in x$, $s = r_1 + n_0 t \notin x$, οπότε είναι $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και $s - r = t$. □

Πρόταση 12.50. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ είναι $x + y > x$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $t \in y$. Βάσει της Πρότασης 12.49, υπάρχουν $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ ώστε $s - r = t$. Τότε, είναι $r + t = s \notin x$ και $r + t \in x + y$. Άρα, από την Πρόταση 12.44, είναι $x < x + y$. □

Πρόταση 12.51. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Είναι $x < y$ αν και μόνο αν $x + z < y + z$. Επίσης, είναι $x = y$ αν και μόνο αν $x + z = y + z$.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$. Υπάρχει $t_1 \notin x$, $t_1 \in y$. Κατόπιν, υπάρχει $t_2 \in y$, $t_2 > t_1$, οπότε $t_2 - t_1 \in \mathbb{Q}_+$. Βάσει της Πρότασης 12.49, υπάρχουν $r \in z$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin z$ ώστε $s - r = t_2 - t_1$. Ορίζουμε $t = t_1 + s = t_2 + r$. Επειδή $t_2 \in y$, $r \in z$, είναι $t \in y + z$. Επειδή $t_1 \notin x$, $s \notin z$, είναι $t \notin x + z$. Άρα $x + z < y + z$.
Έστω $x + z < y + z$. Αν $x = y$, τότε $x + z = y + z$ και, αν $y < x$, τότε $y + z < x + z$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x < y$.
Προφανώς, αν $x = y$, τότε $x + z = y + z$. Έστω $x + z = y + z$. Αν $x < y$, τότε $x + z < y + z$ και, αν $y < x$, τότε $y + z < x + z$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x = y$. □

Πρόταση 12.52. *Έστω $x, y, z, w \in \mathbb{R}_+$.*
(1) Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x + z < y + w$.
(2) Αν $x \leq y$ και $z < w$ ή αν $x < y$ και $z \leq w$, τότε $x + z < y + w$.
(3) Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $x + z \leq y + w$.

Απόδειξη. (1) Έστω $x < y$ και $z < w$. Τότε $x + z < y + z < y + w$.
$(2), (3)$ Προφανή, λόγω του (1). □

Πρόταση 12.53. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Αν $x < y$, υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ ώστε $x + z = y$. Αντιθέτως, αν $x \geq y$, δεν υπάρχει κανένας $z \in \mathbb{R}_+$ ώστε $x + z = y$.*

Απόδειξη. Το τελευταίο μέρος είναι σαφές, διότι $x + z > x$. Επίσης, η μοναδικότητα του z είναι συνέπεια της Πρότασης 12.51.
Έστω $x < y$. Ορίζουμε το σύνολο $z = \{s - r \,|\, s \in y, r \notin x, s > r\}$ και θα αποδείξουμε ότι $z \in \mathbb{R}_+$ και $x + z = y$.
Υπάρχει $t_1 \notin x$, $t_1 \in y$. Τώρα, υπάρχει $t_2 \in y$, $t_2 > t_1$. Τότε $t_2 - t_1 \in z$. Κατόπιν, υπάρχει $t \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin y$. Για κάθε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$, είναι $s - r < (s - r) + r = s < t$. Άρα $t \notin z$. Άρα το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω $s - r \in z$, δηλαδή ώστε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Έστω $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < s - r$. Τότε $t + r < (s - r) + r = s$, οπότε $t + r \in y$. Επίσης, $t + r > r$. Άρα $t = (t + r) - r \in z$. Άρα το z έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Πάλι, έστω $s - r \in z$, δηλαδή ώστε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Υπάρχει $t \in y$, $t > s$, οπότε και $t > r$. Τότε $t - r = (t - s) + (s - r) > s - r$ και ο $t - r \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $z \in \mathbb{R}_+$.

Κατόπιν, θα αποδείξουμε ότι $x + z \subseteq y$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r_1 + (s - r)$ του $x + z$, δηλαδή ώστε $r_1 \in x$, $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Τότε $(r_1 + (s - r)) + (r - r_1) = s$ και $r > r_1$, οπότε $r_1 + (s - r) < s$. Άρα $r_1 + (s - r) \in y$.
Τέλος, θα αποδείξουμε ότι $y \subseteq x + z$. (i) Έστω $s \in y$, $s \notin x$. Υπάρχει $s_1 \in y$, $s_1 > s$. Επίσης, υπάρχουν $r \in x$, $s_2 \in \mathbb{Q}_+$, $s_2 \notin x$ ώστε $s_2 - r = s_1 - s$. Τότε είναι $s = r + (s_1 - s_2)$, όπου $r \in x$, $s_1 \in y$, $s_2 \notin x$ και $s_1 > s_2$ (διότι $s_1 = s_2 + (s - r)$ και $s > r$). Άρα $s \in x + z$. (ii) Έστω $s \in y$, $s \in x$. Υπάρχει $s_1 \in y$, $s_1 \notin x$ και είναι $s < s_1$. Στο (i) είδαμε ότι $s_1 \in x + z$. Άρα $s \in x + z$.
Από $x + z \subseteq y$ και $y \subseteq x + z$ συνεπάγεται $x + z = y$. □

Ορισμός. Αν $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x < y$, τότε ο μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ που ικανοποιεί την $x + z = y$ ονομάζεται **διαφορά** των y, x και συμβολίζεται

$$y - x.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x < y$ αντιστοιχίζει τον $y - x$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbb{R}_+$.

12.3.3 Πολλαπλασιασμός.

Θεώρημα 12.4. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το σύνολο $z = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\}$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του $\mathbb{R}_+$. Επίσης, για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ είναι $tu \notin z$.*

Απόδειξη. Υπάρχουν $r \in x$, $s \in y$ και, τότε, $rs \in z$. Άρα το σύνολο z δεν είναι κενό. Επίσης, υπάρχουν $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$. Τότε, για κάθε $r \in x$, $s \in y$ είναι $r < t$, $s < u$, οπότε $rs < tu$. Άρα κάθε στοιχείο του z είναι $\neq tu$, οπότε $tu \notin z$. Συμπεραίνουμε ότι το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Αποδείξαμε, επίσης, ότι για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ είναι $tu \notin z$.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in y$. Έστω οποιοσδήποτε $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < rs$. Επειδή $r\frac{t}{r} = t < rs$, συνεπάγεται $\frac{t}{r} < s$. Άρα $\frac{t}{r} \in y$ και, επομένως, $t = r\frac{t}{r} \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Πάλι, έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in y$. Υπάρχουν $t \in x$, $u \in y$ ώστε $r < t$, $s < u$. Συνεπάγεται $rs < tu$ και το tu είναι στοιχείο του z. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $z \in \mathbb{R}_+$. □

Ορισμός. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το στοιχείο $z \in \mathbb{R}_+$ στο Θεώρημα 12.4 ονομάζεται **γινόμενο** των x, y και συμβολίζεται

$$x \cdot y.$$

Δηλαδή, $x \cdot y = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\}$. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ αντιστοιχίζει το γινόμενο $x \cdot y$ ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbb{R}_+$.

Το $x \cdot y$, στο εξής, θα το γράφουμε xy.

Πρόταση 12.54. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ είναι $xy = yx$.*

Απόδειξη. $xy = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\} = \{sr \,|\, s \in y, r \in x\} = yx$. □

Πρόταση 12.55. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ είναι $(xy)z = x(yz)$.*

Απόδειξη. Είναι $xy = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\}$ και $yz = \{st \,|\, s \in y, t \in z\}$. Άρα $(xy)z = \{(rs)t \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = \{r(st) \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = x(yz)$. □

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

Πρόταση 12.56. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ είναι $x(y+z) = xy + xz$.*

Απόδειξη. Ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $x(y+z)$ γράφεται $r(s+t)$, όπου $r \in x$, $s \in y$, $t \in z$. Όμως, τότε $r(s+t) = rs + rt \in xy + xz$. Άρα $x(y+z) \subseteq xy + xz$.
Ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $xy + xz$ γράφεται $r_1 s + r_2 t$, όπου $r_1, r_2 \in x$, $s \in y$, $t \in z$. Ορίζουμε r να είναι ο μεγαλύτερος από τους r_1, r_2. Τότε $r \in x$ και $rs \geq r_1 s$, $rt \geq r_2 t$, οπότε $r(s+t) \geq r_1 s + r_2 t$. Επειδή $r(s+t) \in x(y+z)$, συνεπάγεται $r_1 s + r_2 t \in x(y+z)$. Άρα $xy + xz \subseteq x(y+z)$.
Άρα $x(y+z) = xy + xz$. □

Πρόταση 12.57. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Είναι $x < y$ αν και μόνο αν $xz < yz$. Επίσης, είναι $x = y$ αν και μόνο αν $xz = yz$.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$. Βάσει της Πρότασης 12.53, υπάρχει $w \in \mathbb{R}_+$ ώστε $x + w = y$. Τότε είναι $yz = (x+w)z = xz + wz > xz$.
Έστω $xz < yz$. Αν $x = y$, τότε $xz = yz$ και, αν $y < x$, τότε $yz < xz$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x < y$.
Προφανώς, αν $x = y$, τότε $xz = yz$. Έστω $xz = yz$. Αν $x < y$, τότε $xz < yz$ και, αν $y < x$, τότε $yz < xz$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x = y$. □

Πρόταση 12.58. *Έστω $x, y, z, w \in \mathbb{R}_+$.*
(1) Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $xz < yw$.
(2) Αν $x \leq y$ και $z < w$ ή αν $x < y$ και $z \leq w$, τότε $xz < yw$.
(3) Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $xz \leq yw$.

Απόδειξη. (1) Έστω $x < y$ και $z < w$. Τότε $xz < yz < yw$.
$(2), (3)$ Προφανή, λόγω του (1). □

Πρόταση 12.59. *Έστω $r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε το σύνολο $r^* = \{s \in \mathbb{Q}_+ \,|\, s < r\}$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του $\mathbb{R}_+$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$, $s < r$ και, προφανώς, ο r δεν ανήκει στο r^*. Άρα το r^* έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω $s \in r^*$ και $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < s$. Τότε $s < r$, οπότε $t < r$ και, επομένως, $t \in r^*$. Άρα το r^* έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Έστω $s \in r^*$. Δηλαδή $s \in \mathbb{Q}_+$, $s < r$. Τότε υπάρχει $s_1 \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s < s_1 < r$. Άρα $s_1 \in r^*$ και $s_1 > s$. Άρα το r^* έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών. □

Πρόταση 12.60. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ είναι $x1^* = x$.*

Απόδειξη. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του $x1^*$. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s < 1$. Τότε είναι $rs \in \mathbb{Q}_+$ και $rs < r1 = r$, οπότε $rs \in x$. Άρα $x1^* \subseteq x$.
Έστω $r \in x$. Υπάρχει $r_1 \in x$, $r_1 > r$. Τότε $\frac{r}{r_1} r_1 = r < r_1 = 1 r_1$, οπότε $\frac{r}{r_1} < 1$ και, επομένως, $\frac{r}{r_1} \in 1^*$. Άρα $r = r_1 \frac{r}{r_1} \in x1^*$. Άρα $x \subseteq x1^*$.
Άρα $x1^* = x$. □

Πρόταση 12.61. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει μοναδικός $y \in \mathbb{R}_+$ ώστε $xy = 1^*$.*

Απόδειξη. Η μοναδικότητα του y είναι συνέπεια της Πρότασης 12.57.
Αν δεν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$, ορίζουμε $y = \{\frac{1}{s} \,|\, s \in \mathbb{Q}_+, s \notin x\}$. Αν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και αυτός είναι ο s_0, ορίζουμε $y = \{\frac{1}{s} \,|\, s \in \mathbb{Q}_+, s \notin x, s \neq s_0\}$.
Υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$. Τότε $s + s \in \mathbb{Q}_+$, $s + s > s$, οπότε $s + s \notin x$ και ο $s + s$ δεν είναι ο

ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα ο $\frac{1}{s+s}$ είναι στοιχείο του y. Κατόπιν, υπάρχει $r \in x$. Για κάθε $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ είναι $s \neq r$ και, επειδή $s\frac{1}{s} = 1 = r\frac{1}{r}$, συνεπάγεται $\frac{1}{r} \neq \frac{1}{s}$. Άρα ο $\frac{1}{r}$ δεν είναι ίσος με κανένα στοιχείο του y. Άρα το y έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $\frac{1}{s}$ του y, δηλαδή έστω $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$. Έστω $r < \frac{1}{s}$. Τότε $r\frac{1}{r} = 1 = \frac{1}{s}s$, οπότε $s < \frac{1}{r}$. Άρα $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q}_+$, $\frac{1}{r} \notin x$ και ο $\frac{1}{r}$ δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $r = \frac{1}{1/r} \in y$. Άρα το y έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $\frac{1}{s}$ του y, δηλαδή έστω $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και ο s δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα υπάρχει $s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 \notin x$, $s_1 < s$ και, επομένως, υπάρχει $s_2 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 < s_2 < s$. Τότε, φυσικά, $s_2 \notin x$ και ο s_2 δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $\frac{1}{s_2} \in y$ και $\frac{1}{s} < \frac{1}{s_2}$. Άρα το y έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $y \in \mathbb{R}_+$.
Τώρα, θα αποδείξουμε ότι $xy \subseteq 1^*$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r\frac{1}{s}$ του xy, δηλαδή έστω $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$ $s \notin x$. Τότε $s > r$, οπότε $r\frac{1}{s} < s\frac{1}{s} = 1$ και $r\frac{1}{s} \in \mathbb{Q}_+$. Άρα $r\frac{1}{s} \in 1^*$.
Τέλος, θα αποδείξουμε ότι $1^* \subseteq xy$. Έστω $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < 1$. Υπάρχει $r \in x$ και, κατόπιν, υπάρχουν $r_1 \in x$, $s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 \notin x$ ώστε $s_1 - r_1 = (1-t)r$. Τότε $\frac{r_1}{t} \in \mathbb{Q}_+$ και $\frac{r_1}{t} > s_1$ (διότι $(1-t)s_1 > (1-t)r$, οπότε $r_1 = s_1 - (1-t)r > ts_1$). Άρα $\frac{r_1}{t} \notin x$ και δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $\frac{1}{r_1/t} \in y$. Τέλος, είναι $t = r_1\frac{1}{r_1/t} \in xy$.
Από $xy \subseteq 1^*$ και $1^* \subseteq xy$ συνεπάγεται $xy = 1^*$. □

Ορισμός. Ο y της Πρότασης 12.61 ονομάζεται **αντίστροφος** του x και συμβολίζεται

$$x^{-1}.$$

Πρόταση 12.62. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ ώστε $xz = y$.*

Απόδειξη. Η μοναδικότητα του z είναι συνέπεια της Πρότασης 12.57.
Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Αν $z = x^{-1}y \in \mathbb{R}_+$, τότε $xz = xx^{-1}y = 1^*y = y$. □

Ορισμός. Αν $x, y \in \mathbb{R}_+$, τότε ο μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ που ικανοποιεί την $xz = y$, δηλαδή ο $x^{-1}y$, ονομάζεται **λόγος** των y, x και συμβολίζεται

$$\frac{y}{x}.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ αντιστοιχίζει τον $\frac{y}{x}$ ονομάζεται **διαίρεση** στο $\mathbb{R}_+$.

12.3.4 Η ιδιότητα συνέχειας του $\mathbb{R}_+$.

Θεώρημα 12.5. *Έστω μη-κενά $A, B \subseteq \mathbb{R}_+$ ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}_+$ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $\xi = \bigcup\{a \,|\, a \in A\} = \{r \in \mathbb{Q}_+ \,|\, r \in a$ για κάποιο $a \in A\}$. Δηλαδή, το ξ είναι η ένωση όλων των συνόλων a $(a \in A)$.
Υπάρχει κάποιο $a_0 \in A$ και υπάρχει κάποιος $r_0 \in \mathbb{Q}_+$, $r_0 \in a_0$. Άρα $r_0 \in \xi$. Κατόπιν, υπάρχει κάποιος $b_0 \in B$ και υπάρχει κάποιος $s_0 \in \mathbb{Q}_+$, $s_0 \notin b_0$. Έστω $r \in \xi$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$. Επειδή $a \leq b_0$ (δηλαδή $a \subseteq b_0$), είναι $r \in b_0$, οπότε $r \neq s_0$. Συμπεραίνουμε ότι $r \neq s_0$ για κάθε $r \in \xi$, οπότε $s_0 \notin \xi$. Άρα το ξ έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω $r \in \xi$ και $r_1 \in \mathbb{Q}_+$, $r_1 < r$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$, οπότε $r_1 \in a$. Άρα $r_1 \in \xi$. Άρα το ξ έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Έστω $r \in \xi$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$. Επομένως, υπάρχει $r_1 \in a$, $r_1 > r$. Άρα υπάρχει $r_1 \in \xi$, $r_1 > r$. Άρα το ξ έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.

Άρα $\xi \in \mathbb{R}_+$.
Από τον ορισμό του το ξ έχει την ιδιότητα: $a \subseteq \xi$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $a \leq \xi$ για κάθε $a \in A$. Κατόπιν, έστω $b \in B$. Επειδή $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, είναι $a \subseteq b$ για κάθε $a \in A$ και, επομένως, $\xi \subseteq b$. Άρα είναι $\xi \leq b$ για κάθε $b \in B$. □

12.3.5 Οι ρητοί θετικοί πραγματικοί.

Ορισμός. Για κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$, ο θετικός πραγματικός $r^* \in \mathbb{R}_+$ ονομάζεται **ρητός θετικός πραγματικός** και για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N})$, ο θετικός πραγματικός $n^* \in \mathbb{R}_+$ ονομάζεται **ακέραιος θετικός πραγματικός**. Θα συμβολίσουμε (προσωρινά) ${\mathbb{Q}_+}^*$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ με στοιχεία τους ρητούς θετικούς πραγματικούς r^* $(r \in \mathbb{Q}_+)$ και θα συμβολίσουμε (προσωρινά) ${\mathbb{Z}_+}^*$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ με στοιχεία τους ακέραιους θετικούς πραγματικούς n^* $(n \in \mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N}))$. Δηλαδή, ${\mathbb{Q}_+}^* = \{r^* \,|\, r \in \mathbb{Q}_+\}$ και ${\mathbb{Z}_+}^* = \{r^* \,|\, r \in \mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N})\}$.

Πρόταση 12.63. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Τότε είναι $r < s$ αν και μόνο αν $r^* < s^*$. Επίσης, είναι $r = s$ αν και μόνο αν $r^* = s^*$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$. Τότε $r \in s^*$ και $r \notin r^*$. Άρα $r^* < s^*$.
Έστω $r^* < s^*$. Αν $r = s$, τότε $r^* = s^*$ και, αν $s < r$, τότε $s^* < r^*$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $r < s$.
Αν $r = s$, τότε, προφανώς, $r^* = s^*$. Έστω $r^* = s^*$. Αν $r < s$, τότε $r^* < s^*$ και, αν $s < r$, τότε $s^* < r^*$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $r = s$. □

Πρόταση 12.64. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$.*
(1) Είναι $r + s = t$ αν και μόνο αν $r^* + s^* = t^*$.
(2) Είναι $r - s = t$ αν και μόνο αν $r^* - s^* = t^*$.
(3) Είναι $rs = t$ αν και μόνο αν $r^* s^* = t^*$.
(4) Είναι $\frac{r}{s} = t$ αν και μόνο αν $\frac{r^*}{s^*} = t^*$.

Απόδειξη. (1) Έστω $r + s = t$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r_1 + s_1$ του $r^* + s^*$, δηλαδή έστω $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $r_1 < r$, $s_1 < s$. Τότε $r_1 + s_1 \in \mathbb{Q}_+$ και $r_1 + s_1 < r + s = t$, οπότε $r_1 + s_1 \in t^*$. Άρα $r^* + s^* \subseteq t^*$.
Αντιστρόφως έστω $t_1 \in t^*$, δηλαδή $t_1 \in \mathbb{Q}_+$, $t_1 < t = r + s$. Τότε είναι $\frac{t_1}{r+s} < 1$, οπότε $\frac{t_1}{r+s} r < r$ και $\frac{t_1}{r+s} s < s$ και, επομένως, $\frac{t_1}{r+s} r \in r^*$ και $\frac{t_1}{r+s} s \in s^*$. Άρα $t_1 = \frac{t_1}{r+s} r + \frac{t_1}{r+s} s \in r^* + s^*$. Άρα $t^* \subseteq r^* + s^*$.
Άρα $r^* + s^* = t^*$.
Αντιστρόφως, έστω $r^* + s^* = t^*$ και $r + s = u$. Τότε είναι $u^* = r^* + s^* = t^*$ και, επομένως, $u = t$.
(2) Συνέπεια του (1).
(3) Έστω $rs = t$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r_1 s_1$ του $r^* s^*$, δηλαδή έστω $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $r_1 < r$, $s_1 < s$. Τότε $r_1 s_1 \in \mathbb{Q}_+$ και $r_1 s_1 < rs = t$, οπότε $r_1 s_1 \in t^*$. Άρα $r^* s^* \subseteq t^*$.
Αντιστρόφως έστω $t_1 \in t^*$, δηλαδή $t_1 \in \mathbb{Q}_+$, $t_1 < t = rs$. Υπάρχει $t_2 \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $t_1 < t_2 < rs$. Τότε είναι $\frac{t_2}{s} < r$ και $\frac{t_1}{t_2} s < s$ και, επομένως, $\frac{t_2}{s} \in r^*$ και $\frac{t_1}{t_2} s \in s^*$. Άρα $t_1 = \frac{t_2}{s} \frac{t_1}{t_2} s \in r^* s^*$. Άρα $t^* \subseteq r^* s^*$.
Άρα $r^* s^* = t^*$.
Αντιστρόφως, έστω $r^* s^* = t^*$ και $rs = u$. Τότε είναι $u^* = r^* s^* = t^*$ και, επομένως, $u = t$.
(4) Συνέπεια του (3). □

Πρόταση 12.65. *Έστω $x \in \mathbb{R}_+$. Τότε $x \in {\mathbb{Q}_+}^*$ αν και μόνο αν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$. Στην περίπτωση αυτή, αν ο r είναι ο ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$, τότε $x = r^*$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in {\mathbb{Q}_+}^*$. Συγκεκριμένα, έστω $x = r^*$, όπου $r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε, $x = \{t \in \mathbb{Q}_+ \,|\, t < r\}$, οπότε είναι φανερό ότι ο r είναι ο ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$. Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$ και ότι αυτός ο ελάχιστος s είναι ο r. Τότε για κάθε $t \in x$ συνεπάγεται $t < r$ (διότι $r \notin x$) και, αντιστρόφως, αν $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < r$, συνεπάγεται $t \in x$. Άρα $x = \{t \in \mathbb{Q}_+ \,|\, t < r\} = r^*$. □

Πρόταση 12.66. *Έστω $x \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε (i) είναι $r \in x$ αν και μόνο αν $r^* < x$ και (ii) είναι $r \notin x$ αν και μόνο αν $r^* \geq x$.*

Απόδειξη. (i) Έστω $r \in x$. Επειδή $r \notin r^*$, συνεπάγεται $r^* < x$. Αντιστρόφως, έστω $r^* < x$. Τότε υπάρχει $r_1 \in x$, $r_1 \notin r^*$. Άρα $r_1 \in x$ και $r_1 \geq r$, οπότε $r \in x$.
Το (ii) είναι ισοδύναμο με το (i). □

Πρόταση 12.67. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x < y$. Τότε υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $x < r^* < y$.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$. Τότε υπάρχει $s \in y$, $s \notin x$. Επίσης, υπάρχει $r \in y$, $r > s$. Τότε είναι $r \in y$ και $r \notin r^*$, οπότε $r^* < y$. Επίσης, είναι $s \in r^*$ και $s \notin x$, οπότε $x < r^*$. □

Πρόταση 12.68. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $xy < t^*$. Τότε υπάρχουν $r, s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $rs = t$ και $x < r^*$, $y < s^*$.*

Απόδειξη. Έστω z ο μικρότερος από τους 1^* και $\frac{t^* - xy}{x+y+1^*}$. Τότε, φυσικά, $z \leq 1^*$ και $z \leq \frac{t^* - xy}{x+y+1^*}$. Τώρα, υπάρχουν $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $x < {r_1}^* < x + z$ και $y < {s_1}^* < y + z$. Τότε ${r_1}^*{s_1}^* < (x+z)(y+z) = xy + xz + zy + zz \leq xy + xz + zy + z = xy + (x + y + 1^*)z \leq xy + (t^* - xy) = t^*$ και, επομένως, $r_1 s_1 < t$. Ορίζουμε $r = \frac{t}{s_1} \in \mathbb{Q}_+$ και $s = s_1 \in \mathbb{Q}_+$. Τότε $rs = t$, $s^* = {s_1}^* > y$ και $r^* = (\frac{t}{s_1})^* = \frac{t^*}{{s_1}^*} > {r_1}^*$. □

Πρόταση 12.69. *Για κάθε $y \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}_+$ ώστε $xx = y$.*

Απόδειξη. Η μοναδικότητα του x είναι συνέπεια της Πρότασης 12.58.
Ορίζουμε τον $x = \{r \in \mathbb{Q}_+ \,|\, rr \in y\}$.
Κατ' αρχάς, υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r < 1$, $r \in y$. Τότε, $rr < r$, οπότε $rr \in y$. Άρα $r \in x$. Κατόπιν, υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$, $s > 1$, $s \notin y$. Τότε $ss > s$, οπότε $ss \notin y$. Άρα $s \notin x$. Άρα ο x έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω $r \in x$ και $r_1 \in \mathbb{Q}_+$, $r_1 < r$. Τότε $r_1 r_1 < rr$ και, επειδή $rr \in y$, είναι $r_1 r_1 \in y$. Άρα $r_1 \in x$. Επομένως, ο x έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Έστω $r \in x$, οπότε $r \in \mathbb{Q}_+$ και $rr \in y$. Υπάρχει $s \in y$, $s > rr$ και θεωρούμε $t \in \mathbb{Q}_+$ μικρότερο από τον μικρότερο από τους 1, $\frac{s-rr}{r+r+1}$. Τότε $t < 1$, $t < \frac{s-rr}{r+r+1}$. Άρα $(r+t)(r+t) = rr + rt + tr + tt < rr + rt + tr + t = rr + (r+r+1)t < rr + (s - rr) = s$. Επειδή $s \in y$, συνεπάγεται $(r+t)(r+t) \in y$, οπότε $r + t \in x$. Επειδή $r + t > r$, ο x έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $x \in \mathbb{R}_+$.
Έστω $xx > y$. Τότε υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $xx > s^* > y$. Άρα $s \in xx$, οπότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in x$ ώστε $r_1 r_2 = s$. Αν r είναι ο μεγαλύτερος από τους r_1, r_2, τότε $r \in x$ και $rr \geq s$. Επειδή $r \in x$, είναι $rr \in y$ και, επειδή $rr \geq s$, είναι $s \in y$. Αυτό αντιφάσκει με το $s^* > y$.
Έστω $xx < y$. Τότε υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $xx < s^* < y$. Από την Πρόταση 12.68, υπάρχουν $t_1, t_2 \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $t_1 t_2 = s$ και $x < {t_1}^*$, $x < {t_2}^*$. Ορίζουμε t να είναι ο μικρότερος από τους t_1, t_2, οπότε $x < t^*$ και $tt \leq s$. Επειδή $s^* < y$, είναι $s \in y$ και, επειδή $tt \leq s$, είναι $tt \in y$. Άρα $t \in x$ και αυτό αντιφάσκει με το $x < t^*$.
Άρα $xx = y$. □

Η Πρόταση 12.69 λέει ότι *κάθε θετικός πραγματικός έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα*.

Ορισμός. Κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ ο οποίος δεν είναι ρητός θετικός πραγματικός χαρακτηρίζεται **άρρητος θετικός πραγματικός**.

Η επόμενη πρόταση λέει ότι *η τετραγωνική ρίζα του* $1+1$ *είναι άρρητος θετικός πραγματικός.*

Πρόταση 12.70. *Υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος θετικός πραγματικός.*

Απόδειξη. Υπάρχει $x \in \mathbb{R}_+$ ώστε $xx = (1+1)^*$.
Έστω ότι ο x είναι ρητός θετικός πραγματικός. Τότε υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $x = r^*$, οπότε συνεπάγεται $rr = 1+1$. Σύμφωνα με την Πρόταση 12.41, υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \frac{m}{n}$. Άρα $mm = (1+1)nn$.
Βάσει της Αρχής Καλής Διάταξης υπάρχει ελάχιστος $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα να υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $m_0m_0 = (1+1)n_0n_0$.
Τώρα, είναι $n_0n_0 < (1+1)n_0n_0 = m_0m_0 = ((1+1)n_0)n_0 < (1+1)n_0(1+1)n_0$ και, επομένως, $n_0 < m_0 < (1+1)n_0$.
Ορίζουμε $n_1 = m_0 - n_0 \in \mathbb{N}$.
Τότε $n_1 < n_0$ και ορίζουμε $m_1 = n_0 - n_1 \in \mathbb{N}$.
Με λίγες πράξεις αποδεικνύεται ότι $m_1m_1 = (1+1)n_1n_1$. Αυτό είναι άτοπο, επειδή $n_1 < n_0$. □

Μια συνέπεια των Προτάσεων 12.63 και 12.64 είναι η εξής. Ας υποθέσουμε ότι αντικαθιστούμε κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$ με τον αντίστοιχο $r^* \in \mathbb{Q}_+{}^*$. Τότε *οι σχέσεις διάταξης καθώς και οι αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία* r *του* $\mathbb{Q}_+$ *μένουν αμετάβλητες ως σχέσεις διάταξης καθώς και αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα αντίστοιχα στοιχεία* r^* *του* $\mathbb{Q}_+{}^*$. Αυτό μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbb{Q}_+$ των *θετικών ρητών* r με το υποσύνολο $\mathbb{Q}_+{}^*$ του $\mathbb{R}_+$ που αποτελείται από τους αντίστοιχους *ρητούς θετικούς πραγματικούς* r^*.

Ορισμός. Στο εξής, θα θεωρούμε ότι κάθε θετικός ρητός r έχει αντικατασταθεί από τον αντίστοιχο ρητό θετικό πραγματικό r^* και, επομένως, ότι το σύνολο $\mathbb{Q}_+$ έχει αντικατασταθεί από το αντίστοιχο υποσύνολο $\mathbb{Q}_+{}^*$ του $\mathbb{R}_+$. Αφού, λοιπόν, "πετάξουμε" και "ξεχάσουμε" τους r και το σύνολό τους $\mathbb{Q}_+$, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο r στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου r^* του $\mathbb{Q}_+{}^*$. Επίσης, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbb{Q}_+$ για το σύνολο $\mathbb{Q}_+{}^*$ και να χρησιμοποιούμε την ονομασία "θετικός ρητός" αντί "ρητός θετικός πραγματικός" για τα στοιχεία του $\mathbb{Q}_+{}^*$. Ουσιαστικά, λοιπόν, ταυτίζουμε τα σύνολα $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+{}^*$, έτσι ώστε κάθε θετικός ρητός να θεωρείται ρητός θετικός πραγματικός και το σύνολο $\mathbb{Q}_+$ να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}_+$.
Αυτομάτως, κάθε θετικός ακέραιος (δηλαδή, φυσικός) n αντικαθίσταται από τον αντίστοιχο ακέραιο θετικό πραγματικό n^*, οπότε το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ αντικαθίσταται από το αντίστοιχο υποσύνολο $\mathbb{Z}_+{}^*$ του $\mathbb{R}_+$. Όμως, χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο n στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου n^* του $\mathbb{Z}_+{}^*$. Επίσης, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbb{Z}_+$ ή, ισοδύναμα, το σύμβολο $\mathbb{N}$ για το σύνολο $\mathbb{Z}_+{}^*$ και χρησιμοποιούμε την ονομασία "θετικός ακέραιος" αντί "ακέραιος θετικός πραγματικός" για τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_+{}^*$. Δηλαδή, ταυτίζουμε τα σύνολα $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+{}^*$, έτσι ώστε κάθε θετικός ακέραιος να θεωρείται ακέραιος θετικός πραγματικός και το σύνολο $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}_+$.

Μετά από αυτές τις αλλαγές, έχει ενδιαφέρον να δούμε πώς διατυπώνονται μερικές από τις προηγούμενες προτάσεις.

Η Πρόταση 12.67 λέει:

Ανάμεσα σε δυο οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός ρητός.

Η Πρόταση 12.66 περιγράφει την αντιστοιχία ανάμεσα στη σχέση διάταξης των (νέων) θετικών ρητών με τους θετικούς πραγματικούς και στη σχέση εγκλεισμού των (παλαιών) θετικών ρητών με τους θετικούς πραγματικούς: *ένας (νέος) θετικός ρητός είναι μικρότερος από έναν θετικό πραγματικό αν και μόνο αν ο αντίστοιχος (παλαιός) θετικός ρητός περιέχεται στον ίδιο θετικό πραγματικό* και *ένας (νέος) θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με έναν θετικό πραγματικό αν και μόνο αν ο αντίστοιχος (παλαιός) θετικός ρητός δεν περιέχεται στον ίδιο θετικό πραγματικό.*

Μετά από αυτά, η Πρόταση 12.65 λέει το εξής "προφανές": *ένας θετικός πραγματικός είναι θετικός ρητός αν και μόνο αν υπάρχει ελάχιστος θετικός ρητός μεγαλύτερος από ή ίσος με αυτόν και, σ' αυτήν την περίπτωση, αυτός ο ελάχιστος θετικός ρητός είναι ο ίδιος ο εαυτός του.*

Η Πρόταση 12.60 λέει:

$x1 = x$ *για κάθε* x *θετικό πραγματικό.*

Η Πρόταση 12.61 λέει:

Για κάθε θετικό πραγματικό x *υπάρχει θετικός πραγματικός* y *ώστε* $xy = 1$.

12.4 Οι πραγματικοί.

Ορισμός. Εκτός από τους θετικούς πραγματικούς, δηλαδή τα στοιχεία του $\mathbb{R}_+$, δημιουργούμε ένα στοιχείο το οποίο ονομάζουμε **μηδέν** και συμβολίζουμε 0. Θεωρούμε τον 0 διαφορετικό από κάθε $x \in \mathbb{R}_+$. Επίσης, για κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}_+$, δημιουργούμε ένα νέο στοιχείο το οποίο ονομάζουμε **μείον** x ή **αντίθετο** του x και συμβολίζουμε $-x$. Θεωρούμε ότι κάθε $-x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ είναι διαφορετικός από τον 0 καθώς και από κάθε $y \in \mathbb{R}_+$. Επίσης, θεωρούμε ότι, για κάθε δυο διαφορετικούς $x, y \in \mathbb{R}_+$, οι αντίστοιχοι $-x, -y$ είναι διαφορετικοί.
Οι $-x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ ονομάζονται **αρνητικοί πραγματικοί** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbb{R}_-$. Δηλαδή, $\mathbb{R}_- = \{-x \,|\, x \in \mathbb{R}_+\}$. Οι θετικοί πραγματικοί, το μηδέν και οι αρνητικοί πραγματικοί ονομάζονται **πραγματικοί** και συμβολίζουμε $\mathbb{R}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.
Οι $-r$ $(r \in \mathbb{Q}_+)$ ονομάζονται **αρνητικοί ρητοί** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbb{Q}_-$. Δηλαδή, $\mathbb{Q}_- = \{-r \,|\, r \in \mathbb{Q}_+\}$. Οι θετικοί ρητοί, το μηδέν και οι αρνητικοί ρητοί ονομάζονται **ρητοί** και συμβολίζουμε $\mathbb{Q}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$.
Τέλος, οι $-n$ $(n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N})$ ονομάζονται **αρνητικοί ακέραιοι** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbb{Z}_-$. Δηλαδή, $\mathbb{Z}_- = \{-n \,|\, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Οι θετικοί ακέραιοι, το μηδέν και οι αρνητικοί ακέραιοι ονομάζονται **ακέραιοι** και συμβολίζουμε $\mathbb{Z}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

12.4.1 Διάταξη.

Ορισμός. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε $|x|$ και ονομάζουμε **απόλυτη τιμή** του x τον πραγματικό που ορίζεται με τον τύπο

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{R}_+ \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ y, & \text{αν } x = -y,\ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι, αν ο x δεν είναι μηδέν, τότε ο $|x|$ είναι θετικός πραγματικός.

Ορισμός. Έστω ότι $x, y \in \mathbb{R}$. Το νόημα του $x > y$ ή του ισοδύναμου $y < x$ είναι ήδη γνωστό στην περίπτωση που οι x, y είναι και οι δυο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δυο θετικοί. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $y < x$ αν (i) οι x, y είναι και οι δυο αρνητικοί και $|x| < |y|$ ή (ii) είναι ο x θετικός και ο y αρνητικός ή (iii) είναι ο x θετικός και $y = 0$ ή (iv) είναι $x = 0$ και ο y αρνητικός.

Η Πρόταση 12.71 είναι προφανής.

Πρόταση 12.71. *Έστω* $x \in \mathbb{R}$. *Ο* x *είναι θετικός αν και μόνο αν* $x > 0$. *Επίσης, ο* x *είναι αρνητικός αν και μόνο αν* $x < 0$.

Οι Προτάσεις 12.72 και 12.73, παρακάτω, αποδεικνύονται με απλή εφαρμογή των ορισμών διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς το αν οι πραγματικοί είναι θετικοί ή αρνητικοί ή μηδέν και με αναγωγή στην περίπτωση των θετικών πραγματικών. Θα αποφύγουμε να γράψουμε τις τελείως στοιχειώδεις αποδείξεις.

Πρόταση 12.72. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: $x = y$, $x > y$, $x < y$.*

Ορισμός. Αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον y και συμβολίζουμε $x \geq y$ ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον x και συμβολίζουμε $y \leq x$ αν $x > y$ ή $x = y$ ή, ισοδύναμα, αν $y < x$ ή $y = x$.

Πρόταση 12.73. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$.*
(1) Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.
(2) Αν $x \leq y$ και $y < z$ ή αν $x < y$ και $y \leq z$, τότε $x < z$.
(3) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.

12.4.2 Πρόσθεση.

Ορισμός. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Έχει ήδη οριστεί το άθροισμα $x + y$ αν οι x, y είναι και οι δυο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δυο θετικοί. Ορίζουμε το **άθροισμα** των x, y και το συμβολίζουμε

$$x + y$$

να είναι (i) ο $-(|x| + |y|)$ αν $x < 0$, $y < 0$, (ii) ο $|x| - |y|$ αν $x > 0$, $y < 0$, $|x| > |y|$, (iii) ο $-(|y| - |x|)$ αν $x > 0$, $y < 0$, $|x| < |y|$, (iv) ο 0 αν $x > 0$, $y < 0$, $|x| = |y|$, (v) ο $|y| - |x|$ αν $x < 0$, $y > 0$, $|y| > |x|$, (vi) ο $-(|x| - |y|)$ αν $x < 0$, $y > 0$, $|y| < |x|$, (vii) ο 0 αν $x < 0$, $y > 0$, $|x| = |y|$, $(viii)$ ο x αν $y = 0$ και (ix) ο y αν $x = 0$.
Έτσι, η πράξη **πρόσθεση** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Όλες οι επόμενες προτάσεις αποδεικνύονται με αναγωγή σε περιπτώσεις όπου όλες οι μεταβλητές έχουν θετικές τιμές. Παραλείπουμε τις βαρετές πράξεις - δεν προσφέρουν τίποτα ουσιαστικό.

Πρόταση 12.74. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $x + y = y + x$.*

Πρόταση 12.75. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ είναι $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

Ορισμός. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε ορίσει τον αντίθετο του x αν ο x είναι θετικός. Αν, τώρα, ο x δεν είναι θετικός, ορίζουμε τον **αντίθετο** του x και τον συμβολίζουμε

$$-x$$

να είναι (i) ο 0 αν $x = 0$ και (ii) ο $|x|$ αν $x < 0$.

Πρόταση 12.76. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x > 0$ ή $x = 0$ ή $x < 0$ αν και μόνο αν, αντιστοίχως, $-x < 0$ ή $-x = 0$ ή $-x > 0$.*

Πρόταση 12.77. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-(-x) = x$, $|-x| = |x|$ και $x + (-x) = 0$.*

Πρόταση 12.78. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $-(x + y) = -x + (-y)$.*

Ορισμός. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ονομάζουμε **διαφορά** των x, y και συμβολίζουμε

$$x - y$$

τον $x + (-y)$. Έτσι, η πράξη **αφαίρεση** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Πρόταση 12.79. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *είναι* $-(x-y) = y-x$.

Πρόταση 12.80. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *είναι* $x > y$ *αν και μόνο αν* $x-y > 0$ *αν και μόνο αν* $y-x < 0$.

Πρόταση 12.81. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *είναι* $x > y$ *αν και μόνο αν* $-x < -y$. *Επίσης, είναι* $x = y$ *αν και μόνο αν* $-x = -y$.

Πρόταση 12.82. *Έστω* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Είναι* $x < y$ *αν και μόνο αν* $x+z < y+z$. *Επίσης, είναι* $x = y$ *αν και μόνο αν* $x+z = y+z$.

Πρόταση 12.83. *Έστω* $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.
(1) Αν $x < y$ *και* $z < w$, *τότε* $x+z < y+w$.
(2) Αν $x \leq y$ *και* $z < w$ *ή αν* $x < y$ *και* $z \leq w$, *τότε* $x+z < y+w$.
(3) Αν $x \leq y$ *και* $z \leq w$, *τότε* $x+z \leq y+w$.

Πρόταση 12.84. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *υπάρχει μοναδικός* $z \in \mathbb{R}$ *ώστε* $x+z = y$.

Ο μοναδικός z στην Πρόταση 12.84 είναι ο $y+(-x) = y-x$.

12.4.3 Πολλαπλασιασμός.

Ορισμός. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Έχει ήδη οριστεί το γινόμενο xy αν οι x, y είναι και οι δυο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δυο θετικοί. Ορίζουμε το **γινόμενο** των x, y και το συμβολίζουμε

$$x \cdot y$$

ή, πιο απλά, xy να είναι (i) ο $|x||y|$ αν $x < 0$, $y < 0$, (ii) ο $-(|x||y|)$ αν $x < 0$, $y > 0$ ή $x > 0$, $y < 0$ και (iii) ο 0 αν $x = 0$ ή $y = 0$.
Έτσι, η πράξη **πολλαπλασιασμός** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Πρόταση 12.85. *Έστω* $x, y \in \mathbb{R}$. *Είναι* $xy = 0$ *αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους* x, y *είναι μηδέν.*

Πρόταση 12.86. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *είναι* $|xy| = |x||y|$.

Πρόταση 12.87. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *είναι* $xy = yx$.

Πρόταση 12.88. *Για κάθε* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *είναι* $(xy)z = x(yz)$.

Πρόταση 12.89. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *είναι* $x1 = x$.

Πρόταση 12.90. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *είναι* $(-x)y = x(-y) = -xy$, $(-x)(-y) = xy$.

Πρόταση 12.91. *Για κάθε* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *είναι* $x(y+z) = xy+xz$.

Πρόταση 12.92. *Έστω* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Αν* $z > 0$, *τότε είναι* $x > y$ *αν και μόνο αν* $xz > yz$. *Αν* $z < 0$, *τότε είναι* $x > y$ *αν και μόνο αν* $xz < yz$.

Ορισμός. Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Αν ο x είναι θετικός, έχουμε ήδη ορίσει τον αντίστροφό του. Τώρα, αν ο x είναι αρνητικός, συμβολίζουμε

$$x^{-1}$$

και ονομάζουμε **αντίστροφο** του x τον $-|x|^{-1}$.

Πρόταση 12.93. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ *είναι* $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

Πρόταση 12.94. *Έστω* $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. *Τότε υπάρχει μοναδικός* $z \in \mathbb{R}$ *ώστε* $xz = y$.

Ορισμός. Ο z που ικανοποιεί την $xz = y$ είναι, απλώς, ο $x^{-1}y$. Αυτός ο πραγματικός ονομάζεται **λόγος** των y, x και συμβολίζεται

$$\frac{y}{x}.$$

Έτσι, η πράξη **διαίρεση** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

12.4.4 Η ιδιότητα συνέχειας.

Θεώρημα 12.6. *Έστω μη-κενά $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το A περιέχει τουλάχιστον έναν $a \in \mathbb{R}_+$. Τότε το $A_1 = A \cap \mathbb{R}_+$ είναι μη-κενό και ισχύει $a \leq b$ για κάθε $a \in A_1$, $b \in B$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.5, υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}_+$ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A_1$, $b \in B$. Άρα $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.
Έστω ότι το B περιέχει τουλάχιστον έναν $b \in \mathbb{R}_-$. Θεωρούμε τα σύνολα $C = \{c \,|\, -c \in A\}$ και $D = \{d \,|\, -d \in B\}$. Τότε είναι $d \leq c$ για κάθε $d \in D$ και $c \in C$. Επίσης, το D περιέχει τουλάχιστον έναν $d \in \mathbb{R}_+$. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της πρώτης παραγράφου, υπάρχει $\eta \in \mathbb{R}_+$ ώστε $d \leq \eta \leq c$ για κάθε $d \in D$ και $c \in C$. Ορίζουμε $\xi = -\eta$, οπότε είναι $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$.
Τέλος, έστω ότι το A δεν περιέχει κανέναν $a \in \mathbb{R}_+$ και το B δεν περιέχει κανέναν $b \in \mathbb{R}_-$. Τότε, όμως, είναι $a \leq 0 \leq b$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. $\square$

12.4.5 Οι βασικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$.

Όλες οι ιδιότητες του $\mathbb{R}$ που παρουσιάζονται στο Θεώρημα 12.7 έχουν αποδειχθεί. Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζονται "βασικές" διότι με βάση αυτές μπορούν να αποδειχτούν όλες οι άλλες ιδιότητες του $\mathbb{R}$. Μάλιστα, είναι και οι ελάχιστες δυνατές, διότι καμιά τους δεν μπορεί να αποδειχτεί από τις υπόλοιπες. Μπορούν, λοιπόν, οι ιδιότητες αυτές να παίξουν τον ρόλο "αξιωμάτων" σε ένα πλαίσιο στο οποίο το σύνολο $\mathbb{R}$ θα θεωρηθεί δεδομένο, ακριβώς όπως τα αξιώματα του Peano είναι τα αξιώματα στο πλαίσιο στο οποίο το σύνολο $\mathbb{N}$ θεωρείται δεδομένο. Αυτό ακριβώς είναι τα αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

Θεώρημα 12.7. ***Α. Ιδιότητες πρόσθεσης***. *Σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $x + y$ και ισχύει ότι:*
(i) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,
(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$,
(iii) υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 0 ώστε $x + 0 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
(iv) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $-x$ ώστε $x + (-x) = 0$.
Β. Ιδιότητες πολλαπλασιασμού. *Σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε xy και ισχύει ότι:*
(i) $xy = yx$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,
(ii) $(xy)z = x(yz)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$,
(iii) υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 1, διαφορετικό από τον 0, ώστε $x1 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
(iv) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε x^{-1} ώστε $xx^{-1} = 1$.
Γ. Επιμεριστική ιδιότητα. *$x(y + z) = xy + xz$ για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.*
Δ. Ιδιότητες διάταξης. *Υπάρχει ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $\mathbb{R}_+$ ώστε*
(i) $x + y \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$,
(ii) $xy \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$,
(iii) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα από τα $x = 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, $-x \in \mathbb{R}_+$ είναι σωστό.
Ε. Ιδιότητα συνέχειας. *Για κάθε δυο μη-κενά υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$, υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.*

Επειδή το $\mathbb{R}$ έχει τις ιδιότητες πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού καθώς και την επιμεριστική ιδιότητα, χαρακτηρίζεται **σώμα**. Επειδή το $\mathbb{R}$ έχει και τις ιδιότητες διάταξης, χαρακτηρίζεται **διατεταγμένο**

σώμα. Τέλος, επειδή το $\mathbb{R}$ έχει και την ιδιότητα συνέχειας, χαρακτηρίζεται **πλήρες διατεταγμένο σώμα**.

12.5 Εναλλακτικές μέθοδοι.

Στην υποενότητα 12.3 περιγράψαμε έναν τρόπο ορισμού των θετικών πραγματικών θεωρώντας γνωστούς τους θετικούς ρητούς (τους οποίους είχαμε ορίσει στην ενότητα 12.2 θεωρώντας γνωστούς τους φυσικούς από την ενότητα 12.1). Η μέθοδος που εφαρμόσαμε είναι η μέθοδος των **τομών Dedekind**.

Κάθε μέθοδος ορισμού των θετικών πραγματικών έχει τα εξής βασικά "συστατικά". Κατ' αρχάς ορίζονται τα "αντικείμενα" τα οποία χαρακτηρίζονται *θετικοί πραγματικοί*. Κατόπιν καθορίζεται μια **σχέση διάταξης** στο σύνολο των θετικών πραγματικών: καθορίζεται, δηλαδή, τι σημαίνει να είναι ένας θετικός πραγματικός *μεγαλύτερος* (ή *μικρότερος*) από έναν άλλον. Μετά ορίζεται η πράξη **πρόσθεση**: περιγράφεται διαδικασία σχηματισμού του *αθροίσματος* δυο θετικών πραγματικών. Τέλος, ορίζεται η πράξη **πολλαπλασιασμός**: περιγράφεται διαδικασία σχηματισμού του *γινομένου* δυο θετικών πραγματικών.

Αφού οριστεί η διάταξη και οι δυο πράξεις στο σύνολο των θετικών πραγματικών, απομένει να αποδειχτούν όλες οι γνωστές ιδιότητες: οι ιδιότητες πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, επιμερισμού, διάταξης και, κυρίως, η ιδιότητα συνέχειας.

Τέλος, από το σύνολο των θετικών πραγματικών ορίζεται το σύνολο των πραγματικών με τη διαδικασία της ενότητας 12.4.

Θα περιγράψουμε, τώρα, πολύ συνοπτικά, δυο εναλλακτικές μεθόδους ορισμού των θετικών πραγματικών θεωρώντας, πάντοτε, γνωστούς τους θετικούς ρητούς. Θα αποφύγουμε τις αποδείξεις, περιοριζόμενοι στην περιγραφή των εννοιών.

12.5.1 Η μέθοδος με τις ακολουθίες Cauchy.

Μια ακολουθία (r_n) στο $\mathbb{Q}_+$ χαρακτηρίζεται **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $|r_n - r_m| < \varepsilon$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$.

Λέμε ότι δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$ είναι **ισοδύναμες** και γράφουμε $(r_n) \sim (s_n)$ αν $\lim_{n\to+\infty}(r_n - s_n) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $|r_n - s_n| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση αυτή είναι *σχέση ισοδυναμίας* ανάμεσα στις ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$. Έτσι το σύνολο των ακολουθιών Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ διαμερίζεται σε *κλάσεις ισοδυναμίας*: δυο ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ οι οποίες είναι ισοδύναμες ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας και δυο ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ οι οποίες δεν είναι ισοδύναμες ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ισοδυναμίας θα την ονομάζουμε **θετικό πραγματικό** και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των θετικών πραγματικών, θα το συμβολίζουμε $\mathbb{R}_+$.

Έστω δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$. Λέμε ότι η (r_n) είναι **μεγαλύτερη από** την (s_n) ή, ισοδύναμα, ότι η (s_n) είναι **μικρότερη από** την (r_n) και συμβολίζουμε $(r_n) \succ (s_n)$ ή, ισοδύναμα, $(s_n) \prec (r_n)$ αν υπάρχουν $\delta \in \mathbb{Q}_+$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $r_n - s_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Αποδεικνύεται ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ και $(r_n) \succ (s_n)$, $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(t_n) \succ (u_n)$. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (r_n) του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, $y < x$ αν είναι $(r_n) \succ (s_n)$ ή, ισοδύναμα, $(s_n) \prec (r_n)$.

Έστω δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $(r_n + s_n)$ στο $\mathbb{Q}_+$

είναι ακολουθία Cauchy. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ και $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(r_n + s_n) \sim (t_n + u_n)$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (r_n) του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Ορίζουμε $x + y \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $(r_n + s_n)$.

Τέλος, έστω δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $(r_n s_n)$ στο $\mathbb{Q}_+$ είναι ακολουθία Cauchy και, επίσης, ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ και $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(r_n s_n) \sim (t_n u_n)$. Άρα μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (r_n) του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Ορίζουμε $xy \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $(r_n s_n)$.

Αφού ορίσαμε τη σχέση διάταξης, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο $\mathbb{R}_+$, αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathbb{R}_+$ έχει όλες τις ιδιότητες οι οποίες περιγράφονται στην ενότητα 3, συμπεριλαμβανομένης της Ιδιότητας Συνέχειας.

Θα πρέπει να αναφέρουμε μια παραλλαγή αυτής της μεθόδου, όπου αντί για ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ χρησιμοποιούνται αύξουσες, άνω φραγμένες ακολουθίες στο $\mathbb{Q}_+$.

12.5.2 Η μέθοδος με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα.

Μια ακολουθία διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ θα λέμε ότι είναι **σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων** στο $\mathbb{Q}_+$ αν η (r_n) είναι αύξουσα στο $\mathbb{Q}_+$ και η (r_n') είναι φθίνουσα στο $\mathbb{Q}_+$ και $\lim_{n\to+\infty}(r_n' - r_n) = 0$.

Λέμε ότι δυο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$ είναι **ισοδύναμες** και γράφουμε $([r_n, r_n']) \sim ([s_n, s_n'])$ αν $\lim_{n\to+\infty}(r_n - s_n) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\lim_{n\to+\infty}(r_n' - s_n') = 0$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση αυτή είναι *σχέση ισοδυναμίας* ανάμεσα στις σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$. Έτσι το σύνολο των σημειακών ακολουθιών εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ διαμερίζεται σε *κλάσεις ισοδυναμίας*. Κάθε τέτοια κλάση ισοδυναμίας θα την ονομάζουμε **θετικό πραγματικό** και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των θετικών πραγματικών, θα το συμβολίζουμε $\mathbb{R}_+$.

Έστω δυο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$. Λέμε ότι η $([r_n, r_n'])$ είναι **μεγαλύτερη από** την $([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, ότι η $([s_n, s_n'])$ είναι **μικρότερη από** την $([r_n, r_n'])$ και συμβολίζουμε $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, $([s_n, s_n']) \prec ([r_n, r_n'])$ αν υπάρχουν $\delta \in \mathbb{Q}_+$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $r_n - s_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Αποδεικνύεται ότι, αν οι $([r_n, r_n'])$, $([s_n, s_n'])$, $([t_n, t_n'])$, $([u_n, u_n'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ και $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$, $([r_n, r_n']) \sim ([t_n, t_n'])$, $([s_n, s_n']) \sim ([u_n, u_n'])$, τότε $([t_n, t_n']) \succ ([u_n, u_n'])$. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, r_n'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, s_n'])$ του y. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, $y < x$ αν είναι $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, $([s_n, s_n']) \prec ([r_n, r_n'])$.

Έστω δυο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $([r_n + s_n, r_n' + s_n'])$ είναι σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι $([r_n, r_n'])$, $([s_n, s_n'])$, $([t_n, t_n'])$, $([u_n, u_n'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ και $([r_n, r_n']) \sim ([t_n, t_n'])$, $([s_n, s_n']) \sim ([u_n, u_n'])$, τότε $([r_n + s_n, r_n' + s_n']) \sim ([t_n + u_n, t_n' + u_n'])$. Μπορούμε, επομένως, να ορίσουμε τα εξής. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, r_n'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, s_n'])$ του y. Ορίζουμε $x + y \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $([r_n + s_n, r_n' + s_n'])$.

Τέλος, έστω σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$.

Αποδεικνύεται ότι η $([r_n s_n, {r_n}' {s_n}'])$ είναι σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι $([r_n, {r_n}'])$, $([s_n, {s_n}'])$, $([t_n, {t_n}'])$, $([u_n, {u_n}'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ και $([r_n, {r_n}']) \sim ([t_n, {t_n}'])$, $([s_n, {s_n}']) \sim ([u_n, {u_n}'])$, τότε $([r_n s_n, {r_n}' {s_n}']) \sim ([t_n u_n, {t_n}' {u_n}'])$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, {r_n}'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, {s_n}'])$ του y. Ορίζουμε $xy \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $([r_n s_n, {r_n}' {s_n}'])$.

Κατόπιν, μπορεί να αποδειχτεί ότι το σύνολο $\mathbb{R}_+$ έχει όλες τις ιδιότητες οι οποίες περιγράφονται στην ενότητα 3, συμπεριλαμβανομένης της Ιδιότητας Συνέχειας.

12.6 Η "αντίστροφη" θεμελίωση: από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{N}$.

12.6.1 Αξιώματα στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε δεδομένο ένα σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε $\mathbb{R}$ και του οποίου τα στοιχεία ονομάζουμε **πραγματικούς**. Το σύνολο $\mathbb{R}$ έχει τις εξής πρωταρχικές ιδιότητες, οι οποίες δεν αποδεικνύονται και γι αυτό ονομάζονται **αξιώματα**, και από τις οποίες αποδεικνύονται (σύμφωνα με τους στοιχειώδεις κανόνες της λογικής) όλες οι άλλες ιδιότητες του $\mathbb{R}$.

Α. Αξίωμα πρόσθεσης. Σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $x + y$ και ισχύει ότι:
(i) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,
(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$,
(iii) υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 0 ώστε $x + 0 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
(iv) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $-x$ ώστε $x+(-x) = 0$.

Β. Αξίωμα πολλαπλασιασμού. Σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε xy και ισχύει ότι:
(i) $xy = yx$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,
(ii) $(xy)z = x(yz)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$,
(iii) υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 1, διαφορετικό από τον 0, ώστε $x1 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
(iv) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε x^{-1} ώστε $xx^{-1} = 1$.

Γ. Αξίωμα επιμερισμού. $x(y + z) = xy + xz$ για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Δ. Αξίωμα διάταξης. Υπάρχει ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $\mathbb{R}_+$ ώστε
(i) $x + y \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$,
(ii) $xy \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$,
(iii) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα από τα $x = 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, $-x \in \mathbb{R}_+$ είναι σωστό.

Ε. Αξίωμα συνέχειας. Για κάθε δυο μη-κενά υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$, υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

Ορισμός. Ο $x + y$ ονομάζεται **άθροισμα** των x, y και η πράξη η οποία σε κάθε x, y αντιστοιχίζει τον $x + y$ ονομάζεται **πρόσθεση** στο $\mathbb{R}$. Ο xy ονομάζεται **γινόμενο** των x, y και η πράξη η οποία σε κάθε x, y αντιστοιχίζει τον xy ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbb{R}$. Το στοιχείο 0 ονομάζεται **μηδέν** ή **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης** και το στοιχείο 1 ονομάζεται **ένα** ή **μονάδα** ή **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**.

Από τα προηγούμενα, είναι $0 + x = x$ και $(-x) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, $1x = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x^{-1}x = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

Λόγω των αντιμεταθετικών και προσεταιριστικών ιδιοτήτων μπορούμε να παραλείπουμε παρενθέσεις κατά τη διαδοχική εκτέλεση προσθέσεων ή κατά τη διαδοχική εκτέλεση πολλαπλασιασμών καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης προσθέσεων ή τη σειρά εκτέλεσης πολλαπλασιασμών.

Στη συνέχεια θα δούμε πώς, από τα αξιώματα, αποδεικνύονται διάφορες γνωστές ιδιότητες του $\mathbb{R}$. Τις ιδιότητες αυτές έχουμε μάθει να τις χρησιμοποιούμε σε διάφορες πράξεις και ανισότητες αλγεβρικού τύπου και είναι όλες γνωστές από το γυμνάσιο και το λύκειο. *Τα αξιώματα τα οποία χρησιμοποιούνται για τις αποδείξεις των "αλγεβρικών" ιδιοτήτων είναι τα αξιώματα πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, επιμερισμού και διάταξης. Με τις συνέπειες του αξιώματος συνέχειας ασχοληθήκαμε στα κεφάλαια 1 - 11.*

12.6.2 Αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 12.95. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}$ ώστε $z + x = y$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $z = y + (-x)$ και τότε $z + x = y + (-x) + x = y + 0 = y$.
Έστω $z \in \mathbb{R}$ ώστε $z + x = y$. Τότε $z = z + 0 = z + x + (-x) = y + (-x)$. □

Ορισμός. Η λύση $z = y + (-x)$ της $z + x = y$ συμβολίζεται $y - x$ και ονομάζεται **διαφορά** των y, x. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζει τον $y - x$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 12.96. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}$ ώστε $zx = y$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $z = yx^{-1}$ και τότε $zx = yx^{-1}x = y1 = y$.
Έστω $z \in \mathbb{R}$ ώστε $zx = y$. Τότε $z = z1 = zxx^{-1} = yx^{-1}$. □

Ορισμός. Η λύση $z = yx^{-1}$ της $zx = y$ συμβολίζεται $\frac{y}{x}$ και ονομάζεται **λόγος** των y, x. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ αντιστοιχίζει τον $\frac{y}{x}$ ονομάζεται **διαίρεση** στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 12.97. *(1) Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι μοναδικό.*
(2) Το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι μοναδικό.
(3) Ο αντίθετος καθενός $x \in \mathbb{R}$ είναι μοναδικός.
(4) Ο αντίστροφος καθενός $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ είναι μοναδικός.

Απόδειξη. (1) Έστω 0, $0'$ δυο ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης. Τότε $0 = 0 + 0' = 0'$.
(2) Έστω 1, $1'$ δυο ουδέτερα στοιχεία του πολλαπλασιασμού. Τότε $1 = 11' = 1'$.
(3) Έστω $x \in \mathbb{R}$ και y, y' δυο αντίθετοι του x. Τότε $y = y + 0 = y + x + y' = 0 + y' = y'$.
(4) Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ και y, y' δυο αντίστροφοι του x. Τότε $y = y1 = yxy' = 1y' = y'$. □

Πρόταση 12.98. *(1) $-0 = 0$, $1^{-1} = 1$.*
(2) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-(-x) = x$.
(3) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $-(x + y) = -x - y$ και $-(x - y) = -x + y$.
(4) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $xy = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$ ή $y = 0$.
(5) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $(-x)y = x(-y) = -xy$ και $(-x)(-y) = xy$.
(6) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ είναι $x^{-1} \neq 0$ και $(x^{-1})^{-1} = x$.

Απόδειξη. (1) $-0 = (-0) + 0 = (-0) + 0 + 0 = 0 + 0 = 0$. Ομοίως, $1^{-1} = 1^{-1}1 = 1^{-1}11 = 11 = 1$.
(2) $-(-x) = (-(-x)) + 0 = (-(-x)) + (-x) + x = 0 + x = x$.
(3) $-(x + y) = (-(x + y)) + 0 = (-(x + y)) + 0 + 0 = (-(x + y)) + x + (-x) + y + (-y) = (-(x + y)) + (x + y) + (-x) + (-y) = 0 + (-x) + (-y) = -x - y$. Από αυτό, $-(x - y) = -(x + (-y)) = -x - (-y) = -x + y$.
(4) $0y + 0y = (0 + 0)y = 0y$. Άρα $0y = 0y + 0y + (-0y) = 0y + (-0y) = 0$. Ομοίως, $0x = 0$.

Αντιστρόφως, έστω $xy = 0$. Αν $x \neq 0$, τότε $y = 1y = x^{-1}xy = x^{-1}0 = 0$.
(5) $(-x)y = (-x)y + xy + (-xy) = ((-x) + x)y + (-xy) = 0y + (-xy) = 0 + (-xy) = -xy$. Ομοίως, $x(-y) = -xy$. Τέλος, $(-x)(-y) = -x(-y) = -(-xy) = xy$.
(6) Έστω $x \neq 0$. Τότε $xx^{-1} = 1 \neq 0$, οπότε $x^{-1} \neq 0$. Επίσης, $(x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1}1 = (x^{-1})^{-1}x^{-1}x = 1x = x$. □

Ορισμός. Αν $x \in \mathbb{R}_+$, ο x χαρακτηρίζεται **θετικός**. Αν $-x \in \mathbb{R}_+$, ο x χαρακτηρίζεται **αρνητικός**. Συμβολίζουμε $\mathbb{R}_-$ το σύνολο όλων των αρνητικών: $\mathbb{R}_- = \{x \mid -x \in \mathbb{R}_+\}$. Από το αξίωμα διάταξης συνεπάγεται ότι τα σύνολα $\mathbb{R}_-$, $\{0\}$ και $\mathbb{R}_+$ είναι ξένα ανά δύο - και, ειδικώτερα, ο 0 δεν είναι ούτε αρνητικός ούτε θετικός - και ότι $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

Πρόταση 12.99. *(1) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ είναι $xx \in \mathbb{R}_+$.*
(2) $1 \in \mathbb{R}_+$ και $-1 \in \mathbb{R}_-$.

Απόδειξη. (1) Έστω $x \neq 0$. Αν $x \in \mathbb{R}_+$, τότε $xx \in \mathbb{R}_+$. Αν $x \in \mathbb{R}_-$, τότε $-x \in \mathbb{R}_+$, οπότε $xx = (-x)(-x) \in \mathbb{R}_+$. Επομένως, σε κάθε περίπτωση, είναι $xx \in \mathbb{R}_+$.
(2) Επειδή $1 \neq 0$, συνεπάγεται $1 = 11 \in \mathbb{R}_+$. Τώρα, επειδή $-(-1) = 1 \in \mathbb{R}_+$, είναι $-1 \in \mathbb{R}_-$. □

Ορισμός. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και γράφουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, $y < x$ αν $x - y \in \mathbb{R}_+$ ή, ισοδύναμα, αν $y - x \in \mathbb{R}_-$.
Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον x και γράφουμε $x \geq y$ ή, ισοδύναμα, $y \leq x$ αν $x > y$ ή $x = y$ ή, ισοδύναμα, αν $y < x$ ή $y = x$.

Πρόταση 12.100. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Ο x είναι θετικός αν και μόνο αν $x \in \mathbb{R}_+$ αν και μόνο αν $x > 0$. Επίσης, ο x είναι αρνητικός αν και μόνο αν $x \in \mathbb{R}_-$ αν και μόνο αν $x < 0$.*

Απόδειξη. Προφανής από τους ορισμούς. □

Πρόταση 12.101. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: $x = y$, $x > y$, $x < y$.*

Απόδειξη. Τα $x = y$, $x > y$, $x < y$ είναι ισοδύναμα, αντιστοίχως, με τα $x - y = 0$, $x - y \in \mathbb{R}_+$, $-(x - y) \in \mathbb{R}_+$. □

Πρόταση 12.102. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$.*
(1) Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.
(2) Αν $x \leq y$ και $y < z$ ή αν $x < y$ και $y \leq z$, τότε $x < z$.
(3) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.

Απόδειξη. (1) Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $y - x \in \mathbb{R}_+$ και $z - y \in \mathbb{R}_+$, οπότε $z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbb{R}_+$ και, επομένως, $x < z$.
(2), (3) Προφανή από το (1). □

Πρόταση 12.103. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$. Είναι $x < y$ αν και μόνο αν $x + z < y + z$. Επίσης, είναι $x = y$ αν και μόνο αν $x + z = y + z$.*

Απόδειξη. Αν $x < y$, τότε $y - x \in \mathbb{R}_+$, οπότε $(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}_+$ και, επομένως, $x + z < y + z$. Από αυτό, αν $x + z < y + z$, τότε $x = x + z + (-z) < y + z + (-z) = y$.
Αν $x = y$, τότε, προφανώς, $x + z = y + z$. Από αυτό, αν $x + z = y + z$, τότε $x = x + z + (-z) = y + z + (-z) = y$. □

Πρόταση 12.104. *Έστω $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.*
(1) Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x + z < y + w$.
(2) Αν $x \leq y$ και $z < w$ ή αν $x < y$ και $z \leq w$, τότε $x + z < y + w$.
(3) Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $x + z \leq y + w$.

Απόδειξη. (1) Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x + z < y + z < y + w$.
(2), (3) Προφανή από το (1). □

Πρόταση 12.105. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $x, y > 0$ ή $x, y < 0$, τότε $xy > 0$. Αν $x > 0$, $y < 0$ ή $x < 0$, $y > 0$, τότε $xy < 0$.*

Απόδειξη. Αν $x, y > 0$, τότε $x, y \in \mathbb{R}_+$, οπότε $xy \in \mathbb{R}_+$ και, επομένως, $xy > 0$. Από αυτό, αν $x, y < 0$, τότε $-x, -y > 0$, οπότε $xy = (-x)(-y) > 0$. Τέλος, αν $x > 0$, $y < 0$, τότε $x > 0$, $-y > 0$, οπότε $-xy = x(-y) > 0$ και, επομένως, $xy < 0$. Ομοίως, αν $x < 0$, $y > 0$, τότε $xy < 0$. □

Πρόταση 12.106. *Αν $x > 0$, τότε $x^{-1} > 0$. Επίσης, αν $x < 0$, τότε $x^{-1} < 0$.*

Απόδειξη. Έστω $x > 0$. Αν $x^{-1} < 0$, τότε $1 = xx^{-1} < 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x^{-1} > 0$. Το δεύτερο μέρος είναι παρόμοιο. □

Πρόταση 12.107. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$. Αν $z > 0$, τότε είναι $x > y$ αν και μόνο αν $xz > yz$. Αν $z < 0$, τότε είναι $x > y$ αν και μόνο αν $xz < yz$.*

Απόδειξη. Έστω $z > 0$. Αν $x > y$, τότε $x - y > 0$, οπότε $xz - yz = (x - y)z > 0$ και, επομένως, $xz > yz$. Αντιστρόφως, αν $xz > yz$, τότε, επειδή $z^{-1} > 0$, είναι $x = xzz^{-1} > yzz^{-1} = y$.
Το δεύτερο μέρος είναι παρόμοιο. □

Πρόταση 12.108. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $x > y > 0$ ή $x < y < 0$ αν και μόνο αν, αντιστοίχως, $y^{-1} > x^{-1} > 0$ ή $y^{-1} < x^{-1} < 0$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την $y^{-1} - x^{-1} = (x - y)x^{-1}y^{-1}$. □

Ορισμός. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την **απόλυτη τιμή** του x και την συμβολίζουμε $|x|$ ως τον

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Πρόταση 12.109. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}$.*
(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| > 0$ αν και μόνο αν $x \neq 0$. Επίσης, $|x| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.
(3) $|xy| = |x||y|$ και $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
(4) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

Απόδειξη. Τα (1), (2) είναι άμεσα από τον ορισμό της απόλυτης τιμής.
(3) Διακρίνουμε περιπτώσεις: (i) $x, y \geq 0$, (ii) $x, y < 0$, (iii) $x \geq 0$, $y < 0$ και (iv) $x < 0$ και $y \geq 0$.
(4) Αν $x, y \geq 0$, τότε $x + y \geq 0$, οπότε $|x + y| = x + y = |x| + |y|$. Αν $x, y < 0$, τότε $x + y < 0$, οπότε $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|$. Αν $x \geq 0$, $y < 0$ και $x + y \geq 0$, τότε $|x + y| = x + y = |x| - |y| \leq |x| + |y|$. Αν $x \geq 0$, $y < 0$ και $x + y < 0$, τότε $|x + y| = -(x + y) = -|x| + |y| \leq |x| + |y|$. Η περίπτωση $x < 0$, $y \geq 0$ είναι παρόμοια. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $|x + y| \leq |x| + |y|$. Επίσης, $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$. Τώρα, $|x| = |x + y + (-y)| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|$, οπότε $|x| - |y| \leq |x + y|$. Άρα $|y| - |x| \leq |x + y|$. Άρα $||x| - |y|| \leq |x + y|$. Τέλος, $||x| - |y|| = ||x| - |-y|| \leq |x + (-y)| = |x - y|$. □

12.6.3 Φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί.

Ορισμός. Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **επαγωγικό** αν έχει τις ιδιότητες: (i) $1 \in A$ και (ii) αν $x \in A$, τότε $x+1 \in A$.

Παραδείγματα. (1) Το $\mathbb{R}$ είναι επαγωγικό σύνολο διότι, προφανώς, έχει τις ιδιότητες (i), (ii).
(2) Το $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1\}$ είναι επαγωγικό. Πράγματι, $1 \in A$ και, αν $x \in A$, τότε $x \geq 1$, οπότε $x+1 \geq 1$ και, επομένως, $x+1 \in A$.
(3) Το $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 1$ ή $x \geq 1+1\}$ είναι επαγωγικό. Πράγματι, $1 \in A$ και, αν $x \in A$, τότε $x \geq 1$, οπότε $x+1 \geq 1+1$ και, επομένως, $x+1 \in A$.
(4) Το $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1+1\}$ δεν είναι επαγωγικό, διότι $1 \notin A$.
(5) Το $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1\}$ δεν είναι επαγωγικό. Το A έχει την ιδιότητα (i), διότι $1 \in A$. Όμως, δεν έχει την ιδιότητα (ii), διότι υπάρχει κάποιος $x \in A$ ώστε να μην ισχύει $x+1 \in A$. Πράγματι, $1 \in A$ αλλά $1+1 > 1$, οπότε $1+1 \notin A$.

Ορισμός. Ο $n \in \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **φυσικός** αν ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο. Το σύνολο όλων των φυσικών συμβολίζεται $\mathbb{N}$. Δηλαδή

$$\mathbb{N} = \{n \,|\, n \text{ είναι φυσικός}\} = \{n \,|\, n \text{ ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο}\}.$$

Πρόταση 12.110. *Το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό σύνολο και είναι υποσύνολο κάθε επαγωγικού συνόλου.*

Απόδειξη. $1 \in \mathbb{N}$, διότι ο 1 ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο. Κατόπιν, έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε ο n ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο, οπότε και ο $n+1$ ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο. Άρα $n+1 \in \mathbb{N}$.
Άρα το $\mathbb{N}$ έχει τις ιδιότητες $(i), (ii)$ των επαγωγικών συνόλων, οπότε είναι επαγωγικό σύνολο. Τέλος, από τον ορισμό του $\mathbb{N}$ συνεπάγεται ότι είναι υποσύνολο κάθε επαγωγικού συνόλου. $\square$

Η Πρόταση 12.110 αναδιατυπώνεται ως εξής: *το $\mathbb{N}$ είναι το μικρότερο επαγωγικό σύνολο.*

Πρόταση 12.111. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $n \geq 1$.*

Απόδειξη. Έχουμε δει ότι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1\}$ είναι επαγωγικό. Άρα $\mathbb{N} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1\}$ και, επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $n \geq 1$. $\square$

Πρόταση 12.112. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ είναι $n-1 \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 1$ ή $x - 1 \in \mathbb{N}\}$.
Είναι προφανές ότι $1 \in A$.
Τώρα, έστω $x \in A$. Αν $x = 1$, τότε $x+1 = 1+1$, οπότε $(x+1)-1 = 1 \in \mathbb{N}$ και, επομένως, $x+1 \in A$. Αν $x \neq 1$, τότε $x-1 \in \mathbb{N}$, οπότε $(x+1)-1 = x = (x-1)+1 \in \mathbb{N}$ και, επομένως, $x+1 \in A$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, $x+1 \in A$.
Άρα το A είναι επαγωγικό σύνολο, οπότε $\mathbb{N} \subseteq A$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $n \neq 1$ ή $n-1 \in \mathbb{N}$. $\square$

Ορισμός. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο $n+1$ χαρακτηρίζεται **επόμενος** του n και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ ο $n-1$ χαρακτηρίζεται **προηγούμενος** του n.

Προφανώς, ο 1 δεν έχει προηγούμενο στο $\mathbb{N}$.

Αρχή της Επαγωγής. *Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες: (i) $1 \in A$ και (ii) αν $x \in A$, τότε $x+1 \in A$. Τότε $A = \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Το A με τις ιδιότητες (i), (ii) είναι επαγωγικό σύνολο. Άρα $\mathbb{N} \subseteq A$. Επειδή $A \subseteq \mathbb{N}$, είναι $A = \mathbb{N}$. $\square$

Η Αρχή της Επαγωγής παρουσιάζεται, συνήθως, στην εξής μορφή. Έστω $\Pi(n)$ μια πρόταση στην διατύπωση της οποίας περιλαμβάνεται μια μεταβλητή n η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο $\mathbb{N}$ και έστω ότι *για κάθε τιμή του n στο $\mathbb{N}$ η αντίστοιχη πρόταση $\Pi(n)$ είναι είτε αληθής είτε ψευδής*. Υποθέτουμε ότι η $\Pi(n)$ έχει τις εξής δυο ιδιότητες: (i) *η $\Pi(1)$ είναι αληθής και* (ii) *αν η $\Pi(n)$ είναι αληθής, τότε και η $\Pi(n+1)$ είναι αληθής*. Τότε ορίζουμε το **σύνολο αλήθειας** της $\Pi(n)$, δηλαδή το $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \text{η } \Pi(n) \text{ είναι αληθής}\}$. Τότε η υπόθεσή μας "μεταφράζεται" ως εξής: (i) $1 \in A$ και (ii) αν $n \in A$, τότε $n+1 \in A$. Άρα, σύμφωνα με την Αρχή της Επαγωγής, $A = \mathbb{N}$, δηλαδή το σύνολο αλήθειας της $\Pi(n)$ είναι το $\mathbb{N}$ ή, ισοδύναμα, η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 12.113. *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Αν $m > n$, τότε $m \geq n+1$.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την $\Pi(n)$: "αν $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, τότε $m \geq n+1$".
Η $\Pi(1)$ είναι η "αν $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, τότε $m \geq 1+1$" και θα δούμε ότι είναι αληθής. Έστω $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Τότε $m-1 \in \mathbb{N}$, οπότε $m-1 \geq 1$ και, επομένως, $m \geq 1+1$. Άρα η $\Pi(1)$ είναι αληθής.
Έστω, τώρα, ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής. Δηλαδή, *υποθέτουμε* ότι αν $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, τότε $m \geq n+1$.
Η $\Pi(n+1)$ είναι η "αν $m \in \mathbb{N}$, $m > n+1$, τότε $m \geq (n+1)+1$" και θα δούμε ότι είναι αληθής. Έστω $m \in \mathbb{N}$, $m > n+1$. Τότε $m \neq 1$, οπότε $m-1 \in \mathbb{N}$. Επίσης, $m-1 > n$. Βάσει της υπόθεσής μας για την $\Pi(n)$, συνεπάγεται $m-1 > n+1$ και, επομένως, $m > (n+1)+1$. Άρα η $\Pi(n+1)$ είναι αληθής.
Σύμφωνα με την Αρχή της Επαγωγής, η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ είναι $m \geq n+1$. ☐

Η Πρόταση 12.113 λέει ότι: *για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δεν υπάρχει κανένας φυσικός ανάμεσα στους n, $n+1$.*

Πρόταση 12.114. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ είναι $n+m, nm \in \mathbb{N}$. Αν, επιπλέον, $n < m$, τότε είναι $m-n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. (1) Έστω $m \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την $\Pi(n)$: "$n+m \in \mathbb{N}$".
Η $\Pi(1)$ είναι η "$1+m \in \mathbb{N}$" και είναι αληθής διότι $m \in \mathbb{N}$.
Έστω ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής. Δηλαδή, *υποθέτουμε* ότι $n+m \in \mathbb{N}$.
Η $\Pi(n+1)$ είναι η "$(n+1)+m \in \mathbb{N}$". Επειδή υποθέσαμε ότι $n+m \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $(n+1)+m = (n+m)+1 \in \mathbb{N}$ και, επομένως, η $\Pi(n+1)$ είναι αληθής.
Άρα η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $n+m \in \mathbb{N}$.
(2) Έστω $m \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την $\Pi(n)$: "$nm \in \mathbb{N}$".
Η $\Pi(1)$ είναι η "$1m \in \mathbb{N}$" και είναι αληθής διότι $m \in \mathbb{N}$.
Έστω ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής. Δηλαδή, *υποθέτουμε* ότι $nm \in \mathbb{N}$.
Η $\Pi(n+1)$ είναι η "$(n+1)m \in \mathbb{N}$". Επειδή υποθέσαμε ότι $nm \in \mathbb{N}$, από το πρώτο μέρος (1) συνεπάγεται $(n+1)m = nm+n \in \mathbb{N}$ και, επομένως, η $\Pi(n+1)$ είναι αληθής.
Άρα η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $nm \in \mathbb{N}$.
(3) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την $\Pi(n)$: "αν $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, τότε $m-n \in \mathbb{N}$".
Η $\Pi(1)$ είναι η "αν $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, τότε $m-1 \in \mathbb{N}$" και γνωρίζουμε ότι είναι αληθής.
Έστω, τώρα, ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής. Δηλαδή, *υποθέτουμε* ότι αν $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, τότε $m-n \in \mathbb{N}$.
Η $\Pi(n+1)$ είναι η "αν $m \in \mathbb{N}$, $m > n+1$, τότε $m-(n+1) \in \mathbb{N}$" και θα δούμε ότι είναι αληθής.
Έστω $m \in \mathbb{N}$, $m > n+1$. Τότε $m \neq 1$, οπότε $m-1 \in \mathbb{N}$. Επίσης, $m-1 > n$. Βάσει της υπόθεσής μας για την $\Pi(n)$, συνεπάγεται $(m-1)-n \in \mathbb{N}$ και, επομένως, $m-(n+1) = (m-1)-n \in \mathbb{N}$.
Άρα η $\Pi(n+1)$ είναι αληθής.
Σύμφωνα με την Αρχή της Επαγωγής, η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $m \in \mathbb{N}$, $m > n$ τότε $m-n \in \mathbb{N}$. ☐

Αρχή της Καλής Διάταξης. *Κάθε μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω μη-κενό $A \subseteq \mathbb{N}$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την $\Pi(n)$: "αν $m \in A$, τότε $m \geq n$".
Η $\Pi(1)$ είναι η "αν $m \in A$, τότε $m \geq 1$" και είναι αληθής διότι $A \subseteq \mathbb{N}$.
Επειδή το A δεν είναι κενό, υπάρχει $m_0 \in A$. Τότε η $\Pi(m_0 + 1)$ δεν είναι αληθής.
Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε η $\Pi(n_0)$ να είναι αληθής αλλά η $\Pi(n_0 + 1)$ να είναι ψευδής. Από το πρώτο συνεπάγεται ότι αν $m \in A$, τότε $m \geq n_0$. Από το δεύτερο συνεπάγεται ότι υπάρχει $m \in A$ ώστε $m < n_0 + 1$. Αυτός ο m πρέπει να είναι ο n_0. Δηλαδή, $n_0 \in A$ και αν $m \in A$, τότε $m \geq n_0$.
Άρα ο n_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του A. □

Ορισμός. Ο $n \in \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **ακέραιος** αν ο n είναι φυσικός ή αν ο $-n$ είναι φυσικός ή αν $n = 0$. Συμβολίζουμε $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων.

Είναι σαφές ότι ο n είναι φυσικός αν και μόνο αν είναι θετικός ακέραιος.

Διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς το αν οι ακέραιοι που εμφανίζονται είναι θετικοί (δηλαδή, φυσικοί) ή αρνητικοί ή μηδέν, οι αποδείξεις των επόμενων δυο προτάσεων ανάγονται στις Προτάσεις 12.113 και 12.114. Θα αποφύγουμε τις αποδείξεις.

Πρόταση 12.115. *Έστω $n, m \in \mathbb{Z}$. Αν $m > n$, τότε $m \geq n + 1$.*

Πρόταση 12.116. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$ είναι $n + m, n - m, nm \in \mathbb{Z}$.*

Ορισμός. Ο $r \in \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **ρητός** αν $x = \frac{m}{n}$, όπου $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Το σύνολο των ρητών συμβολίζεται $\mathbb{Q}$. Κάθε $x \in \mathbb{R}$ ο οποίος δεν είναι ρητός χαρακτηρίζεται **άρρητος**.

Πρόταση 12.117. *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}$ είναι $r + s, r - s, rs \in \mathbb{Q}$. Αν, επιπλέον, $s \neq 0$, τότε είναι $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.*

Απόδειξη. Αν $r = \frac{m}{n}$ και $s = \frac{k}{l}$, τότε $r + s = \frac{ml+kn}{nl}$, $r - s = \frac{ml-kn}{nl}$, $rs = \frac{mk}{nl}$ και $\frac{r}{s} = \frac{ml}{nk}$. □

Ευρετήριο