ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Διαγώνισμα Εξεταστικής Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2.5 μονάδες) (*i*) **(Θεωρία)** Έστω (x_n) αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(*ii*) Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί

$$2x_{n+1} \leq x_n + x_{n+2} \ \text{ για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι η ακολουθία $y_n = x_{n+1} - x_n$ συγκλίνει και ότι το όριο της είναι 0.

(**2**) (2.5 μονάδες) (*i*) Έστω $x_n = \sin(n\pi/2)$, $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε (με σύντομη επεξήγηση) τα $\limsup(x_n)$, $\liminf(x_n)$, καθώς και όλα τα υποακολουθιακά όρια της (x_n).

(*ii*) Έστω $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ μία αρίθμηση των ρητών. Δείξτε ότι υπάρχει υποακολουθία (r_{n_k}) της (r_n) τέτοια ώστε $\lim_{k\to+\infty} r_{n_k} = \sqrt{2}$.

(**3**) (2 μονάδες) (*i*) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log(n+1)}.$$

(*ii*) Έστω (x_n) ακολουθία με θετικούς όρους. Δείξτε ότι εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{x_n^2+1}$ συγκλίνει.

(**4**) (2.5 μονάδες) (*i*) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (-1)^{[\frac{1}{x}]} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι *συνεχής* στο 0 και *ασυνεχής* στο 1/2.

(*ii*) Έστω ότι η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί $(f(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι είτε $f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είτε $f(x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**5**) (2 μονάδες) (*i*) Έστω ότι η $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί $|f(x)| \leq x^2$ κοντά στο 0. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(*ii*) Έστω ότι η $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί $f(0) = f'(0) = 0$ και $|f''(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $|f(x)| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
