Ανάλυση

Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στη Μαρία και στα παιδιά μας, Μυρτώ και Δημήτρη.

Προκαταρκτικά.

Το αντικείμενο αυτών των σημειώσεων είναι οι **πραγματικοί αριθμοί** και οι **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής**. Αφού αναφερθούν οι βασικές ιδιότητες των (πραγματικών) αριθμών, δηλαδή η **Ιδιότητα Συνέχειας** και τα πορίσματά της, εισάγονται οι έννοιες του ορίου ακολουθίας και του ορίου συνάρτησης, η έννοια της συνεχούς συνάρτησης και οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Ακολουθεί η μελέτη των σειρών αριθμών, των ακολουθιών συναρτήσεων, των σειρών συναρτήσεων και των γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Οι σημειώσεις τελειώνουν με το ζήτημα της **αξιωματικής θεμελίωσης** των πραγματικών αριθμών.

Το πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Παν/μίου Κρήτης περιλαμβάνει τρία μαθήματα σχετικά με τα παραπάνω θέματα. Το ένα είναι το μάθημα πρώτου εξαμήνου Απειροστικός Λογισμός Ι, ένα «υπολογιστικό» μάθημα με έμφαση στον χειρισμό των ορίων, των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων, και τα άλλα δυο είναι τα μαθήματα τρίτου και τέταρτου εξαμήνου Εισαγωγή στην Ανάλυση Ι και ΙΙ, δυο «θεωρητικά» μαθήματα με έμφαση στη θεμελίωση των εννοιών και στις θεωρητικές αποδείξεις. Οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται στους φοιτητές των δυο τελευταίων μαθημάτων (ενώ οι λιγότερο πρόσφατες σημειώσεις μου με τίτλο *Απειροστικός Λογισμός* απευθύνονται στους φοιτητές του πρώτου μαθήματος).

Το επίπεδο των σημειώσεων *δεν είναι στοιχειώδες*, διότι ασχολούνται με τη βαθύτερη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, την Ιδιότητα Συνέχειας, και αποδεικνύουν όλα τα βασικά αποτελέσματα που στηρίζονται στην ιδιότητα αυτή. Για παράδειγμα, αποδεικνύονται η ύπαρξη ριζών των θετικών αριθμών, το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass για ακολουθίες, τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις, θεμελιώνεται η έννοια του ολοκληρώματος και αποδεικνύεται η ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων.

Το επίπεδο των σημειώσεων *δεν είναι ούτε εύκολο*· οι σημειώσεις είναι αρκετά πυκνογραμμένες και απαιτούν συγκέντρωση και επιμονή. Οι φοιτητές πρέπει να δώσουν μεγάλη έμφαση στην ακριβή διατύπωση των εννοιών, στην κατανόηση και, κυρίως, στην αναπαραγωγή των αποδείξεων των κυριότερων αποτελεσμάτων και, οπωσδήποτε, στη μαθηματικά αυστηρή επίλυση θεωρητικών ασκήσεων.

Θα ήθελα να κάνω κάποια σχόλια για το περιεχόμενο.

1. Η Ιδιότητα Συνέχειας παρουσιάζεται, *κατ΄ αρχάς*, στην απλούστερη – και ισοδύναμη – μορφή της: *αν έχουμε δυο μη κενά υποσύνολα της πραγματικής ευθείας, από τα οποία το ένα βρίσκεται αριστερά του άλλου, τότε υπάρχει κάποιο σημείο της ευθείας ανάμεσα στα δυο αυτά σύνολα.* Ο λόγος είναι ότι αυτή η μορφή είναι πολύ πιο εύληπτη και ψυχολογικά αποδεκτή από φοιτητές χωρίς προηγούμενη εμπειρία σε τέτοιου είδους έννοιες. Σε αυτή τη μορφή της Ιδιότητας Συνέχειας βασίζονται οι αποδείξεις της Αρχιμήδειας Ιδιότητας, της ύπαρξης ριζών, του ορισμού δυνάμεων με άρρητους εκθέτες και λογαρίθμων. Φυσικά, εισάγεται και η έννοια του ελάχι-

στου άνω φράγματος και αποδεικνύεται η ισοδυναμία της Ιδιότητας Συνέχειας με την Ιδιότητα Supremum: *κάθε μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

2. Τονίζεται η έννοια της περιοχής σε σχέση με την έννοια του ορίου ακολουθίας. Επίσης, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις εκφράσεις «από κάποιον n και πέρα» και «για άπειρους n» και στις σχετικές Προτάσεις 2.2, 2.3. Αντιστοίχως, δίνεται έμφαση στις εκφράσεις «κοντά στο ξ» και «σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ» σε σχέση με την έννοια του ορίου συνάρτησης και στις σχετικές Προτάσεις 3.5, 3.6.

3. Οι *αναλυτικοί ορισμοί* των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, μέσω δυναμοσειρών αλλά και μέσω ολοκληρωμάτων, παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 10 και αποδεικνύονται οι γνωστές ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται, όμως, ελεύθερα στα προηγούμενα κεφάλαια ως παραδείγματα.

4. Το ολοκλήρωμα Riemann ορίζεται, κατ΄ αρχάς, μέσω των αθροισμάτων Darboux και βάσει αυτού του ορισμού αποδεικνύονται οι διάφορες ιδιότητές του. Κατόπιν, παρουσιάζεται και ο ορισμός μέσω των αθροισμάτων Riemann και αποδεικνύεται η ισοδυναμία των δυο ορισμών. Παρά το ότι τα αθροίσματα Riemann συνδέονται πιο άμεσα και φυσιολογικά με τις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων, προτάσσω τα αθροίσματα Darboux διότι μου φαίνεται ότι οι αποδείξεις των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος είναι λίγο απλούστερες αν βασιστούν στα αθροίσματα Darboux απ΄ ότι αν βασιστούν στα αθροίσματα Riemann.

5. Στη μελέτη των γενικευμένων ολοκληρωμάτων *με παράμετρο* χρειάζονται μερικές έννοιες σχετικές με συναρτήσεις δυο πραγματικών μεταβλητών. Για παράδειγμα, η έννοια της συνέχειας και της ομοιόμορφης συνέχειας συνάρτησης δυο πραγματικών μεταβλητών και η έννοια της μερικής παραγώγου. Ό,τι χρειάζεται αναπτύσσεται πολύ σύντομα και μόνο για τον επιδιωκόμενο σκοπό (και πρόχειρα, είναι αλήθεια), αλλά αυστηρά.

6. Είναι βέβαιο ότι ο χρόνος δεν επαρκεί για να διδαχτούν όλα τα θέματα τα οποία περιέχονται σ΄ αυτές τις σημειώσεις (όπως είναι βέβαιο ότι πρέπει να γίνει προσεκτική *επιλογή* ποιων, από όσα διδαχτούν, θα γίνουν οι αποδείξεις στον πίνακα). Μάλιστα, μερικά τέτοια θέματα (ζητήματα κυρτών συναρτήσεων, η ανισότητα Jensen, το δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού, το θεώρημα του Riemann για αναδιατάξεις σειρών, το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίου για τα γενικευμένα ολοκληρώματα, η αξιωματική θεμελίωση κλπ) τα συμπεριέλαβα μόνο και μόνο για να τα δει και να τα διαβάσει όποιος φοιτητής δείξει ενδιαφέρον. Προβληματίστηκα για το αν πρέπει να παρουσιαστεί το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας: *μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων συνέχειάς της έχει μηδενικό μέτρο.* Αποφάσισα ότι το κριτήριο αυτό και η απόδειξή του είναι κάπως «εκτός κλίματος» και δεν το συμπεριέλαβα.

7. Τέλος, στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται λεπτομερώς η *αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών θεωρώντας δεδομένους τους φυσικούς και τα Αξιώματα του Peano.* Αυτή είναι, κατά τη γνώμη μου, η φυσιολογική μέθοδος. Η παρουσίαση βασίζεται στο βιβλίο Foundations of Analysis του E. Landau με

πολλές δικές μου παρεμβάσεις και προσαρμογές. Η μετάβαση από τους (θετικούς) ρητούς στους (θετικούς) πραγματικούς γίνεται με τη μέθοδο των *τομών του Dedekind.* Παρουσιάζονται, όμως, και οι μέθοδοι των ακολουθιών Cauchy και των εγκιβωτισμένων διαστημάτων, αλλά συνοπτικά και χωρίς αποδείξεις.

Παρουσιάζεται, λεπτομερώς, και η αντίστροφη μέθοδος: ξεκινώντας με τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών, αποδεικνύονται οι βασικές αλγεβρικές ιδιότητές τους και ορίζεται το σύνολο των φυσικών ως *το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο* πραγματικών αριθμών.

Τα παρακάτω βιβλία διαμόρφωσαν, άλλο λιγότερο και άλλο περισσότερο, την άποψή μου για τα θέματα αυτών των σημειώσεων και κατ΄ επέκταση τη μορφή που αυτά πήραν σ΄ αυτές τις σημειώσεις:

Mathematical Analysis, T. Apostol.

Differential and Integral Calculus, R. Courant.

Foundations of Analysis, E. Landau.

Principles of Mathematical Analysis, W. Rudin.

The Theory of Functions, E. C. Titchmarsh.

Από την άλλη μεριά, υπάρχουν αρκετά άλλα πάρα πολύ καλά βιβλία με παρόμοιο περιεχόμενο, όπως το

Introduction to Calculus and Analysis, R. Courant - F. John.

και, από τα ελληνικά, τα

Απειροστικός Λογισμός, Α. Γιαννόπουλος (http://users.uoa.gr/∼apgiannop/).

Απειροστικός Λογισμός, Σ. Νεγρεπόντης - Ε. Γιαννακούλιας - Σ. Γιωτόπουλος.

Για να πάρουν την παρούσα μορφή τους οι σημειώσεις αυτές έχουν γραφτεί (με το χέρι και με τον υπολογιστή), διορθωθεί και ξαναδιορθωθεί άπειρες φορές και συμπυκνώνουν εξαιρετικά πολύ κόπο. Επειδή, όμως, είναι σαφές ότι κι αυτή η μορφή απέχει αρκετά από το να είναι βέλτιστη, είναι απείρως ευπρόσδεκτες οποιεσδήποτε επισημάνσεις λαθών αλλά και παρατηρήσεις ως προς το στυλ παρουσίασης ή την επιλογή των θεμάτων.

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης

Φεβρουάριος 2010.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι πραγματικοί αριθμοί.

1.1 Το $\overline{\mathbf{R}}$.

Το σύνολο των (πραγματικών) αριθμών το συμβολίζουμε $\mathbf{R}$. Τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών τα συμβολίζουμε, αντιστοίχως, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ και $\mathbf{Q}$. Όλοι οι αριθμοί που θα συναντήσουμε είναι πραγματικοί αριθμοί και όλα τα σύνολα είναι υποσύνολα του $\mathbf{R}$. Επομένως, όταν λέμε «αριθμός» ή «σύνολο» θα εννοούμε «πραγματικός αριθμός» ή «υποσύνολο του $\mathbf{R}$», αντιστοίχως.

Δε θα ασχοληθούμε με τις στοιχειώδεις ιδιότητες των πράξεων και των ανισοτήτων στο $\mathbf{R}$ ούτε με την αναπαράσταση των αριθμών ως σημεία ευθείας, της λεγόμενης **πραγματικής ευθείας**. Με όλα αυτά είμαστε εξοικειωμένοι από το γυμνάσιο. Πριν, όμως, μελετήσουμε πιο ενδιαφέροντα ζητήματα, θα ορίσουμε τις επεκτάσεις των πράξεων και των ανισοτήτων στο σύνολο

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Το $\overline{\mathbf{R}}$ ονομάζεται **επεκτεταμένο** $\mathbf{R}$. Τα $+\infty$, $-\infty$ ονομάζονται **συν άπειρο** και **πλην άπειρο**, αντιστοίχως.

Κατ΄ αρχάς, *δεχόμαστε* ότι το $+\infty$ είναι μεγαλύτερο από κάθε αριθμό, ότι το $-\infty$ είναι μικρότερο από κάθε αριθμό και ότι το $-\infty$ είναι μικρότερο από το $+\infty$. Δηλαδή:

$$-\infty < x, \qquad x < +\infty, \qquad -\infty < +\infty.$$

Ορίζουμε τα αντίθετα των $\pm\infty$ ως εξής:

$$-(+\infty) = -\infty\,, \qquad -(-\infty) = +\infty\,.$$

Ορίζουμε τα αθροίσματα των $\pm\infty$ μεταξύ τους και με τους αριθμούς ως εξής:

$$(+\infty) + x = +\infty, \qquad x + (+\infty) = +\infty, \qquad (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) + x = -\infty, \qquad x + (-\infty) = -\infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Όμως, τα αθροίσματα $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$ *δεν ορίζονται* και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**. Ορίζουμε τις διαφορές

$$(+\infty)-x=+\infty, \qquad x-(-\infty)=+\infty, \qquad (+\infty)-(-\infty)=+\infty,$$

$$(-\infty)-x=-\infty, \qquad x-(+\infty)=-\infty, \qquad (-\infty)-(+\infty)=-\infty,$$

έχοντας υπ΄ όψη τα αντίθετα και τα αθροίσματα που έχουν ήδη ορισθεί. *Δεν ορίζονται* οι διαφορές $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$ και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**. Ορίζουμε τα γινόμενα των $\pm\infty$ μεταξύ τους και με τους αριθμούς:

$$(\pm\infty)x=\pm\infty, \quad x(\pm\infty)=\pm\infty \qquad (x>0),$$

$$(\pm\infty)x=\mp\infty, \quad x(\pm\infty)=\mp\infty \qquad (x<0),$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty\,, \qquad (\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty.$$

Τα γινόμενα $(\pm\infty)0$, $0(\pm\infty)$ *δεν ορίζονται* και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**. Ορίζουμε τα αντίστροφα

$$\frac{1}{+\infty}=0, \qquad \frac{1}{-\infty}=0.$$

Το αντίστροφο $\frac{1}{0}$ *δεν ορίζεται* και χαρακτηρίζεται **απροσδιόριστη μορφή**. Οι παρακάτω λόγοι ορίζονται βάσει των ανάλογων πολλαπλασιασμών και των αντιστρόφων.

$$\frac{\pm\infty}{x}=\pm\infty \quad (x>0), \qquad \frac{\pm\infty}{x}=\mp\infty \quad (x<0), \qquad \frac{x}{\pm\infty}=0.$$

Οι λόγοι $\frac{x}{0}$, $\frac{\pm\infty}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$ *δεν ορίζονται* και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**. Το $\frac{x}{0}=x\frac{1}{0}$ δεν ορίζεται διότι δεν ορίζεται το $\frac{1}{0}$. Τα $\frac{\pm\infty}{0}=(\pm\infty)\frac{1}{0}$ δεν ορίζονται διότι δεν ορίζεται το $\frac{1}{0}$. Τα $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}=(\pm\infty)\frac{1}{\pm\infty}=(\pm\infty)0$ και τα $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}=(\pm\infty)\frac{1}{\mp\infty}=(\pm\infty)0$ δεν ορίζονται διότι καταλήγουν σε απροσδιόριστη μορφή γινομένου.

Τέλος, ορίζουμε τις απόλυτες τιμές

$$|+\infty|=+\infty, \qquad |-\infty|=+\infty.$$

Μπορεί όλοι αυτοί οι ορισμοί να φαίνονται αυθαίρετοι, αλλά δεν είναι. Όλοι ανάγονται στην εμπειρική μας αντίληψη για τις έννοιες του «μεγάλου» (θετικού ή αρνητικού) και του «μικρού» και για τις μεταξύ τους σχέσεις. Για παράδειγμα, η εμπειρία υπαγορεύει ότι το άθροισμα δυο πολύ μεγάλων θετικών ποσοτήτων είναι πολύ μεγάλη θετική ποσότητα: αυτό αιτιολογεί το $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$. Από την εμπειρία μας, και πάλι, γνωρίζουμε ότι η διαφορά δυο πολύ μεγάλων θετικών ποσοτήτων μπορεί να είναι είτε πολύ μεγάλη θετική ποσότητα είτε πολύ μεγάλη αρνητική ποσότητα είτε οποιαδήποτε ενδιάμεση ποσότητα: αυτό δικαιολογεί το ότι δεν ορίζεται το $(+\infty)-(+\infty)$.

Προσοχή: Από εδώ και πέρα όταν γράφουμε, χωρίς κάποια ιδιαίτερη επισήμανση, οποιαδήποτε μικρά γράμματα ($a, u, x, m, n, \xi, \epsilon$ κλπ) ή και μερικά κεφαλαία (M, S κλπ) θα εννοούμε αριθμούς, δηλαδή στοιχεία του $\mathbf{R}$. Επίσης, με κεφαλαία γράμματα θα δηλώνουμε, εν γένει, σύνολα, δηλαδή υποσύνολα του $\mathbf{R}$. Αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι ένα γράμμα μπορεί να είναι και $+\infty$ ή $-\infty$ ή ότι ένα σύνολο μπορεί να περιέχει και τα $\pm\infty$, πρέπει να το επισημάνουμε ιδιαιτέρως: $a \in \overline{\mathbf{R}}$, $\xi \in (a, +\infty]$, $A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$, $A \subseteq (1, +\infty]$ κλπ.

1.2 Η Ιδιότητα Συνέχειας.

Στην ενότητα αυτή θα γνωρίσουμε τη σημαντικότερη ιδιότητα του $\mathbf{R}$. Θα δούμε στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου αλλά και σε όλα τα επόμενα ότι *η ιδιότητα αυτή είναι η βάση για να αποδειχθούν όλα τα σημαντικά αποτελέσματα της Ανάλυσης.*

Η Ιδιότητα Συνέχειας. *Έστω μη κενά σύνολα A, B ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Τότε υπάρχει ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.*

Το γεωμετρικό ανάλογο της Ιδιότητας Συνέχειας είναι απλό. Αν τα A, B είναι δυο μη κενά σύνολα σημείων πάνω στην πραγματική ευθεία και αν το A είναι αριστερά του B, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της ευθείας ανάμεσα στα δυο σύνολα: αν δεν υπήρχε τέτοιο σημείο, τότε θα υπήρχε *χάσμα* ανάμεσα στα δυο σύνολα. Επομένως, η Ιδιότητα Συνέχειας λέει ότι «η πραγματική ευθεία δεν έχει χάσματα» ή, με άλλα λόγια, ότι «είναι συνεχής», ότι «δεν διακόπτεται».

Πρέπει να επισημάνουμε ότι *η Ιδιότητα Συνέχειας είναι χαρακτηριστική ιδιότητα του $\mathbf{R}$ και όχι όλων των άλλων συνόλων. Θα δούμε λίγο αργότερα, μετά από την Πρόταση 1.5, ότι, για παράδειγμα, το $\mathbf{Q}$ δεν έχει την ιδιότητα αυτή.*

Θεώρημα 1.1 *Για κάθε b υπάρχει $n \in \mathbf{N}$, $n > b$.*

Απόδειξη: Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι *υπάρχει* b ώστε $n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Τότε το $B = \{b : n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbf{N}\}$ δεν είναι κενό.

Προφανώς, ισχύει $n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $b \in B$. Σύμφωνα με την Ιδιότητα Συνέχειας, υπάρχει ξ ώστε $n \leq \xi \leq b$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $b \in B$.

Επειδή $\xi - 1 < \xi$, ο $\xi - 1$ δεν ανήκει στο B. Άρα υπάρχει $n \in \mathbf{N}$, $n > \xi - 1$ και, επομένως, $n + 1 > \xi$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $n + 1 \in \mathbf{N}$. $\natural$

Πρόταση 1.1 ***Αρχιμήδεια Ιδιότητα.*** *Για κάθε $a > 0$ υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < a$.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.1 με $b = \frac{1}{a}$. $\natural$

Πρόταση 1.2 *Για κάθε x υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbf{Z}$ ώστε $k \leq x < k + 1$.*

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1 υπάρχει $n \in \mathbf{N}$, $n > x$ και υπάρχει $m \in \mathbf{N}$, $m > -x$. Ορίζουμε $l = -m$, οπότε $l < x < n$. Οι l, n είναι ακέραιοι.

Αν για κάθε ακέραιο $k \leq x$ ίσχυε $k + 1 \leq x$, τότε, βάσει της αρχής της επαγωγής, θα ήταν $l, l + 1, l + 2, \ldots \leq x$. Αυτό, όμως, δεν είναι σωστό διότι

$n > x$. Επομένως, η υπόθεση «για κάθε ακέραιο $k \leq x$ ισχύει $k+1 \leq x$» δεν είναι σωστή, οπότε υπάρχει ακέραιος $k \leq x$ ώστε $k+1 > x$.

Έστω $k' \leq x < k'+1$ για κάποιον $k' \in \mathbf{Z}$. Τότε $k < k'+1$ και $k' < k+1$, οπότε $-1 < k'-k < 1$. Επειδή $k'-k \in \mathbf{Z}$, συνεπάγεται $k'-k = 0$ και $k' = k$. $\natural$

Ο $k \in \mathbf{Z}$ της Πρότασης 1.2 ονομάζεται **ακέραιο μέρος** του x και τον συμβολίζουμε $[x]$. Δηλαδή,

$$[x] \leq x < [x]+1, \qquad [x] \in \mathbf{Z}.$$

Πρόταση 1.3 ***Πυκνότητα του* $\mathbf{Q}$ *στο* $\mathbf{R}$**. *Για κάθε a, b, $a < b$ υπάρχει $r \in \mathbf{Q}$ ώστε $a < r < b$.*

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1, υπάρχει $n \in \mathbf{N}$, $n > \frac{1}{b-a}$. Θεωρούμε τον ακέραιο $m = [na]+1$. Τότε $na < [na]+1 = m \leq na+1 < nb$ και, επομένως, $a < \frac{m}{n} < b$. Άρα για τον ρητό $r = \frac{m}{n}$ ισχύει $a < r < b$. $\natural$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι: (i) αν $a \leq \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, τότε $a \leq 0$ (*Υπόδ.:* Υποθέστε $a > 0$ και καταλήξτε σε άτοπο.), (ii) αν $a \leq b + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, τότε $a \leq b$, (iii) αν $|a-b| \leq \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, τότε $a = b$.

2. Αποδείξτε ότι το διάστημα $[a, b)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Αποδείξτε ότι το $(a, +\infty)$ δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.

3. Δείτε ότι τα $A = (-\infty, 0], B = [0, +\infty)$ ικανοποιούν την υπόθεση της Ιδιότητας Συνέχειας και βρείτε όλους τους ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Κάντε το ίδιο για τα: (i) $A = (-\infty, 0]$, $B = (0, +\infty)$, (ii) $A = (-4, -2)$, $B = (-2, +\infty)$, (iii) $A = (-\infty, 0)$, $B = [1, 13]$.

4. Έστω μη κενά A, B ώστε $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbf{R}$ και $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε είτε $A = (-\infty, \xi), B = [\xi, +\infty)$ είτε $A = (-\infty, \xi], B = (\xi, +\infty)$.

5. (1) Έστω μη κενά A, B ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $b - a \leq \epsilon$. Αποδείξτε ότι υπάρχει *ακριβώς ένας* ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. (2) Έστω μη κενά A, B ώστε $0 < a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $\frac{b}{a} \leq 1 + \epsilon$. Αποδείξτε ότι υπάρχει *ακριβώς ένας* ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

6. Αποδείξτε ότι: (i) αν $a \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε $a \leq 0$ (*Υπόδ.:* Υποθέστε $a > 0$ και καταλήξτε σε άτοπο.), (ii) αν $a \leq b + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε $a \leq b$, (iii) αν $|a-b| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε $a = b$.
Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 1.

7. Δείτε ότι τα $A = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ ικανοποιούν την υπόθεση της Ιδιότητας Συνέχειας και βρείτε όλους τους ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Κάντε το ίδιο για τα $A = \{r \in \mathbf{Q} : r < 0\}$, $B = \{r \in \mathbf{Q} : r > 0\}$.

8. Εκφράστε συναρτήσει του $[b]$: (i) τον ελάχιστο $n \in \mathbf{Z}$, $n > b$, (ii) τον ελάχιστο $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq b$, (iii) τον ελάχιστο $n \in \mathbf{N}$, $n > b$, (iv) τον ελάχιστο $n \in \mathbf{N}$, $n \geq b$. Εκφράστε συναρτήσει του $[\frac{1}{a}]$ $(a > 0)$ τον ελάχιστο $n \in \mathbf{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < a$.

9. Αποδείξτε ότι: (i) αν $x \leq a$ για κάθε $x < b$, τότε $b \leq a$, (ii) αν $r \leq a$ για κάθε $r \in \mathbf{Q}$, $r < b$, τότε $b \leq a$, (iii) αν $\{r \in \mathbf{Q} : r > a\} = \{r \in \mathbf{Q} : r > b\}$, τότε $a = b$, (iv) αν $\{r \in \mathbf{Q} : r < a\} \cap \{r \in \mathbf{Q} : r > b\} = \emptyset$, τότε $a \leq b$.

10. Έστω $k \in \mathbf{N}$, $a < b$. Βρείτε την *ασθενέστερη γενική συνθήκη* για το $b - a$, η οποία εγγυάται ότι υπάρχει $r \in (a, b)$ ώστε $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{Z}$, $1 \leq n \leq k$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε πρώτα τις περιπτώσεις $k = 1, 2, 3$.)

1.3 Δυνάμεις και ρίζες.

Α. Δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες.

Αν $n \in \mathbf{N}$, τότε η δύναμη a^n με *βάση* a και *εκθέτη* n ορίζεται ως εξής:

$$a^n = a \cdots a.$$

Αν $a \neq 0$, $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$, τότε οι δυνάμεις a^0, a^n ορίζονται ως εξής:

$$a^0 = 1, \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a \cdots a} \qquad (a \neq 0).$$

Το 0^0 *δεν ορίζεται* και χαρακτηρίζεται **απροσδιόριστη μορφή**.

Προφανώς, $(-a)^n = a^n$, αν ο $n \in \mathbf{Z}$ είναι άρτιος, και $(-a)^n = -a^n$, αν ο $n \in \mathbf{Z}$ είναι περιττός. Επίσης, αν ο $n \in \mathbf{Z}$ είναι άρτιος, τότε $a^n > 0$ για κάθε $a \neq 0$. Αν ο $n \in \mathbf{Z}$ είναι περιττός, τότε $a^n > 0$, αν $a > 0$, και $a^n < 0$, αν $a < 0$.

Στην Πρόταση 1.4 διατυπώνονται όλες οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων.

Πρόταση 1.4 (1) *Οι παρακάτω ισότητες ισχύουν αρκεί μόνο να ορίζονται τα συστατικά τους μέρη:* $a^x b^x = (ab)^x$, $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$.
(2) *Αν* $0 < a < b$, *τότε* (i) $a^x < b^x$, *αν* $x > 0$, (ii) $a^0 = b^0 = 1$ *και* (iii) $a^x > b^x$, *αν* $x < 0$.
(3) *Αν* $x < y$, *τότε* (i) $a^x < a^y$, *αν* $a > 1$, (ii) $1^x = 1^y = 1$ *και* (iii) $a^x > a^y$, *αν* $0 < a < 1$.

Η απόδειξη της Πρότασης 1.4 είναι στοιχειώδης και γνωστή από το γυμνάσιο και την παραλείπουμε. Αφού ορίσουμε τις δυνάμεις με μη ακέραιους εκθέτες, θα δούμε ότι *η Πρόταση 1.4 ισχύει, γενικά, για δυνάμεις με εκθέτες στο* $\mathbf{R}$ και γι αυτό δεν αναφέρεται περιορισμός σχετικά με το αν οι εκθέτες είναι ακέραιοι.

Β. Ρίζες.

Πριν προχωρήσουμε, *προσέξτε ιδιαιτέρως τις ασκήσεις 1 και 6 της ενότητας 1.2.* Η μια δεν προϋποθέτει την Ιδιότητα της Συνέχειας ενώ η άλλη την προϋποθέτει.

Λήμμα 1.1 ***Ανισότητα του Bernoulli.*** *Αν $a > -1$, τότε $(1+a)^n \geq 1+na$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.*

Απόδειξη: Με την αρχή της επαγωγής. $\natural$

Στο Λήμμα 1.4 θα αποδείξουμε μια γενίκευση της ανισότητας του Bernoulli.

Θεώρημα 1.2 *Για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $a > 0$ υπάρχει μοναδικός $x > 0$ ώστε $x^n = a$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τα $Y = \{y : y > 0, y^n \leq a\}$, $Z = \{z : z > 0, z^n \geq a\}$.

Ορίζουμε $y_0 = \min\{a, 1\}$, $z_0 = \max\{a, 1\}$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$, οπότε τα Y, Z δεν είναι κενά. Για κάθε $y \in Y$, $z \in Z$ ισχύει $y^n \leq a \leq z^n$, οπότε $y^n \leq z^n$ και, επειδή $y, z > 0$, συνεπάγεται $y \leq z$. Βάσει της Ιδιότητας Συνέχειας, υπάρχει ξ ώστε $y \leq \xi \leq z$ για κάθε $y \in Y$, $z \in Z$. Θα αποδείξουμε ότι $\xi^n = a$.

Έστω $0 < \epsilon < \xi$. Επειδή $\xi - \epsilon < \xi$, ο $\xi - \epsilon$ δεν ανήκει στο Z. Άρα $\xi - \epsilon \leq 0$ ή $(\xi - \epsilon)^n < a$. Το πρώτο δεν ισχύει, οπότε $(\xi - \epsilon)^n < a$. Από το Λήμμα 1.1 συνεπάγεται $\frac{a}{\xi^n} > \left(1 - \frac{\epsilon}{\xi}\right)^n \geq 1 - n\frac{\epsilon}{\xi}$, οπότε $\frac{\xi^n - a}{n\xi^{n-1}} < \epsilon$. Αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, $\epsilon < \xi$, οπότε ισχύει και για κάθε $\epsilon > 0$. Άρα $\frac{\xi^n - a}{n\xi^{n-1}} \leq 0$, οπότε $\xi^n \leq a$.

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\xi + \epsilon > \xi$, ο $\xi + \epsilon$ δεν ανήκει στο Y. Άρα $\xi + \epsilon \leq 0$ ή $(\xi + \epsilon)^n > a$. Το πρώτο δεν ισχύει, οπότε $(\xi + \epsilon)^n > a$. Από το Λήμμα 1.1 συνεπάγεται $\frac{\xi^n}{a} > \left(\frac{\xi}{\xi+\epsilon}\right)^n = \left(1 - \frac{\epsilon}{\xi+\epsilon}\right)^n \geq 1 - n\frac{\epsilon}{\xi+\epsilon}$, οπότε $\frac{a-\xi^n}{na} < \frac{\epsilon}{\xi+\epsilon} < \frac{\epsilon}{\xi}$ και, τελικά, $\frac{\xi(a-\xi^n)}{na} < \epsilon$. Άρα $\frac{\xi(a-\xi^n)}{na} \leq 0$ και, επομένως, $\xi^n \geq a$.

Από τις ανισότητες $\xi^n \leq a$ και $\xi^n \geq a$ συνεπάγεται $\xi^n = a$.

Αν $\xi_1, \xi_2 > 0$, $\xi_1^n = a$, $\xi_2^n = a$, τότε ${\xi_1}^n = {\xi_2}^n$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$. $\natural$

Θα δούμε μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 1.2 στο Κεφάλαιο 4 ως εφαρμογή του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής για συνεχείς συναρτήσεις.

Πρόταση 1.5 *Το $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ δεν είναι κενό.*

Απόδειξη: *Υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $\xi^2 = 2$.* Από το λύκειο γνωρίζουμε ότι $\xi \notin \mathbf{Q}$. $\natural$

Συμπεραίνουμε ότι *η ύπαρξη έστω και ενός αρρήτου βασίζεται στο Θεώρημα 1.2 του οποίου η απόδειξη χρησιμοποιεί την Ιδιότητα Συνέχειας*. Παρεμπιπτόντως, επισημαίνουμε, και πάλι, ότι το $\mathbf{Q}$ δεν έχει την Ιδιότητα Συνέχειας: δείτε την άσκηση 3. *Το Θεώρημα 1.2 δεν ισχύει στο $\mathbf{Q}$: η εξίσωση $x^2 = 2$ δεν έχει λύση στο $\mathbf{Q}$.*

Το Θεώρημα 1.2 αναφέρεται στη θετική λύση της εξίσωσης $x^n = a$. Η Πρόταση 1.6 διαπραγματεύεται όλες τις περιπτώσεις· θα αποφύγουμε την απόδειξή της διότι είναι πολύ απλή, ανάγεται στο Θεώρημα 1.2 και είναι γνωστή από το γυμνάσιο.

Πρόταση 1.6 (1) *Αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι άρτιος, τότε η εξίσωση $x^n = a$ έχει (i) ακριβώς δυο λύσεις, μια θετική και την αντίθετη αρνητική, αν $a > 0$, (ii) ακριβώς μια λύση, τον 0, αν $a = 0$, και (iii) καμιά λύση, αν $a < 0$.*
(2) Αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι περιττός, τότε η εξίσωση $x^n = a$ έχει (i) ακριβώς μια λύση, θετική, αν $a > 0$, (ii) ακριβώς μια λύση, τον 0, αν $a = 0$, και (iii) ακριβώς μια λύση, αρνητική, αν $a < 0$.

Αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι περιττός, τότε τη μοναδική λύση της εξίσωσης $x^n = a$ την ονομάζουμε **n-οστή ρίζα** του a και τη συμβολίζουμε

$$\sqrt[n]{a}\,.$$

Αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι άρτιος και $a \geq 0$, τότε τη μοναδική *μη αρνητική* λύση της $x^n = a$ την ονομάζουμε, και πάλι, **n-οστή ρίζα** του a και τη συμβολίζουμε, και πάλι, $\sqrt[n]{a}$.

Άρα $\sqrt[n]{0} = 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\sqrt[n]{a} > 0$ για κάθε $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$. Αν $a < 0$, τότε $\sqrt[n]{a} < 0$ για *περιττό* $n \in \mathbf{N}$ ενώ δεν ορίζεται ο $\sqrt[n]{a}$ για *άρτιο* $n \in \mathbf{N}$.

Πρόταση 1.7 ***Πυκνότητα του $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ στο $\mathbf{R}$.*** *Για κάθε a, b, $a < b$ υπάρχει $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ώστε $a < x < b$.*

Απόδειξη: Επειδή $a + \sqrt{2} < b + \sqrt{2}$, υπάρχει $r \in \mathbf{Q}$ ώστε $a + \sqrt{2} < r < b + \sqrt{2}$. Τότε $r - \sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ και $a < r - \sqrt{2} < b$. $\natural$

Γ. Δυνάμεις με ρητούς εκθέτες.

Έστω $r \in \mathbf{Q}$. Τότε υπάρχουν μοναδικοί $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ ώστε $r = \frac{m}{n}$ και $\gcd(m, n) = 1$. Ο λόγος $\frac{m}{n}$ ονομάζεται **ανάγωγη μορφή** του r. Ορίζουμε

$$a^r = (\sqrt[n]{a})^m$$

με τις εξής διευκρινήσεις: (i) αν $a > 0$, τότε δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα διότι ο $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται, (ii) αν $a = 0$, τότε $\sqrt[n]{0} = 0$, οπότε πρέπει να είναι $m > 0$ ή, ισοδύναμα, $r > 0$ και τότε $0^r = (\sqrt[n]{0})^m = 0^m = 0$ και (iii) αν $a < 0$, τότε πρέπει ο n να είναι περιττός για να ορίζεται ο $\sqrt[n]{a}$. Με άλλα λόγια, *ο a^r ορίζεται (i) αν $a > 0$, (ii) αν $a = 0$, $r > 0$ και (iii) αν $a < 0$ και ο παρονομαστής στην ανάγωγη μορφή του r είναι περιττός.* Ισοδύναμα, *ο a^r δεν ορίζεται (i) αν $a = 0$, $r \leq 0$ και (ii) αν $a < 0$ και ο παρονομαστής στην ανάγωγη μορφή του r είναι άρτιος.*

Είναι σαφές ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ η ανάγωγη μορφή του ρητού $\frac{1}{n}$ είναι η $\frac{1}{n}$. Άρα οι $\sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{1}{n}}$ ορίζονται για τους ίδιους a και είναι ίσοι: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Έχουμε αναφέρει ότι η Πρόταση 1.4 ισχύει και για δυνάμεις με ρητούς εκθέτες. Θα παραλείψουμε την απόδειξη· είναι στοιχειώδης και καθαρά αλγεβρικής φύσης.

Δ. Δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

Έστω $a > 1$. Για κάθε $r, s, t \in \mathbf{Q}$, $s < r < t$ ισχύει $a^s < a^r < a^t$. Αν είχαμε ορίσει τις δυνάμεις με άρρητους εκθέτες έτσι ώστε να ισχύουν και γι αυτές οι συνηθισμένες ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες, τότε για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$,

$x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $s < x < t$ θα ίσχυε $a^s < a^x < a^t$. Στη διπλή αυτή ανισότητα οι a^s, a^t είναι ήδη ορισμένοι ενώ ο a^x δεν έχει ακόμη οριστεί. Όμως, η ανισότητα αυτή αποτελεί τον «οδηγό» για το πώς πρέπει να οριστεί και ο a^x: πρέπει να οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει $a^s < a^x < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < x < t$.

Λήμμα 1.2 *Έστω $a > 1$.*
(1) Για κάθε $b > 1$ υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $b^n > a$.
(2) Αν $b \leq a^{\frac{1}{n}}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε $b \leq 1$.

Απόδειξη: (1) Υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $n > \frac{a-1}{b-1}$ και, επομένως, $b^n = (1 + b - 1)^n \geq 1 + n(b-1) > a$.
(2) Ισοδύναμο με το (1). ♮

Θεώρημα 1.3 (1) *Έστω $a > 1$, $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Τότε υπάρχει μοναδικός ξ ώστε $a^s < \xi < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < x < t$.*
(2) *Έστω $a > 1$, $x \in \mathbf{Q}$. Τότε υπάρχει μοναδικός ξ ώστε $a^s < \xi < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < x < t$ και ο μοναδικός αυτός ξ είναι ο (ήδη ορισμένος) a^x.*

Απόδειξη: (1) Έστω $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Ορίζουμε $S = \{a^s : s \in \mathbf{Q}, s < x\}$, $T = \{a^t : t \in \mathbf{Q}, t > x\}$.

Τα S, T δεν είναι κενά, διότι υπάρχουν $s, t \in \mathbf{Q}$ ώστε $s < x < t$. Επίσης, κάθε στοιχείο του S είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του T. Πράγματι, από την $s < x < t$ συνεπάγεται $s < t$ και, επειδή $a > 1$, $s, t \in \mathbf{Q}$, προκύπτει $a^s < a^t$. Άρα τα S, T ικανοποιούν τις υποθέσεις της Ιδιότητας Συνέχειας, οπότε υπάρχει ξ ώστε $a^s \leq \xi \leq a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < x < t$. Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει η ισχυρότερη διπλή ανισότητα $a^s < \xi < a^t$. Πράγματι, λόγω της πυκνότητας του $\mathbf{Q}$ στο $\mathbf{R}$, υπάρχουν $s', t' \in \mathbf{Q}$ ώστε $s < s' < x < t' < t$, οπότε $a^s < a^{s'} \leq \xi \leq a^{t'} < a^t$ και, επομένως, $a^s < \xi < a^t$.
(2) Έστω $x \in \mathbf{Q}$. Θεωρούμε τον $\xi = a^x$, για τον οποίο ισχύει $a^s < \xi < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < x < t$.

Έστω – σε οποιαδήποτε από τις περιπτώσεις (1), (2) – ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 ώστε $a^s < \xi_1 < a^t$ και $a^s < \xi_2 < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < x < t$. Συνεπάγεται $\frac{\xi_2}{\xi_1} < a^{t-s}$ και $\frac{\xi_1}{\xi_2} < a^{t-s}$ για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < x < t$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbf{Q}$ στο $\mathbf{R}$, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχουν $s, t \in \mathbf{Q}$ ώστε $x - \frac{1}{2n} < s < x < t < x + \frac{1}{2n}$. Τότε $t - s < \frac{1}{n}$ και, επομένως, $\frac{\xi_2}{\xi_1} < a^{\frac{1}{n}}$ και $\frac{\xi_1}{\xi_2} < a^{\frac{1}{n}}$. Επειδή αυτές οι ανισότητες ισχύουν για κάθε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $\frac{\xi_2}{\xi_1} \leq 1$ και $\frac{\xi_1}{\xi_2} \leq 1$. Άρα $\xi_1 = \xi_2$. ♮

Αν $a > 1$, $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, τότε **ορίζουμε** τον a^x να είναι ακριβώς ο αριθμός ξ που αναφέρεται στο πρώτο μέρος του Θεωρήματος 1.3. *Από τον ορισμό του*, λοιπόν, ο a^x ικανοποιεί τη διπλή ανισότητα $a^s < a^x < a^t$ για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < x < t$ και είναι ο *μοναδικός* αριθμός με αυτήν την ιδιότητα. Σύμφωνα με το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 1.3, ακριβώς τα ίδια ισχύουν και στην περίπτωση $a > 1$, $x \in \mathbf{Q}$.

Αν $a = 1$, $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, τότε ορίζουμε

$$1^x = 1.$$

Αν $0 < a < 1$, $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε έχει ορισθεί ο $(\frac{1}{a})^x$. Ορίζουμε

$$a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}\,.$$

Τέλος, αν $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $x > 0$, τότε ορίζουμε

$$0^x = 0.$$

Επομένως, αν $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, τότε η δύναμη a^x ορίζεται (i) αν $a > 0$ και (ii) αν $a = 0$, $x > 0$. Με άλλα λόγια, αν $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, τότε η δύναμη a^x δεν ορίζεται (i) αν $a < 0$ και (ii) αν $a = 0$, $x < 0$. Αν συνυπολογίσουμε τα συμπεράσματα των προηγούμενων υποενοτήτων, βλέπουμε ότι *ο a^x ορίζεται (i) αν $a > 0$, (ii) αν $a = 0$, $x > 0$ και (iii) αν $a < 0$, $x \in \mathbf{Q}$ και ο x έχει περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του.* Ισοδύναμα, *ο a^x δεν ορίζεται (i) αν $a = 0$, $x \leq 0$ και (ii) αν $a < 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ή $x \in \mathbf{Q}$ και ο x έχει άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του.*

Ας πούμε μερικά λόγια για το *πρόσημο* του a^x. Έστω $a > 0$. Αν $x \in \mathbf{Q}$, τότε γνωρίζουμε ότι $a^x > 0$. Αν $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, τότε, βάσει του ορισμού του a^x, ισχύει $a^x > a^s$ για κάθε $s \in \mathbf{Q}$, $s < x$, οπότε, επειδή $a^s > 0$, συνεπάγεται $a^x > 0$. Άρα $a^x > 0$ για κάθε $a > 0$ και κάθε x.

Απόδειξη της Πρότασης 1.4: Επειδή μας ενδιαφέρουν οι άρρητοι εκθέτες, περιοριζόμαστε στην περίπτωση $a, b \geq 0$. *Θα θεωρήσουμε γνωστές και θα χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες ιδιότητες για ρητούς εκθέτες.*
(1) *Πρώτη ισότητα:* Έστω $a, b > 1$. Για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < x < t$ ισχύει $a^s < a^x < a^t$ και $b^s < b^x < b^t$, οπότε $(ab)^s = a^s b^s < a^x b^x < a^t b^t = (ab)^t$. Επειδή ο $a^x b^x$ είναι ανάμεσα στους $(ab)^s$, $(ab)^t$, συνεπάγεται $a^x b^x = (ab)^x$.

Έστω $0 < a < 1 < b$, $ab > 1$. Τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $(\frac{1}{a})^x (ab)^x = (\frac{1}{a} ab)^x = b^x$ και, επομένως, $a^x b^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} b^x = (ab)^x$.

Έστω $0 < a < 1 < b$, $0 < ab < 1$. Τότε $\frac{1}{ab} > 1$, οπότε $(\frac{1}{ab})^x b^x = (\frac{1}{ab} b)^x = (\frac{1}{a})^x$ και, επομένως, $a^x b^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} b^x = \frac{1}{(\frac{1}{ab})^x} = (ab)^x$.

Έστω $0 < a < 1 < b$, $ab = 1$, οπότε $b = \frac{1}{a}$. Τότε $a^x b^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} (\frac{1}{a})^x = 1 = 1^x = (ab)^x$.

Η περίπτωση $0 < b < 1 < a$ είναι παρόμοια με την $0 < a < 1 < b$.

Έστω $0 < a, b < 1$. Τότε $\frac{1}{a}, \frac{1}{b} > 1$, οπότε $(\frac{1}{a})^x (\frac{1}{b})^x = (\frac{1}{a} \frac{1}{b})^x = (\frac{1}{ab})^x$ και, επομένως, $a^x b^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} \frac{1}{(\frac{1}{b})^x} = \frac{1}{(\frac{1}{ab})^x} = (ab)^x$.

Αν $a = 1$, τότε $a^x b^x = 1 b^x = b^x = (ab)^x$. Η περίπτωση $b = 1$ είναι παρόμοια.

Τέλος, αν $a = 0$, τότε $x > 0$, οπότε $a^x b^x = 0 b^x = 0 = 0^x = (ab)^x$. Η περίπτωση $b = 0$ είναι παρόμοια.

Για την απόδειξη των δυο επόμενων ισοτήτων θα χρειαστούμε το

Λήμμα 1.3 (1) *Έστω $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < x + y < t$. Τότε υπάρχουν $s', s'', t', t'' \in \mathbf{Q}$ ώστε $s' < x < t'$, $s'' < y < t''$, $s = s' + s''$, $t = t' + t''$.*
(2) *Έστω $x, y > 0$, $s, t \in \mathbf{Q}$, $0 < s < xy < t$. Τότε υπάρχουν $s', s'', t', t'' \in \mathbf{Q}$ ώστε $0 < s' < x < t'$, $0 < s'' < y < t''$, $s = s's''$, $t = t't''$.*

Απόδειξη: (1) Βάσει της πυκνότητας του $\mathbf{Q}$ στο $\mathbf{R}$, υπάρχει $s' \in \mathbf{Q}$ ώστε $s - y < s' < x$ και ορίζουμε $s'' = s - s' \in \mathbf{Q}$. Τότε $s' < x$, $s = s' + s''$ και $s'' = s - s' < y$. Ομοίως, υπάρχει $t' \in \mathbf{Q}$ ώστε $x < t' < t - y$ και ορίζουμε $t'' = t - t' \in \mathbf{Q}$. Τότε $x < t'$, $t = t' + t''$ και $y < t - t' = t''$.
(2) Υπάρχει $s' \in \mathbf{Q}$ ώστε $\frac{s}{y} < s' < x$ και ορίζουμε $s'' = \frac{s}{s'} \in \mathbf{Q}$. Τότε $s' < x$, $s = s's''$ και $s'' = \frac{s}{s'} < y$. Ομοίως, υπάρχει $t' \in \mathbf{Q}$ ώστε $x < t' < \frac{t}{y}$ και ορίζουμε $t'' = \frac{t}{t'} \in \mathbf{Q}$. Τότε $x < t'$, $t = t't''$ και $y < \frac{t}{t'} = t''$. $\natural$

Δεύτερη ισότητα: Έστω $a > 1$. Για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < x + y < t$ υπάρχουν, σύμφωνα με το Λήμμα 1.3, $s', s'', t', t'' \in \mathbf{Q}$ ώστε $s' < x < t'$, $s'' < y < t''$, $s = s' + s''$, $t = t' + t''$. Τότε $a^{s'} < a^x < a^{t'}$ και $a^{s''} < a^y < a^{t''}$ και, επομένως, $a^s = a^{s'}a^{s''} < a^x a^y < a^{t'}a^{t''} = a^t$. Επειδή ο $a^x a^y$ είναι ανάμεσα στους a^s, a^t, συνεπάγεται $a^x a^y = a^{x+y}$.

Όπως στην απόδειξη της πρώτης ισότητας, οι υπόλοιπες περιπτώσεις, δηλαδή $0 < a < 1$, $a = 1$, $a = 0$, είτε είναι πολύ απλές είτε ανάγονται με καθαρά αλγεβρικό τρόπο στην περίπτωση $a > 1$. Οι λεπτομέρειες δεν προσφέρουν κάτι σημαντικό.
Τρίτη ισότητα: Έστω $a > 1$, $x, y > 0$. Για κάθε $s, t \in \mathbf{Q}$, $s < xy < t$ θεωρούμε έναν επιπλέον $s_1 \in \mathbf{Q}$ ώστε $s_1 \geq s$, $0 < s_1 < xy < t$. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3, υπάρχουν $s', s'', t', t'' \in \mathbf{Q}$ ώστε $0 < s' < x < t'$, $0 < s'' < y < t''$, $s_1 = s's''$, $t = t't''$. Τότε $1 < a^{s'} < a^x < a^{t'}$ και, επομένως, $a^s \leq a^{s_1} = (a^{s'})^{s''} < (a^x)^{s''} < (a^x)^y < (a^x)^{t''} < (a^{t'})^{t''} = a^t$. Επειδή ο $(a^x)^y$ είναι ανάμεσα στους a^s, a^t, συνεπάγεται $(a^x)^y = a^{xy}$.

Όπως στις αποδείξεις των δυο προηγούμενων ισοτήτων, όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις είτε είναι προφανείς είτε ανάγονται με καθαρά αλγεβρικό τρόπο στην περίπτωση $a > 1$, $x, y > 0$. Θα αποφύγουμε τις λεπτομέρειες.

Η $(a^y)^x = a^{xy}$ προκύπτει από την $(a^x)^y = a^{xy}$ με απλή εναλλαγή των x, y.
(2) (i) Υπάρχει $s \in \mathbf{Q}$ ώστε $0 < s < x$, οπότε, επειδή $1 < \frac{b}{a}$, συνεπάγεται $1 < (\frac{b}{a})^s < (\frac{b}{a})^x$ και, επομένως, $a^x < a^x(\frac{b}{a})^x = (a\frac{b}{a})^x = b^x$. Το (ii) είναι προφανές και το (iii) ανάγεται εύκολα στο (i).
(3) (i) Υπάρχει $r \in \mathbf{Q}$ ώστε $x < r < y$, οπότε $a^x < a^r < a^y$. Το (ii) είναι προφανές και το (iii) ανάγεται στο (i). $\natural$

Το Λήμμα 1.4 δε θα παίξει ιδιαίτερο ρόλο στη συνέχεια. Θα χρησιμεύσει μόνο για ένα - δυο *εναλλακτικές* (απλούστερες, όμως) αποδείξεις.

Λήμμα 1.4 ***Γενίκευση της ανισότητας του Bernoulli.*** *Έστω $a > -1$. Τότε (i) $(1 + a)^x \geq 1 + xa$, αν $x \leq 0$ ή $x \geq 1$, και (ii) $(1 + a)^x \leq 1 + xa$, αν $0 \leq x \leq 1$.*

Απόδειξη: Έστω $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}$, $m \geq n$. Θα αποδείξουμε ότι $(1+a)^r \geq 1+ra$. Ορίζουμε $b = \sqrt[n]{1 + a} > 0$ και η ανισότητα $(1 + a)^r \geq 1 + ra$ γίνεται $n(b^m - 1) \geq m(b^n - 1)$ ή, ισοδύναμα, $n(b-1)(b^{m-1} + \cdots + b + 1) \geq m(b-1)(b^{n-1} + \cdots + b + 1)$. Αν $b = 1$, η ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Αν $b > 1$, η ανισότητα ισοδυναμεί με $n(b^{m-1} + \cdots + b^n) \geq (m - n)(b^{n-1} + \cdots + b + 1)$. Η τελευταία ισχύει, διότι $n(b^{m-1} + \cdots + b^n) \geq n(b^n + \cdots + b^n) = n(m-n)b^n$ και $(m-n)(b^{n-1} + \cdots + b + 1) \leq (m - n)(b^n + \cdots + b^n + b^n) = n(m - n)b^n$. Αν $0 < b < 1$, η απόδειξη της

$n(b-1)(b^{m-1}+\cdots+b+1) \geq m(b-1)(b^{n-1}+\cdots+b+1)$ είναι παρόμοια. Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει την $(1+a)^r \geq 1+ra$ όταν $a>-1$, $r \in \mathbf{Q}$, $r \geq 1$.

Έστω $a>0$, $x \geq 1$. Για κάθε $r \in \mathbf{Q}$, $1 \leq r \leq x$ ισχύει $(1+a)^x \geq (1+a)^r \geq 1+ra$, οπότε $r \leq \frac{(1+a)^x-1}{a}$. Επομένως, για κάθε $r \in \mathbf{Q}$, $r \leq x$ ισχύει $r \leq \frac{(1+a)^x-1}{a}$. Από αυτό συνεπάγεται $x \leq \frac{(1+a)^x-1}{a}$. Πράγματι, αν ήταν $\frac{(1+a)^x-1}{a} < x$, θα υπήρχε $r \in \mathbf{Q}$ ώστε $\frac{(1+a)^x-1}{a} < r < x$. (Δείτε και το (ii) της άσκησης 9 της ενότητας 1.2.) Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $(1+a)^x \geq 1+xa$.

Έστω $-1<a<0$, $x \geq 1$. Για κάθε $r \in \mathbf{Q}$, $r \geq x$ ισχύει $(1+a)^x \geq (1+a)^r \geq 1+ra$, οπότε $r \geq \frac{(1+a)^x-1}{a}$. Από αυτό συνεπάγεται $x \geq \frac{(1+a)^x-1}{a}$. Συμπεραίνουμε ότι $(1+a)^x \geq 1+xa$.

Αν $a=0$, $x \geq 1$, η $(1+a)^x \geq 1+xa$ ισχύει ως ισότητα. Επομένως, έχουμε αποδείξει την $(1+a)^x \geq 1+xa$ στην περίπτωση $a>-1$, $x \geq 1$.

Έστω $a>-1$, $x \leq 0$. Εφαρμόζουμε την $(1+b)^y \geq 1+yb$ με $y=1-x \geq 1$, $b=-\frac{a}{1+a}>-1$ και με λίγες πράξεις καταλήγουμε στην $(1+a)^x \geq 1+xa$.

Τέλος, έστω $a>-1$, $0<x<1$. Εφαρμόζουμε την $(1+b)^y \geq 1+yb$ με $y=\frac{1}{x}>1$, $b=ax>-1$ και καταλήγουμε στην $(1+a)^x \leq 1+xa$. $\natural$

Ας αναφέρουμε, τέλος, ότι ορίζονται οι δυνάμεις

$$a^{+\infty}=0 \quad (0 \leq a<1), \qquad a^{+\infty}=+\infty \quad (a>1),$$

$$a^{-\infty}=+\infty \quad (0<a<1), \qquad a^{-\infty}=0 \quad (a>1),$$

$$(+\infty)^b=+\infty \quad (b>0 \text{ ή } b=+\infty), \qquad (+\infty)^b=0 \quad (b<0 \text{ ή } b=-\infty),$$

ενώ, όπως το 0^0, τα $1^{\pm\infty}$, $(+\infty)^0$, $0^{-\infty}$ *δεν ορίζονται* και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Ασκήσεις.

1. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ αποδείξτε ότι: (i) $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$ για κάθε $x \geq 0$, (ii) $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$ για κάθε $x \geq -1$. Γενικεύστε.

2. Θεωρήστε τα $S=\{s \in \mathbf{Q} : s<\sqrt{2}\}$, $T=\{t \in \mathbf{Q} : t>\sqrt{2}\}$. Παρατηρήστε ότι $S, T \subseteq \mathbf{Q}$ και $s \leq t$ για κάθε $s \in S$, $t \in T$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένας $\xi \in \mathbf{Q}$ ώστε $s \leq \xi \leq t$ για κάθε $s \in S$, $t \in T$. Συμπεράνατε ότι *το* $\mathbf{Q}$ *δεν έχει την Ιδιότητα Συνέχειας.*

1.4 Λογάριθμοι.

Θεώρημα 1.4 *Έστω $a>0$, $a \neq 1$. Τότε για κάθε $y>0$ υπάρχει μοναδικός x ώστε $a^x=y$.*

Απόδειξη: Αν $a>1$, $y \geq 1$, θεωρούμε τα $U=\{u : a^u \leq y\}$, $V=\{v : a^v \geq y\}$.

Προφανώς, $0 \in U$. Επίσης, σύμφωνα με το Λήμμα 1.2, υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $a^n > y$ και, επομένως, $n \in V$. Άρα τα U, V δεν είναι κενά. Για κάθε $u \in U$, $v \in V$ ισχύει $a^u \leq y \leq a^v$, οπότε $a^u \leq a^v$ και, επειδή $a > 1$, συνεπάγεται $u \leq v$. Άρα τα U, V ικανοποιούν τις υποθέσεις της Ιδιότητας Συνέχειας, οπότε υπάρχει ξ ώστε $u \leq \xi \leq v$ για κάθε $u \in U$, $v \in V$. Θα αποδείξουμε ότι $a^\xi = y$.

Έστω $n \in \mathbf{N}$. Τότε $\xi - \frac{1}{n} < \xi$, οπότε ο $\xi - \frac{1}{n}$ δεν ανήκει στο V. Άρα $a^{\xi - \frac{1}{n}} < y$. Ομοίως, $\xi < \xi + \frac{1}{n}$, οπότε ο $\xi + \frac{1}{n}$ δεν ανήκει στο U. Άρα $y < a^{\xi + \frac{1}{n}}$. Άρα $a^{-\frac{1}{n}} < \frac{y}{a^\xi} < a^{\frac{1}{n}}$ και, επομένως, $\frac{y}{a^\xi} < a^{\frac{1}{n}}$ και $\frac{a^\xi}{y} < a^{\frac{1}{n}}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.2, $\frac{y}{a^\xi} \leq 1$ και $\frac{a^\xi}{y} \leq 1$. Άρα $a^\xi = y$.

Αν $a > 1$, $0 < y < 1$, τότε, επειδή $\frac{1}{y} > 1$, υπάρχει η ώστε $a^\eta = \frac{1}{y}$ και, επομένως, για τον $\xi = -\eta$ ισχύει $a^\xi = a^{-\eta} = y$.

Τέλος, έστω $0 < a < 1$. Επειδή $\frac{1}{a} > 1$, υπάρχει η ώστε $(\frac{1}{a})^\eta = y$, οπότε για τον $\xi = -\eta$ ισχύει $a^\xi = a^{-\eta} = y$.

Αν $a^{\xi_1} = y$, $a^{\xi_2} = y$, τότε $a^{\xi_1} = a^{\xi_2}$ και, επομένως, $\xi_1 = \xi_2$. $\natural$

Αν $y > 0$ και $a > 0$, $a \neq 1$, η μοναδική λύση της $a^x = y$, η ύπαρξη της οποίας εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 1.4, ονομάζεται **λογάριθμος του y με βάση** a και συμβολίζεται

$$\log_a y.$$

Αν $y \leq 0$ είναι προφανές ότι η $a^x = y$ δεν έχει λύση.

Πρόταση 1.8 *Έστω $a, b > 0$, $a, b \neq 1$.*
(1) $\log_a(yz) = \log_a y + \log_a z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(2) $\log_a \frac{y}{z} = \log_a y - \log_a z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(3) $\log_a(y^z) = z \log_a y$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* z.
(4) $\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$ *για κάθε* $y > 0$.
(5) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
(6) *Έστω* $0 < y < z$. *Τότε* (i) $\log_a y < \log_a z$, *αν* $a > 1$, *και* (ii) $\log_a y > \log_a z$, *αν* $0 < a < 1$.

Απόδειξη: (1) Ορίζουμε $x = \log_a y$, $w = \log_a z$, οπότε $a^x = y$, $a^w = z$. Τότε $a^{x+w} = a^x a^w = yz$, οπότε $\log_a(yz) = x + w = \log_a y + \log_a z$.
(2) Είναι $\log_a \frac{y}{z} + \log_a z = \log_a(\frac{y}{z} z) = \log_a y$, οπότε $\log_a \frac{y}{z} = \log_a y - \log_a z$.
(3) Ορίζουμε $x = \log_a y$, οπότε $a^x = y$. Τότε $a^{zx} = (a^x)^z = y^z$ και, επομένως, $\log_a(y^z) = zx = z \log_a y$.
(4) Ορίζουμε $x = \log_b y$, $w = \log_a b$, οπότε $b^x = y$, $a^w = b$. Άρα $a^{wx} = (a^w)^x = b^x = y$. Άρα $\log_a y = wx = \log_a b \log_b y$.
(5) Η $\log_a 1 = 0$ προκύπτει από την $a^0 = 1$ και η $\log_a a = 1$ από την $a^1 = a$.
(6) Ορίζουμε $x = \log_a y$, $w = \log_a z$, οπότε $y = a^x$, $z = a^w$. Τότε $a^x < a^w$ και, αν $a > 1$, συνεπάγεται $x < w$ ενώ, αν $0 < a < 1$, συνεπάγεται $x > w$. $\natural$

1.5 Supremum και infimum.

Έστω μη κενό σύνολο A. Το A χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει u ώστε $u \geq a$ για κάθε $a \in A$ ή, ισοδύναμα, $A \subseteq (-\infty, u]$. Κάθε u με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** του A. Φυσικά, αν ο u είναι άνω φράγμα του A, τότε κάθε $u' \geq u$ είναι, επίσης, άνω φράγμα του A. Ομοίως, το A χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει l ώστε $l \leq a$ για κάθε $a \in A$ ή, ισοδύναμα, $A \subseteq [l, +\infty)$. Κάθε l με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** του A. Αν ο l είναι κάτω φράγμα του A, τότε κάθε $l' \leq l$ είναι κι αυτός κάτω φράγμα του A. Τέλος, το A χαρακτηρίζεται **φραγμένο** αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχουν l, u ώστε $A \subseteq [l, u]$.

Παραδείγματα: (1) Τα άνω φράγματα του $[a, b]$ είναι, προφανώς, όλοι οι $u \geq b$ και κανένας άλλος. Το ίδιο ισχύει και για τα $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$. Παρατηρήστε: όλα αυτά τα διαστήματα έχουν κάποιο *ελάχιστο* άνω φράγμα, τον b.

(2) Τα κάτω φράγματα καθενός από τα $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ είναι όλοι οι $l \leq a$ και κανένας άλλος. Παρατηρήστε και πάλι: όλα αυτά τα διαστήματα έχουν κάποιο *μέγιστο* κάτω φράγμα, τον a.

(3) Προφανώς, τα $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένα και τα $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι κάτω φραγμένα.

(4) Το $\mathbf{N}$ είναι κάτω φραγμένο και, επειδή ο 1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του, τα κάτω φράγματα του $\mathbf{N}$ είναι όλοι οι $l \leq 1$ και κανένας άλλος. Δηλαδή, ο 1 είναι το *μέγιστο* κάτω φράγμα του $\mathbf{N}$.

Από την άλλη μεριά, το Θεώρημα 1.1 λέει, ακριβώς, ότι *το* $\mathbf{N}$ *δεν είναι άνω φραγμένο*: δεν υπάρχει u που να είναι άνω φράγμα του $\mathbf{N}$ αφού για κάθε u υπάρχει $n \in \mathbf{N}$, $n > u$. Όσο περίεργο κι αν φαίνεται, η απόδειξη του ότι το $\mathbf{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο βασίζεται στην Ιδιότητα Συνέχειας!!!

Θεώρημα 1.5 *Έστω μη κενό σύνολο A.*
(1) Αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε από τα άνω φράγματα του A υπάρχει ένα το οποίο είναι ελάχιστο.
(2) Αν το A είναι κάτω φραγμένο, τότε από τα κάτω φράγματα του A υπάρχει ένα το οποίο είναι μέγιστο.

Απόδειξη: (1) Ορίζουμε $U = \{u : u \text{ άνω φράγμα του } A\}$. Το U δεν είναι κενό αφού υπάρχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα του A. Προφανώς, ισχύει $a \leq u$ για κάθε $a \in A$, $u \in U$. Σύμφωνα με την Ιδιότητα Συνέχειας, υπάρχει ξ ώστε $a \leq \xi \leq u$ για κάθε $a \in A$, $u \in U$. Επειδή $a \leq \xi$ για κάθε $a \in A$, ο ξ είναι άνω φράγμα του A. Επειδή $\xi \leq u$ για κάθε $u \in U$, ο ξ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A.
(2) Ομοίως: αντί του U, θεωρούμε το $L = \{l : l \text{ κάτω φράγμα του } A\}$. ♮

Το **ελάχιστο άνω φράγμα** ενός μη κενού, άνω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και **supremum** του A και συμβολίζεται

$$\sup A.$$

Το **μέγιστο κάτω φράγμα** ενός μη κενού, κάτω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και **infimum** του A και συμβολίζεται

$$\inf A.$$

Παραδείγματα: Όλα τα $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$ έχουν το ίδιο supremum, τον b. Ομοίως, όλα τα $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ έχουν το ίδιο infimum, τον a.

Το μέγιστο στοιχείο, αν υπάρχει, ενός συνόλου A ονομάζεται και **maximum** του A και συμβολίζεται $\max A$. Επίσης, το ελάχιστο στοιχείο, αν υπάρχει, του A ονομάζεται και **minimum** του A και συμβολίζεται $\min A$.

Πρόταση 1.9 (1) *Αν υπάρχει το* $\max A$*, τότε* $\sup A = \max A$.
(2) *Αν υπάρχει το* $\min A$*, τότε* $\inf A = \min A$.

Απόδειξη: (1) Το $\max A$ είναι άνω φράγμα του A. Δε μπορεί να υπάρχει άνω φράγμα του A μικρότερο από το $\max A$, αφού το $\max A$ *είναι στοιχείο* του A.
(2) Ομοίως. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Το $A = \{0\} \cup [2,3] \cup \{4\}$ έχει $\min A = 0$ και $\max A = 4$. Άρα $\inf A = 0$, $\sup A = 4$.

(2) $\min \mathbf{N} = 1$, οπότε $\inf \mathbf{N} = 1$.

(3) Το $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ έχει $\max A = 1$, οπότε $\sup A = 1$.
Προφανώς, κάθε $l \leq 0$ είναι κάτω φράγμα του A. Φαίνεται, μάλιστα, ότι δεν υπάρχει άλλο κάτω φράγμα του A και αυτό θα το αποδείξουμε με δυο τρόπους (ουσιαστικά ίδιους αλλά φραστικά διαφορετικούς). *Πρώτος τρόπος:* Έστω l κάτω φράγμα του A. Τότε $l \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ οπότε, σύμφωνα με την άσκηση 6 της ενότητας 1.2, είναι $l \leq 0$. *Δεύτερος τρόπος:* Αν $l > 0$, τότε, βάσει της Αρχιμήδειας Ιδιότητας, υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < l$. Άρα ο l δεν είναι κάτω φράγμα του A.
Άρα το A δεν έχει κάτω φράγμα > 0 και, επομένως, $\inf A = 0$.

Αν το μη κενό σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε

$$\sup A = +\infty.$$

Αιτιολογούμε τον ορισμό. Το ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο σημαίνει ότι δεν έχει ως άνω φράγμα κανέναν *αριθμό*. Όμως, το $+\infty$ συμβολίζει μια «ποσότητα» μεγαλύτερη από κάθε αριθμό, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως το μοναδικό, και, επομένως, το ελάχιστο, «άνω φράγμα» του A.
Ομοίως, αν το μη κενό A δεν είναι κάτω φραγμένο, ορίζουμε

$$\inf A = -\infty.$$

Παράδειγμα: Το $\mathbf{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup \mathbf{N} = +\infty$.

Προσοχή: Από εδώ και πέρα, όταν γράφουμε $\sup A$, χωρίς ιδιαίτερη επισήμανση, θα εννοούμε ότι αυτό είναι αριθμός ή $+\infty$. Όταν, όμως, γράφουμε $\sup A = u$ (ή άλλο γράμμα) θα εννοούμε ότι το $\sup A$ είναι ο *αριθμός* u, εκτός αν αναφέρουμε ότι $\sup A = u \in \overline{\mathbf{R}}$ ή κάτι παρόμοιο. Τα ανάλογα ισχύουν και για το $\inf A$.

Πρόταση 1.10 *Κάθε μη κενό σύνολο A έχει supremum και infimum και*

$$\inf A \le \sup A.$$

Απόδειξη: Αν το μη κενό A είναι άνω φραγμένο, τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.5, υπάρχει το $\sup A$ και είναι αριθμός. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε, εξ ορισμού, $\sup A = +\infty$. Ομοίως, αν το μη κενό A είναι κάτω φραγμένο, τότε υπάρχει το $\inf A$ και είναι αριθμός, ενώ, αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε $\inf A = -\infty$.

Ισχύει $\inf A \le a \le \sup A$ για κάθε $a \in A$. Άρα $\inf A \le \sup A$. $\natural$

Μια απλή παρατήρηση. Αν το A έχει ένα μόνο στοιχείο, τότε τα $\inf A$, $\sup A$ ταυτίζονται με αυτό το στοιχείο και, επομένως, $\inf A = \sup A$. Αν το A έχει τουλάχιστον δυο στοιχεία, τότε $\inf A < \sup A$.

Πρόταση 1.11 *Έστω μη κενό σύνολο A.*
(1) Ισχύει $a \le \sup A$ για κάθε $a \in A$. Επίσης, για κάθε $u < \sup A$ υπάρχει $a \in A$, $a > u$ (και, επομένως, $u < a \le \sup A$).
(2) Ισχύει $a \ge \inf A$ για κάθε $a \in A$. Επίσης, για κάθε $l > \inf A$ υπάρχει $a \in A$, $a < l$ (και, επομένως, $\inf A \le a < l$).

Απόδειξη: (1) Αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε το $\sup A$ είναι ένα (το ελάχιστο) από τα άνω φράγματα του A, οπότε ισχύει $a \le \sup A$ για κάθε $a \in A$. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $\sup A = +\infty$ και, προφανώς, ισχύει $a \le \sup A$ για κάθε $a \in A$. Τέλος, έστω $u < \sup A$. Τότε ο u δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε υπάρχει $a \in A$, $a > u$.
(2) Ομοίως. $\natural$

Το ένα από τα δυο «συμμετρικά» αποτελέσματα του Θεωρήματος 1.5 διατυπώνεται ως εξής.

Η Ιδιότητα Supremum. *Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Όπως είδαμε, η απόδειξη βασίζεται στην Ιδιότητα Συνέχειας. Αντιστρόφως, η Πρόταση 1.12 αποδεικνύει την Ιδιότητα Συνέχειας από την Ιδιότητα Supremum. *Άρα η Ιδιότητα Συνέχειας και η Ιδιότητα Supremum είναι ισοδύναμες.*

Πρόταση 1.12 *Έστω ότι κάθε μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Τότε ισχύει η Ιδιότητα Συνέχειας.*

Απόδειξη: Έστω A, B μη κενά σύνολα ώστε $a \le b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

Προφανώς, κάθε $b \in B$ είναι άνω φράγμα του A και, επειδή το B δεν είναι κενό, το A είναι άνω φραγμένο. Άρα το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έναν αριθμό που συμβολίζουμε $\sup A$. Ο $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, οπότε $a \le \sup A$ για κάθε $a \in A$. Κάθε $b \in B$ είναι άνω φράγμα του A και το $\sup A$ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, οπότε $\sup A \le b$ για κάθε $b \in B$.

Άρα, αν ορίσουμε $\xi = \sup A$, τότε $a \le \xi \le b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. $\natural$

Υπάρχει, φυσικά, και η **Ιδιότητα Infimum**, που λέει ότι: *κάθε μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο έχει μέγιστο κάτω φράγμα.* Κι αυτή αποδεικνύεται στο Θεώρημα 1.5 βάσει της Ιδιότητας Συνέχειας. Όπως στην Πρόταση 1.12, μπορούμε να αποδείξουμε ότι από την Ιδιότητα Infimum αποδεικνύεται η Ιδιότητα Συνέχειας.

Ασκήσεις.

1. Γιατί τα κάτω φράγματα των $(a,+\infty)$, (a,b), $(a,b]$ είναι μόνο οι $l \leq a$;

2. (1) Βρείτε τα inf, sup των: $\{-1,0,2,5\}$, $[-1,5]$, $(-1,5)$, $(-1,0]\cup(2,5]$. Τι παρατηρείτε; (2) Έστω $\inf A = \inf B$, $\sup A = \sup B$. Συνεπάγεται $A = B$;

3. Βρείτε τα inf, sup των: $\{(-1)^n n : n \in \mathbf{N}\}$, $\{\frac{1+(-1)^n}{2n} + \frac{1-(-1)^n}{2} n : n \in \mathbf{N}\}$, $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$, $\{\frac{n-(-1)^n(n-1)}{2n} : n \in \mathbf{N}\}$, $\{(-1)^n(1+\frac{1}{n}) : n \in \mathbf{N}\}$, $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbf{N}\}$, $\{x + y : 0 < y < 1$ και $4 < x < 5\}$, $\{x - y : 0 < y < 1$ και $4 < x < 5\}$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[2n-1, 2n]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$.

4. Έστω μη κενό A. Περιγράψτε το σύνολο των άνω φραγμάτων του A, διακρίνοντας τις περιπτώσεις: $\sup A = +\infty$, $\sup A < +\infty$.

5. Έστω $a < b$, $A = \{r \in \mathbf{Q} : a < r < b\}$. Βρείτε τα $\inf A$, $\sup A$.

6. (1) Αν $a > 1$, αποδείξτε: $a^x = \sup\{a^s : s \in \mathbf{Q}, s < x\} = \inf\{a^t : t \in \mathbf{Q}, t > x\}$. Τι γίνεται αν $a = 1$ και αν $0 < a < 1$; (2) Έστω $y > 0$. Αν $a > 1$, αποδείξτε: $\log_a y = \sup\{u : a^u \leq y\} = \inf\{v : a^v \geq y\}$. Τι γίνεται αν $0 < a < 1$;

7. Έχοντας υπόψη τα παραδείγματα $A = [0,2]$, $A = [0,2)$, $A = [0,1]\cup\{2\}$ και την Πρόταση 1.11, απαντήστε, γενικά, στα παρακάτω.
   Έστω μη κενό A και $u = \sup A$. Είναι σωστό ότι $A \cap (u-\epsilon, u] \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$; Είναι σωστό ότι $A \cap (u-\epsilon, u) \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$; Ποια είναι η απάντηση στα ίδια ερωτήματα αν, επιπλέον, $u \notin A$;
   Προσαρμόστε όλα τα προηγούμενα στην περίπτωση του $l = \inf A$.

8. Έστω μη κενό A. Αποδείξτε ότι: (i) $\sup A \leq u$ αν και μόνο αν $a \leq u$ για κάθε $a \in A$, (ii) $u \leq \sup A$ αν και μόνο αν για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $a \in A$, $a > \gamma$. Προσαρμόστε όλα τα προηγούμενα στην περίπτωση του $\inf A$.

9. Έστω μη κενά A, B. (1) Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$ αν και μόνο αν ισχύει $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. (2) Έστω $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Περιγράψτε το σύνολο όλων των ξ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. (3) Έστω $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $b - a \leq \epsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$. Συσχετίστε με το (1) της άσκησης 5 της ενότητας 1.2.

10. Έστω μη κενά A, B, $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

11. Έστω μη κενά A, B. Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και κάθε $\gamma < a$ υπάρχει $b \in B$, $b > \gamma$.

12. Έστω μη κενό I ώστε να ισχύει $[x_1, x_2] \subseteq I$ για κάθε $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2$. Αποδείξτε ότι το I είναι διάστημα. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε τα $\inf I$, $\sup I$.)

13. Αποδείξτε την Ιδιότητα Συνέχειας υποθέτοντας την Ιδιότητα Infimum.

14. Έστω μη κενά A, B. Αποδείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

15. (1) Για το μη κενό A ορίζουμε $-A = \{-a : a \in A\}$. Αποδείξτε ότι $\sup(-A) = -\inf A$ και $\inf(-A) = -\sup A$. (2) Για μη κενά A, B ορίζουμε $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Αποδείξτε ότι $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ και $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$. (3) Για μη κενά $A, B \subseteq (0, +\infty)$ ορίζουμε $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Αποδείξτε ότι $\inf(A \cdot B) = \inf A \inf B$ και $\sup(A \cdot B) = \sup A \sup B$.

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες και όρια ακολουθιών.

2.1 Ακολουθίες.

Α. Ακολουθίες, μονότονες ακολουθίες, φραγμένες ακολουθίες.

Χαρακτηρίζουμε **ακολουθία (πραγματικών αριθμών)** *οποιαδήποτε* συνάρτηση $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ η αντίστοιχη τιμή $x(n)$ της συνάρτησης συμβολίζεται, παραδοσιακά, x_n. Δηλαδή,

$$x_n = x(n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Απλοϊκά μιλώντας, ακολουθία είναι *οποιαδήποτε άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά ο καθένας: ο πρώτος αριθμός x_1, ο δεύτερος x_2, ο τρίτος x_3 κλπ.* Οι επιλεγμένοι αριθμοί, δηλαδή οι τιμές της ακολουθίας/συνάρτησης ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας. Ο όρος x_{n+1} χαρακτηρίζεται **επόμενος** του x_n και ο x_{n-1} **προηγούμενος** του x_n. Η ανεξάρτητη μεταβλητή n, η οποία διατρέχει το $\mathbf{N}$, ονομάζεται **δείκτης** και *δείχνει* τη σειρά επιλογής των όρων της ακολουθίας. Αντί του συναρτησιακού συμβόλου $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ χρησιμοποιούμε τα

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \qquad (x_n), \qquad (x_n)_{n=1}^{+\infty}.$$

Μπορούμε, φυσικά, να χρησιμοποιούμε κι άλλα γράμματα, εκτός των x, n, για να συμβολίσουμε ακολουθίες: (y_n), (x_k), (z_m) κλπ.

Παραδείγματα: (1) Η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ ή $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$.

(2) Η ακολουθία (n) ή $(1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$.

(3) Η ακολουθία (1) ή $(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

(4) Η ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$ ή $(1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1, \ldots)$.

(5) Η ακολουθία $\big(\frac{1}{10^n}\big)$ ή $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots)$.

(6) Η ακολουθία με n-οστό όρο ίσο με το πλήθος των θετικών διαιρετών του n, δηλαδή η ακολουθία $(1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, \dots)$.

(7) Η ακολουθία $(m-n)_{n=1}^{+\infty}$ ή $(m-1, m-2, m-3, \dots, m-n, \dots)$.

(8) Η ακολουθία $(m-n)_{m=1}^{+\infty}$ ή $(1-n, 2-n, 3-n, \dots, m-n, \dots)$.

Στα δυο τελευταία παραδείγματα βλέπουμε ότι μερικές φορές χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, αντί του απλούστερου (x_n), για να δηλώσουμε ποιος (ανάμεσα σε διάφορα γράμματα) είναι ο δείκτης της ακολουθίας.

Πρέπει να τονιστεί ότι μια ακολουθία είναι *συνάρτηση*, *δεν* είναι το σύνολο τιμών της. Με πιο απλά λόγια, μια ακολουθία είναι διαδοχική επιλογή αριθμών, *δεν* είναι το σύνολο των αριθμών αυτών. Το σύνολο των όρων της ακολουθίας $(1)_{n=1}^{+\infty}$ είναι το μονοσύνολο $\{1\}$. Η ακολουθία, όμως, είναι η διαδοχική επιλογή $(1, 1, 1, \dots)$. Το πλήθος των όρων μιας ακολουθίας είναι πάντοτε άπειρο, ενώ άλλες ακολουθίες έχουν άπειρο σύνολο όρων και άλλες έχουν πεπερασμένο σύνολο όρων. Επίσης, δυο διαφορετικές ακολουθίες μπορεί να έχουν το ίδιο σύνολο όρων. Για παράδειγμα, οι $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, $(1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots)$ έχουν σύνολο όρων το $\{-1, 1\}$.

Η (x_n) χαρακτηρίζεται **αύξουσα** αν $x_{n+1} \geq x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, **γνησίως αύξουσα** αν $x_{n+1} > x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, **φθίνουσα** αν $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και **γνησίως φθίνουσα** αν $x_{n+1} < x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Η (x_n) χαρακτηρίζεται **μονότονη** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα και **γνησίως μονότονη** αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Η (x_n) χαρακτηρίζεται **σταθερή** αν όλοι οι όροι της ειναι ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή αν υπάρχει c ώστε $x_n = c$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Φυσικά, μια σταθερή ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα.

Η (x_n) χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένη** αν το σύνολο των όρων της είναι άνω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει u ώστε $x_n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Κάθε τέτοιος u χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** της (x_n). Η (x_n) χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει l ώστε $x_n \geq l$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Κάθε τέτοιος l χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** της (x_n). Η (x_n) χαρακτηρίζεται **φραγμένη** αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν l, u ώστε $l \leq x_n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Παραδείγματα: (1) Κάθε σταθερή ακολουθία (c) είναι φραγμένη.

(2) Οι $(\frac{1}{n})$, $\big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big)$, $(\frac{n-1}{n})$, $\big((-1)^{n-1}\big)$ είναι φραγμένες αφού όλοι οι όροι τους ανήκουν στο $[-1, 1]$.

(3) Η $\big(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\big)$ ή $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \dots)$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη. Κάθε $l \leq 0$ είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχει άνω φράγμα u της ακολουθίας αυτής. Τότε $\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2} \leq u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε, δοκιμάζοντας τους περιττούς $n = 2k-1$, ισχύει $2k - 1 \leq u$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Άρα $k \leq \frac{u+1}{2}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Άτοπο.

(4) Η $(-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, 0, \dots)$, δηλαδή η αντίθετη της προηγούμενης, είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη. Αν κάποιος l ήταν κάτω φράγμα της, δηλαδή αν όλοι οι όροι της ήταν $\geq l$, τότε όλοι οι όροι της προηγούμενης ακολουθίας θα ήταν $\leq -l$, οπότε η προηγούμενη ακολουθία θα ήταν άνω φραγμένη.

(5) Η $\big((-1)^{n-1}n\big)$ ή $(1,-2,3,-4,5,-6,\dots)$ δεν είναι άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει u ή l ώστε, αντιστοίχως, $(-1)^{n-1}n \le u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ή $l \le (-1)^{n-1}n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Καταλήγουμε σε άτοπο, δοκιμάζοντας περιττούς ή άρτιους $n \in \mathbf{N}$, αντιστοίχως.

Μια χρήσιμη παρατήρηση: Έστω ότι η (x_n) είναι φραγμένη, δηλαδή ότι υπάρχουν l, u ώστε $l \le x_n \le u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν ορίσουμε $M = \max\{u, -l\}$, τότε είναι $M \ge u$ και $-M \le l$ και, επομένως, $-M \le x_n \le M$ ή, ισοδύναμα, $|x_n| \le M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Πρέπει, επίσης, να παρατηρήσουμε ότι, αν ο u είναι άνω φράγμα της (x_n), τότε κάθε $u' \ge u$ είναι άνω φράγμα της (x_n) και, αν ο l είναι κάτω φράγμα της (x_n), τότε κάθε $l' \le l$ είναι κάτω φράγμα της (x_n).

B. «Τελικά» ή «από κάποιον $n \in \mathbf{N}$ και πέρα» / «για άπειρους $n \in \mathbf{N}$».

Ας υποθέσουμε ότι κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα ισχύει ή όχι ανάλογα με τις τιμές που παίρνει ο $n \in \mathbf{N}$. Για παράδειγμα: «ο n διαιρεί τον 234» ή «ο 4 διαιρεί τον n» ή «ισχύει $n^2 - n > 8$» ή «ισχύει $x_n < x_{n+1}$» για κάποια συγκεκριμένη ακολουθία (x_n). Λέμε ότι η συγκεκριμένη ιδιότητα **ισχύει τελικά** ή, ισοδύναμα, ότι **ισχύει από κάποιον** $n \in \mathbf{N}$ **και πέρα** αν υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε να ισχύει η ιδιότητα αυτή για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Αν ο n είναι ο δείκτης μιας συγκεκριμένης ακολουθίας (x_n) και η ιδιότητα για την οποία μιλάμε αναφέρεται στους όρους της (x_n), τότε λέμε ότι η (x_n) *έχει την ιδιότητα αυτή τελικά* ή, ισοδύναμα, *από κάποιον* $n \in \mathbf{N}$ *και πέρα*. Τέτοιες ιδιότητες είναι για παράδειγμα οι: $x_{n+1} \le x_n$, $x_{n+1} > x_n$, $x_n \le u$, $x_n = c$ κλπ. Αν μια από αυτές τις ιδιότητες ισχύει τελικά, λέμε ότι η (x_n) είναι, αντιστοίχως, *τελικά φθίνουσα*, *τελικά γνησίως αύξουσα*, *τελικά άνω φραγμένη με άνω φράγμα τον* u, *τελικά σταθερή* c κλπ.

Παραδείγματα: (1) Η ακολουθία $(1, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, -2, -1, -1, -1, -1, \dots)$ είναι τελικά σταθερή, διότι είναι σταθερή από τον πέμπτο όρο και πέρα.

(2) Η ακολουθία $(n^2 - 14n + 8)$ είναι τελικά γνησίως αύξουσα. Πράγματι, ο $n^2 - 14n + 8 = (n-7)^2 - 41$ αυξάνει γνησίως για $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 7$ ενώ, αντιθέτως, οι αρχικοί επτά όροι φθίνουν γνησίως.

Έστω μια ιδιότητα που εξαρτάται από τον $n \in \mathbf{N}$. Αν υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$ και θεωρήσουμε οποιονδήποτε ${n_0}' \in \mathbf{N}$, ${n_0}' \ge n_0$, τότε είναι φανερό ότι η ίδια ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge {n_0}'$.

Τώρα, έστω δυο ιδιότητες που εξαρτώνται από τον $n \in \mathbf{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ${n_0}', {n_0}'' \in \mathbf{N}$ ώστε να ισχύει η πρώτη ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge {n_0}'$ και να ισχύει η δεύτερη ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge {n_0}''$. Θεωρούμε τον $n_0 = \max\{{n_0}', {n_0}''\} \in \mathbf{N}$. Επειδή $n_0 \ge {n_0}'$, η πρώτη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Επίσης, επειδή $n_0 \ge {n_0}''$, η δεύτερη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Άρα ισχύουν και οι δυο (ταυτόχρονα) ιδιότητες για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Το σχήμα που περιγράψαμε διατυπώνεται ως εξής: *αν μια ιδιότητα ισχύει τελικά και μια άλλη ιδιότητα ισχύει κι αυτή τελικά, τότε ισχύουν και οι δυο (ταυτόχρονα) ιδιότητες τελικά.*

Παράδειγμα: Ισχύει $n^2-3n\geq 37$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq\frac{\sqrt{157}+3}{2}$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 8$. Επίσης, ισχύει $\frac{2n+1}{n+1}>\frac{25}{13}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n>12$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 13$. Άρα ισχύει $n^2-3n\geq 37$ *και* $\frac{2n+1}{n+1}>\frac{25}{13}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq\max\{8,13\}=13$.

Αυτά ισχύουν και για τρεις ή τέσσερις ή, γενικά, πεπερασμένες ιδιότητες: αντί να θεωρήσουμε τον μέγιστο από δυο φυσικούς, τους $n_0{}'$, $n_0{}''$, θα θεωρήσουμε τον μέγιστο από τρεις ή τέσσερις φυσικούς. Δε μπορούμε, όμως, να επεκτείνουμε το παραπάνω επιχείρημα σε άπειρες ιδιότητες διότι άπειροι φυσικοί μπορεί να μην έχουν μέγιστο!

Το νόημα του ότι μια ιδιότητα **ισχύει για άπειρους** $n\in\mathbf{N}$ είναι σαφές.

Παράδειγμα: Ισχύει $(-1)^{n-1}>0$ για άπειρους $n\in\mathbf{N}$, αφού ισχύει για κάθε περιττό $n\in\mathbf{N}$. Ομοίως, ισχύει και η αντίθετη ιδιότητα $(-1)^{n-1}\leq 0$ για άπειρους $n\in\mathbf{N}$, αφού ισχύει για κάθε άρτιο $n\in\mathbf{N}$. Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι μπορεί μια ιδιότητα να ισχύει για άπειρους $n\in\mathbf{N}$ αλλά να μην είναι σωστό ότι ισχύει από κάποιον $n\in\mathbf{N}$ και πέρα.

Έστω μια ιδιότητα που εξαρτάται από τον $n\in\mathbf{N}$. Αν $n_0\in\mathbf{N}$ και η ιδιότητα ισχύει για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq n_0$, τότε η αντίθετη ιδιότητα ισχύει το πολύ για κάποιους $n\in\mathbf{N}$, $1\leq n\leq n_0-1$, δηλαδή το πολύ για πεπερασμένους $n\in\mathbf{N}$. Αντιστρόφως, αν η αντίθετη ιδιότητα ισχύει το πολύ για πεπερασμένους $n\in\mathbf{N}$, τότε υπάρχει $n_0\in\mathbf{N}$ ώστε η αντίθετη ιδιότητα να μην ισχύει για κανέναν $n\in\mathbf{N}$, $n\geq n_0$ ή, ισοδύναμα, η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq n_0$. Δηλαδή, *μια ιδιότητα ισχύει τελικά αν και μόνο αν η αντίθετη ιδιότητα ισχύει το πολύ για πεπερασμένους* $n\in\mathbf{N}$.

Ασκήσεις.

1. Οι έξι πρώτοι όροι μιας άγνωστης ακολουθίας είναι: $1,4,9,16,\ 25,36$. Ο έβδομος είναι: ο 49; ο 24; οποιοσδήποτε αριθμός;

2. (1) Βρείτε το σύνολο των όρων της $\left(\frac{a+b}{2}+(-1)^{n-1}\frac{a-b}{2}\right)$. (2) Αν $m\in\mathbf{N}$, βρείτε το σύνολο των όρων της $\left(n-m[\frac{n}{m}]\right)_{n=1}^{+\infty}$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε πρώτα τις περιπτώσεις $m=1,2,3,4$.)

3. **Γραμμικοί αναδρομικοί τύποι**. Έστω αριθμοί a,b,p,q, όπου οι p,q δεν είναι και οι δυο 0. Έστω (x_n) που ορίζεται από τους δυο πρώτους όρους της και από *αναδρομικό τύπο* ως εξής: $x_1=a, x_2=b$ και $x_{n+2}=px_{n+1}+qx_n$ $(n\in\mathbf{N})$. Θα περιγράψουμε γενική μέθοδο υπολογισμού του n-οστού όρου x_n.
   Περίπτωση 1: $p\neq 0, q=0$. Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $x_n=bp^{n-2}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$.
   Περίπτωση 2: $p=0, q\neq 0$. Αποδείξτε ότι $x_n=aq^{\frac{n-1}{2}}$ για κάθε περιττό $n\in\mathbf{N}$ και $x_n=bq^{\frac{n-2}{2}}$ για κάθε άρτιο $n\in\mathbf{N}$.
   Περίπτωση 3: $p\neq 0, q\neq 0$. Θεωρήστε την εξίσωση $x^2=px+q$. (i) Αν

$\Delta = p^2 + 4q > 0$, υπάρχουν δυο λύσεις, οι $\rho_1 = \frac{p+\sqrt{\Delta}}{2}$, $\rho_2 = \frac{p-\sqrt{\Delta}}{2}$. Βρείτε κ, λ ώστε $\kappa + \lambda = a$, $\kappa\rho_1 + \lambda\rho_2 = b$. Αποδείξτε ότι $x_n = \kappa{\rho_1}^{n-1} + \lambda{\rho_2}^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$. (ii) Αν $\Delta = p^2 + 4q = 0$, υπάρχει μια λύση, η $\rho = \frac{p}{2}$. Βρείτε κ, λ ώστε $\kappa = a$, $\kappa\rho + \lambda\rho = b$. Αποδείξτε ότι $x_n = \kappa\rho^{n-1} + \lambda(n-1)\rho^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$. (iii) Αν $\Delta = p^2 + 4q < 0$ (οπότε $q < 0$), υπάρχουν δυο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, οι $\rho_1 = \frac{p+i\sqrt{-\Delta}}{2}$, $\rho_2 = \frac{p-i\sqrt{-\Delta}}{2}$. Πάρτε $\rho = \sqrt{-q} > 0$, οπότε $\left(\frac{p}{2\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho}\right)^2 = 1$ και, επομένως, υπάρχει μοναδικός $\theta \in [0, 2\pi)$ ώστε $\cos\theta = \frac{p}{2\rho}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho}$. Συνεπάγεται $\rho_1 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\rho_2 = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$. Αποδείξτε ότι $\rho^2\cos(2\theta) = p\rho\cos\theta + q$, $\rho^2\sin(2\theta) = p\rho\sin\theta$. Βρείτε κ, λ ώστε $\kappa = a$, $\rho(\kappa\cos\theta + \lambda\sin\theta) = b$ και αποδείξτε ότι $x_n = \kappa\rho^{n-1}\cos\big((n-1)\theta\big) + \lambda\rho^{n-1}\sin\big((n-1)\theta\big)$ $(n \in \mathbf{N})$.
Υπολογίστε τον n-οστό όρο καθεμιάς από τις τέσσερις ακολουθίες που ορίζονται με πρώτους όρους $x_1 = x_2 = 1$ και με τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+2} = 3x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$. Η δεύτερη ακολουθία ονομάζεται **ακολουθία Fibonnaci** και οι εφτά αρχικοί όροι της είναι οι $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$.

4. Ποιοι αρχικοί όροι (και με τι περιορισμούς) χρειάζονται για να ορισθεί η (x_n) με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n$ $(n \in \mathbf{N})$; Ίδια ερώτηση για τον αναδρομικό τύπο $x_{n+3} = \frac{x_{n+2}x_n}{x_{n+1}}$ $(n \in \mathbf{N})$.

5. Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα, αποδείξτε ότι είναι σταθερή. Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη και ότι κάθε φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη.

6. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι *τελικά* μονότονες; άνω φραγμένες; κάτω φραγμένες; φραγμένες; $((-1)^{n-1}n)$, $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$, $\left(\frac{1-8n}{n^2+n+1}\right)$, $\left(\frac{13^n}{n!}\right)$, $\left(\frac{n^{30}}{2^n}\right)$, $\left(2[\frac{n}{2}]\right)$, $\left(n - 3[\frac{n}{3}]\right)$.

7. Αποδείξτε ότι, αν μια ακολουθία είναι τελικά άνω φραγμένη, τότε είναι άνω φραγμένη. Το ίδιο ισχύει αν αντικαταστήσουμε το «άνω φραγμένη» με «κάτω φραγμένη» ή με «φραγμένη».

2.2 Όρια ακολουθιών.

Λέμε ότι **η** (x_n) **συγκλίνει στον αριθμό** x ή ότι **η** (x_n) **τείνει στον** x ή ότι **ο** x **είναι το όριο της** (x_n) αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$ *ώστε* $|x_n - x| < \epsilon$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Πιο συνοπτικά: *η* (x_n) *συγκλίνει στον* x *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *ισχύει τελικά* $|x_n - x| < \epsilon$.

Το ότι η (x_n) συγκλίνει στον x το συμβολίζουμε

$$x_n \to x \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = x \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Αν η (x_n) δε συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, λέμε ότι **η** (x_n) **αποκλίνει**.

Προσοχή: Όταν αποδεικνύουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, θεωρούμε έναν τυχαίο $\epsilon > 0$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός $n_0 \in \mathbf{N}$ (ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ) τέτοιου ώστε «*από* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ *να συνεπάγεται* $|x_n - x| < \epsilon$» ή, ισοδύναμα, ώστε «*να ισχύει* $|x_n - x| < \epsilon$ *αρκεί να ισχύει* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$». Δείτε: το λογικό σχήμα «P συνεπάγεται Q» είναι το ίδιο με το «Q αρκεί P» ή, με σύμβολα, το $P \Rightarrow Q$ είναι το ίδιο με το $Q \Leftarrow P$.

Παραδείγματα: (1) Η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ συγκλίνει στον 0: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Για $n \in \mathbf{N}$, ισχύει $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $\frac{1}{n} < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $n > \frac{1}{\epsilon}$. Το Θεώρημα 1.1 λέει ότι *υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$, $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Προφανώς, η ανισότητα $n > \frac{1}{\epsilon}$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα *υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ να ισχύει $n > \frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως, $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$.

Μπορούμε (αν και δεν είναι υποχρεωτικό) να βρούμε *συγκεκριμένο* $n_0 \in \mathbf{N}$.

Λήμμα 2.1 *Αν $a \geq 0$, ο $n_0 = [a] + 1$ είναι ο ελάχιστος $n \in \mathbf{N}$, $n > a$. Αν $a < 0$, ο $n_0 = 1$ είναι ο ελάχιστος $n \in \mathbf{N}$, $n > a$.*

Απόδειξη: Προφανής. ♮

Για παράδειγμα: ο ελάχιστος $n \in \mathbf{N}$, $n > -3$ είναι ο 1, ο ελάχιστος $n \in \mathbf{N}$, $n > \frac{8}{3}$ είναι (επειδή $2 < \frac{8}{3} < 3$) ο $3 = [\frac{8}{3}] + 1$ και ο ελάχιστος $n \in \mathbf{N}$, $n > 2$ είναι και πάλι ο $3 = 2 + 1 = [2] + 1$.

Πίσω στο παράδειγμά μας. Ο $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ είναι ο ελάχιστος $n \in \mathbf{N}$, $n > \frac{1}{\epsilon}$. Άρα, γι αυτόν τον $n_0 \in \mathbf{N}$, ισχύει $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

(2) Η σταθερή ακολουθία (c) συγκλίνει στον c: $\lim_{n\to+\infty} c = c$.

Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|c - c| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Ισχύει $|c - c| < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $0 < \epsilon$. Προφανώς, η $0 < \epsilon$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα υπάρχει ο συγκεκριμένος $n_0 = 1 \in \mathbf{N}$ ώστε $|c - c| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

(3) Η $\big((-1)^{n-1}\big)$ δε συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, δηλαδή αποκλίνει.

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η $\big((-1)^{n-1}\big)$ συγκλίνει σε κάποιον x. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|(-1)^{n-1} - x| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Όμως, όποιος κι αν είναι ο n_0, υπάρχουν *άρτιοι και περιττοί* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $|-1 - x| < \epsilon$ (από τους άρτιους $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$) και $|1 - x| < \epsilon$ (από τους περιττούς $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$). Από το «$|-1 - x| < \epsilon$ για *κάθε* $\epsilon > 0$» συνεπάγεται $x = -1$ και από το «$|1 - x| < \epsilon$ για *κάθε* $\epsilon > 0$» συνεπάγεται $x = 1$. Άρα $1 = -1$!

Λέμε ότι **η** (x_n) **αποκλίνει στο** $+\infty$ ή ότι **η** (x_n) **τείνει στο** $+\infty$ ή ότι **το** $+\infty$ **είναι το όριο της** (x_n) αν *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$ *ώστε* $x_n > M$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Πιο συνοπτικά: *η* (x_n) *αποκλίνει στο* $+\infty$ *αν για κάθε* $M > 0$ *ισχύει τελικά* $x_n > M$.

Το ότι η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ το συμβολίζουμε

$$x_n \to +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty\,.$$

Επίσης, λέμε ότι **η** (x_n) **αποκλίνει στο** $-\infty$ ή ότι **η** (x_n) **τείνει στο** $-\infty$ ή ότι **το** $-\infty$ **είναι το όριο της** (x_n) αν *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$ *ώστε* $x_n < -M$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Πιο συνοπτικά: *η* (x_n) *αποκλίνει στο* $-\infty$ *αν για κάθε* $M > 0$ *ισχύει τελικά* $x_n < -M$.

Το ότι η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$ το συμβολίζουμε

$$x_n \to -\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = -\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty\,.$$

Παραδείγματα: (1) Η ακολουθία (n) αποκλίνει στο $+\infty$: $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Έστω $M > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $n > M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1, υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$, $n_0 > M$. Προφανώς, η ανισότητα $n > M$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

Μπορούμε (χωρίς να είναι υποχρεωτικό) να θεωρήσουμε τον *συγκεκριμένο* $n_0 = [M] + 1 \in \mathbf{N}$ και, γι αυτόν τον n_0, ισχύει $n > M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

(2) Η $(\sqrt{n})$ αποκλίνει στο $+\infty$: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Έστω $M > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\sqrt{n} > M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Επειδή $M > 0$, ισχύει $\sqrt{n} > M$ αρκεί να ισχύει $n > M^2$. Άρα, αν θεωρήσουμε τον $n_0 = [M^2] + 1 \in \mathbf{N}$, βλέπουμε ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > M^2$ και, επομένως, $\sqrt{n} > M$.

(3) Με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή μελετώντας τις ανισότητες $-n < -M$ (ισοδύναμη με την $n > M$), $-\sqrt{n} < -M$ (ισοδύναμη με την $\sqrt{n} > M$), βλέπουμε ότι: $\lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty$.

(4) Η $\big((-1)^{n-1}n\big)$ ή $(1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$ δεν αποκλίνει στα $\pm\infty$.

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $(-1)^{n-1}n > M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Όποιος κι αν είναι ο n_0, υπάρχουν *άρτιοι και περιττοί* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Επομένως, ισχύει $-n > M$ για τους άρτιους $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ και $n > M$ για τους περιττούς $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Όμως, το $-n > M > 0$ είναι, προφανώς, αδύνατο, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Ομοίως, το ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$ οδηγεί σε άτοπο.

Ας δούμε, τώρα, μερικά λίγο πιο γενικά και σημαντικά παραδείγματα.

Παραδείγματα: (1) Γενίκευση της $(\frac{1}{n})$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0 \quad (a > 0).$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Για $n \in \mathbf{N}$, ισχύει $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $\frac{1}{n^a} < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $n^a > \frac{1}{\epsilon}$ αρκεί να ισχύει $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}}$. Επειδή $(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}} \geq 0$, αν θεωρήσουμε τον $n_0 = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}}] + 1 \in \mathbf{N}$, τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$.

(2) Γενίκευση των (n) και $(\sqrt{n})$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n \to +\infty} n^a = +\infty \quad (a > 0).$$

Έστω $M > 0$. Για $n \in \mathbf{N}$, ισχύει $n^a > M$ αρκεί να ισχύει $n > M^{\frac{1}{a}}$. Άρα, αν θεωρήσουμε τον $n_0 = [M^{\frac{1}{a}}] + 1 \in \mathbf{N}$, τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > M^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $n^a > M$.

(3) Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n \to +\infty} \log_a n = +\infty \quad (a > 1).$$

Έστω $M > 0$. Για $n \in \mathbf{N}$, ισχύει $\log_a n > M$ αρκεί να ισχύει $n > a^M$. Θεωρώντας τον $n_0 = [a^M] + 1 \in \mathbf{N}$, βλέπουμε ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > a^M$ και, επομένως, $\log_a n > M$.

(4) **Γεωμετρική πρόοδος.** Θεωρούμε την ακολουθία $(a, a^2, a^3, a^4, \dots)$, δηλαδή την (a^n). Η ακολουθία αυτή είναι γνωστή από το λύκειο και ονομάζεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο** a.

Αν $a = 1$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (1) η οποία συγκλίνει στον 1. Επίσης, αν $a = 0$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (0) η οποία συγκλίνει στον 0.

Αν $a \leq -1$, οι όροι της (a^n) είναι $a \leq -1$, $a^2 \geq 1$, $a^3 \leq -1$, $a^4 \geq 1, \dots$. Θα αποδείξουμε ότι η (a^n) δεν έχει κανένα όριο. Κατ΄ αρχάς, έστω ότι η (a^n) συγκλίνει σε κάποιον x. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|a^n - x| < 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $x > 0$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ και $x < 0$ για κάθε περιττό $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $x > 0$ και $x < 0$, το οποίο είναι άτοπο. Κατόπιν, έστω ότι η (a^n) αποκλίνει στο $+\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $a^n > M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Αυτό είναι αδύνατο για τους περιττούς $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Ομοίως, η (a^n) δεν αποκλίνει στο $-\infty$.

Αν $0 < |a| < 1$, θα δούμε ότι η (a^n) συγκλίνει στον 0. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, ισχύει $|a^n - 0| < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $|a|^n < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $n > \log_{|a|} \epsilon$. Τώρα, είναι $\log_{|a|} \epsilon \geq 0$, αν $0 < \epsilon \leq 1$, και $\log_{|a|} \epsilon < 0$, αν $\epsilon > 1$. Θεωρούμε τον $n_0 = [\log_{|a|} \epsilon] + 1 \in \mathbf{N}$, όταν $\epsilon \leq 1$, και τον $n_0 = 1 \in \mathbf{N}$, όταν $\epsilon > 1$. Τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > \log_{|a|} \epsilon$ και, επομένως, $|a^n - 0| < \epsilon$.

Αν $a > 1$, θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε, ισχύει $a^n > M$ αρκεί να ισχύει $n > \log_a M$. Θεωρούμε τον $n_0 = [\log_a M] + 1 \in \mathbf{N}$, αν $M \geq 1$, και τον $n_0 = 1 \in \mathbf{N}$, αν $0 < M < 1$. Τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $n > \log_a M$ και, επομένως, $a^n > M$.

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα για τη γεωμετρική πρόοδο:

$$\lim_{n \to +\infty} a^n \begin{cases} = +\infty, & a > 1, \\ = 1, & a = 1, \\ = 0, & -1 < a < 1, \\ \text{δεν υπάρχει}, & a \leq -1. \end{cases}$$

Δείτε: *θα γνωρίσουμε λίγο αργότερα δυο τρόπους (την Πρόταση 2.3(3) και την Πρόταση 2.24) για να αποδεικνύουμε ότι μια συγκεκριμένη ακολουθία δεν έχει όριο, παρακάμπτοντας τους ορισμούς των ορίων.*

Προσοχή: Χρησιμοποιούμε τη λέξη «όριο» και τα σύμβολα $\to$, $\lim$, $\lim_{n\to+\infty}$ σε όλες τις περιπτώσεις που η ακολουθία έχει όριο, είτε συγκλίνει σε αριθμό είτε αποκλίνει σε ένα από τα $\pm\infty$. Χρησιμοποιούμε το ρήμα «συγκλίνει» μόνο όταν το όριο είναι αριθμός και το ρήμα «αποκλίνει» σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή όταν το όριο δεν υπάρχει ή είναι ένα από τα $\pm\infty$. Όταν γράφουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n$, χωρίς άλλη επισήμανση, εννοούμε ότι το όριο είναι στοιχείο του $\overline{\mathbf{R}}$. Όταν, όμως, γράφουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ (ή άλλο γράμμα), εννοούμε ότι το $\lim_{n\to+\infty} x_n$ είναι ο *αριθμός* x, εκτός αν γράφουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n = x \in \overline{\mathbf{R}}$ ή κάτι ανάλογο.

Ασκήσεις.

1. Βάσει παραδειγμάτων της ενότητας αυτής βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{3^{2n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \log_3 n$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{3^n}$.

2. Για ποιες τιμές του x υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(2x+1)^n}$;

3. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς, αποδείξτε τα όρια: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+8} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \frac{3}{2}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} = 0$, $\lim_{n\to+\infty}(n^2 - 7n) = +\infty$.

4. (1) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{3+(-1)^n}{2n} = 0$, ότι $\frac{3+(-1)^n}{2n} > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και ότι η $\big(\frac{3+(-1)^n}{2n}\big)$ *δεν είναι φθίνουσα* (ούτε τελικά φθίνουσα). (2) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2} = +\infty$ και ότι η $\big(\frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2}\big)$ *δεν είναι αύξουσα* (ούτε τελικά αύξουσα).

5. (1) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Για κάθε $\epsilon > 0$ έστω $n_0(\epsilon)$ ο *ελάχιστος* $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Αποδείξτε ότι, αν $0 < \epsilon' < \epsilon$, τότε $n_0(\epsilon') \geq n_0(\epsilon)$. (2) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Για κάθε $M > 0$ έστω $n_0(M)$ ο *ελάχιστος* $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n > M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Αποδείξτε ότι, αν $M' > M > 0$, τότε $n_0(M') \geq n_0(M)$.

6. Συμφωνείτε με τα παρακάτω; (1) Η (x_n) *δε* συγκλίνει στον x αν και μόνο αν *υπάρχει* $\epsilon_0 > 0$ *ώστε* $|x_n - x| \geq \epsilon_0$ *για άπειρους* $n \in \mathbf{N}$. (2) Η (x_n) *δεν* αποκλίνει στο $+\infty$ αν και μόνο αν *υπάρχει* $M_0 > 0$ *ώστε* $x_n \leq M_0$ *για άπειρους* $n \in \mathbf{N}$. (3) Η (x_n) *δεν* αποκλίνει στο $-\infty$ αν και μόνο αν *υπάρχει* $M_0 > 0$ *ώστε* $x_n \geq -M_0$ *για άπειρους* $n \in \mathbf{N}$.

7. (1) Έστω $\epsilon_0 > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ αν και μόνο αν για κάθε ϵ, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$. (2) Έστω $M_0 > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M \geq M_0$ ισχύει τελικά $x_n > M$.

8. Έστω x και ακολουθία (x_n). (1) Προφανώς, αν για *κάποιον* $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$, τότε για *τον ίδιο* ϵ ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq \epsilon$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει. (Παράδειγμα: $x_n = (-1)^{n-1}$, $x = 0$, $\epsilon = 1$.) Αποδείξτε ότι: για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq \epsilon$. (2) Προφανώς, αν για *κάποιον* $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$, τότε για *τον ίδιο* M ισχύει τελικά $x_n \geq M$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει. (Παράδειγμα: $x_n = 1$, $M = 1$.) Αποδείξτε ότι: για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n \geq M$.

2.3 Περιοχές.

Θα ξαναδιατυπώσουμε τους ορισμούς του ορίου ακολουθίας με διαφορετικό τρόπο, αφού εισαγάγουμε μερικούς νέους όρους.

Έστω $\epsilon > 0$. Το διάστημα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ ονομάζεται **ϵ-περιοχή του** x και συμβολίζεται

$$N_x(\epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon).$$

Αν δε θέλουμε να αναφέρουμε τον συγκεκριμένο ϵ, χρησιμοποιούμε τον όρο **περιοχή του** x και το σύμβολο N_x. Για παράδειγμα, όταν λέμε «υπάρχει κάποια περιοχή N_x του x ώστε να ισχύει …» εννοούμε «υπάρχει κάποιος $\epsilon > 0$ ώστε για την περιοχή $N_x(\epsilon)$ του x να ισχύει …» και όταν λέμε «για κάθε περιοχή N_x του x ισχύει …» εννοούμε «για κάθε $\epsilon > 0$, για την περιοχή $N_x(\epsilon)$ του x ισχύει …».

Έστω $\epsilon > 0$. Το $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$ ονομάζεται **ϵ-περιοχή του** $+\infty$ και το $(-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ ονομάζεται **ϵ-περιοχή του** $-\infty$. Συμβολίζουμε

$$N_{+\infty}(\epsilon) = \Big(\frac{1}{\epsilon}, +\infty\Big), \qquad N_{-\infty}(\epsilon) = \Big(-\infty, -\frac{1}{\epsilon}\Big).$$

Αν δεν αναφέρουμε τον συγκεκριμένο ϵ, χρησιμοποιούμε τους όρους **περιοχή του** $\pm\infty$ και τα αντίστοιχα σύμβολα $N_{\pm\infty}$. Μέσω των αντίστροφων τύπων $M = \frac{1}{\epsilon}$, $\epsilon = \frac{1}{M}$ τα διαστήματα $(M, +\infty)$ $(M > 0)$ είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$ $(\epsilon > 0)$ και τα $(-\infty, -M)$ $(M > 0)$ είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα $(-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ $(\epsilon > 0)$.

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε (δείτε την άσκηση 1) ότι *όταν μικραίνει ο ϵ (και το $x \in \overline{\mathbf{R}}$ μένει αμετάβλητο), τότε η αντίστοιχη περιοχή $N_x(\epsilon)$ μικραίνει.*

Παρατηρήστε ότι η συνθήκη $|x_n - x| < \epsilon$ στον ορισμό του $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ γράφεται, ισοδύναμα, $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in N_x(\epsilon)$. Ομοίως, οι $x_n > M$ και $x_n < -M$ που αναφέρονται στους ορισμούς των $\lim_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty$ γράφονται, ισοδύναμα, $x_n \in (M, +\infty)$ και $x_n \in (-\infty, -M)$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in N_{+\infty}(\epsilon)$ και $x_n \in N_{-\infty}(\epsilon)$, όπου $\epsilon = \frac{1}{M}$.

Μπορούμε, τώρα, να διατυπώσουμε *και τους τρεις* ορισμούς ορίων ως *έναν* ορισμό, ως εξής. Έστω $x \in \overline{\mathbf{R}}$. *Είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.* Ακόμη πιο συνοπτικά: *είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ αν για κάθε περιοχή N_x του x ισχύει τελικά $x_n \in N_x$.*

Ασκήσεις.

1. Έστω $x \in \overline{\mathbf{R}}$. Αποδείξτε (διακρίνοντας τις περιπτώσεις: $x \in \mathbf{R}$, $x = +\infty$, $x = -\infty$) ότι, αν $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, τότε $N_x(\epsilon_1) \subseteq N_x(\epsilon_2)$.

2. Έστω $x \in \mathbf{R}$. (1) Αποδείξτε ότι $\bigcap_{\epsilon>0} N_x(\epsilon) = \{x\}$. Με λόγια: ο μοναδικός αριθμός που ανήκει σε όλες τις περιοχές του x είναι ο ίδιος ο x. (2) Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} N_x(\frac{1}{n}) = \{x\}$.
   Ποια είναι τα αντίστοιχα αποτελέσματα αν $x = \pm\infty$;

2.4 Ιδιότητες σχετικές με όρια ακολουθιών.

Πρόταση 2.1 *Έστω ότι οι (x_n), (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Αν η μια ακολουθία έχει κάποιο όριο, τότε και η άλλη έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη: Το ότι οι (x_n), (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα σημαίνει ότι υπάρχουν $k_0, m_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_{k_0} = y_{m_0}\,, x_{k_0+1} = y_{m_0+1}\,, x_{k_0+2} = y_{m_0+2}\,, \dots$.

Υποθέτουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ και θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} y_n = a$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - a| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Θεωρούμε τον $n_0{}' = \max\{n_0, k_0\} \in \mathbf{N}$, οπότε $n_0{}' \geq n_0$ και $n_0{}' \geq k_0$. Επειδή $n_0{}' \geq n_0$, ισχύει $|x_n - a| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0{}'$. Ισοδύναμα: $|x_{n-m_0+k_0} - a| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0{}' + m_0 - k_0$. Επειδή $n_0{}' \geq k_0$, ισχύει $y_n = x_{n-m_0+k_0}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0{}' + m_0 - k_0$. Άρα υπάρχει ο $n_0{}'' = n_0{}' + m_0 - k_0 \in \mathbf{N}$, ώστε $|y_n - a| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0{}''$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} y_n = a$.

Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, επαναλαμβάνουμε τα ίδια, ξεκινώντας με $M > 0$ (αντί $\epsilon > 0$) και γράφοντας $x_n > M$ (αντί $|x_n - a| < \epsilon$) κλπ. ♮

Παραδείγματα: (1) Δείτε τις $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$, $(-2, 5, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$. Η πρώτη συγκλίνει στον 0. Η δεύτερη ταυτίζεται, από τον τρίτο όρο της και πέρα, με την πρώτη, από τον τέταρτο όρο της και πέρα, οπότε κι αυτή συγκλίνει στον 0.

(2) Έστω ότι η (x_n) έχει όριο. Η (x_n) γράφεται $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$. Τότε η $(x_2, x_3, x_4, x_5, \dots)$, δηλαδή η (x_{n+1}), έχει το ίδιο όριο με την (x_n). Το ίδιο ισχύει για την $(x_3, x_4, x_5, x_6, \dots)$, δηλαδή την (x_{n+2}). Γενικότερα, αν $m \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+m} = \lim_{n\to+\infty} x_n\,.$$

Για παράδειγμα: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \log_2(n+8) = +\infty$.

Όλες οι προτάσεις αυτής της ενότητας είναι χρήσιμες. Όμως, *οι απλές Προτάσεις 2.2, 2.3 είναι πολύ σημαντικές για την κατανόηση της έννοιας του ορίου.*

Πρόταση 2.2 *Έστω ότι υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} x_n$.*
(1) Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n > u$, τότε ισχύει τελικά $x_n > u$.
(2) Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n < l$, τότε ισχύει τελικά $x_n < l$.
(3) Αν $u < \lim_{n\to+\infty} x_n < l$, τότε ισχύει τελικά $u < x_n < l$.

Απόδειξη: (1) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ και $x > u$. Επειδή $x - u > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - x| < x - u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $x_n > x-(x-u) = u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Θεωρούμε τον $M = \max\{u, 1\}$, οπότε $M \geq u$ και $M \geq 1 > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n > M \geq u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.
(2) Ομοίως.
(3) Από το (1) ισχύει τελικά $x_n > u$ και από το (2) ισχύει τελικά $x_n < l$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > u$ και $x_n < l$. ♮

Πρόταση 2.3 (1) *Αν $x_n \geq l$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ και υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} x_n$, τότε είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n \geq l$.*
(2) *Αν $x_n \leq u$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ και υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} x_n$, τότε είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n \leq u$.*
(3) *Αν $u < l$ και $x_n \leq u$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ και $x_n \geq l$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$, τότε η (x_n) δεν έχει όριο.*

Απόδειξη: (1) Αν ήταν $\lim_{n\to+\infty} x_n < l$, θα ίσχυε τελικά $x_n < l$, οπότε θα ίσχυε $x_n \geq l$ (η αντίθετη ιδιότητα) για το πολύ πεπερασμένους $n \in \mathbf{N}$.
(2) Ομοίως.
(3) Αν η (x_n) είχε όριο, το όριο αυτό θα ήταν $\leq u$ και $\geq l$, οπότε $l \leq u$. ♮

Παραδείγματα: (1) Αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} x_n$ και $x_n \in [l, u]$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$, τότε και το $\lim_{n\to+\infty} x_n$ ανήκει στο $[l, u]$.

(2) Αν $a \leq -1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος (a^n) δεν έχει όριο, αφού ισχύει $a^n \geq 1$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ και $a^n \leq -1$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$.

(3) Η $\big((-1)^{n-1}n\big)$ δεν έχει όριο, αφού ισχύει $(-1)^{n-1}n \geq 1$ για κάθε περιττό $n \in \mathbf{N}$ και $(-1)^{n-1}n \leq -1$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbf{N}$.

(4) Η $\big(n - 3[\frac{n}{3}]\big)$ δεν έχει όριο, αφού είναι $n - 3[\frac{n}{3}] = 0$ για $n = 3k \ \ (k \in \mathbf{N})$ και $n - 3[\frac{n}{3}] = 1$ για $n = 3k + 1 \ \ (k \in \mathbf{N})$.

Πρόταση 2.4 ***Μοναδικότητα ορίου***. *Καμιά ακολουθία δεν έχει δυο διαφορετικά όρια.*

Απόδειξη: Έστω ότι η (x_n) έχει δυο διαφορετικά όρια. Έστω a γνησίως ανάμεσα στα δυο αυτά όρια. Από την Πρόταση 2.2, ισχύει τελικά $x_n > a$ και, επίσης, ισχύει τελικά $x_n < a$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > a$ και $x_n < a$. Άτοπο. ♮

Πρόταση 2.5 *Αν $x_n \leq y_n$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ και υπάρχουν τα $\lim_{n\to+\infty} x_n$, $\lim_{n\to+\infty} y_n$, τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n \leq \lim_{n\to+\infty} y_n$.*

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n > \lim_{n\to+\infty} y_n$. Θεωρούμε a ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n > a > \lim_{n\to+\infty} y_n$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > a$ και ισχύει τελικά $a > y_n$. Επομένως, ισχύει τελικά $x_n > a$ και $a > y_n$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > y_n$ και, επομένως, ισχύει $x_n \leq y_n$ για το πολύ πεπερασμένους $n \in \mathbf{N}$. Άτοπο. ♮

Παράδειγμα: $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι, αν $x_n < y_n$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ και υπάρχουν τα $\lim_{n\to+\infty} x_n$, $\lim_{n\to+\infty} y_n$, τότε δε συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} x_n < \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Από το ότι $x_n < y_n$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ συνεπάγεται $x_n \leq y_n$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} x_n \leq \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Πρόταση 2.6 *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$.*
(1) *Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.*
(2) *Αν $\lim_{n\to+\infty} y_n = -\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.*

Απόδειξη: (1) Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επειδή ισχύει τελικά $y_n \geq x_n$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n > M$ και $y_n \geq x_n$. Άρα ισχύει τελικά $y_n > M$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.
(2) Ομοίως. ♮

Παραδείγματα: (1) Ισχύει $n + (-1)^{n-1} + 1 \geq n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} \big(n + (-1)^{n-1} + 1\big) = +\infty$.

(2) Επειδή ισχύει $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \geq n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{n+2} = +\infty$.

(3) Ισχύει $[\sqrt{n}] + 1 > \sqrt{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}([\sqrt{n}] + 1) = +\infty$.

Πρόταση 2.7 ***Παρεμβολή***. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n \leq z_n$. Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = a$, τότε $\lim_{n\to+\infty} y_n = a$.*

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - a| < \epsilon$ και, επίσης, ισχύει τελικά $|z_n - a| < \epsilon$. Άρα ισχύει τελικά $|x_n - a| < \epsilon$ και $|z_n - a| < \epsilon$ και $x_n \leq y_n \leq z_n$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > a-\epsilon$ και $z_n < a+\epsilon$ και $x_n \leq y_n \leq z_n$. Άρα ισχύει τελικά $a - \epsilon < y_n < a + \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $|y_n - a| < \epsilon$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} y_n = a$. ♮

Παραδείγματα: (1) Ισχύει $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^{n-1}}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$.

(2) Ομοίως, ισχύει $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

Πρόταση 2.8 *Αν μια ακολουθία συγκλίνει, τότε αυτή είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - x| < 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Από την $|x_n - x| < 1$ συνεπάγεται $|x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$. Άρα $|x_n| < 1 + |x|$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Ορίζουμε $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x|\}$ και βλέπουμε ότι $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $1 \leq n \leq n_0 - 1$ και $|x_n| < 1 + |x| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. ♮

Παράδειγμα: Δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 2.8. Η ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$ είναι φραγμένη αλλά δε συγκλίνει.

Πρόταση 2.9 (1) *Αν μια ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$, τότε αυτή είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.*
(2) *Αν μια ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$, τότε αυτή είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.*

Απόδειξη: (1) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n > 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Ορίζουμε $l = \min\{x_1, \ldots, x_{n_0-1}, 1\}$, οπότε $x_n \geq l$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $1 \leq n \leq n_0 - 1$ και $x_n > 1 \geq l$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $x_n \geq l$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αντιθέτως, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n > M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Επομένως, κανένας $M > 0$ δεν είναι άνω φράγμα της (x_n), οπότε η (x_n) δεν έχει κανένα άνω φράγμα.
(2) Ομοίως. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Τα αντίστροφα των (1), (2) της Πρότασης 2.9 δεν ισχύουν. Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία $\left(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\right)$, δηλαδή η $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots)$, είναι κάτω φραγμένη και όχι άνω φραγμένη. Όμως, η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$ διότι $\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2} \leq 0$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$.

(2) Ομοίως, η ακολουθία $(-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, \ldots)$ είναι άνω φραγμένη, όχι κάτω φραγμένη και δεν αποκλίνει στο $-\infty$.

Πρόταση 2.10 ***Κανόνας αντιθέτου***. *Αν η (x_n) έχει όριο, τότε και η $(-x_n)$ έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty}(-x_n) = -\lim_{n\to+\infty} x_n\,.$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$. Άρα ισχύει τελικά $|(-x_n) - (-x)| = |x_n - x| < \epsilon$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}(-x_n) = -x = -\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > M$, οπότε ισχύει τελικά $-x_n < -M$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}(-x_n) = -\infty = -(+\infty) = -\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι, αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty}(-x_n) = +\infty = -(-\infty) = -\lim_{n\to+\infty} x_n$. $\natural$

Πρόταση 2.11 ***Κανόνας αθροίσματος***. *Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όριο και αν το άθροισμα $\lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $(x_n + y_n)$ έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n\,.$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και ισχύει τελικά $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Επομένως, ισχύει τελικά

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = x + y = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ ή $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Η (y_n) είναι κάτω φραγμένη, οπότε υπάρχει l ώστε $y_n \geq l$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Έστω $M > 0$. Ισχύει τελικά $x_n > M - l$, οπότε ισχύει τελικά $x_n + y_n > (M - l) + l = M$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty = \left\{ \begin{array}{c} (+\infty) + y \\ (+\infty) + (+\infty) \end{array} \right\} = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν παρόμοια αιτιολόγηση. ♮

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0+0=0$.

(2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2+1}{n} = \lim_{n\to+\infty}(-n+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty}(-n)+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = (-\infty)+0=-\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}(n+\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty}n+\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = (+\infty)+(+\infty)=+\infty$.

Ιδού μερικά παραδείγματα όπου δυο ακολουθίες έχουν όρια $+\infty, -\infty$ και το άθροισμά τους δεν έχει όριο ή έχει διαφορετικό κάθε φορά όριο:

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty}(n+c) = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}(n+c+(-n)) = \lim_{n\to+\infty}c = c$.

(2) $\lim_{n\to+\infty}2n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}(2n+(-n)) = \lim_{n\to+\infty}n = +\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(-2n) = -\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}(n+(-2n)) = \lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$.

(4) $\lim_{n\to+\infty}\left(n+(-1)^{n-1}+1\right) = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(-n-1) = -\infty$ και το $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(n+(-1)^{n-1}+1\right)+(-n-1)\right) = \lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}$ δεν υπάρχει.

Η περίπτωση της (x_n-y_n) ανάγεται στις περιπτώσεις του αθροίσματος ακολουθιών και της αντίθετης ακολουθίας, αφού $x_n-y_n = x_n+(-y_n)$.

Πρόταση 2.12 ***Κανόνας διαφοράς***. *Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όριο και αν η διαφορά $\lim_{n\to+\infty}x_n - \lim_{n\to+\infty}y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η (x_n-y_n) έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n) = \lim_{n\to+\infty}x_n - \lim_{n\to+\infty}y_n\,.$$

Πρόταση 2.13 ***Κανόνας γινομένου***. *Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όριο και αν το γινόμενο $\lim_{n\to+\infty}x_n\lim_{n\to+\infty}y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η (x_ny_n) έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty}x_ny_n = \lim_{n\to+\infty}x_n\lim_{n\to+\infty}y_n\,.$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty}x_n = x$, $\lim_{n\to+\infty}y_n = y$. Έστω $\epsilon>0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n-x| < \frac{\epsilon}{3|y|+1}$ και, επίσης, ισχύει τελικά $|y_n-y| < \min\{\frac{\epsilon}{3|x|+1},\frac{1}{3}\}$. Άρα ισχύει τελικά $|x_n-x| < \frac{\epsilon}{3|y|+1}$ και $|y_n-y| < \min\{\frac{\epsilon}{3|x|+1},\frac{1}{3}\}$. Συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$\begin{aligned}|x_ny_n-xy| &= |(x_n-x)(y_n-y)+x(y_n-y)+y(x_n-x)|\\ &\le |x_n-x||y_n-y|+|x||y_n-y|+|y||x_n-x|\\ &\le \frac{\epsilon}{3|y|+1}\frac{1}{3}+|x|\frac{\epsilon}{3|x|+1}+|y|\frac{\epsilon}{3|y|+1}\\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon\end{aligned}$$

και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = xy = \lim_{n\to+\infty} x_n \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = y > 0$ ή $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Θεωρούμε έναν l ώστε $0 < l < \lim_{n\to+\infty} y_n$. Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > \frac{M}{l}$ και, επίσης, ισχύει τελικά $y_n > l$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > \frac{M}{l}$ και $y_n > l$. Συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n y_n > \frac{M}{l} l = M$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = +\infty = \left\{ \begin{array}{c} (+\infty)y \\ (+\infty)(+\infty) \end{array} \right\} = \lim_{n\to+\infty} x_n \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν ουσιαστικά την ίδια αιτιολόγηση. ♮

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \cdot 0 = 0$.

(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n}\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1 \cdot 0 = 0$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}(n - n^2) = \lim_{n\to+\infty} n(1-n) = \lim_{n\to+\infty} n \lim_{n\to+\infty}(1-n) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$. Παρατηρήστε ότι δεν εφαρμόζεται ο κανόνας της διαφοράς στο $\lim_{n\to+\infty}(n-n^2)$ διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

(4) Έστω αριθμός c και έστω ότι το γινόμενο $c \lim_{n\to+\infty} x_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, δηλαδή δεν είναι, συγχρόνως, $c = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty$. Τότε, επειδή $\lim_{n\to+\infty} c = c$,

$$\lim_{n\to+\infty} c x_n = c \lim_{n\to+\infty} x_n \,.$$

(5) Έστω $a > 0$. Αν $c > 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty}(cn^a) = c \lim_{n\to+\infty} n^a = c(+\infty) = +\infty$. Αν $c < 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty}(cn^a) = c \lim_{n\to+\infty} n^a = c(+\infty) = -\infty$.

(6) Αν $a > 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty}(cn^{-a}) = c \lim_{n\to+\infty} n^{-a} = c0 = 0$.

(7) **Πολυωνυμική παράσταση του** n. Έστω πολυώνυμο $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ τουλάχιστον πρώτου βαθμού, δηλαδή $a_k \neq 0$, $k \geq 1$. Τότε

$$\lim_{n\to+\infty} \big(a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k\big) = \lim_{n\to+\infty} a_k n^k = a_k(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & a_k > 0, \\ -\infty, & a_k < 0. \end{cases}$$

Γράφουμε $a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k = a_k n^k \big(\frac{a_0}{a_k}\frac{1}{n^k} + \frac{a_1}{a_k}\frac{1}{n^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{1}{n} + 1\big)$. Το όριο της παρένθεσης είναι 1, διότι κάθε όρος της εκτός του τελευταίου έχει όριο 0. Άρα $\lim_{n\to+\infty}(a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k) = \lim_{n\to+\infty} a_k n^k = a_k(+\infty)$. Παρατηρήστε ότι η τιμή του ορίου εξαρτάται *μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο.*

Για παράδειγμα, υπολογίζουμε: $\lim_{n\to+\infty}(3n^2 - 5n + 2) = \lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2}n^5 + 4n^4 - n^3) = \lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2}n^5) = -\infty$.

(8) **Γεωμετρικά αθροίσματα**. Η ακολουθία των **γεωμετρικών αθροισμάτων με λόγο** a είναι η $(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n)$, δηλαδή η $(1+a, 1+a+a^2, 1+a+a^2+a^3, \ldots)$. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\lim_{n\to+\infty}(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) \begin{cases} = +\infty, & a \geq 1, \\ = \frac{1}{1-a}\,, & -1 < a < 1, \\ \text{δεν υπάρχει}, & a \leq -1. \end{cases}$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από το όριο της γεωμετρικής προόδου.

Αν $a > 1$, τότε $\lim_{n\to+\infty}(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{1}{a-1}\lim_{n\to+\infty}(a^{n+1} - 1) = \frac{1}{a-1}((+\infty) - 1) = +\infty$.

Αν $a = 1$, τότε $\lim_{n\to+\infty}(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) = \lim_{n\to+\infty}(n + 1) = +\infty$.

Αν $-1 < a < 1$, τότε $\lim_{n\to+\infty}(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}\lim_{n\to+\infty}(1 - a^{n+1}) = \frac{1}{1-a}(1 - 0) = \frac{1}{1-a}$.

Τέλος, έστω $a \leq -1$. Ισχύει $a^{n+1} = 1 + (a - 1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. *Αν υπάρχει* το $\lim_{n\to+\infty}(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)$, τότε υπάρχει και το $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = 1 + (a - 1)\lim_{n\to+\infty}(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)$. Άτοπο.

Πρόταση 2.14 *Αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} x_n$ και $k \in \mathbf{N}$, τότε*

$$\lim_{n\to+\infty} {x_n}^k = (\lim_{n\to+\infty} x_n)^k .$$

Απόδειξη: $\lim_{n\to+\infty} {x_n}^k = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdots x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdots \lim_{n\to+\infty} x_n = (\lim_{n\to+\infty} x_n)^k$. ♮

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n-1}{n})^3 = (\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n})^3 = 1^3 = 1$.

(2) $\lim_{n\to+\infty}(n^5-2n^2+n-7)^8 = \big(\lim_{n\to+\infty}(n^5-2n^2+n-7)\big)^8 = (+\infty)^8 = +\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}(-n^3 + 2n - 1)^5 = \big(\lim_{n\to+\infty}(-n^3 + 2n - 1)\big)^5 = (-\infty)^5 = -\infty$.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα όπου δυο ακολουθίες έχουν όρια $+\infty, 0$, ενώ το γινόμενό τους δεν έχει όριο ή έχει διαφορετικό κάθε φορά όριο.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{c}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} n\frac{c}{n} = \lim_{n\to+\infty} c = c$.

(2) $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} n\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(4) $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$ αλλά το $\lim_{n\to+\infty} n\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}$ δεν υπάρχει.

Πρόταση 2.15 ***Κανόνας αντιστρόφου, I****. Έστω $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν η (x_n) έχει όριο και αν το $\frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή, αν $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$), τότε και η $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n} .$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x > 0$. Θεωρούμε l ώστε $0 < l < x$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > l$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - x| < lx\epsilon$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > l$ και $|x_n - x| < lx\epsilon$. Επομένως, ισχύει τελικά

$$\Big|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\Big| = \frac{|x_n - x|}{x_n x} < \frac{lx\epsilon}{lx} = \epsilon,$$

οπότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n}$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > \frac{1}{\epsilon}$, οπότε ισχύει τελικά $0 < \frac{1}{x_n} < \epsilon$ και, επομένως, ισχύει τελικά $\left|\frac{1}{x_n} - 0\right| = \frac{1}{x_n} < \epsilon$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = 0 = \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n}$.

Ομοίως, αν το όριο είναι αρνητικός αριθμός ή $-\infty$. ♮

Παραδείγματα: (1) Αν $a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log_a n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \log_a n} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

(2) Ο κανόνας δεν ισχύει αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Είναι $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$, αλλά το $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(-1)^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}n$ δεν υπάρχει.

Το πρόβλημα στο τελευταίο παράδειγμα είναι η εναλλαγή προσήμου των όρων της ακολουθίας. Αν δεν υφίσταται εναλλαγή προσήμου, τότε έχουμε θετικά αποτελέσματα· η κατάσταση αυτή περιγράφεται στην Πρόταση 2.16.

Πρόταση 2.16 ***Κανόνας αντιστρόφου, ΙΙ***. *Έστω $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.*
(1) Αν ισχύει τελικά $x_n > 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.
(2) Αν ισχύει τελικά $x_n < 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$.

Απόδειξη: (1) Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - 0| < \frac{1}{M}$. Επειδή ισχύει τελικά $x_n > 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $|x_n - 0| < \frac{1}{M}$ και $x_n > 0$. Άρα ισχύει τελικά $0 < x_n < \frac{1}{M}$. Άρα ισχύει τελικά $\frac{1}{x_n} > M$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.
(2) Ομοίως. ♮

Τα αποτελέσματα για την $(\frac{x_n}{y_n})$ προκύπτουν από τα αποτελέσματα για το γινόμενο ακολουθιών και για την αντίστροφη ακολουθία, αφού $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}$.

Πρόταση 2.17 ***Κανόνας λόγου***. *Έστω $y_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όριο και αν ο λόγος $\frac{\lim_{n\to+\infty} x_n}{\lim_{n\to+\infty} y_n}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} x_n}{\lim_{n\to+\infty} y_n}.$$

Παραδείγματα: (1) **Ρητή παράσταση του** n. Έστω ρητή παράσταση $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_k \neq 0$, $b_m \neq 0$. Τότε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0 + a_1n + \cdots + a_kn^k}{b_0 + b_1n + \cdots + b_mn^m} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_kn^k}{b_mn^m} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_m}(+\infty), & k > m, \\ \frac{a_k}{b_m}, & k = m, \\ 0, & k < m. \end{cases}$$

Γράφουμε $\frac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_mn^m} = \frac{a_kn^k}{b_mn^m} \frac{\frac{a_0}{a_k}\frac{1}{n^k}+\frac{a_1}{a_k}\frac{1}{n^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{a_k}\frac{1}{n}+1}{\frac{b_0}{b_m}\frac{1}{n^m}+\frac{b_1}{b_m}\frac{1}{n^{m-1}}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{b_m}\frac{1}{n}+1}$ και, όπως έχουμε δει, τα όρια του αριθμητή και του παρονομαστή του τελευταίου λόγου είναι 1. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_mn^m} = \frac{a_k}{b_m} \lim_{n\to+\infty} n^{k-m}$ και από αυτό προκύπτει το τελικό συμπέρασμα. Βλέπουμε ότι η τιμή του ορίου εξαρτάται *μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή*.

Για παράδειγμα, έχουμε: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-2n^2+n+1}{2n^2-3n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{2n^2} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2+n}{n+2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2}{n} = -\infty$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4-n^3}{n^4+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4}{n^4} = 1$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2+n+4}{n^3+n^2+5n+6} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2}{n^3} = 0$.

(2) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-2n^3+n^2+n+1}{2n+3}\right)^7 = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{-2n^3+n^2+n+1}{2n+3}\right)^7 = (-\infty)^7 = -\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+n+7}{-3n^3+n^2+1}\right)^3 = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+n+7}{-3n^3+n^2+1}\right)^3 = (-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$.

Τέλος, ϑα δούμε παραδείγματα για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{c}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ και $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{c}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} c = c$.

(2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.

(4) Αν $c > 0$, $\lim_{n\to+\infty} cn = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{cn}{n} = c$.

(5) $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

(6) $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Πρόταση 2.18 *Αν η (x_n) έχει όριο, τότε και η $(|x_n|)$ έχει όριο και*

$$\lim_{n\to+\infty}|x_n| = \big|\lim_{n\to+\infty} x_n\big|.$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$. Άρα ισχύει τελικά $\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x| < \epsilon$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}|x_n| = |x| = |\lim_{n\to+\infty} x_n|$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ή $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > M$ ή $x_n < -M$, αντιστοίχως. Και στις δυο περιπτώσεις, ισχύει τελικά $|x_n| > M$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}|x_n| = +\infty = |\pm\infty| = |\lim_{n\to+\infty} x_n|$. $\natural$

Παράδειγμα: (1) Το αντίστροφο της Πρότασης 2.18 δεν ισχύει. Για παράδειγμα, $\lim_{n\to+\infty}\big|(-1)^{n-1}\big| = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ ενώ δεν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}$.

Ας δούμε τώρα τρία λίγο πιο δύσκολα παραδείγματα ορίων.

Παραδείγματα: (1) Έστω $a > 0$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

Η περίπτωση $a = 1$ είναι απλή: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Έστω $a > 1$.

Πρώτος τρόπος: Έστω $\epsilon > 0$. Για να ισχύει $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$ αρκεί (διότι $\sqrt[n]{a} > 1$) να ισχύει $\sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $\sqrt[n]{a} < 1 + \epsilon$ αρκεί να ισχύει $\frac{1}{n} < \log_a(1+\epsilon)$ αρκεί να ισχύει $n > \frac{1}{\log_a(1+\epsilon)}$. Άρα, αν επιλέξουμε $n_0 = \left[\frac{1}{\log_a(1+\epsilon)}\right] + 1 \in \mathbf{N}$, τότε

$|\sqrt[n]{a}-1|<\epsilon$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq n_0$.
Δεύτερος τρόπος: Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται $(1+\frac{a-1}{n})^n\geq 1+n\frac{a-1}{n}=a$ και, επομένως, $1\leq\sqrt[n]{a}\leq 1+\frac{a-1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Με παρεμβολή συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Αν $0<a<1$, τότε $\frac{1}{a}>1$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1$.

(2) Θα αποδείξουμε ότι
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Από την ανισότητα του Bernoulli, $(1+\frac{\sqrt{n}-1}{n})^n\geq 1+n\frac{\sqrt{n}-1}{n}=\sqrt{n}$, οπότε $1\leq\sqrt[n]{n}\leq(1+\frac{\sqrt{n}-1}{n})^2<(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^2$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(3) Έστω $a>1$. Θα αποδείξουμε ότι
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty\quad(a>1).$$

Πρώτος τρόπος: Από την ανισότητα του Bernoulli, $(\sqrt{a})^n=(1+\sqrt{a}-1)^n\geq 1+n(\sqrt{a}-1)>n(\sqrt{a}-1)$ και, επομένως, $\frac{a^n}{n}>n(\sqrt{a}-1)^2$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty$.
Δεύτερος τρόπος: Θεωρούμε b ώστε $1<b<a$. Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται $b^n=(1+b-1)^n\geq 1+n(b-1)>n(b-1)$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Άρα $\frac{a^n}{n}=\frac{b^n}{n}(\frac{a}{b})^n>(b-1)(\frac{a}{b})^n$ και, επειδή $\frac{a}{b}>1$, είναι $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty$.

Τέλος, θα διατυπώσουμε την Πρόταση 2.19, αλλά θα την αποδείξουμε στο Κεφάλαιο 4. Η τυπική θέση της είναι εδώ, αλλά η απόδειξή της (αν και θα μπορούσε να γίνει στο σημείο αυτό) ταιριάζει καλύτερα στο πλαίσιο των εννοιών του ορίου και της συνέχειας συνάρτησης. Ας θυμηθούμε από την ενότητα 1.3 τις απροσδιόριστες μορφές της δύναμης a^b. Αυτές είναι οι 0^0, $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, $(+\infty)^0$, $0^{-\infty}$.

Πρόταση 2.19 *Έστω $x_n>0$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όρια και αν η δύναμη $(\lim_{n\to+\infty}x_n)^{\lim_{n\to+\infty}y_n}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $(x_n{}^{y_n})$ έχει όριο και*
$$\lim_{n\to+\infty}x_n{}^{y_n}=\big(\lim_{n\to+\infty}x_n\big)^{\lim_{n\to+\infty}y_n}.$$

Ακόμη, αν $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$, $\lim_{n\to+\infty}y_n=-\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty}x_n{}^{y_n}=+\infty$.

Η τελευταία περίπτωση της Πρότασης 2.19 θα μπορούσε να λειτουργήσει ως αιτιολόγηση της ισότητας $0^{-\infty}=+\infty$, η οποία, όμως, δεν είναι εν γένει αποδεκτή.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα όρια: $\lim_{n\to+\infty}\big(n+\frac{1}{n}+2\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big)$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{27}(n+3)^{79}}{(2n+1)^{106}}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{3(-1)^{n-1}}{n}}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2+(-1)^n n+\frac{1}{n}}{3n+2(-1)^{n-1}\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}$.

2. Υπολογίστε τα όρια: $\lim_{n\to+\infty}((1-n)^5+n^4)$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^5+8n^4-5n}{5n^5-5n^3+2n-6}$, $\lim_{n\to+\infty}(\frac{-n^3+n+1}{3n^2+3n+1})^9$, $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n(n+1)}{n+4}-\frac{4n^3}{4n^2+1})$.

3. Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια: $\lim_{n\to+\infty}(1+2+2^2+\cdots+2^n)$, $\lim_{n\to+\infty}(1-2+2^2+\cdots+(-1)^n2^n)$, $\lim_{n\to+\infty}\big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\big)$, $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{2^7}{3^7}+\frac{2^8}{3^8}+\cdots+\frac{2^{n+6}}{3^{n+6}}\big)$, $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{2^n}{3^n}+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\cdots+\frac{2^{2n}}{3^{2n}}\big)$.

4. Έστω $x_n\neq-1$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $x\neq-1$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}x_n=x$ αν και μόνο αν $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{1+x_n}=\frac{x}{1+x}$.

5. Ποια είναι τα πιθανά όρια της (x_n) αν ικανοποιεί οποιονδήποτε από τους παρακάτω αναδρομικούς τύπους: $x_{n+1}=-x_n+2$, $x_{n+3}=x_n-3$, $x_{n+1}={x_n}^2-3$, $x_{n+2}=-{x_n}^2+3$, $x_{n+1}={x_n}^2+3$, $x_{n+2}=x_{n+1}+{x_n}^3$;

6. (1) Βρείτε (x_n), (y_n) ώστε να μην έχουν όριο και η (x_n+y_n) να έχει όριο. (2) Βρείτε (x_n), (y_n) ώστε να μην έχουν όριο και η (x_ny_n) να έχει όριο.

7. (1) Αν η (x_n+y_n) έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο. (2) Αν η (x_ny_n) έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.

8. Βρείτε (x_n), (y_n) ώστε $x_n,y_n>0$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$, $\lim_{n\to+\infty}y_n=+\infty$ και το $\lim_{n\to+\infty}x_ny_n$ να μην υπάρχει.

9. Αν $\lim_{n\to+\infty}|x_n|=0$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$.

10. Αν $\lim_{n\to+\infty}x_n=x$, $\lim_{n\to+\infty}y_n=y$, αποδείξτε: $\lim_{n\to+\infty}\max\{x_n,y_n\}=\max\{x,y\}$ και $\lim_{n\to+\infty}\min\{x_n,y_n\}=\min\{x,y\}$.

11. Βρείτε το λάθος: $\lim_{n\to+\infty}n\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n})=0+\cdots+0=0$. Ομοίως: $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})=1\cdots1=1$. Ποια είναι η σχέση των δυο «ορίων» με τις Προτάσεις 2.11, 2.13, 2.19;

12. Βρείτε το $\lim_{n\to+\infty}x_n$ στις περιπτώσεις που: (i) ισχύει τελικά $1<x_n\leq\frac{n^2+3n}{n^2+1}$, (ii) ισχύει τελικά $\frac{\log_{10}n-2}{2\log_{10}n+4}<x_n<\frac{3+n}{1+2n}$, (iii) ισχύει τελικά $x_n\leq 15n+6n^2-n^3$.

13. Αποδείξτε, συγκρίνοντας με απλούστερες ακολουθίες, τα: $\lim_{n\to+\infty}(2n+(-1)^{n-1}n)=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(2n+n\sin n)=+\infty$.

14. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}[nx]=\begin{cases}+\infty, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\infty, & x<0,\end{cases}$ $\lim_{n\to+\infty}([nx]-[ny])=\begin{cases}+\infty, & x>y,\\ 0, & x=y,\\ -\infty, & x<y,\end{cases}$ $\lim_{n\to+\infty}(nx-[ny])\begin{cases}=+\infty, & x>y,\\ =0, & x=y\in\mathbf{Z},\\ =-\infty, & x<y,\\ \text{δεν υπάρχει}, & x=y\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}.\end{cases}$

15. Βρείτε τα: $\lim_{n\to+\infty}\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to+\infty}\big[\frac{3n^2-n+1}{n+2}\big]$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{[\frac{n^3+1}{n+2}]+1}{n[\sqrt{n}]+2n}$.

16. (1) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ και ότι η (y_n) είναι κάτω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty$. (2) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ και ότι η (y_n) είναι άνω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = -\infty$. (3) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και ότι η (y_n) είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}(x_n y_n) = 0$. (4) Έστω $l > 0$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ή $-\infty$ και ότι ισχύει τελικά $y_n > l$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}(x_n y_n) = +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως. (5) Έστω $u < 0$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ή $-\infty$ και ότι ισχύει τελικά $y_n < u$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}(x_n y_n) = -\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

17. Με την ιδιότητα παρεμβολής αποδείξτε τα: $\lim_{n\to+\infty} 2^{-2n+(-1)^{n-1}n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{4}\right)^n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} = 1$ (*Υπόδ.:* $\frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+k} \le \frac{n}{n^2+1}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}, 1 \le k \le n$.), $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1$.

18. Αν ισχύει τελικά $n^2 x_n^2 - 2n(n-1)x_n + n^2 - 2n - 3 \le 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

19. Αν ισχύει τελικά $0 < a \le x_n{}^n \le b$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

20. Έστω $0 \le a \le b$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

21. (1) Έστω $a < 1$ και ότι ισχύει τελικά $|x_{n+1}| \le a|x_n|$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. (*Υπόδ.:* $|x_2| \le a|x_1|, |x_3| \le a^2|x_1|$ κλπ.) (2) Έστω $a > 1$ και ότι ισχύει τελικά $x_{n+1} \ge a x_n > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

22. Έστω $0 < a < 2$, $x_1 > 0$ και $x_{n+1} \ge x_1 + \cdots + x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{a^n} = +\infty$.

23. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n k^k = 1$.

24. Γνωρίζουμε ότι, αν $x_n \in [l,u]$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, τότε $x \in [l,u]$. Υπάρχει παρόμοιο συμπέρασμα για το όριο x της (x_n), αν $x_n \in (l,u)$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$; Ποιο είναι το γενικό συμπέρασμα σ′ αυτήν την περίπτωση;

25. (1) Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει (r_n) ώστε $r_n \in \mathbf{Q}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$. (*Υπόδ.:* Υπάρχει $r_n \in \mathbf{Q}$, $x - \frac{1}{n} < r_n < x + \frac{1}{n}$.) (2) Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει (t_n) ώστε $t_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} t_n = x$. (3) Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει *γνησίως αύξουσα* (t_n) και *γνησίως φθίνουσα* (s_n) ώστε $t_n, s_n \in \mathbf{Q}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = x$.

26. Υπολογίζοντας όρια, απαντήστε στα: (i) Ισχύει τελικά $-n^5 + 4n^3 < -100$; (ii) Ισχύει $n^7 - 35n^6 + n^3 - 47n < 84$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$; (iii) Ισχύει τελικά $\frac{3}{2} < \frac{7n^3-n+5}{4n^3+n^2+35} < 2$; (iv) Ισχύει τελικά $\frac{2n^4-n^3+7}{-n^3+n^2+3} \le -78$; (v) Ισχύει $\frac{2n^3-n^2+7n+1}{n^3+n^2+3} \le 1$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$;

27. Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n < \lim_{n\to+\infty} y_n$, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $x_n < y_n$.

28. Βάσει της Πρότασης 2.3, αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{n\to+\infty} 2^{(-1)^{n-1}}$, $\lim_{n\to+\infty} \big(1+\frac{(-1)^{n-1}}{2}\big)^n$, $\lim_{n\to+\infty} \big((-1)^{n-1}+\frac{10}{n^3}\big)$, $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$.

29. (1) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ και $x_n \leq x$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι $\sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\} = x$. (2) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x < y$ και $x_n < y$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι $\sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\} < y$.

30. Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ και υπάρχει $k \in \mathbf{N}$ ώστε $x_k \geq x$. Αποδείξτε ότι υπάρχει *μέγιστος* όρος της (x_n), δηλαδή ότι υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n \leq x_m$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. (*Υπόδ.:* Έστω $x_k > x$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n < x_k$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Ανάμεσα σε ποιους όρους θα αναζητήσετε τον μέγιστο όρο; Τι γίνεται αν $x_k = x$;)

2.5 Μονότονες ακολουθίες. Ο αριθμοί e, π.

Θεώρημα 2.1 *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο. Πιο συγκεκριμένα:*
(1) Αν η (x_n) είναι αύξουσα, τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Ειδικώτερα: η (x_n) είτε (i) δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο $+\infty$, είτε (ii) είναι άνω φραγμένη, οπότε συγκλίνει και το όριό της είναι, ταυτόχρονα, το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της.
(2) Αν η (x_n) είναι φθίνουσα, τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Ειδικώτερα: η (x_n) είτε (i) δεν είναι κάτω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο $-\infty$, είτε (ii) είναι κάτω φραγμένη, οπότε συγκλίνει και το όριό της είναι, ταυτόχρονα, το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου των όρων της.

Απόδειξη: (1) Θεωρούμε το μη κενό σύνολο $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Αν αυτό είναι άνω φραγμένο (ή, ισοδύναμα, αν η ακολουθία είναι άνω φραγμένη), τότε έχει supremum αριθμό ενώ, αν δεν είναι άνω φραγμένο (ή, ισοδύναμα, αν η ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη), τότε το supremum του είναι $+\infty$.
(i) Έστω ότι η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε $\sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\} = +\infty$ και θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Έστω $M > 0$. Επειδή ο M δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_{n_0} > M$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει $x_n \geq x_{n_0} > M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
(ii) Έστω ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη. Συμβολίζουμε x το supremum του $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ και θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $x-\epsilon < x$, ο $x-\epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x - \epsilon < x_{n_0}$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει $x - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Επειδή ο x είναι *άνω φράγμα* του $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, ισχύει $x_n \leq x < x + \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.
(2) Ομοίως. $\natural$

Το Θεώρημα 2.1 είναι πολύτιμο. Από θεωρητική σκοπιά, *συμπεραίνουμε ότι κάθε μονότονη ακολουθία έχει οπωσδήποτε όριο.* Από πρακτική σκοπιά, *συμπεραίνουμε για μια δοσμένη ακολουθία ότι έχει όριο αρκεί μόνο να ελέγξουμε ότι* *είναι μονότονη, χωρίς να χρειάζεται να μαντέψουμε από πριν το πιθανό όριό της.* Προσέξτε: για να αποδείξουμε, με τον ορισμό του ορίου, ότι μια ακολουθία έχει όριο πρέπει να γνωρίζουμε (ή να μαντέψουμε) το υποψήφιο όριό της ώστε, κατόπιν, να αποδείξουμε με υπολογισμούς ότι η απόσταση του n-οστού όρου της από αυτό είναι τελικά μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό. Το Θεώρημα 2.1 εφαρμόζεται σε περιπτώσεις που δε μπορούμε να μαντέψουμε το όριο μιας ακολουθίας και που δε μπορούμε να εφαρμόσουμε τους διάφορους κανόνες υπολογισμού ορίων (πράξεις, παρεμβολή κλπ), αρκεί η ακολουθία να είναι μονότονη (και να μπορούμε να το αποδείξουμε).

Παρατηρήστε ότι για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 χρησιμοποιήσαμε την Ιδιότητα Supremum του $\mathbf{R}$ (ή, ισοδύναμα, την Ιδιότητα Συνέχειας). Αναφέρουμε ότι από το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1 και, μάλιστα, μόνο από το ότι «κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει» μπορεί να αποδειχτεί η Ιδιότητα Supremum. Με άλλα λόγια, *η Ιδιότητα Supremum είναι ισοδύναμη με το ότι «κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει»*. Για την απόδειξη δείτε την άσκηση 11.

Το Θεώρημα 2.1 δεν παρέχει τρόπο υπολογισμού του ορίου μονότονης ακολουθίας. Όμως, εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι μια ακολουθία *έχει* όριο, μπορεί να καταφέρουμε με κάποιο τρόπο (ανάλογα με την περίπτωση) να υπολογίσουμε και την τιμή του ορίου. Δείτε την άσκηση 5 της προηγούμενης ενότητας.

Παράδειγμα: Έστω (x_n) ώστε $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Οι αρχικοί όροι της (x_n) είναι $1, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$. Μαντεύουμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και το αποδεικνύουμε με την αρχή της επαγωγής. Προφανώς, $x_1 \leq x_2$ και έστω $x_n \leq x_{n+1}$ για κάποιον $n \in \mathbf{N}$. Κατ΄ αρχάς όλοι οι όροι είναι ≥ 0 διότι ο πρώτος είναι 1 και όλοι οι άλλοι είναι τετραγωνικές ρίζες. Επομένως: $x_n \leq x_{n+1}$ συνεπάγεται $2x_n \leq 2x_{n+1}$ συνεπάγεται $\sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2x_{n+1}}$ συνεπάγεται $x_{n+1} \leq x_{n+2}$. Άρα $x_n \leq x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο.

Από την $x_n \leq x_{n+1}$ και τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται $x_n \leq \sqrt{2x_n}$, οπότε $x_n \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα η (x_n) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει σε αριθμό.

Συμβολίζουμε $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Επειδή ${x_{n+1}}^2 = 2x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $x^2 = 2x$, οπότε $x = 0$ ή $x = 2$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα και $x_1 = 1$, ισχύει $x_n \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα $x \geq 1$ και, επομένως, $x = 2$.

Υπάρχει και δεύτερος τρόπος να αποδειχθεί ότι η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Η $x_n \leq x_{n+1}$ είναι ισοδύναμη με την $x_n \leq \sqrt{2x_n}$ και (επειδή $x_n \geq 0$) αυτή με την $x_n \leq 2$. Άρα, αν αποδείξουμε ότι $x_n \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, θα έχουμε αποδείξει ότι η (x_n) είναι αύξουσα αλλά *και* ότι είναι άνω φραγμένη με άνω φράγμα τον 2. Αυτό γίνεται με την αρχή της επαγωγής. Η $x_1 \leq 2$ είναι προφανώς σωστή. Έστω $x_n \leq 2$ για κάποιον $n \in \mathbf{N}$. Τότε $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$, οπότε $x_n \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Πρόταση 2.20 *Η $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη.*

Απόδειξη: Η ανισότητα $(1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ ισοδυναμεί με την $(\frac{n+1}{n})^n \leq$

$(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1}(\frac{n+1}{n})^{n+1} \leq (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1} \leq (\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1} \leq (1-\frac{1}{n^2+2n+1})^{n+1}$ η οποία είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας του Bernoulli. Πράγματι, είναι $(1-\frac{1}{n^2+2n+1})^{n+1} \geq 1-\frac{n+1}{n^2+2n+1} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα η ακολουθία είναι αύξουσα.

Θα αποδείξουμε ότι $(1+\frac{1}{n})^n < 4$ ή, ισοδύναμα, $\frac{1}{2} < \big(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\big)^n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Από το Λήμμα 1.1 είναι $\big(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\big)^n = \big(1-\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\big)^n \geq 1-n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1-n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1-\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 1-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 1-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι όλα τα παραπάνω απλοποιούνται αν χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 1.4 αντί του Λήμματος 1.1. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι $(1+\frac{1}{n+1})^{\frac{n+1}{n}} \geq 1+\frac{n+1}{n}\frac{1}{n+1} = 1+\frac{1}{n}$, οπότε $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \geq (1+\frac{1}{n})^n$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ είναι $(\frac{n}{n+1})^{\frac{n}{2}} = (1-\frac{1}{n+1})^{\frac{n}{2}} \geq 1-\frac{n}{2}\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{2n+2} > \frac{1}{2}$, οπότε $(1+\frac{1}{n})^n < 4$. ♮

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, η $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$ έχει όριο, το οποίο συμβολίζουμε με το γράμμα e. Δηλαδή, *ορίζουμε*

$$e = \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Ονομάζουμε **φυσικούς λογαρίθμους** τους λογαρίθμους με βάση τον e και χρησιμοποιούμε για κάθε $y > 0$ τα απλούστερα σύμβολα

$$\log y \quad \text{ή} \quad \ln y$$

αντί του $\log_e y$. Η Πρόταση 2.21 είναι, φυσικά, εξειδίκευση της Πρότασης 1.8.

Πρόταση 2.21 (1) $\log(yz) = \log y + \log z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(2) $\log\frac{y}{z} = \log y - \log z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(3) $\log(y^z) = z\log y$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* z.
(4) $\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* $a > 0$, $a \neq 1$.
(5) $\log 1 = 0$, $\log e = 1$.
(6) *Αν* $0 < y < z$, *τότε* $\log y < \log z$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την (x_n), $x_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbf{N})$. Θα αποδείξουμε ότι η (x_n) συγκλίνει και, πιο συγκεκριμένα, ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\Big) = e.$$

Είναι φανερό ότι $x_{n+1} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!} = x_n+\frac{1}{(n+1)!} > x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα. Ισχύει $k! \geq 2^{k-1}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Αυτό είναι προφανές για $k = 1$ ενώ, για $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$ ισχύει $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots k \geq 1\cdot 2\cdot 2\cdots 2 = 2^{k-1}$. Επομένως, $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leq 1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα η (x_n) είναι, εκτός από αύξουσα, άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει. Τώρα, έστω $t_n = \big(1+\frac{1}{n}\big)^n$ $(n \in \mathbf{N})$. Βάσει του δυωνυμικού τύπου του Newton, είναι

$t_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$. Επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι > 0 και < 1, ισχύει $t_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν $k, n \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq n$, παραλείποντας τους (θετικούς) όρους μετά από τον k-οστό, βρίσκουμε $t_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$. Παίρνοντας όρια καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε $e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = x_k$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$ και, με αλλαγή συμβολισμού, $e \geq x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Άρα ισχύει $t_n \leq x_n \leq e$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} x_n = e$.

Θα ξαναδούμε την ακολουθία αυτή στο Κεφάλαιο 8 και (μια γενίκευσή της) στο Κεφάλαιο 10.

Πρόταση 2.22 ***Εγκιβωτισμένα διαστήματα.*** *Έστω αύξουσα (a_n) και φθίνουσα (b_n) ώστε $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Ισοδύναμα, έστω ακολουθία διαστημάτων $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\ldots$ ώστε $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Τότε:*
(i) οι $(a_n), (b_n)$ συγκλίνουν.
(ii) υπάρχει τουλάχιστον ένας x ώστε $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.
(iii) υπάρχει μοναδικός x με την ιδιότητα που αναφέρεται στο (ii) αν και μόνο αν $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Στην περίπτωση αυτή ο μοναδικός αυτός x είναι ο $x = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Απόδειξη: Επειδή η (b_n) είναι φθίνουσα, ισχύει $a_n \leq b_n \leq b_1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε η (a_n) είναι, εκτός από αύξουσα, άνω φραγμένη. Άρα η (a_n) συγκλίνει και έστω $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Ομοίως, επειδή η (a_n) είναι αύξουσα, ισχύει $a_1 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε η (b_n) είναι, εκτός από φθίνουσα, κάτω φραγμένη. Άρα η (b_n) συγκλίνει και έστω $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$. Τέλος, επειδή $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $a \leq b$. Επομένως, $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $a_n \leq a \leq x \leq b \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αντιστρόφως, αν για κάποιον x ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε $a \leq x \leq b$. Άρα οι x για τους οποίους ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι ακριβώς τα στοιχεία του $[a, b]$. Επομένως, υπάρχει μοναδικός τέτοιος x αν και μόνο αν $a = b$ ή, ισοδύναμα, $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Στην περίπτωση αυτή ο μοναδικός αυτός x είναι ο $x = a = b$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Το παράδειγμα αυτό έχει ιστορική, περισσότερο, σημασία.

Έστω κύκλος Κ με ακτίνα 1 και, για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, ένα κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές εγγεγραμμένο στον Κ και ένα κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές περιγεγραμμένο στον Κ. Συμβολίζουμε p_n και q_n τα μήκη του εσωτερικού και του εξωτερικού, αντιστοίχως, πολυγώνου. Σχηματίζονται, λοιπόν, οι δυο ακολουθίες $(p_n)_{n=2}^{+\infty}$, $(q_n)_{n=2}^{+\infty}$.

Είναι $p_2 = 4\sqrt{2}$, $q_2 = 8$ και αποδεικνύονται (*γεωμετρικά*) οι αναδρομικοί τύποι $p_{n+1} = \frac{2p_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-\frac{{p_n}^2}{4^n}}}}$, $q_{n+1} = \frac{4q_n}{2+\sqrt{4+\frac{{q_n}^2}{4^n}}}$ $(n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$ καθώς και η μεταξύ των δυο ακολουθιών σχέση $q_n = \frac{p_n}{\sqrt{1-\frac{{p_n}^2}{4^{n+1}}}}$ $(n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$.

Η (p_n) είναι αύξουσα και η (q_n) φθίνουσα: $p_{n+1} = \frac{2p_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-\frac{{p_n}^2}{4^n}}}} > \frac{2p_n}{\sqrt{2+\sqrt{4}}} =$

p_n και $q_{n+1} = \frac{4q_n}{2+\sqrt{4+\frac{q_n{}^2}{4^n}}} < \frac{4q_n}{2+\sqrt{4}} = q_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Επίσης, $q_n = \frac{p_n}{\sqrt{1-\frac{p_n{}^2}{4^{n+1}}}} > p_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Βάσει της Πρότασης 2.22, οι (p_n), (q_n) συγκλίνουν και έστω $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$, $q = \lim_{n\to+\infty} q_n$. Επειδή $q_n = \frac{p_n}{\sqrt{1-\frac{p_n{}^2}{4^{n+1}}}}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, είναι $q = \frac{p}{\sqrt{1-p^2\cdot 0}} = p$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}(q_n - p_n) = 0$, οπότε, από την Πρόταση 2.22 και πάλι, υπάρχει μοναδικός x ώστε $p_n \leq x \leq q_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Αυτός ο x είναι το κοινό όριο των δυο ακολουθιών.

Μια από τις μαθηματικές *παραδοχές ή διαπιστώσεις* της κλασσικής αρχαιότητας ήταν ότι το μήκος της περιφέρειας του κύκλου K, το οποίο, παραδοσιακά, συμβολίζεται 2π, έχει την ιδιότητα: $p_n \leq 2\pi \leq q_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Άρα

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = 2\pi.$$

(2) **p-αδικές προσεγγίσεις**. Έστω $x \in [0,1)$ και $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$. Ορίζουμε $x_n = [p^n x] - p[p^{n-1}x]$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Είναι φανερό ότι $x_n \in \mathbf{Z}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Από την $[p^{n-1}x] \leq p^{n-1}x < [p^{n-1}x]+1$ συνεπάγεται $p[p^{n-1}x] \leq p^n x < p[p^{n-1}x]+p$ συνεπάγεται $p[p^{n-1}x] \leq [p^n x] < p[p^{n-1}x]+p$, οπότε $0 \leq x_n < p$ και, επειδή $x_n \in \mathbf{Z}$, συνεπάγεται $0 \leq x_n \leq p-1$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ο x_n είναι ένας από τους ακεραίους $0, 1, \ldots, p-1$.

Τώρα ορίζουμε $s_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}$, $t_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Είναι $s_{n+1} = s_n + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} \geq s_n$ και $t_{n+1} = t_n + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} - \frac{1}{p^n} \leq t_n + \frac{p-1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} - \frac{1}{p^n} = t_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα η (s_n) είναι αύξουσα και η (t_n) φθίνουσα. Προφανώς, $s_n \leq t_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε οι δυο ακολουθίες ικανοποιούν τις υποθέσεις της Πρότασης 2.22. Μάλιστα, είναι $\lim_{n\to+\infty}(t_n - s_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p^n} = 0$, οπότε οι (s_n), (t_n) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Ποιο είναι αυτό το κοινό όριο;

Παρατηρούμε ότι $s_n = \big(\frac{[px]}{p} - [x]\big) + \big(\frac{[p^2x]}{p^2} - \frac{[px]}{p}\big) + \cdots + \big(\frac{[p^{n-1}x]}{p^{n-1}} - \frac{[p^{n-2}x]}{p^{n-2}}\big) + \big(\frac{[p^n x]}{p^n} - \frac{[p^{n-1}x]}{p^{n-1}}\big) = \frac{[p^n x]}{p^n} - [x] = \frac{[p^n x]}{p^n}$. Επομένως, από την $[p^n x] \leq p^n x < [p^n x]+1$ συνεπάγεται $s_n \leq x < s_n + \frac{1}{p^n} = t_n$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} t_n = x$.

Η (s_n) ονομάζεται **ακολουθία των p-αδικών προσεγγίσεων (καθ᾽ έλλειψιν)** του x και η (t_n) **ακολουθία των p-αδικών προσεγγίσεων (καθ᾽ υπεροχήν)** του x. Η (x_n) ονομάζεται **ακολουθία των p-αδικών ψηφίων** του x.

Η ακολουθία των p-αδικών ψηφίων του $x \in [0,1)$ έχει την εξής ιδιότητα: *δεν είναι τελικά σταθερή* $p-1$. Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n = p-1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Τότε $t_{n+1} = t_n + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} - \frac{1}{p^n} = t_n + \frac{p-1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} - \frac{1}{p^n} = t_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι η (t_n) είναι τελικά σταθερή και, επειδή $\lim_{n\to+\infty} t_n = x$, ισχύει τελικά $t_n = x$. Αυτό αντιφάσκει με το ότι ισχύει $s_n \leq x < t_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Μερικές απλές περιπτώσεις είναι: η $p = 2$ με τα δυαδικά ψηφία $0, 1$, η $p = 3$ με τα τριαδικά ψηφία $0, 1, 2$ και, φυσικά, η $p = 10$ με τα δεκαδικά ψηφία $0, 1, \ldots, 9$.

Οι ακολουθίες των p-αδικών προσεγγίσεων θα μελετηθούν πληρέστερα στο Κεφάλαιο 8.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε τα όρια: $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+3}=e$, $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+2})^{3n+5}=e^3$, $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^{n}=\frac{1}{e}$, $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n})^{n}=e^2$, $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{2}{n})^{n}=\frac{1}{e^2}$.

2. Έστω $x_1=1$, $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n{}^2}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα και βρείτε το όριό της.

3. Έστω $7x_{n+1}=x_n{}^3+6$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

4. Έστω $x_1>0$, $x_{n+1}=\frac{6+6x_n}{7+x_n}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

5. (1) Έστω $a>1$. Αποδείξτε ότι η $(\frac{a^n}{n})$ είναι τελικά αύξουσα και $\frac{a^{n+1}}{n+1}=\frac{an}{n+1}\frac{a^n}{n}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Βρείτε το όριο της $(\frac{a^n}{n})$. (2) Έστω $a>1$. Αποδείξτε ότι η $(\sqrt[n]{a})$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^2=\sqrt[n]{a}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Βρείτε το όριο της $(\sqrt[n]{a})$. Τι γίνεται στις περιπτώσεις $a=1$, $0<a<1$;

6. Έστω $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbf{N})$. Αποδείξτε ότι $x_{2^k}\geq\frac{k}{2}+1$ για κάθε $k\in\mathbf{N}$. (*Υπόδ.:* $x_{2n}-x_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\geq\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$.) Βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{n\to+\infty}x_n$.

7. (1) Έστω $a,x_1>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}\big(x_n+\frac{a}{x_n}\big)$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι κάτω φραγμένη και, *από τον δεύτερο όρο και πέρα*, φθίνουσα και βρείτε το όριό της. (2) Έστω $x_n,y_n\in\mathbf{Z}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $x_1=y_1=1$ και $x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}=(x_n+y_n\sqrt{2})^2$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{2}$.

8. Έστω φραγμένη (x_n) ώστε $2x_{n+1}\leq x_n+x_{n+2}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Ορίζουμε $y_n=x_n-x_{n+1}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι η (y_n) είναι μονότονη και φραγμένη και ότι $\lim_{n\to+\infty}y_n=0$.

9. (1) Έστω (x_n), (y_n) ώστε $0<x_1\leq y_1$, $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$ και $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, η (y_n) φθίνουσα, ότι $x_n\leq y_n$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ και ότι οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο. (2) Έστω (x_n), (y_n) ώστε $0<x_1\leq y_1$, $x_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$ και $y_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, η (y_n) φθίνουσα, ότι $x_n\leq y_n$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ και ότι οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

10. Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbf{R}$. Έστω ότι για κάθε $x\in I$ υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε $f(x')\leq f(x)\leq f(x'')$ για κάθε $x',x''\in(x-\delta_0,x+\delta_0)\cap I$, $x'<x<x''$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I. (*Υπόδ.:* Έστω $a,b\in I$ ώστε $a<b$, $f(a)>f(b)$. Αν $f(a)>f(\frac{a+b}{2})$, πάρτε $a_1=a, b_1=\frac{a+b}{2}$ και, αν $f(\frac{a+b}{2})>f(b)$, πάρτε $a_1=\frac{a+b}{2}$, $b_1=b$. Τότε $f(a_1)>f(b_1)$. Συνεχίστε επ' άπειρον, δημιουργώντας ακολουθία διαστημάτων $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots$ ώστε $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$, $f(a_n)>f(b_n)$ και $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ για κάθε $n\in$

$\mathbf{N}$. Υπάρχει ξ ώστε $a_n \leq \xi \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \xi$. Θεωρήστε τον αντίστοιχο (προς τον ξ) $\delta_0 > 0$.)

11. Υποθέστε ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Αποδείξτε την Ιδιότητα Supremum, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.
    (i) Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. (ii) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. (iii) Έστω μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο A. Θεωρήστε $x_1 \in A$ και άνω φράγμα y_1 του A. Το $[x_1, y_1]$ περιέχει ένα στοιχείο του A και ένα άνω φράγμα του A. Αν το $\frac{x_1+y_1}{2}$ είναι άνω φράγμα του A, πάρτε $x_2 = x_1$, $y_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, αν όχι, πάρτε $x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, $y_2 = y_1$. Το $[x_2, y_2]$ περιέχει ένα στοιχείο του A και ένα άνω φράγμα του A. Συνεχίστε επ΄ άπειρον, δημιουργώντας ακολουθία διαστημάτων $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots$ ώστε $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ και $y_n - x_n = \frac{y_1-x_1}{2^{n-1}}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και κάθε $[x_n, y_n]$ περιέχει ένα $a_n \in A$ και ένα άνω φράγμα u_n του A. Τότε υπάρχει ο $u = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n$ και είναι $u = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Αποδείξτε ότι ο u είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

12. Ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο A (όχι κατ΄ ανάγκη $\subseteq \mathbf{R}$) χαρακτηρίζεται **άπειρο - αριθμήσιμο** αν υπάρχει συνάρτηση $a : \mathbf{N} \to A$ η οποία είναι ένα - προς - ένα και επί. Χρησιμοποιώντας τον παραδοσιακό συμβολισμό $a_n = a(n)$, μπορούμε να πούμε ότι το A είναι άπειρο - αριθμήσιμο αν μπορεί να γραφτεί $A = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ ή, ισοδύναμα, αν το A είναι το σύνολο των όρων κάποιας ακολουθίας με διαφορετικούς ανά δύο όρους. Τέλος, ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **αριθμήσιμο** αν είναι είτε πεπερασμένο είτε άπειρο - αριθμήσιμο και **υπεραριθμήσιμο** αν δεν είναι αριθμήσιμο.
    Αποδείξτε ότι το $\mathbf{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο ως εξής.
    Έστω $\mathbf{R} = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$. Θεωρήστε $[x_1, y_1]$ ώστε $y_1 - x_1 > 0$, $a_1 \notin [x_1, y_1]$. Θεωρήστε $[x_2, y_2] \subseteq [x_1, y_1]$ ώστε $y_2 - x_2 > 0$, $a_2 \notin [x_2, y_2]$. Συνεχίζοντας επ΄ άπειρον, δημιουργήστε ακολουθία διαστημάτων $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots$ ώστε $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ και $a_n \notin [x_n, y_n]$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Υπάρχει ξ ώστε $\xi \in [x_n, y_n]$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Συνεπάγεται $\xi \neq a_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άτοπο.

2.6 Supremum, infimum και ακολουθίες.

Έστω σύνολο A. Όταν λέμε ότι **η** (x_n) **είναι στο** A εννοούμε ότι $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, δηλαδή ότι όλοι οι όροι της (x_n) ανήκουν στο A.

Πρόταση 2.23 *Έστω μη κενό σύνολο A.*
(1) *Υπάρχει ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$ και δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο μεγαλύτερο από το $\sup A$.*
(2) *Υπάρχει ακολουθία στο A με όριο το $\inf A$ και δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο μικρότερο από το $\inf A$.*

Απόδειξη: (1) Έστω ότι το A είναι άνω φραγμένο, οπότε το $x = \sup A$ είναι αριθμός. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ο $x - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε υπάρχει $x_n \in A$ ώστε $x - \frac{1}{n} < x_n \leq x$. Άρα υπάρχει (x_n) στο A ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

Κατόπιν, έστω ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup A = +\infty$. Τότε κανένας $n \in \mathbf{N}$ δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in A$ ώστε $x_n > n$. Άρα υπάρχει (x_n) στο A ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Για να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο μεγαλύτερο από το $\sup A$, είναι, προφανώς, αρκετό να περιοριστούμε στην περίπτωση που το $x = \sup A$ είναι αριθμός. Έστω (x_n) στο A. Τότε $x_n \leq x$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε, αν η (x_n) έχει όριο, το όριο αυτό είναι $\leq x$.
(2) Ομοίως. $\natural$

Επομένως, το $\sup A$ είναι το μέγιστο όριο ακολουθίας στο A και το $\inf A$ είναι το ελάχιστο όριο ακολουθίας στο A.

Ασκήσεις.

1. Για καθένα από τα $[0,2]$, $[0,2)$, $\{2\}$, $[0,1]\cup\{2\}$ βρείτε διάφορες ακολουθίες στο σύνολο οι οποίες συγκλίνουν στο supremum του συνόλου. Παρατηρήστε ότι για το πρώτο, το τρίτο και το τέταρτο σύνολο υπάρχει ως επιλογή η απλούστερη ακολουθία (δηλαδή η σταθερή ακολουθία) η οποία, όμως, δεν υφίσταται ως επιλογή για το δεύτερο σύνολο. Παρατηρήστε, επίσης, ότι για το τρίτο σύνολο υπάρχει μια μόνο επιλογή ακολουθίας, ενώ για το τέταρτο σύνολο οι μόνες επιλογές είναι οι τελικά σταθερές ακολουθίες.

2. Για καθένα από τα $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ βρείτε δυο όσο το δυνατό πιο απλές ακολουθίες, μια με όριο το supremum και μια με όριο το infimum του συνόλου.

3. Έστω μη κενό σύνολο A και u άνω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι $u = \sup A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο τον u. Προσαρμόστε τα παραπάνω για το $\inf A$ και για κάτω φράγμα l του A.

4. Έστω μη κενό σύνολο A. (i) Αν $\sup A \in A$ βρείτε μια όσο το δυνατό πιο απλή ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$. (ii) Αν $\sup A \notin A$, αποδείξτε ότι υπάρχει *γνησίως αύξουσα* ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$.
   Προσαρμόστε τα προηγούμενα για το $\inf A$.

2.7 Υποακολουθίες.

Έστω ακολουθία (x_n). Επιλέγουμε άπειρες τιμές $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ του δείκτη n, δηλαδή φυσικούς, ώστε $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$. Κατόπιν επιλέγουμε τους αντίστοιχους όρους της (x_n). Δηλαδή από τους $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ επιλέγουμε τους $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$. Αυτοί οι αριθμοί αποτελούν μια άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά: πρώτος ο x_{n_1}, δεύτερος ο x_{n_2} και ούτω καθ' εξής. Άρα οι αριθμοί αυτοί αποτελούν τους όρους μιας νέας ακολουθίας, της (x_{n_k}). Επειδή οι όροι της νέας ακολουθίας είναι όροι της αρχικής, η (x_{n_k}) χαρακτηρίζεται **υποακολουθία** της (x_n).

Τονίζουμε ότι, λόγω της συνθήκης $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, η σειρά επιλογής των όρων της υποακολουθίας είναι *ομόρροπη* με τη σειρά επιλογής που έχουν αυτοί οι όροι ως όροι της ακολουθίας.

Παραδείγματα: (1) Επιλέγοντας τους $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 10$, $n_4 = 11$, μπορούμε να αρχίσουμε μια υποακολουθία της (x_n) με τους όρους $x_1\,, x_3\,, x_{10}\,, x_{11}\,.$

(2) Επιλέγοντας τους $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$, $n_4 = 9$, $n_5 = 13$, μπορούμε να αρχίσουμε μια υποακολουθία της (x_n) με τους όρους $x_2\,, x_5\,, x_6\,, x_9\,, x_{13}\,.$

(3) Όμως, με τους $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$, $n_4 = 10$, $n_5 = 8$ δεν επιτρέπεται να σχηματιστεί υποακολουθία της (x_n). Η σειρά επιλογής των $x_2\,, x_5\,, x_6\,, x_{10}\,, x_8$ δεν είναι ομόρροπη με τη σειρά επιλογής που έχουν ως όροι της (x_n) : ο x_{10} ακολουθεί τον x_8 στην (x_n) – με ενδιάμεσο τον x_9 – οπότε ο x_{10} πρέπει να ακολουθεί τον x_8 και στην υποακολουθία.

Παραδείγματα: Μερικά πιο συγκεκριμένα παραδείγματα υποακολουθιών.

(1) Επιλέγοντας $n_k = 2k$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, φτιάχνουμε την υποακολουθία (x_{2k}) ή $(x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, x_{12}, \dots)$ που ονομάζεται **υποακολουθία των άρτιων δεικτών** της (x_n).

(2) Επιλέγοντας $n_k = 2k - 1$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, φτιάχνουμε την υποακολουθία (x_{2k-1}) ή $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, x_{11}, \dots)$ που ονομάζεται **υποακολουθία των περιττών δεικτών** της (x_n).

(3) Επιλέγοντας $n_k = k$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, φτιάχνουμε την υποακολουθία (x_k) ή $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots)$, δηλαδή την ίδια την ακολουθία (x_n). Άρα, *μια από τις υποακολουθίες της* (x_n) *είναι η ίδια η* (x_n).

(4) Επιλέγοντας $n_k = 2^{k-1}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, φτιάχνουμε την υποακολουθία $(x_{2^{k-1}})$ ή $(x_1, x_2, x_4, x_8, x_{16}, x_{32}, \dots)$.

(5) Επιλέγοντας $n_k = k^2$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, φτιάχνουμε την υποακολουθία (x_{k^2}) ή $(x_1, x_4, x_9, x_{16}, x_{25}, x_{36}, \dots)$.

Πρέπει να θυμόμαστε ότι ο δείκτης μιας υποακολουθίας (x_{n_k}) είναι ο k. Καθώς ο k μεταβάλλεται διατρέχοντας *όλους* τους φυσικούς $1, 2, 3, \dots$, ο αντίστοιχος n_k μεταβάλλεται *γνησίως αυξανόμενος* διατρέχοντας *κάποιους* από τους δείκτες της αρχικής ακολουθίας (x_n).

Λήμμα 2.2 *Έστω* $n_k \in \mathbf{N}$, $n_k < n_{k+1}$ *για κάθε* $k \in \mathbf{N}$. *Τότε* $n_k \geq k$ *για κάθε* $k \in \mathbf{N}$.

Απόδειξη: Η $n_1 \geq 1$ είναι σωστή διότι $n_1 \in \mathbf{N}$. Έστω $n_k \geq k$ για κάποιον $k \in \mathbf{N}$. Επειδή $n_{k+1} > n_k$ και $n_k, n_{k+1} \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $n_{k+1} \geq n_k + 1$, οπότε $n_{k+1} \geq k + 1$. Άρα $n_k \geq k$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. ♮

Πρόταση 2.24 *Αν μια ακολουθία έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ και υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε

$|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Τώρα, για κάθε $k \in \mathbf{N}$, $k \geq n_0$ συνεπάγεται $n_k \geq n_0$, αφού, λόγω του Λήμματος 2.2, $n_k \geq k$. Άρα για κάθε $k \in \mathbf{N}$, $k \geq n_0$ συνεπάγεται $|x_{n_k} - x| < \epsilon$. Άρα $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$.

Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, θεωρούμε $M > 0$ και επαναλαμβάνουμε αυτολεξεί τα προηγούμενα, αντικαθιστώντας το $|x_n - x| < \epsilon$ με το $x_n > M$ και το $|x_{n_k} - x| < \epsilon$ με το $x_{n_k} > M$. Ομοίως, αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$. $\natural$

Η Πρόταση 2.24 χρησιμοποιείται, συνήθως, με τον εξής τρόπο: *αν μια ακολουθία έχει δυο υποακολουθίες με διαφορετικά όρια ή μια υποακολουθία χωρίς όριο, τότε η ακολουθία δεν έχει όριο.*

Παράδειγμα: Η $\left((-1)^{n-1}\right)$ δεν έχει όριο. Πράγματι, η υποακολουθία των περιττών δεικτών έχει $\lim_{k\to+\infty}(-1)^{(2k-1)-1} = \lim_{k\to+\infty} 1 = 1$ και η υποακολουθία των άρτιων δεικτών έχει $\lim_{k\to+\infty}(-1)^{(2k)-1} = \lim_{k\to+\infty}(-1) = -1$.

Γνωρίζουμε ότι κάθε ακολουθία που συγκλίνει είναι φραγμένη. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Για παράδειγμα, η $\left((-1)^{n-1}\right)$ είναι φραγμένη αλλά δε συγκλίνει. Παρατηρώντας την $\left((-1)^{n-1}\right)$ βλέπουμε ότι, παρόλο που δε συγκλίνει, έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που συγκλίνει: όπως είδαμε μόλις λίγο πριν, η υποακολουθία των περιττών δεικτών συγκλίνει στον 1.

Θα δούμε τώρα ότι αυτό το φαινόμενο παρατηρείται όχι μόνο στην ακολουθία $\left((-1)^{n-1}\right)$ αλλά και σε κάθε φραγμένη ακολουθία. Αυτό είναι το περιεχόμενο του Θεωρήματος 2.2. *Είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Ανάλυσης.*

Θεώρημα 2.2 ***Bolzano - Weierstrass***. *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υποακολουθία.*

Απόδειξη: Έστω l, u ώστε $l \leq x_n \leq u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει, *περιγράφοντας έναν «αλγόριθμο» επιλογής των διαδοχικών όρων της υποακολουθίας*: περιγράφουμε πώς επιλέγουμε τον πρώτο όρο της υποακολουθίας, κατόπιν πώς επιλέγουμε τον δεύτερο όρο της, κατόπιν πώς επιλέγουμε τον τρίτο όρο της και ούτω καθ' εξής.
Βήμα 1. Χωρίζουμε το $[l, u]$ στα δυο ισομήκη διαστήματα $[l, \frac{l+u}{2}]$, $[\frac{l+u}{2}, u]$. Επειδή όλοι οι (άπειροι) όροι της (x_n) ανήκουν στο $[l, u]$, τουλάχιστον ένα από τα δυο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$. Πιο συγκεκριμένα, αν το $[l, \frac{l+u}{2}]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n) και το $[\frac{l+u}{2}, u]$ περιέχει μόνο πεπερασμένους όρους, τότε συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$ το $[l, \frac{l+u}{2}]$. Αν το $[\frac{l+u}{2}, u]$ περιέχει άπειρους όρους και το $[l, \frac{l+u}{2}]$ περιέχει μόνο πεπερασμένους όρους, τότε συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$ το $[\frac{l+u}{2}, u]$. Αν, τέλος, και τα δυο υποδιαστήματα περιέχουν άπειρους όρους, τότε συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$ ένα οποιοδήποτε από αυτά. Άρα $[l_1, u_1] \subseteq [l, u]$, $u_1 - l_1 = \frac{u-l}{2}$ και το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_1, u_1]$: έστω $x_{n_1} \in [l_1, u_1]$.
Βήμα 2. Χωρίζουμε το $[l_1, u_1]$ στα δυο ισομήκη διαστήματα $[l_1, \frac{l_1+u_1}{2}]$, $[\frac{l_1+u_1}{2}, u_1]$. Επειδή το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δυο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_2, u_2]$ – ακριβώς όπως στο πρώτο βήμα. Άρα

$[l_2, u_2] \subseteq [l_1, u_1]$, $u_2 - l_2 = \frac{u_1 - l_1}{2}$ και το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_2, u_2]$: έστω $x_{n_2} \in [l_2, u_2]$. *Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι* $n_2 > n_1$. Αυτό *είναι* εφικτό, ακριβώς επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στο $[l_2, u_2]$.

Βήμα 3. Χωρίζουμε το $[l_2, u_2]$ στα δυο ισομήκη διαστήματα $[l_2, \frac{l_2+u_2}{2}]$, $[\frac{l_2+u_2}{2}, u_2]$. Επειδή το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δυο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_3, u_3]$. Άρα $[l_3, u_3] \subseteq [l_2, u_2]$, $u_3 - l_3 = \frac{u_2 - l_2}{2}$ και το $[l_3, u_3]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_3, u_3]$: έστω $x_{n_3} \in [l_3, u_3]$. *Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι* $n_3 > n_2$.

Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ΄ άπειρον. Επιλέγουμε έτσι διαδοχικά διαστήματα $[l_k, u_k]$ $(k \in \mathbf{N})$ ώστε $[l_{k+1}, u_{k+1}] \subseteq [l_k, u_k]$ και $u_{k+1} - l_{k+1} = \frac{u_k - l_k}{2}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Επίσης, επιλέγουμε όρους x_{n_k} $(k \in \mathbf{N})$ της (x_n) ώστε $n_{k+1} > n_k$ και $x_{n_k} \in [l_k, u_k]$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$.

Από το ότι $u_{k+1} - l_{k+1} = \frac{u_k - l_k}{2}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$ προκύπτει $u_k - l_k = \frac{u-l}{2^k}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, οπότε $\lim_{k\to+\infty}(u_k - l_k) = 0$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.22, οι (l_k), (u_k) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Έστω $x = \lim_{k\to+\infty} l_k = \lim_{k\to+\infty} u_k$. Τώρα, επειδή $n_{k+1} > n_k$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία της (x_n) και, επειδή $l_k \le x_{n_k} \le u_k$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$. ♮

Στην άσκηση 11 θα βρείτε μια *δεύτερη απόδειξη* του Θεωρήματος 2.2.

Γνωρίζουμε ότι κάθε ακολουθία που αποκλίνει στο $+\infty$ δεν είναι άνω φραγμένη. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \dots)$ δεν είναι άνω φραγμένη αλλά δεν αποκλίνει στο $+\infty$. Στο ίδιο παράδειγμα, παρόλο που η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$, υπάρχει κάποια υποακολουθία της που αποκλίνει στο $+\infty$: δείτε την υποακολουθία των περιττών δεικτών, την $(1, 3, 5, 7, \dots)$. Αυτό το φαινόμενο ισχύει γενικότερα.

Πρόταση 2.25 (1) *Κάθε ακολουθία που δεν είναι άνω φραγμένη έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που αποκλίνει στο* $+\infty$.
(2) *Κάθε ακολουθία που δεν είναι κάτω φραγμένη έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που αποκλίνει στο* $-\infty$.

Απόδειξη: (1) Έστω (x_n) όχι άνω φραγμένη. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει υποακολουθία της που αποκλίνει στο $+\infty$. Αυτό θα το πετύχουμε περιγράφοντας έναν «αλγοριθμικό» τρόπο επιλογής των όρων της υποακολουθίας.

Βήμα 1. Επειδή η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει κάποιος όρος της που είναι > 1. Επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο: έστω $x_{n_1} > 1$.

Βήμα 2. Επειδή η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχουν *άπειροι* όροι της που είναι > 2. Γιατί υπάρχουν άπειροι όροι > 2; Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι είναι το πολύ πεπερασμένοι όροι της (x_n) μεγαλύτεροι από τον 2. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n \le 2$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Ορίζουμε $u = \max\{x_1, \dots, x_{n_0-1}, 2\}$ και τότε είναι $x_n \le u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $1 \le n \le n_0 - 1$ και $x_n \le 2 \le u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Άρα $x_n \le u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε ο u είναι άνω φράγμα της (x_n) και καταλήγουμε σε άτοπο. Επιλέγουμε, τώρα, έναν όρο της (x_n) μεγαλύτερο από τον 2: έστω $x_{n_2} > 2$. Φροντίζουμε, όμως, να είναι

$n_2 > n_1$. Αυτό είναι εφικτό ακριβώς διότι υπάρχουν άπειροι όροι > 2.
Βήμα 3. Επειδή η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχουν – όπως πριν – *άπειροι* όροι της που είναι > 3. Επιλέγουμε έναν όρο της (x_n) μεγαλύτερο από τον 3: έστω $x_{n_3} > 3$. Φροντίζουμε, όμως, να είναι $n_3 > n_2$.

Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ΄ άπειρον. Βρίσκουμε έτσι διαδοχικά όρους x_{n_k} $(k \in \mathbf{N})$ της (x_n) ώστε $n_{k+1} > n_k$ και $x_{n_k} > k$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Άρα η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία της (x_n) και $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = +\infty$.
(2) Ομοίως. ♮

Η Πρόταση 2.26 προκύπτει από την Πρόταση 2.25 και το Θεώρημα 2.2.

Πρόταση 2.26 *Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία έχει όριο.*

Απόδειξη: Αν η (x_n) είναι φραγμένη, έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, έχει υποακολουθία που αποκλίνει στο $+\infty$. Ομοίως, αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, έχει υποακολουθία που αποκλίνει στο $-\infty$. ♮

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι η (x_n) έχει μια ιδιότητα για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ αν και μόνο αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία έχει την ίδια ιδιότητα για *κάθε* $k \in \mathbf{N}$.

2. Αν το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας είναι *πεπερασμένο*, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερή υποακολουθία της.

3. Έστω $a < b < c < d$. Βρείτε (πολύ απλή!) ακολουθία που να έχει τέσσερις υποακολουθίες ώστε η πρώτη να συγκλίνει στον a, η δεύτερη στον b, η τρίτη στον c και η τέταρτη στον d.

4. Έστω ότι η (x_n) έχει μια οποιαδήποτε από τις ιδιότητες: (γνησίως) αύξουσα, (γνησίως) φθίνουσα, άνω φραγμένη, κάτω φραγμένη, φραγμένη. Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έχει την ίδια ιδιότητα.

5. Έστω (x_n) και υποακολουθία (x_{n_k}). Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία της (x_{n_k}) είναι υποακολουθία και της (x_n).

6. (1) Έστω $x \in \overline{\mathbf{R}}$ και $\lim_{k\to+\infty} x_{2k} = \lim_{k\to+\infty} x_{2k-1} = x$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. (*Υπόδ.:* Με τον ορισμό του ορίου.) (2) Έστω $x \in \overline{\mathbf{R}}$ και $\lim_{k\to+\infty} x_{3k} = \lim_{k\to+\infty} x_{3k-1} = \lim_{k\to+\infty} x_{3k-2} = x$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

7. (1) Έστω ότι η (x_n) έχει όριο και υπάρχει (x_{n_k}) ώστε $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x \in \overline{\mathbf{R}}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. (2) Έστω ότι η (x_n) είναι μονότονη και υπάρχει (x_{n_k}) ώστε $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x \in \overline{\mathbf{R}}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. (3) Έστω $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Αποδείξτε ότι $x_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$ (άσκηση 6 ενότητας 2.5) και ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. (4) Για κάθε $a_1, \dots, a_n \geq 0$, αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής την ανισότητα

$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$. (5) Έστω ότι ο b δεν είναι αρνητικός ακέραιος. Διακρίνοντας περιπτώσεις $a=b$, $a<b$, $a>b$, εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$. (*Υπόδ.:* $\frac{a+k}{b+k} = 1 + \frac{a-b}{b+k}$.)

8. Έστω $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Αποδείξτε ότι η (x_{2k}) είναι αύξουσα και η (x_{2k-1}) φθίνουσα. Αποδείξτε ότι $x_{2k} \leq x_{2k-1}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι οι (x_{2k}), (x_{2k-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο και, επομένως (άσκηση 6), ότι η (x_n) συγκλίνει.

9. Έστω $x_1 > 0$, $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{1+x_n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι οι (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

10. Έστω $a, b, x \in \overline{\mathbf{R}}$, $a \neq b$. Έστω ότι $\lim_{k\to+\infty} x_{2k} = a$, $\lim_{k\to+\infty} x_{2k-1} = b$ και ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$. Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$. (*Υπόδ.:* Η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς είτε με την (x_{2k}) είτε με την (x_{2k-1}).)

11. **Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass**. *Δεύτερη απόδειξη:* (i) Έστω οποιαδήποτε (x_n). Ένας όρος x_n χαρακτηρίζεται *όρος - κορυφή* αν $x_n \geq x_m$ κάθε $m \in \mathbf{N}$, $m \geq n$. Αποδείξτε ότι, αν η (x_n) έχει άπειρους όρους - κορυφή, τότε οι όροι αυτοί σχηματίζουν φθίνουσα υποακολουθία της (x_n) και ότι, αν η (x_n) δεν έχει άπειρους όρους - κορυφή, τότε έχει μια αύξουσα υποακολουθία. (ii) Αποδείξτε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία.

12. Έστω $x_n < x$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι $\sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\} = x$ αν και μόνο αν υπάρχει υποακολουθία της (x_n) που συγκλίνει στον x.

13. Αποδείξτε ότι η (x_n) έχει όριο $x \in \overline{\mathbf{R}}$ αν και μόνο αν κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει υποακολουθία με όριο x.

14. (1) Αποδείξτε ότι η (x_n) δεν έχει όριο αν και μόνο αν υπάρχουν δυο υποακολουθίες της με διαφορετικά όρια. Να αντιπαραβάλετε με την Πρόταση 2.24. (2) Αποδείξτε ότι η (x_n) δεν έχει όριο αν και μόνο αν υπάρχουν l, u, $u < l$ ώστε $x_n \leq u$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ και $x_n \geq l$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$. Να αντιπαραβάλετε με την Πρόταση 2.3(3).

15. (1) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ και $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι η (x_n) δεν έχει καμιά σταθερή υποακολουθία. (2) Έστω φραγμένη (r_n) χωρίς καμιά σταθερή υποακολουθία, ώστε $r_n = \frac{q_n}{p_n}$, $q_n \in \mathbf{Z}$, $p_n \in \mathbf{N}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

2.8 Η Ιδιότητα Πληρότητας.

Η (x_n) χαρακτηρίζεται **ακολουθία Cauchy** αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$ *ώστε* $|x_n - x_m| < \epsilon$ *για κάθε* $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$.

Πρόταση 2.27 *Αν η (x_n) συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Επομένως (αλλάζοντας απλώς το σύμβολο από n σε m), $|x_m - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $m \in \mathbf{N}$, $m \geq n_0$. Άρα

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) - (x_m - x)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$. Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. ♮

Λήμμα 2.3 *Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - x_m| < 1$ για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$. Ειδικότερα, για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $|x_n - x_{n_0}| < 1$ και, επομένως, $|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|$. Ορίζουμε $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1+|x_{n_0}|\}$. Τότε $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $1 \leq n \leq n_0 - 1$ και $|x_n| < 1 + |x_{n_0}| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε η (x_n) είναι φραγμένη. ♮

Το Θεώρημα 2.3 είναι το αντίστροφο της Πρότασης 2.27.

Θεώρημα 2.3 ***Κριτήριο του Cauchy.*** *Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, συγκλίνει.*

Απόδειξη: Η (x_n) είναι φραγμένη και, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass, έχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$. Επίσης, υπάρχει $k_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, $k \geq k_0$. Θα συνδυάσουμε αυτές τις δυο ανισότητες παίρνοντας κατάλληλο n_k, ο οποίος να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη δεύτερη ανισότητα αλλά και στη θέση του m στην πρώτη ανισότητα. Για να γίνει αυτό πρέπει να είναι $k \geq k_0$ (για τη δεύτερη ανισότητα) και $n_k \geq n_0$ (για την πρώτη ανισότητα). Για να είναι $n_k \geq n_0$, αρκεί (επειδή $n_k \geq k$) να είναι $k \geq n_0$. Ορίζουμε $k = \max\{k_0, n_0\} \in \mathbf{N}$. Τότε $k \geq k_0$, οπότε $|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}$, και $n_k \geq k \geq n_0$, οπότε $|x_n - x_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. ♮

Η χρησιμότητα του κριτηρίου του Cauchy είναι παρόμοια με τη χρησιμότητα του Θεωρήματος 2.1. *Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η (x_n) συγκλίνει και δε γνωρίζουμε το υποψήφιο όριο x της (x_n), αντί να μελετήσουμε τις αποστάσεις $|x_n - x|$ των όρων της ακολουθίας απο τον άγνωστο x, μελετάμε τις αποστάσεις $|x_n - x_m|$ μεταξύ των όρων της ακολουθίας.*

Το Θεώρημα 2.3 εκφράζει τη λεγόμενη

Ιδιότητα Πληρότητας του $\mathbf{R}$. *Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.*

Ασκήσεις.

1. Έστω $x_n \in \mathbf{Z}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n = x$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

2. (1) Έστω $0 \leq \rho < 1$ και ότι ισχύει τελικά $|x_n - x_{n+1}| \leq c\rho^n$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, ότι συγκλίνει. (*Υπόδ.:* Αν $n < m$, τότε $|x_n - x_m| = |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)|$.) (2) Έστω $0 \leq \rho < 1$ και ότι ισχύει τελικά $|x_{n+1} - x_{n+2}| \leq \rho|x_n - x_{n+1}|$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. (3) Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{1+x_n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

3. Αν $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, αποδείξτε ότι $x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Είναι η (x_n) ακολουθία Cauchy? Τί συμπεραίνουμε για το όριο της (x_n);

4. Αν $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. (*Υπόδ.:* Αν $n < m$, τότε $|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{m-n-1}}{m}\right| \leq \frac{1}{n+1}$.)

5. Αποδείξτε ότι η σύζευξη της Αρχιμήδειας Ιδιότητας και της Ιδιότητας Πληρότητας είναι ισοδύναμη με την Ιδιότητα Supremum και με την Ιδιότητα Συνέχειας. (*Υπόδ.:* Δείτε τα βήματα (*ii*), (*iii*) της άσκησης 11 της ενότητας 2.5, παρατηρώντας ότι οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy.)

2.9 $\limsup$ και $\liminf$.

Από οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) θα ορίσουμε δυο νέες ακολουθίες, τις (u_n) και (l_n). Αρχίζουμε με την (u_n).
Πρώτη περίπτωση: Έστω ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη. Τότε το $\{x_m : m \in \mathbf{N}\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ είναι άνω φραγμένο. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$, το $\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ είναι, ως υποσύνολο του $\{x_m : m \in \mathbf{N}\}$, κι αυτό άνω φραγμένο. Άρα το $\sup\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\}$ είναι αριθμός και ορίζουμε $u_n = \sup\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\}$.

Προφανώς, $\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n+1\} \subseteq \{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\}$. Ο u_n είναι άνω φράγμα του δεύτερου συνόλου, οπότε είναι άνω φράγμα και του πρώτου συνόλου. Ο u_{n+1} είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του πρώτου συνόλου. Άρα $u_{n+1} \leq u_n$, οπότε η (u_n) είναι φθίνουσα. Άρα το $\lim_{n\to+\infty} u_n$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός είτε $-\infty$. Ορίζουμε

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} u_n .$$

Δεύτερη περίπτωση: Έστω ότι η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε το $\{x_m : m \in \mathbf{N}\}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ το $\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\} =$

$\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Αν ήταν άνω φραγμένο, τότε το $\{x_m : m \in \mathbf{N}\} = \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \cup \{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\}$ θα ήταν, επίσης, άνω φραγμένο. Άρα $\sup\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\} = +\infty$ και ορίζουμε $u_n = +\infty$.

Παρά το ότι περιοριζόμαστε στη μελέτη ακολουθιών στο $\mathbf{R}$, θεωρούμε, καταχρηστικά, τη σταθερή ακολουθία $(u_n) = (+\infty)$. Είναι «λογικό» να θεωρηθεί το $+\infty$ ως όριο της ακολουθίας αυτής, οπότε ορίζουμε

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

Το στοιχείο $\limsup_{n\to+\infty} x_n$ του $\overline{\mathbf{R}}$, που ορίσαμε και στις δυο περιπτώσεις, ονομάζεται **ανώτατο όριο** της (x_n) και το συμβολίζουμε

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad \limsup x_n \qquad \text{ή} \qquad \overline{\lim}\, x_n\,.$$

Τώρα θα ορίσουμε την (l_n) με «συμμετρικό» τρόπο. Περιγράφουμε συνοπτικά. *Πρώτη περίπτωση:* Έστω ότι η (x_n) είναι κάτω φραγμένη. Τότε το $\{x_m : m \in \mathbf{N}\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ είναι κάτω φραγμένο. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$, το $\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ είναι κάτω φραγμένο. Άρα το $\inf\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\}$ είναι αριθμός και ορίζουμε $l_n = \inf\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\}$.

Επειδή $\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n+1\} \subseteq \{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\}$ και ο l_n είναι κάτω φράγμα του δεύτερου συνόλου, ο l_n είναι κάτω φράγμα και του πρώτου συνόλου. Όμως, ο l_{n+1} είναι το *μέγιστο* κάτω φράγμα του πρώτου συνόλου. Άρα $l_n \leq l_{n+1}$. Δηλαδή, η (l_n) είναι αύξουσα, οπότε το $\lim_{n\to+\infty} l_n$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$. Ορίζουμε

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} l_n\,.$$

Δεύτερη περίπτωση: Έστω ότι η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη. Τότε το $\{x_m : m \in \mathbf{N}\}$ δεν είναι κάτω φραγμένο. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$, το $\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ δεν είναι κάτω φραγμένο. Άρα $\inf\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \geq n\} = -\infty$ και ορίζουμε $l_n = -\infty$.

Θεωρούμε, καταχρηστικά, τη σταθερή ακολουθία $(l_n) = (-\infty)$ και, επειδή είναι «λογικό» να θεωρηθεί το $-\infty$ ως όριό της, ορίζουμε

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$$

Το στοιχείο $\liminf_{n\to+\infty} x_n$ του $\overline{\mathbf{R}}$, που ορίσαμε και στις δυο περιπτώσεις, ονομάζεται **κατώτατο όριο** της (x_n) και το συμβολίζουμε

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad \liminf x_n \qquad \text{ή} \qquad \underline{\lim}\, x_n\,.$$

Παραδείγματα: (1) $\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι $u_n = \sup\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\} = \frac{1}{n}$, $l_n = \inf\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\} = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$.

(2) $\liminf_{n\to+\infty}(-\frac{1}{n}) = \limsup_{n\to+\infty}(-\frac{1}{n}) = 0$.

Διότι $u_n = \sup\{-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}, \dots\} = 0$, $l_n = \inf\{-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}, \dots\} = -\frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$.

(3) $\liminf_{n\to+\infty} 0 = \limsup_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Διότι, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι $u_n = \sup\{0, 0, \dots\} = 0$, $l_n = \inf\{0, 0, \dots\} = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$.

(4) $\liminf_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$.

Για άρτιο $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sup\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\} = \frac{1}{n+1}$, $l_n = \inf\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\} = -\frac{1}{n}$. Για περιττό $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sup\{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}, \dots\} = \frac{1}{n}$, $l_n = \inf\{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}, \dots\} = -\frac{1}{n+1}$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ και $-\frac{1}{n} \leq l_n \leq 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$.

(5) $\liminf_{n\to+\infty}(-1)^{n-1} = -1$, $\limsup_{n\to+\infty}(-1)^{n-1} = 1$.

Για άρτιο $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sup\{-1, 1, \dots\} = 1$, $l_n = \inf\{-1, 1, \dots\} = -1$. Για περιττό $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sup\{1, -1, \dots\} = 1$, $l_n = \inf\{1, -1, \dots\} = -1$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $u_n = 1$, $l_n = -1$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, $\lim_{n\to+\infty} l_n = -1$.

(6) $\liminf_{n\to+\infty} n = \limsup_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Η (n) δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε $\limsup_{n\to+\infty} n = +\infty$. Επίσης, είναι $l_n = \inf\{n, n+1, \dots\} = n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} l_n = +\infty$.

(7) $\liminf_{n\to+\infty}(-n) = \limsup_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$.

Η $(-n)$ δεν είναι κάτω φραγμένη, οπότε $\liminf_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$. Επίσης, είναι $u_n = \sup\{-n, -n-1, \dots\} = -n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(8) $\liminf_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}n = -\infty$, $\limsup_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}n = +\infty$.

Διότι η $\big((-1)^{n-1}n\big)$ δεν είναι άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμενη.

(9) $\liminf_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}-1}{2}n = -\infty$, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}-1}{2}n = 0$.

Η $\big(\frac{(-1)^{n-1}-1}{2}n\big)$ δεν είναι κάτω φραγμένη, οπότε $\liminf_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}-1}{2}n = -\infty$. Για άρτιο $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sup\{-n, 0, -n-2, 0, \dots\} = 0$ ενώ, για περιττό $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sup\{0, -n-1, 0, -n-3, \dots\} = 0$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $u_n = 0$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(10) $\liminf_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{2}n = 0$, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{2}n = +\infty$.

Η $\big(\frac{(-1)^{n-1}+1}{2}n\big)$ δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε $\limsup_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{2}n = +\infty$. Για άρτιο $n \in \mathbf{N}$, $l_n = \inf\{0, n+1, 0, n+3, \dots\} = 0$ ενώ, για περιττό $n \in \mathbf{N}$, $l_n = \sup\{n, 0, n+2, 0, \dots\} = 0$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $l_n = 0$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$.

Γνωρίζουμε ότι δεν έχουν όλες οι ακολουθίες όριο. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι *κάθε ακολουθία έχει ανώτατο όριο και κατώτατο όριο.*

Παρατηρήστε τα παραδείγματα. (i) Το κατώτατο όριο δεν είναι μεγαλύτερο από το ανώτατο όριο. (ii) Σε όποιο παράδειγμα το ανώτατο και το κατώτατο όριο είναι ίσα η ακολουθία έχει όριο και οι τρεις αυτές ποσότητες είναι ίσες. Σε όποιο παράδειγμα το ανώτατο και το κατώτατο όριο δεν είναι ίσα η ακολουθία δεν έχει όριο. (iii) Σε κάθε παράδειγμα υπάρχει υποακολουθία με όριο το ανώτατο όριο και υποακολουθία με όριο το κατώτατο όριο. Όλα αυτά θα τα γενικεύσουμε στις επόμενες προτάσεις.

Πρόταση 2.28 *Έστω οποιαδήποτε* (x_n).

(1) *Είναι* $\limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ *αν και μόνο αν η* (x_n) *δεν είναι άνω φραγμένη. Επίσης, είναι* $\limsup_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ *αν και μόνο αν* $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.
(2) *Είναι* $\liminf_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ *αν και μόνο αν η* (x_n) *δεν είναι κάτω φραγμένη. Επίσης, είναι* $\liminf_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ *αν και μόνο αν* $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
(3) *Είναι* $\liminf_{n\to+\infty} x_n \le \limsup_{n\to+\infty} x_n$.

Απόδειξη: (1) Από τον ορισμό του $\limsup_{n\to+\infty} x_n$, το πρώτο μέρος είναι προφανές.

Έστω $\limsup_{n\to+\infty} x_n = -\infty$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. Από τον ορισμό του u_n , ισχύει $x_n \le u_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$. Αντιστρόφως, έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n < -M - 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Από τον ορισμό του u_{n_0} , $u_{n_0} \le -M - 1 < -M$ και, επειδή η (u_n) είναι φθίνουσα, $u_n \le u_{n_0} < -M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, οπότε $\limsup_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.
(2) Ομοίως.
(3) Αν $\liminf_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ ή $\limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, τότε, προφανώς, ισχύει $\liminf_{n\to+\infty} x_n \le \limsup_{n\to+\infty} x_n$. Έστω $\liminf_{n\to+\infty} x_n > -\infty$ και $\limsup_{n\to+\infty} x_n < +\infty$. Δηλαδή, έστω ότι η (x_n) είναι φραγμένη. Τότε είναι $\inf\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \ge n\} \le \sup\{x_m : m \in \mathbf{N}, m \ge n\}$, δηλαδή $l_n \le u_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} l_n \le \lim_{n\to+\infty} u_n$. ♮

Πρόταση 2.29 *Έστω οποιαδήποτε* (x_n).
(1) *Για κάθε* $x > \limsup_{n\to+\infty} x_n$ *ισχύει τελικά* $x_n < x$. *Επίσης, για κάθε* $x < \limsup_{n\to+\infty} x_n$ *ισχύει* $x_n > x$ *για άπειρους* $n \in \mathbf{N}$.
(2) *Για κάθε* $x < \liminf_{n\to+\infty} x_n$ *ισχύει τελικά* $x_n > x$. *Επίσης, για κάθε* $x > \liminf_{n\to+\infty} x_n$ *ισχύει* $x_n < x$ *για άπειρους* $n \in \mathbf{N}$.

Απόδειξη: (1) Έστω $x > \limsup_{n\to+\infty} x_n$. Άρα $\limsup_{n\to+\infty} x_n < +\infty$ και η (x_n) είναι άνω φραγμένη. Επειδή $\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} u_n < x$. Άρα ισχύει τελικά $u_n < x$, οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $u_n < x$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Ειδικώτερα, $u_{n_0} < x$, οπότε, από τον ορισμό του u_{n_0} , ισχύει $x_n < x$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Άρα ισχύει τελικά $x_n < x$.

Έστω $x < \limsup_{n\to+\infty} x_n$. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι ο ισχυρισμός «ισχύει $x_n > x$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$» είναι λάθος. Τότε ισχύει τελικά $x_n \le x$, οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n \le x$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Από τον ορισμό του u_{n_0} συνεπάγεται $u_{n_0} \le x$ και, επειδή η (u_n) είναι φθίνουσα, ισχύει $u_n \le u_{n_0} \le x$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Άρα $\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} u_n \le x$ και καταλήξαμε σε άτοπο.
(2) Ομοίως. ♮

Πρόταση 2.30 *Έστω οποιαδήποτε* (x_n). *Η* (x_n) *έχει όριο αν και μόνο αν* $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n$. *Επίσης, στην περίπτωση που η* (x_n) *έχει όριο, είναι* $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

Απόδειξη: Έστω ότι η (x_n) έχει όριο.

Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, τότε $\liminf_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ και, από το ότι η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, συνεπάγεται $\limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n =$

$-\infty$, τότε $\limsup_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ και, από το ότι η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, συνεπάγεται $\liminf_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x - \frac{\epsilon}{2} < x_m < x + \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $m \in \mathbf{N}$, $m \geq n_0$. Από τον ορισμό των l_{n_0}, u_{n_0}, συνεπάγεται $x - \frac{\epsilon}{2} \leq l_{n_0}$ και $u_{n_0} \leq x + \frac{\epsilon}{2}$. Επειδή η (l_n) είναι αύξουσα και η (u_n) είναι φθίνουσα και επειδή $l_n \leq u_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $x - \epsilon < x - \frac{\epsilon}{2} \leq l_n \leq u_n \leq x + \frac{\epsilon}{2} < x + \epsilon$ και, επομένως, $|l_n - x| < \epsilon$ και $|u_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} l_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = x$, οπότε $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = x$.

Αντιστρόφως, έστω $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n$.

Αν $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Αν $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

Τέλος, έστω $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = x$. Για κάθε $\epsilon > 0$ είναι $\limsup_{n\to+\infty} x_n < x + \epsilon$, οπότε, βάσει της Πρότασης 2.29, ισχύει τελικά $x_n < x + \epsilon$. Ομοίως για κάθε $\epsilon > 0$ είναι $x - \epsilon < \liminf_{n\to+\infty} x_n$, οπότε ισχύει τελικά $x_n > x - \epsilon$. Άρα ισχύει τελικά $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. $\natural$

Όπως ήδη παρατηρήσαμε, τα αποτελέσματα των Προτάσεων 2.28(3) και 2.30 επιβεβαιώνονται από τα παραδείγματα.

Έστω $x \in \overline{\mathbf{R}}$. Το x χαρακτηρίζεται **υποακολουθιακό όριο** της (x_n) αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) με όριο x : $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$.

Παραδείγματα: (1) Αν η (x_n) έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο, οπότε το όριό της είναι το μοναδικό υποακολουθιακό της όριο. Για παράδειγμα, η $(\frac{1}{n})$ έχει μοναδικό υποακολουθιακό όριο τον 0 και η $(-n)$ το $-\infty$.

(2) Η $\big((-1)^{n-1}\big)$ έχει τουλάχιστον δυο υποακολουθιακά όρια, τους ± 1. Σύμφωνα με την άσκηση 10 της ενότητας 2.7, δεν υπάρχει άλλο υποακολουθιακό όριο.

(3) Ομοίως, η $\big(\frac{(-1)^{n-1}+1}{2} n\big)$ έχει μοναδικά υποακολουθιακά όρια τον 0 και το $+\infty$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.26, *κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο*: αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο το οποίο είναι αριθμός ενώ, αν η (x_n) δεν είναι φραγμένη, τότε ένα τουλάχιστον από τα $\pm\infty$ είναι υποακολουθιακό όριό της.

Αν η (x_n) έχει δυο διαφορετικά υποακολουθιακά όρια (δηλαδή έχει δυο υποακολουθίες με διαφορετικά όρια) η (x_n) δεν έχει όριο. Η Πρόταση 2.31 εξασφαλίζει δυο *συγκεκριμένα* υποακολουθιακά όρια μιας οποιασδήποτε ακολουθίας (τα οποία μπορεί να ταυτίζονται).

Πρόταση 2.31 *Έστω οποιαδήποτε (x_n). Τότε τα στοιχεία $\liminf_{n\to+\infty} x_n$ και $\limsup_{n\to+\infty} x_n$ του $\overline{\mathbf{R}}$ είναι το ελάχιστο και το μέγιστο, αντιστοίχως, υποακολουθιακό όριο της (x_n).*

Απόδειξη: Για συντομία, έστω $\overline{x} = \limsup_{n\to+\infty} x_n \in \overline{\mathbf{R}}$. Αν $\overline{x} = +\infty$, τότε η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε έχει το $+\infty$ ως υποακολουθιακό όριο. Άρα το $+\infty$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n). Αν $\overline{x} = -\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, οπότε κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει το ίδιο όριο $-\infty$.

Άρα το $-\infty$ είναι το μοναδικό – και, επομένως, το μέγιστο – υποακολουθιακό όριο της (x_n).

Τέλος, έστω $\overline{x} \in \mathbf{R}$. Έστω u', u'' ώστε $u' < \overline{x} < u''$. Τότε ισχύει τελικά $x_n < u''$ και, επίσης, ισχύει $x_n > u'$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$. Επομένως, ισχύει $u' < x_n < u''$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$. Άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbf{N}$ ώστε $\overline{x}-1 < x_{n_1} < \overline{x}+1$. Κατόπιν, υπάρχει $n_2 \in \mathbf{N}$, $n_2 > n_1$ ώστε $\overline{x} - \frac{1}{2} < x_{n_2} < \overline{x} + \frac{1}{2}$. Κατόπιν, υπάρχει $n_3 \in \mathbf{N}$, $n_3 > n_2$ ώστε $\overline{x} - \frac{1}{3} < x_{n_3} < \overline{x} + \frac{1}{3}$. Συνεχίζοντας επ' άπειρον, ορίζουμε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n), ώστε $\overline{x} - \frac{1}{k} < x_{n_k} < \overline{x} + \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Άρα $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \overline{x}$, οπότε ο $\overline{x}$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n).

Έστω υποακολουθιακό όριο $x \in \overline{\mathbf{R}}$ της (x_n). Δηλαδή, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $x > \overline{x}$. Έστω t ώστε $\overline{x} < t < x$. Επειδή $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$, ισχύει τελικά $x_{n_k} > t$. Άρα ισχύει $x_n > t$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$. Όμως, επειδή $\overline{x} < t$, ισχύει τελικά $x_n < t$. Καταλήγουμε σε αντίφαση, οπότε $x \leq \overline{x}$. Άρα ο $\overline{x}$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το $\liminf_{n\to+\infty} x_n$ είναι το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n). $\natural$

Ασκήσεις.

1. Αν $a < b < c$, βρείτε με τους ορισμούς το $\limsup_{n\to+\infty}$ και το $\liminf_{n\to+\infty}$ των $(a, b, a, b, a, b, a, b, \ldots)$, $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \ldots)$. Ποια είναι τα υποακολουθιακά τους όρια;

2. Βρείτε, μέσω των ορισμών τους, τα $\limsup_{n\to+\infty}$, $\liminf_{n\to+\infty}$ των ακολουθιών: $(\frac{n+1}{n})$, $(\frac{n-1}{n})$, (2^n), (2^{-n}), $((-2)^n)$, $(2^{(-1)^{n-1}n})$, $((-1)^{n-1} + \frac{1}{n})$, $\big((-1)^{n-1}(1 + \frac{1}{n})\big)$, $\big((-1)^{n-1}(1 - \frac{1}{n})\big)$.

3. (1) Αν ισχύει τελικά $x_n \leq u$, αποδείξτε ότι $\limsup_{n\to+\infty} x_n \leq u$. Αν ισχύει $x_n \geq u$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$, αποδείξτε ότι $\limsup_{n\to+\infty} x_n \geq u$. (2) Αν ισχύει τελικά $x_n \geq l$, αποδείξτε ότι $\liminf_{n\to+\infty} x_n \geq l$. Αν ισχύει $x_n \leq l$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$, αποδείξτε ότι $\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq l$.

4. Αν ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$, αποδείξτε: $\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq \liminf_{n\to+\infty} y_n$ και $\limsup_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup_{n\to+\infty} y_n$.

5. Αποδείξτε ότι: (1) αν δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή, $\liminf_{n\to+\infty} x_n + \liminf_{n\to+\infty} y_n \leq \liminf_{n\to+\infty}(x_n + y_n)$ και $\limsup_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n$, (2) αν $x_n, y_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή, $\liminf_{n\to+\infty} x_n \liminf_{n\to+\infty} y_n \leq \liminf_{n\to+\infty} x_n y_n$, $\limsup_{n\to+\infty} x_n y_n \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n \limsup_{n\to+\infty} y_n$ (3) αν $t > 0$, $\limsup_{n\to+\infty} t x_n = t \limsup_{n\to+\infty} x_n$ και $\liminf_{n\to+\infty} t x_n = t \liminf_{n\to+\infty} x_n$. Τι γίνεται αν $t < 0$;

6. Αποδείξτε ότι: (1) αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} y_n$ και δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές, $\limsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n) = \limsup_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n$ και $\liminf_{n\to+\infty}(x_n+y_n) = \liminf_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n$, (2) αν $x_n, y_n >$

0 για κάθε $n \in \mathbf{N}$, υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} y_n$ και δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές, $\limsup_{n\to+\infty} x_n y_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n \lim_{n\to+\infty} y_n$ και $\liminf_{n\to+\infty} x_n y_n = \liminf_{n\to+\infty} x_n \lim_{n\to+\infty} y_n$.

7. Έστω $m \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι οι (x_n), (x_{n+m}) έχουν τα ίδια υποακολουθιακά όρια.

8. (1) Έστω η $(0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots)$. Αποδείξτε ότι έχει σύνολο υποακολουθιακών ορίων το $[0, 1]$. (2) Υπάρχει (x_n) με σύνολο υποακολουθιακών ορίων το $(0, 1)$ ή το $(0, 1]$ ή το $[0, 1)$;

9. (1) Αποδείξτε ότι ο $x \in \overline{\mathbf{R}}$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n) αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$. (2) Έστω $X \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n). Αν (y_n) είναι οποιαδήποτε ακολουθία στο X και $\lim_{n\to+\infty} y_n = y \in \overline{\mathbf{R}}$, αποδείξτε ότι $y \in X$. (3) Έστω $a < b < c \leq d$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει (x_n) με σύνολο υποακολουθιακών ορίων το $[a, b) \cup [c, d]$ ή το $[a, b] \cap \mathbf{Q}$.

10. Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = x \in \overline{\mathbf{R}}$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = x$. (*Υπόδ.:* Έστω $x \in \mathbf{R}$. Υπάρχει M ώστε $|x_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \frac{x_1+\cdots+x_{n_0-1}}{n} + \frac{x_{n_0}+\cdots+x_n}{n} \leq \frac{(n_0-1)M}{n} + \frac{(n-n_0+1)(x+\epsilon)}{n} \leq \frac{(n_0-1)M}{n} + x + \epsilon$. Άρα $\limsup_{n\to+\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq x + \epsilon$. Άρα $\limsup_{n\to+\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq x$. Ομοίως: $x \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.)

11. Χρησιμοποιώντας τις έννοιες του ανώτατου ορίου και του κατώτατου ορίου, αποδείξτε ότι κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει. (*Υπόδ.:* Έστω $\underline{x} = \liminf_{n\to+\infty} x_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $\overline{x} = \limsup_{n\to+\infty} x_n \in \overline{\mathbf{R}}$ και $\underline{x} < \overline{x}$. Θεωρήστε l, u ώστε $\underline{x} < l < u < \overline{x}$. Ισχύει $x_m < l$ για άπειρους $m \in \mathbf{N}$ και $x_n > u$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$. Άρα ισχύει $x_n - x_m > u - l$ για άπειρους $n, m \in \mathbf{N}$. Μπορεί να είναι η (x_n) ακολουθία Cauchy?)

12. Δώστε δεύτερη λύση της άσκησης 14 της ενότητας 2.7.

Κεφάλαιο 3

Όρια συναρτήσεων.

3.1 Περιοχές και σημεία συσσώρευσης.

Α. Περιοχές. Σημεία συσσώρευσης.

Ας ξαναθυμηθούμε, από την ενότητα 2.3, τις περιοχές των σημείων του $\overline{\mathbf{R}}$. Αν $\xi \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, συμβολίζουμε $N_\xi(\delta) = (\xi - \delta, \xi + \delta)$. Αν $\xi = \pm\infty$, $\delta > 0$, συμβολίζουμε $N_{+\infty}(\delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty)$ και $N_{-\infty}(\delta) = (-\infty, -\frac{1}{\delta})$. Σε κάθε περίπτωση, το σύνολο (διάστημα) $N_\xi(\delta)$ ονομάζεται *δ-περιοχή* του $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$.

Κάνοντας μια μικρή επέκταση της έννοιας της περιοχής, ορίζουμε την **τρυπημένη περιοχή**

$$N_\xi{}^*(\delta) = N_\xi(\delta) \setminus \{\xi\}.$$

Δηλαδή, αν $\xi \in \mathbf{R}$,

$$N_\xi{}^*(\delta) = (\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus \{\xi\} = (\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta).$$

Ενώ, αν $\xi = +\infty$, τότε $N_{+\infty}{}^*(\delta) = N_{+\infty}(\delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty)$ και, αν $\xi = -\infty$, τότε $N_{-\infty}{}^*(\delta) = N_{-\infty}(\delta) = (-\infty, -\frac{1}{\delta})$. Παρατηρήστε ότι οι τρυπημένες περιοχές των $\pm\infty$ δεν διαφέρουν από τις αντίστοιχες περιοχές τους, αφού, έτσι κι αλλιώς, τα $\pm\infty$ δεν ανήκουν στις περιοχές αυτές.

Το $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ χαρακτηρίζεται **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου A αν *για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in N_\xi{}^*(\delta) \cap A$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in N_\xi(\delta) \cap A$, $x \neq \xi$.* Πιο συγκεκριμένα: (i) ο $\xi \in \mathbf{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in \big((\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)\big) \cap A$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta$, (ii) το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $x \in (N, +\infty) \cap A$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$, $x > N$ και (iii) το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $x \in (-\infty, -N) \cap A$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$, $x < -N$.

Παρατηρήστε ότι, αν $\xi \notin A$, τότε $N_\xi{}^*(\delta) \cap A = N_\xi(\delta) \cap A$, οπότε το να υπάρχει $x \in N_\xi{}^*(\delta) \cap A$ είναι ισοδύναμο με το να υπάρχει $x \in N_\xi(\delta) \cap A$. Αν, όμως, $\xi \in A$, το $N_\xi(\delta) \cap A$ έχει ακριβώς ένα επιπλέον στοιχείο από το $N_\xi{}^*(\delta) \cap A$, τον ξ.

Πρόταση 3.1 (1) *Το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν το A δεν είναι άνω φραγμένο.*
(2) *Το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο.*

Απόδειξη: (1) Το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $x \in A$, $x > N$ αν και μόνο αν κανένας $N > 0$ δεν είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν το A δεν είναι άνω φραγμένο.
(2) Ομοίως. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Έστω $a < b$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα $(a,b), (a,b], [a,b)$, $[a,b]$ είναι το $[a,b]$.

Ας βρούμε, για παράδειγμα, τα σημεία συσσώρευσης του $[a,b)$. Τα $\pm\infty$ δεν είναι σημεία συσσώρευσης, διότι το $[a,b)$ είναι φραγμένο. Αν $\xi \in \mathbf{R}$, $\xi < a$, παίρνουμε $\delta = a - \xi > 0$ και τότε $N_\xi{}^*(\delta) \cap [a,b) = \emptyset$. Ομοίως, αν $\xi \in \mathbf{R}$, $\xi > b$, παίρνουμε $\delta = \xi - b > 0$ και τότε $N_\xi{}^*(\delta) \cap [a,b) = \emptyset$. Άρα, σ' αυτές τις περιπτώσεις, ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $[a,b)$. Αν $\xi \in [a,b]$, $\delta > 0$, είναι εύκολο να βρούμε $x \in N_\xi{}^*(\delta) \cap [a,b)$. Ειδικώτερα, αν $a \leq \xi < b$, ένα τέτοιο στοιχείο είναι ο $x = \min\{\xi + \frac{\delta}{2}, \frac{\xi+b}{2}\}$ και, αν $a < \xi \leq b$, ένα τέτοιο στοιχείο είναι ο $x = \max\{\xi - \frac{\delta}{2}, a\}$. Άρα κάθε $\xi \in [a,b]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $[a,b)$.

Παρατηρήστε ότι τα άκρα a, b είναι σημεία συσσώρευσης και των τεσσάρων διαστημάτων $(a,b), (a,b], [a,b)$, $[a,b]$.

(2) Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ είναι το $[a,+\infty]$. Ομοίως, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ είναι το $[-\infty,b]$. Τέλος, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $\mathbf{R} = (-\infty,+\infty)$ είναι το $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty,+\infty]$.

(3) Έστω $a < b$. Το σύνολο $\{a,b\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.

Το $\{a,b\}$ είναι φραγμένο, οπότε τα $\pm\infty$ δεν είναι σημεία συσσώρευσής του. Αν $\xi \notin \{a,b\}$, παίρνουμε $\delta > 0$ ίσο με την απόσταση του ξ από το κοντινότερο από τα a, b, δηλαδή $\delta = a - \xi$, αν $\xi < a$, ή $\delta = \xi - b$, αν $\xi > b$, ή $\delta = \min\{\xi - a, b - \xi\}$, αν $a < \xi < b$. Τότε $N_\xi{}^*(\delta) \cap \{a,b\} = \emptyset$. Τέλος, αν $\xi \in \{a,b\}$, παίρνουμε $\delta = b - a > 0$ και τότε, πάλι, $N_\xi{}^*(\delta) \cap \{a,b\} = \emptyset$.

(4) Αν $a < b < c$, τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $[a,b) \cup \{c\}$ είναι το $[a,b]$.

(5) Το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $\mathbf{N}$ είναι το $+\infty$.

Το $\mathbf{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσής του. Το $-\infty$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbf{N}$ διότι το $\mathbf{N}$ είναι κάτω φραγμένο. Για κάθε $\xi \in \mathbf{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_\xi{}^*(\delta) \cap \mathbf{N} = \emptyset$. Πράγματι, αν $\xi \in \mathbf{N}$, θεωρούμε $\delta = 1$, ενώ, αν $\xi \notin \mathbf{N}$, θεωρούμε δ ίσο με την απόσταση του ξ από τον κοντινότερό του φυσικό. Πιο συγκεκριμένα. Αν $\xi < 1$, ο κοντινότερος προς τον ξ φυσικός είναι ο 1, οπότε παίρνουμε $\delta = 1 - \xi$. Αν $\xi > 1$, οι δυο κοντινότεροι προς τον ξ φυσικοί είναι οι $[\xi], [\xi] + 1$ (ο ξ είναι ανάμεσά τους), οπότε παίρνουμε $\delta = \min\{\xi - [\xi], [\xi] + 1 - \xi\}$.

(6) Ο 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$.

Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \delta$, οπότε $\frac{1}{n} \in \big((-\delta, 0) \cup (0, \delta)\big) \cap A$.

Θεώρημα 3.1 ***Σημεία συσσώρευσης και ακολουθίες.*** *Έστω $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$. Το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει (x_n) στο A ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.*

Απόδειξη: Έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Αν $\xi \in \mathbf{R}$, τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in A$, $0 < |x_n - \xi| < \frac{1}{n}$. Άρα υπάρχει (x_n) στο A ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Αν $\xi = +\infty$, τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in A$, $x_n > n$. Άρα, υπάρχει (x_n) στο A ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Αν $\xi = -\infty$, τότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in A$, $x_n < -n$. Άρα, υπάρχει (x_n) στο A ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει (x_n) στο A ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\delta)$, οπότε η τρυπημένη περιοχή ${N_\xi}^*(\delta)$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A. Άρα το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Έστω, πάλι, το $[a, b)$ με $a < b$. Αν $a \leq \xi < b$, θεωρούμε την ακολουθία $(\xi + \frac{b-\xi}{2n})$ στο $[a, b)$ με όριο ξ της οποίας όλοι οι όροι είναι $\neq \xi$. Ομοίως, αν $a < \xi \leq b$, θεωρούμε την $(\xi - \frac{\xi - a}{n})$ στο $[a, b)$ με όριο ξ της οποίας όλοι οι όροι είναι $\neq \xi$. Άρα κάθε $\xi \in [a, b]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $[a, b)$. Αντιστρόφως, γνωρίζουμε ότι κανένα $\xi \notin [a, b]$ δεν είναι όριο ακολουθίας στο $[a, b)$, οπότε κανένα $\xi \notin [a, b]$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $[a, b)$.

(2) Αν $a < b$, κανένα στοιχείο του $\{a, b\}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσής του. Για παράδειγμα, η μοναδική ακολουθία στο $\{a, b\}$ με όλους τους όρους της $\neq b$ είναι η σταθερή (a), η οποία, όμως, έχει όριο a και όχι b. Άρα ο b δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $\{a, b\}$.

(3) Το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbf{N}$. Η ακολουθία (n) στο $\mathbf{N}$ έχει όριο $+\infty$.

(4) Ο 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$. Η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ είναι στο σύνολο αυτό, έχει όριο 0 και όλους τους όρους της $\neq 0$.

Β. «Κοντά στο ξ» / «σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ».

Έστω μια ιδιότητα η οποία ισχύει ή όχι ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή x σε κάποιο σύνολο A. Με άλλα λόγια, η συγκεκριμένη ιδιότητα *έχει νόημα* στο σύνολο A και για κάποιους $x \in A$ η ιδιότητα ισχύει ενώ για τους υπόλοιπους $x \in A$ η ιδιότητα δεν ισχύει. Έστω B το σύνολο των $x \in A$ για τους οποίους η ιδιότητα ισχύει. Προφανώς, $B \subseteq A$ και το σύνολο των $x \in A$ για τους οποίους η ιδιότητα δεν ισχύει είναι το $A \setminus B$.

Παράδειγμα: Η ιδιότητα $x \leq \sqrt{x}$ έχει νόημα στο $A = [0, +\infty)$, ισχύει στο $B = [0, 1]$ και δεν ισχύει στο $A \setminus B = (1, +\infty)$.

Έστω, επιπλέον, $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$. Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει κοντά στο** ξ, αν το ξ

είναι σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in N_\xi{}^*(\delta_0)$ στον οποίο έχει νόημα ή, ισοδύναμα, για κάθε $x \in N_\xi^*(\delta_0) \cap A$. Πιο συγκεκριμένα: (i) αν $\xi \in \mathbf{R}$, η ιδιότητα ισχύει κοντά στον ξ αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$, (ii) η ιδιότητα ισχύει κοντά στο $+\infty$ αν το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A$, $x > N_0$, (iii) η ιδιότητα ισχύει κοντά στο $-\infty$ αν το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A$, $x < -N_0$.

Παραδείγματα: (1) Η ιδιότητα $x \leq \sqrt{x}$ ισχύει κοντά στον 0, διότι ο 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $[0, +\infty)$ και η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in (0, 1) = N_0{}^*(1) \cap [0, +\infty)$.

(2) Η ιδιότητα $\frac{1}{\sqrt{x}} > 7$ έχει νόημα στο $(0, +\infty)$ και ισχύει στο $(0, \frac{1}{49})$. Δε μπορούμε να πούμε ότι η ιδιότητα ισχύει κοντά στον -1, αφού ο -1 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $(0, +\infty)$. Η ιδιότητα ισχύει κοντά στον 0 διότι ο 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $(0, +\infty)$ και η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in (0, +\infty)$, $0 < |x| < \frac{1}{49}$ ή, ισοδύναμα, για κάθε x, $0 < x < \frac{1}{49}$. Δε μπορούμε να πούμε ότι η ιδιότητα ισχύει κοντά στο $+\infty$ διότι, αν και το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $(0, +\infty)$, δεν υπάρχει κανένας $N_0 > 0$ ώστε να ισχύει η ιδιότητα για κάθε $x \in (0, +\infty)$, $x > N_0$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $x > N_0$.

Έστω, πάλι, μια ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο σύνολο A και ισχύει στο $B \subseteq A$. Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο** $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ αν *το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του B* ή, με άλλα λόγια, αν *για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in N_\xi{}^*(\delta) \cap B$* ή, ισοδύναμα, αν *για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in N_\xi{}^*(\delta)$.*

Παρατηρούμε ότι *αν μια ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ, τότε αυτή ισχύει και σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.* Πράγματι, έστω ξ σημείο συσσώρευσης του A και $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A$. Έστω $\delta > 0$. Θεωρούμε $\delta' = \min\{\delta, \delta_0\} > 0$. Τότε $\delta' \leq \delta_0$, οπότε $N_\xi{}^*(\delta') \subseteq N_\xi{}^*(\delta_0)$ και, επομένως, η ιδιότητα ισχύει για κάθε $x \in N_\xi{}^*(\delta') \cap A$. Επειδή το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, υπάρχει $x' \in N_\xi{}^*(\delta') \cap A$ και, όπως μόλις είδαμε, η ιδιότητα ισχύει για τον x'. Τέλος, $\delta' \leq \delta$, οπότε $N_\xi{}^*(\delta') \subseteq N_\xi{}^*(\delta)$ και, επομένως, $x' \in N_\xi{}^*(\delta)$. Άρα για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in N_\xi{}^*(\delta)$ (τον x'), οπότε η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Όμως, το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.

Παράδειγμα: Έστω η ιδιότητα $(-1)^{[x]} > 0$ η οποία έχει νόημα στο $\mathbf{R}$. Για κάθε $n \in \mathbf{Z}$ η παράσταση $(-1)^{[x]}$ είναι σταθερή $(-1)^n$ στο $[n, n+1)$. Άρα το σύνολο B στο οποίο η ιδιότητα ισχύει είναι το $B = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [2k, 2k+1)$ και το σύνολο $\mathbf{R} \setminus B$ στο οποίο η ιδιότητα δεν ισχύει είναι το $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [2k-1, 2k)$. Τώρα, βλέπουμε ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του B αλλά δεν υπάρχει κανένας $N_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x > N_0$. Δηλαδή, η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ αλλά δε μπορούμε να πούμε ότι ισχύει κοντά στο $+\infty$.

Έστω δυο ιδιότητες οι οποίες έχουν νόημα στο ίδιο σύνολο A αλλά ισχύουν σε, πιθανώς, διαφορετικά υποσύνολα του A και έστω $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. *Αν η μια ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ και η άλλη ιδιότητα ισχύει, επίσης, κοντά στο ξ, τότε ισχύουν και οι δυο (ταυτόχρονα) ιδιότητες κοντά στο ξ.* Πράγματι, υπάρχει ${\delta_0}' > 0$ ώστε η πρώτη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in {N_\xi}^*({\delta_0}') \cap A$ και ${\delta_0}'' > 0$ ώστε η δεύτερη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in {N_\xi}^*({\delta_0}'') \cap A$. Θεωρούμε $\delta_0 = \min\{{\delta_0}', {\delta_0}''\} > 0$, οπότε $\delta_0 \leq {\delta_0}'$ και $\delta_0 \leq {\delta_0}''$. Άρα ${N_\xi}^*(\delta_0) \subseteq {N_\xi}^*({\delta_0}')$ και ${N_\xi}^*(\delta_0) \subseteq {N_\xi}^*({\delta_0}'')$. Άρα ισχύουν και οι δυο ιδιότητες για κάθε $x \in {N_\xi}^*(\delta_0) \cap A$.

Το προηγούμενο συμπέρασμα ισχύει και για τρεις ή τέσσερις ή και για οποιονδήποτε *πεπερασμένο* αριθμό ιδιοτήτων.

Έστω, τώρα, μια ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο σύνολο A, οπότε και η αντίθετη ιδιότητα έχει νόημα στο ίδιο σύνολο A. Έστω, επίσης, ένα $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Τότε *η αντίθετη ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ αν και μόνο αν δεν είναι σωστό ότι η ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ.* Πράγματι, έστω ότι δεν είναι σωστό ότι η ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ. Δηλαδή, δεν υπάρχει κανένας $\delta_0 > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in {N_\xi}^*(\delta_0) \cap A$. Με άλλα λόγια, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x \in {N_\xi}^*(\delta) \cap A$ για τον οποίο η ιδιότητα δεν ισχύει ή, ισοδύναμα, για τον οποίο ισχύει η αντίθετη ιδιότητα. Άρα, για κάθε $\delta > 0$, η αντίθετη ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in {N_\xi}^*(\delta) \cap A$. Άρα η αντίθετη ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Η αντίστροφη σειρά συλλογισμών αποδεικνύει το αντίστροφο.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ είναι ο 0.

2. Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των $(a, b) \cup (b, c)$, $(a, b) \cup \{b + \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$, $\{a - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup (a, b)$.

3. Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο A δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.

4. Έστω $\xi \in \mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν είναι σημείο συσσώρευσης του $A \setminus \{\xi\}$.

5. Έστω $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$, $A \subseteq B$. Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, αποδείξτε ότι είναι σημείο συσσώρευσης και του B.

6. (1) Αποδείξτε ότι κάθε στοιχείο του $\overline{\mathbf{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης των $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. (2) Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των $(a, b) \cap \mathbf{Q}$, $(a, b) \setminus \mathbf{Q}$.

7. Έστω μη κενό A. Αποδείξτε ότι, αν το $\sup A$ δεν ανήκει στο A, τότε είναι σημείο συσσώρευσης του A. (*Υπόδ.:* Πρόταση 2.23.) Ομοίως, για το $\inf A$.

8. (1) Ποιο είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιο το σύνολο στο οποίο ισχύει καθεμιά από τις: $\frac{1}{x^2} > 100$, $\frac{x+2}{|x-1|} > 1000$, $-\frac{1}{100} < \frac{1}{x+3} < \frac{1}{100}$; Αποδείξτε ότι η πρώτη ιδιότητα ισχύει κοντά στον 0, η δεύτερη κοντά στον 1 και η τρίτη κοντά στα $\pm\infty$. (2) Ποιο είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιο το σύνολο στο οποίο ισχύει καθεμιά από τις: $(-1)^{[\frac{1}{x}]} < 0$,

$\sin x > \frac{1}{2}$, $\sin\frac{1}{x} < 0$; Αποδείξτε ότι η πρώτη ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0, η δεύτερη σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και η τρίτη σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0. Αποδείξτε ότι δεν είναι σωστό ότι η πρώτη ιδιότητα ισχύει κοντά στον 0 ή η δεύτερη κοντά στο $+\infty$ ή η τρίτη κοντά στον 0.

9. Ο ξ χαρακτηρίζεται **μεμονωμένο σημείο** του A αν $\xi \in A$ και υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε το μοναδικό στοιχείο του A που ανήκει στην $N_\xi(\delta_0)$ είναι ο ίδιος ο ξ, δηλαδή $(\xi - \delta_0, \xi + \delta_0) \cap A = \{\xi\}$. (1) Αποδείξτε ότι κάθε $\xi \in A$ είναι είτε σημείο συσσώρευσης του A είτε μεμονωμένο σημείο του A και ότι κανένας $\xi \in A$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης *και* μεμονωμένο σημείο του A. (2) Έστω $\xi \in A$. Αποδείξτε ότι ο ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A αν και μόνο αν κάθε ακολουθία (x_n) στο A με όριο ξ είναι τελικά σταθερή.

10. Έστω $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$. Αποδείξτε ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν κάθε περιοχή N_ξ του ξ περιέχει άπειρα στοιχεία του A.

11. (1) Αποδείξτε ότι το $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης της $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ αν και μόνο αν είναι σημείο συσσώρευσης ενός τουλάχιστον από τα $A_1, \ldots, A_n$. (2) Αποδείξτε ότι, αν το $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης της τομής συνόλων, τότε είναι σημείο συσσώρευσης καθενός από αυτά. Ο 0 είναι σημείο συσσώρευσης των $[-1, 0]$, $[0, 1]$ αλλά όχι της $[-1, 0] \cap [0, 1]$.

12. (1) **Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass**. Αποδείξτε ότι κάθε άπειρο και φραγμένο σύνολο έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο $\mathbf{R}$. (2) Αποδείξτε ότι κάθε άπειρο σύνολο έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο $\overline{\mathbf{R}}$.

13. Το σύνολο A χαρακτηρίζεται **κλειστό** αν περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του που είναι αριθμοί (και όχι $\pm\infty$). (1) Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό διάστημα (είτε φραγμένο είτε όχι) είναι κλειστό σύνολο. (2) Αποδείξτε ότι τα $\mathbf{N}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$ και κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι κλειστά σύνολα. (3) Αποδείξτε ότι τα $\mathbf{Q}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ και κάθε μη κενό ανοικτό διάστημα $\neq \mathbf{R}$ δεν είναι κλειστά σύνολα. (4) Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν το όριο κάθε (x_n) στο A, η οποία συγκλίνει, ανήκει στο A. (5) Αποδείξτε ότι η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. (6) Αποδείξτε ότι η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. (7) Αν το μη κενό κλειστό σύνολο A είναι άνω φραγμένο, αποδείξτε ότι έχει μέγιστο στοιχείο και, αν είναι κάτω φραγμένο, αποδείξτε ότι έχει ελάχιστο στοιχείο. (8) **Γενίκευση του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass**. Έστω κλειστό και φραγμένο σύνολο A. Αποδείξτε ότι κάθε ακολουθία στο A έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υποακολουθία με όριο στο A.

14. Το σύνολο A χαρακτηρίζεται **ανοικτό** αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει περιοχή N_x του x ώστε $N_x \subseteq A$, δηλαδή υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $(x - \delta_0, x + \delta_0) \subseteq A$. (1) Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό διάστημα είναι ανοικτό σύνολο. (2) Αποδείξτε ότι τα $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$, κάθε μη κενό κλειστό διάστημα

$\neq \mathbf{R}$ και κάθε πεπερασμένο σύνολο δεν είναι ανοικτά σύνολα. (3) Αποδείξτε ότι η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. (4) Αποδείξτε ότι η ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. (5) Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό σύνολο δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.

15. (Συνέχεια των ασκήσεων 13, 14.) Αποδείξτε ότι το A είναι ανοικτό σύνολο αν και μόνο αν το $\mathbf{R} \setminus A$ είναι κλειστό σύνολο.

16. (Συνέχεια των ασκήσεων 13 - 15.) Έστω ότι το μη κενό A είναι κλειστό και ανοικτό. Αποδείξτε ότι $A = \mathbf{R}$. (*Υπόδ.:* Έστω μη κενό κλειστό και ανοικτό $A \neq \mathbf{R}$. Υπάρχουν $a \in A$, $b \notin A$ και έστω $a < b$. Το μη κενό $A \cap (-\infty, b] = A \cap (-\infty, b)$ είναι κλειστό, ανοικτό και άνω φραγμένο. Καταλήξτε σε άτοπο.)

3.2 Όρια συναρτήσεων.

Θεωρούμε συναρτήσεις f με πεδία ορισμού και σύνολα τιμών υποσύνολα του $\mathbf{R}$. Θα χρησιμοποιούμε τον γνωστό συμβολισμό

$$f : A \to \mathbf{R},$$

όπου $A \subseteq \mathbf{R}$ είναι το πεδίο ορισμού της f. Αν γνωρίζουμε τον τύπο $f(x)$ της f και δεν αναφέρεται το πεδίο ορισμού της, θα γράφουμε «η συνάρτηση $f(x)$» και *θα θεωρούμε ως πεδίο ορισμού το μέγιστο σύνολο το οποίο είναι συμβατό με τον τύπο της συνάρτησης*, δηλαδή το σύνολο όλων των x για τους οποίους έχει νόημα ο $f(x)$.

Ας θυμηθούμε, παρεμπιπτόντως, μερικές από τις «στοιχειώδεις» συναρτήσεις.

(1) Συμβολίζουμε $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ τη **σταθερή συνάρτηση** με τύπο $c(x) = c$.

(2) Συμβολίζουμε $p_a : A \to \mathbf{R}$ τη **συνάρτηση δύναμη** με τύπο $p_a(x) = x^a$. Αν $a \in \mathbf{Q}$ και ο a έχει περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του, τότε $A = \mathbf{R}$, αν $a > 0$, και $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, αν $a \leq 0$. Αν $a \in \mathbf{Q}$ και ο a έχει άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του ή αν $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, τότε $A = [0, +\infty)$, αν $a > 0$, και $A = (0, +\infty)$, αν $a \leq 0$.

Προσέξτε: η $p_0 : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ενώ η σταθερή συνάρτηση $1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. *Εκτός από τον* 0, οι δυο συναρτήσεις έχουν τις ίδιες τιμές: $p_0(x) = x^0 = 1$, $1(x) = 1$. Στον 0 η p_0 δεν ορίζεται: το 0^0 είναι απροσδιόριστη μορφή.

(3) Έστω $a > 0$. Συμβολίζουμε $\exp_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ την **εκθετική συνάρτηση** με τύπο $\exp_a x = a^x$. Το σύνολο τιμών της $\exp_a$ είναι το $(0, +\infty)$, αν $a \neq 1$, και το $\{1\}$, αν $a = 1$. Αν $a = e$, συνήθως συμβολίζουμε $\exp$ αντί $\exp_e$.

(4) Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Η γνωστή **λογαριθμική συνάρτηση** συμβολίζεται $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$. Το σύνολο τιμών της $\log_a$ είναι το $\mathbf{R}$. Αν $a = e$, συνήθως συμβολίζουμε $\log$ αντί $\log_e$.

Αν $a > 0$, $a \neq 1$, οι συναρτήσεις $\exp_a$, $\log_a$ είναι αντίστροφες. Δηλαδή, αν $x \in \mathbf{R}$, $y > 0$, τότε: $y = \exp_a x$ αν και μόνο αν $x = \log_a y$.

(5) Έχουμε και τις **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** $\cos, \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και $\tan : \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$ και $\cot : \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές από το λύκειο και έχουν οριστεί με «γεωμετρικό τρόπο». *Ο γεωμετρικός τρόπος ορισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν θεωρείται αποδεκτός από την Ανάλυση. Θα δούμε στο Κεφάλαιο 10 τον «αναλυτικό τρόπο» ορισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.* Μέχρι τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε, κυρίως ως παραδείγματα, τις συναρτήσεις αυτές με όλες τις γνωστές από το λύκειο ιδιότητές τους. Στο Κεφάλαιο 10 θα αποδείξουμε και αυτές τις ιδιότητες.

Θα δούμε τώρα τον συνοπτικό και ενιαίο ορισμό του ορίου συνάρτησης και, κατόπιν, θα τον εξειδικεύσουμε στις διάφορες περιπτώσεις που παρουσιάζονται.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi, \eta \in \overline{\mathbf{R}}$ εκ των οποίων το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι **η f έχει όριο** η **στο** ξ αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta_0 > 0$ *ώστε* $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ *για κάθε* $x \in N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A$. Πιο συνοπτικά: *η f έχει όριο η στο ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.* Συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta.$$

Εκτός από την έκφραση «έχει όριο η», χρησιμοποιούμε την έκφραση «**τείνει στο** η» καθώς και τις εκφράσεις «**συγκλίνει στον** η», αν ο η είναι αριθμός, και «**αποκλίνει στο** η», αν $\eta = \pm\infty$.

Ας δούμε, τώρα, τον ορισμό του ορίου συνάρτησης στις διάφορες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $\xi, \eta \in \mathbf{R}$. Η f έχει όριο η στον ξ αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta_0 > 0$ *ώστε* $|f(x) - \eta| < \epsilon$ *για κάθε* $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$.

Περίπτωση 2: $\xi \in \mathbf{R}$, $\eta = +\infty$. Η f έχει όριο $+\infty$ στον ξ αν *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $\delta_0 > 0$ *ώστε* $f(x) > M$ *για κάθε* $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$.

Περίπτωση 3: $\xi \in \mathbf{R}$, $\eta = -\infty$. Η f έχει όριο $-\infty$ στον ξ αν *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $\delta_0 > 0$ *ώστε* $f(x) < -M$ *για κάθε* $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$.

Περίπτωση 4: $\xi = +\infty$, $\eta \in \mathbf{R}$. Η f έχει όριο η στο $+\infty$ αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $N_0 > 0$ *ώστε* $|f(x) - \eta| < \epsilon$ *για κάθε* $x \in A$, $x > N_0$.

Περίπτωση 5: $\xi = +\infty$, $\eta = +\infty$. Η f έχει όριο $+\infty$ στο $+\infty$ αν *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $N_0 > 0$ *ώστε* $f(x) > M$ *για κάθε* $x \in A$, $x > N_0$.

Περίπτωση 6: $\xi = +\infty$, $\eta = -\infty$. Η f έχει όριο $-\infty$ στο $+\infty$ αν *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $N_0 > 0$ *ώστε* $f(x) < -M$ *για κάθε* $x \in A$, $x > N_0$.

Περίπτωση 7: $\xi = -\infty$, $\eta \in \mathbf{R}$. Η f έχει όριο η στο $-\infty$ αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $N_0 > 0$ *ώστε* $|f(x) - \eta| < \epsilon$ *για κάθε* $x \in A$, $x < -N_0$.

Περίπτωση 8: $\xi = -\infty$, $\eta = +\infty$. Η f έχει όριο $+\infty$ στο $-\infty$ αν *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $N_0 > 0$ *ώστε* $f(x) > M$ *για κάθε* $x \in A$, $x < -N_0$.

Περίπτωση 9: $\xi = -\infty$, $\eta = -\infty$. Η f έχει όριο $-\infty$ στο $-\infty$ αν *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $N_0 > 0$ *ώστε* $f(x) < -M$ *για κάθε* $x \in A$, $x < -N_0$.

Προσοχή: Όταν γράφουμε $\lim_{x \to \xi} f(x)$, χωρίς άλλη επισήμανση, εννοούμε ότι το όριο είναι στοιχείο του $\overline{\mathbf{R}}$. Όταν, όμως, γράφουμε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ (ή άλλο γράμμα), εννοούμε ότι το όριο είναι ο *αριθμός* η, εκτός αν γράψουμε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbf{R}}$ ή κάτι ανάλογο.

Προσοχή: Θα κάνουμε μια παρατήρηση ανάλογη εκείνης που είχαμε κάνει για τον ορισμό του ορίου ακολουθίας. Όταν αποδεικνύουμε ότι $\lim_{n\to\xi} f(x) = \eta$, θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός $\delta_0 > 0$ (ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ) τέτοιου ώστε «*από* $x \in A$, $0 < |x-\xi| < \delta_0$ *να συνεπάγεται* $|f(x) - \eta| < \epsilon$» ή, ισοδύναμα, ώστε «*να ισχύει* $|f(x) - \eta| < \epsilon$ *αρκεί να ισχύει* $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$». Τα ανάλογα μπορούμε να πούμε και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου. Θυμηθείτε: το λογικό σχήμα «P συνεπάγεται Q» είναι το ίδιο με το «Q αρκεί P» ή, με σύμβολα, το $P \Rightarrow Q$ είναι το ίδιο με το $Q \Leftarrow P$.

Παραδείγματα: (1) Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 4}(3x + 2) = 14$.

Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε x, $0 < |x - 4| < \delta_0$ να ισχύει $|(3x + 2) - 14| < \epsilon$. Ισχύει $|(3x + 2) - 14| < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $|3x - 12| < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $|x - 4| < \frac{\epsilon}{3}$ αρκεί να ισχύει $0 < |x - 4| < \frac{\epsilon}{3}$. Προφανώς, αν θεωρήσουμε $\delta_0 = \frac{\epsilon}{3} > 0$, τότε για κάθε x, $0 < |x - 4| < \delta_0$ ισχύει $0 < |x - 4| < \frac{\epsilon}{3}$ και, λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών, $|(3x + 2) - 14| < \epsilon$.

(2) Έστω η σταθερή συνάρτηση c. Για κάθε $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$,

$$\lim_{x\to\xi} c = c.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Βλέπουμε ότι για *κάθε* x ισχύει $|c - c| = 0 < \epsilon$. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε οποιονδήποτε $\delta_0 > 0$ (για παράδειγμα, $\delta_0 = 1$) και τότε για κάθε $x \in N_\xi{}^*(\delta_0) \cap \mathbf{R} = N_\xi{}^*(\delta_0)$ ισχύει $|c - c| = 0 < \epsilon$.

(3) Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi} |x - \xi|^a = 0 \qquad (a > 0).$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε x, $0 < |x - \xi| < \delta_0$ να ισχύει $\big||x - \xi|^a - 0\big| < \epsilon$. Ισχύει $\big||x - \xi|^a - 0\big| < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $|x - \xi|^a < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $|x - \xi| < \epsilon^{\frac{1}{a}}$ αρκεί να ισχύει $0 < |x - \xi| < \epsilon^{\frac{1}{a}}$. Προφανώς, αν επιλέξουμε $\delta_0 = \epsilon^{\frac{1}{a}} > 0$, τότε για κάθε x, $0 < |x - \xi| < \delta_0$ ισχύει $0 < |x - \xi| < \epsilon^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $\big||x - \xi|^a - 0\big| < \epsilon$.

(4) Ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbf{R} \setminus \{\xi\}$ και θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi} |x - \xi|^{-a} = +\infty \qquad (a > 0).$$

Έστω $M > 0$. Θα βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε $|x-\xi|^{-a} > M$ για κάθε x, $0 < |x-\xi| < \delta_0$. Ισχύει $|x-\xi|^{-a} > M$ αρκεί να ισχύει $0 < |x-\xi| < M^{-\frac{1}{a}}$. Άρα, αν επιλέξουμε $\delta_0 = M^{-\frac{1}{a}} > 0$, τότε για κάθε x, $0 < |x - \xi| < \delta_0$ ισχύει $0 < |x - \xi| < M^{-\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $|x - \xi|^{-a} > M$.

(5) Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^a = +\infty \qquad (a>0).$$

Έστω $M>0$. Θα βρούμε $N_0>0$ ώστε $|x|^a>M$ για κάθε $x>N_0$ και κάθε $x<-N_0$. Ισχύει $|x|^a>M$ αρκεί να ισχύει $|x|>M^{\frac{1}{a}}$. Άρα, αν επιλέξουμε $N_0=M^{\frac{1}{a}}>0$, τότε για κάθε $x>N_0$ και κάθε $x<-N_0$ ισχύει $|x|>M^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $|x|^a>M$.

(6) Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^{-a} = 0 \qquad (a>0).$$

Έστω $\epsilon>0$. Θα βρούμε $N_0>0$ ώστε $\big||x|^{-a}-0\big|<\epsilon$ για κάθε $x>N_0$ και κάθε $x<-N_0$. Ισχύει $\big||x|^{-a}-0\big|<\epsilon$ αρκεί να ισχύει $|x|>\epsilon^{-\frac{1}{a}}$, οπότε, αν επιλέξουμε $N_0=\epsilon^{-\frac{1}{a}}>0$, τότε για κάθε $x>N_0$ και κάθε $x<-N_0$ ισχύει $|x|>\epsilon^{-\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $\big||x|^{-a}-0\big|<\epsilon$.

(7) **Όρια ακολουθιών**. Κάθε ακολουθία (x_n) είναι, εξ ορισμού, συνάρτηση $x:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbf{N}$, όπου, συμβατικά, γράφουμε x_n αντί $x(n)$. Γνωρίζουμε ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης (το μοναδικό) του $\mathbf{N}$. Μπορούμε, λοιπόν, να διατυπώσουμε τον ορισμό του ορίου της συνάρτησης x στο $+\infty$ ως εξής: $\lim_{n\to+\infty} x(n)=\eta\in\overline{\mathbf{R}}$ αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $N_0>0$ ώστε $x_n\in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n>N_0$. Προσέξτε: ο N_0 είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός χωρίς τον περιορισμό να είναι φυσικός. Αν, όμως, υπάρχει $N_0>0$ ώστε $x_n\in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n>N_0$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον *φυσικό* $n_0=[N_0]+1$, οπότε ισχύει $x_n\in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq N_0$. Και, αντιστρόφως, αν υπάρχει $n_0\in\mathbf{N}$ ώστε $x_n\in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq n_0$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον $N_0=n_0>0$, οπότε ισχύει $x_n\in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n>N_0$. Επομένως, ο ορισμός του ορίου της συνάρτησης x στο $+\infty$ διατυπώνεται, ισοδύναμα, ως εξής: $\lim_{n\to+\infty} x_n=\eta$ αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbf{N}$ ώστε $x_n\in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq n_0$. Άρα καταλήγουμε στον ορισμό του ορίου της ακολουθίας (x_n).

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι *η έννοια του ορίου ακολουθίας περιλαμβάνεται, ως ειδική περίπτωση, στην έννοια του ορίου συνάρτησης.*

Έστω $f:A\to\mathbf{R}$, $\xi\in\mathbf{R}$. Θεωρούμε το $B=A\cap(-\infty,\xi)$, δηλαδή το μέρος του A που βρίσκεται αριστερά του ξ. Θεωρούμε τον *περιορισμό της f στο B*, δηλαδή την $g:B\to\mathbf{R}$ με τύπο $g(x)=f(x)$ $(x\in B)$. Αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του B και αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} g(x)$, ορίζουμε το **αριστερό πλευρικό όριο της f στον** ξ να είναι το

$$\lim_{x\to\xi-} f(x)=\lim_{x\to\xi} g(x).$$

Ομοίως, θεωρούμε το $C=A\cap(\xi,+\infty)$, δηλαδή το μέρος του A που βρίσκεται δεξιά του ξ. Θεωρούμε τον *περιορισμό της f στο C*, δηλαδή την $h:C\to\mathbf{R}$ με τύπο $h(x)=f(x)$ $(x\in C)$. Αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του C και αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} h(x)$, ορίζουμε το **δεξιό πλευρικό όριο της f στον ξ** να είναι το

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi} h(x).$$

Παραδείγματα: (1) Έστω η $\frac{|x-\xi|}{x-\xi}$ (με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}\setminus\{\xi\}$). Τότε

$$\lim_{x\to\xi-}\frac{|x-\xi|}{x-\xi} = -1, \qquad \lim_{x\to\xi+}\frac{|x-\xi|}{x-\xi} = 1.$$

Ο περιορισμός της $\frac{|x-\xi|}{x-\xi}$ στο $(-\infty,\xi)$ είναι η σταθερή $-1 : (-\infty,\xi)\to\mathbf{R}$. Άρα $\lim_{x\to\xi-}\frac{|x-\xi|}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}(-1) = -1$. Ομοίως, ο περιορισμός της $\frac{|x-\xi|}{x-\xi}$ στο $(\xi,+\infty)$ είναι η σταθερή $1 : (\xi,+\infty)\to\mathbf{R}$. Άρα $\lim_{x\to\xi+}\frac{|x-\xi|}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} 1 = 1$.

(2) Έστω η $\frac{1}{(x-\xi)^n}$ (με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}\setminus\{\xi\}$), όπου ο $n\in\mathbf{N}$ είναι περιττός. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{(x-\xi)^n} = -\infty, \quad \lim_{x\to\xi+}\frac{1}{(x-\xi)^n} = +\infty \qquad (n\in\mathbf{N}, n \text{ περιττός}).$$

Ο περιορισμός της $\frac{1}{(x-\xi)^n}$ στο $(-\infty,\xi)$ είναι η $g : (-\infty,\xi)\to\mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{(x-\xi)^n}$. Έστω $M>0$. Ισχύει $g(x) < -M$ αρκεί να ισχύει $\xi - \frac{1}{\sqrt[n]{M}} < x < \xi$. Αν επιλέξουμε $\delta_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{M}}$, τότε για κάθε $x\in N_\xi{}^*(\delta_0)\cap(-\infty,\xi) = (\xi-\delta_0,\xi)$ ισχύει $\xi-\frac{1}{\sqrt[n]{M}} < x < \xi$ και, επομένως, $g(x) < -M$. Άρα $\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{(x-\xi)^n} = \lim_{x\to\xi} g(x) = -\infty$.

Ο περιορισμός της $\frac{1}{(x-\xi)^n}$ στο $(\xi,+\infty)$ είναι η $h : (\xi,+\infty)\to\mathbf{R}$, $h(x) = \frac{1}{(x-\xi)^n}$. Έστω $M>0$. Ισχύει $h(x) > M$ αρκεί να ισχύει $\xi < x < \xi + \frac{1}{\sqrt[n]{M}}$. Αν επιλέξουμε $\delta_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{M}}$, τότε για κάθε $x\in N_\xi{}^*(\delta_0)\cap(\xi,+\infty) = (\xi,\xi+\delta_0)$ ισχύει $\xi < x < \xi+\frac{1}{\sqrt[n]{M}}$ και, επομένως, $h(x) > M$. Άρα $\lim_{x\to\xi+}\frac{1}{(x-\xi)^n} = \lim_{x\to\xi} h(x) = +\infty$.

Πρόταση 3.2 *Έστω $f : A\to\mathbf{R}$ και $\xi\in\mathbf{R}$ σημείο συσσώρευσης του $A\cap(-\infty,\xi)$ και του $A\cap(\xi,+\infty)$. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi-} f(x)$, $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και είναι ίσα, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x).$$

Αντιστρόφως, αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$, τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x\to\xi-} f(x)$, $\lim_{x\to\xi+} f(x)$.

Απόδειξη: Ορίζουμε $B = A\cap(-\infty,\xi)$, $C = A\cap(\xi,+\infty)$. Έστω $g : B\to\mathbf{R}$, $h : C\to\mathbf{R}$ με $g(x) = f(x)$ $(x\in B)$ και $h(x) = f(x)$ $(x\in C)$.

Αν $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$, τότε, βάσει του ορισμού των πλευρικών ορίων, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} h(x) = \eta$. Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει $\delta_0{}'>0$ ώστε $f(x) = g(x)\in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x\in N_\xi{}^*(\delta_0{}')\cap B = (\xi-\delta_0{}',\xi)\cap A$ και $\delta_0{}''>0$ ώστε

$f(x) = h(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in N_\xi{}^*(\delta_0{}'') \cap C = (\xi, \xi + \delta_0{}'') \cap A$. Θεωρούμε τον $\delta_0 = \min\{\delta_0{}', \delta_0{}''\} > 0$, οπότε $\delta_0 \leq \delta_0{}'$ και $\delta_0 \leq \delta_0{}''$. Συνεπάγεται $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in \big((\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0)\big) \cap A$. Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in \big((\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0)\big) \cap A$. Άρα $g(x) = f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in (\xi - \delta_0, \xi) \cap A = N_\xi{}^*(\delta_0) \cap B$ και $h(x) = f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in (\xi, \xi + \delta_0) \cap A = N_\xi{}^*(\delta_0) \cap C$. Άρα $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$ και $\lim_{x\to\xi} h(x) = \eta$ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Το $\lim_{x\to\xi} \frac{|x-\xi|}{x-\xi}$ *δεν* υπάρχει.

(2) Αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι περιττός, το $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{(x-\xi)^n}$ *δεν* υπάρχει.

Πρόταση 3.3 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \mathbf{R}$.*
(1) Έστω ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $A \cap (\xi, +\infty)$ αλλά όχι του $A \cap (-\infty, \xi)$. Τότε, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και, σ΄ αυτήν την περίπτωση,

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x).$$

(2) Έστω ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $A \cap (-\infty, \xi)$ αλλά όχι του $A \cap (\xi, +\infty)$. Τότε, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και, σ΄ αυτήν την περίπτωση,

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi-} f(x).$$

Απόδειξη: (1) Ορίζουμε $C = A \cap (\xi, +\infty)$, $h : C \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x)$.

Έστω $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$, δηλαδή $\lim_{x\to\xi} h(x) = \eta$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0{}' > 0$ ώστε $f(x) = h(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in N_\xi{}^*(\delta_0{}') \cap C = (\xi, \xi + \delta_0{}') \cap A$. Επειδή ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $B = A \cap (-\infty, \xi)$, υπάρχει $\delta_0{}'' > 0$ ώστε $(\xi - \delta_0{}'', \xi) \cap A = N_\xi{}^*(\delta_0{}'') \cap B = \emptyset$. Θεωρούμε τον $\delta_0 = \min\{\delta_0{}', \delta_0{}''\} > 0$, οπότε $\delta_0 \leq \delta_0{}'$ και $\delta_0 \leq \delta_0{}''$. Συνεπάγεται $N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A = (\xi, \xi + \delta_0) \cap A \subseteq (\xi, \xi + \delta_0{}') \cap A$ και, επομένως, $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A$. Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in \big((\xi - \delta_0, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta_0)\big) \cap A$. Άρα $h(x) = f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in (\xi, \xi + \delta_0) \cap A = N_\xi{}^*(\delta_0) \cap C$. Άρα $\lim_{x\to\xi} h(x) = \eta$ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$.
(2) Ομοίως. $\natural$

Ασκήσεις.

1. Έχουν νόημα τα: $\lim_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}$, $\lim_{x\to0} \sqrt{-x^2}$, $\lim_{x\to1-} \log(x^2 - 1)$, $\lim_{x\to1+} \sqrt{1 - x^2}$, $\lim_{x\to-\infty} (x + 2)^{\frac{6}{4}}$, $\lim_{x\to-1} x^{\sqrt{2}}$, $\lim_{x\to0-} x^{-\frac{1}{2}}$;

2. Αποδείξτε με τους ορισμούς τα: $\lim_{x\to2} 3x = 6$, $\lim_{x\to1} (\frac{1}{x} + 1) = 2$, $\lim_{x\to1} x^2 = 1$, $\lim_{x\to1} \frac{3}{(x-1)^2} = +\infty$, $\lim_{x\to2+} \frac{x}{2-x} = -\infty$, $\lim_{x\to1-} \frac{x}{1-x} = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-3}{2x+1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\pm\infty} (3x^2 + x) = +\infty$.

3. Έστω $A \subseteq B$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A, οπότε (άσκηση 5 της ενότητας 3.1) το ξ είναι σημείο συσσώρευσης και του B. Έστω $g : B \to \mathbf{R}$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta \in \overline{\mathbf{R}}$. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ ο περιορισμός της g στο A, δηλαδή $f(x) = g(x)$ $(x \in A)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

3.3 Ιδιότητες σχετικές με όρια συναρτήσεων.

Πρόταση 3.4 *Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στο ξ. Αν υπάρχει ένα από τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$, τότε υπάρχει και το άλλο και τα δυο όρια είναι ίσα.*

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbf{R}}$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Επίσης, $f(x) = g(x)$ κοντά στο ξ, οπότε $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ και $f(x) = g(x)$ κοντά στο ξ. Άρα $g(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} |x|^{-\frac{1}{2}}, & 0 < |x| < \frac{1}{10}, \\ x, & x = 0 \text{ ή } |x| \geq \frac{1}{10}. \end{cases}$
Θεωρούμε και την $|x|^{-\frac{1}{2}}$. Επειδή $f(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}$ για κάθε $x \in (-\frac{1}{10}, 0) \cup (0, \frac{1}{10})$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x|^{-\frac{1}{2}} = +\infty$.

(2) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x > 4, \\ -x, & x \leq 4. \end{cases}$ Επειδή $f(x) = |x|^{-1}$ στο $(4, +\infty)$, είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} |x|^{-1} = 0$. Επειδή $f(x) = |x|$ στο $(-\infty, 4)$, είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$.

(3) Χρησιμοποιώντας κατάλληλες ταυτίσεις με τις συναρτήσεις $|x|^{\pm a}$, $|x-\xi|^{\pm a}$, έχουμε, για $a > 0$, ότι

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^{-a} = 0, \quad \lim_{x\to\xi+} (x-\xi)^a = 0, \quad \lim_{x\to\xi+} (x-\xi)^{-a} = +\infty.$$

Οι Προτάσεις 3.5, 3.6 είναι από τις πιο σημαντικές για την ουσιαστική κατανόηση της έννοιας του ορίου.

Πρόταση 3.5 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.*
(1) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) > u$, τότε ισχύει $f(x) > u$ κοντά στο ξ.
(2) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) < l$, τότε ισχύει $f(x) < l$ κοντά στο ξ.

Απόδειξη: (1) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta > u$. Είναι $\eta - u > 0$, οπότε $|f(x) - \eta| < \eta - u$ κοντά στο ξ. Άρα $f(x) > \eta - (\eta - u) = u$ κοντά στο ξ.

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Θεωρούμε τον $M = \max\{u, 1\}$, οπότε $M \geq 1 > 0$ και $M \geq u$. Τότε $f(x) > M \geq u$ κοντά στο ξ.
(2) Ομοίως. $\natural$

Πρόταση 3.6 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.*
(1) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) \geq l$.
(2) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και ισχύει $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά

στο ξ, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) \leq u$.
(3) Αν $u < l$ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Απόδειξη: (1) Αν ήταν $\lim_{x\to\xi} f(x) < l$, θα ίσχυε $f(x) < l$ κοντά στο ξ, οπότε δε θα μπορούσε να ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.
(2) Ομοίως.
(3) Αν υπήρχε το $\lim_{x\to\xi} f(x)$, θα ήταν $\lim_{x\to\xi} f(x) \geq l$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) \leq u$. $\natural$

Πρόταση 3.7 ***Μοναδικότητα ορίου***. *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Το $\lim_{x\to\xi} f(x)$, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.*

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν δυο διαφορετικά όρια $\lim_{x\to\xi} f(x)$. Έστω a γνησίως ανάμεσα στα δυο αυτά όρια. Τότε $f(x) < a$ κοντά στο ξ και $f(x) > a$ κοντά στο ξ. Άρα $f(x) < a$ και $f(x) > a$ κοντά στο ξ. Άτοπο. $\natural$

Πρόταση 3.8 *Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $f(x) \leq g(x)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) \leq \lim_{x\to\xi} g(x)$.*

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) > \lim_{x\to\xi} g(x)$. Έστω a ώστε $\lim_{x\to\xi} g(x) < a < \lim_{x\to\xi} f(x)$. Τότε $g(x) < a$ κοντά στο ξ και $a < f(x)$ κοντά στο ξ. Άρα $g(x) < a$ και $a < f(x)$ κοντά στο ξ. Άρα $g(x) < f(x)$ κοντά στο ξ. Άτοπο. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και αν $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) \leq u$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη σταθερή συνάρτηση u, τότε, επειδή $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και $\lim_{x\to\xi} u = u$, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} f(x) \leq u$.

(2) Ομοίως, αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και αν $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) \geq l$.

(3) Επομένως, αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και αν $f(x) \in [l, u]$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε και το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ ανήκει στο $[l, u]$.

Πρόταση 3.9 *Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο ξ.*
(1) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$.
(2) Αν $\lim_{x\to\xi} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$.

Απόδειξη: (1) Έστω $M > 0$. Τότε $f(x) > M$ κοντά στο ξ και, επειδή $g(x) \geq f(x)$ κοντά στο ξ, ισχύει $f(x) > M$ και $g(x) \geq f(x)$ κοντά στο ξ. Άρα $g(x) > M$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$.
(2) Ομοίως. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Επειδή $\frac{x^2+x-1}{x} \geq \frac{x^2}{x} = x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{x} = +\infty$.

(2) Επειδή $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \geq \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ και επειδή $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) = +\infty$.

Πρόταση 3.10 ***Παρεμβολή.*** *Έστω $f, g, h : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} h(x) = \eta$ και $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ κοντά στο ξ, τότε $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$.*

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $|f(x)-\eta| < \epsilon$ κοντά στο ξ και, επίσης, $|h(x)-\eta| < \epsilon$ κοντά στο ξ. Άρα $|f(x)-\eta| < \epsilon$ και $|h(x)-\eta| < \epsilon$ και $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ κοντά στο ξ. Άρα $\eta - \epsilon < f(x)$ και $h(x) < \eta + \epsilon$ και $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ κοντά στο ξ. Συνεπάγεται $\eta - \epsilon < g(x) < \eta + \epsilon$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Έστω $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) < \frac{1}{x}$ για κάθε $x \geq 3$. Επειδή είναι $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x^2}) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(2) Ισχύει $-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Επειδή είναι $\lim_{x\to+\infty}\big(-\frac{1}{|x|}\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Πρόταση 3.11 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι αριθμός, τότε η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ.*

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Τότε $|f(x)-\eta| < 1$ και, επομένως, $|f(x)| < |\eta| + 1$ κοντά στο ξ, οπότε η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Για την $\frac{1}{x}$ ισχύει $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα η $\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Αυτό *δε* σημαίνει ότι η $\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη στο πεδίο ορισμού της· η $\frac{1}{x}$ δεν είναι φραγμένη στο $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ ούτε καν στο $(0, +\infty)$. Υπάρχει, όμως, διάστημα $(N_0, +\infty)$ στο οποίο η $\frac{1}{x}$ *είναι* φραγμένη. Για παράδειγμα, ισχύει $0 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

(2) Έστω η $\frac{x^5+1}{2x^5-x^3+x^2+8x+1}$. Θα μάθουμε λίγο αργότερα να υπολογίζουμε όρια όπως το $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+1}{2x^5-x^3+x^2+8x+1} = \frac{1}{2}$. Αν δεχτούμε αυτό το όριο, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη κοντά στο $-\infty$. Δηλαδή, υπάρχει διάστημα $(-\infty, -N_0)$ στο οποίο η συνάρτηση είναι φραγμένη. Όμως, το να βρεθεί συγκεκριμένο τέτοιο διάστημα καθώς και συγκεκριμένο άνω φράγμα και κάτω φράγμα στο διάστημα αυτό δεν είναι εύκολο αφού η συνάρτηση δεν έχει απλό τύπο!

Πρόταση 3.12 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.*
(1) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, τότε η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ.
(2) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$, τότε η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ.

Απόδειξη: (1) Ισχύει $f(x) > 1$ κοντά στο ξ.
(2) Ομοίως. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Έστω η $x - \frac{1}{x}$. Αν δεχτούμε ότι $\lim_{x\to+\infty}(x - \frac{1}{x}) = +\infty$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι κάτω φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Πράγματι, η συνάρτηση είναι κάτω φραγμένη στο $(1, +\infty)$, για παράδειγμα, και, συγκεκριμένα, ισχύει $x - \frac{1}{x} \geq 0$ για κάθε $x > 1$.

(2) Έστω η $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1$. Αν δεχτούμε ότι $\lim_{x\to1}\big(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1\big) = -\infty$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι άνω φραγμένη κοντά στον 1. Άρα υπάρχει

$\delta_0 > 0$ ώστε η συνάρτηση να είναι άνω φραγμένη στο $(1, 1+\delta_0)$. Επειδή ο τύπος της συνάρτησης δεν είναι απλός, δεν είναι εύκολο να βρεθεί συγκεκριμένος δ_0 και συγκεκριμένο άνω φράγμα της στο $(1, 1+\delta_0)$.

Πρόταση 3.13 ***Κανόνας αντιθέτου.*** *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}(-f(x))$ και*

$$\lim_{x\to\xi}(-f(x)) = -\lim_{x\to\xi} f(x).$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $|f(x) - \eta| < \epsilon$ κοντά στο ξ. Άρα $|(-f(x)) - (-\eta)| = |f(x) - \eta| < \epsilon$ κοντά στο ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi}(-f(x)) = -\eta = -\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Έστω $\lim f(x) = +\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε $f(x) > M$ κοντά στο ξ. Άρα $-f(x) < -M$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi}(-f(x)) = -\infty = -(+\infty) = -\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι, αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to\xi}(-f(x)) = +\infty = -(-\infty) = -\lim_{x\to\xi} f(x)$. ♮

Πρόταση 3.14 ***Κανόνας αθροίσματος.*** *Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$ και το άθροισμα $\lim_{x\to\xi} f(x) + \lim_{x\to\xi} g(x)$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x))$ και*

$$\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\xi} f(x) + \lim_{x\to\xi} g(x).$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $|f(x) - \eta| < \frac{\epsilon}{2}$ κοντά στο ξ και $|g(x) - \zeta| < \frac{\epsilon}{2}$ κοντά στο ξ. Άρα $|f(x) - \eta| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|g(x) - \zeta| < \frac{\epsilon}{2}$ κοντά στο ξ. Επομένως,

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (\eta + \zeta)| &= |(f(x) - \eta) + (g(x) - \zeta)| \le |f(x) - \eta| + |g(x) - \zeta| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

κοντά στο ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = \eta + \zeta = \lim_{x\to\xi} f(x) + \lim_{x\to\xi} g(x)$.

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta$ ή $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$. Τότε η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει l ώστε $g(x) \ge l$ κοντά στο ξ. Έστω $M > 0$. Τότε $f(x) > M - l$ κοντά στο ξ. Άρα $f(x) + g(x) > (M - l) + l = M$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = +\infty = \left\{ \begin{array}{c} (+\infty) + \zeta \\ (+\infty) + (+\infty) \end{array} \right\} = \lim_{x\to\xi} f(x) + \lim_{x\to\xi} g(x)$.

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν παρόμοια αιτιολόγηση. ♮

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to1}\big(1 + \frac{1}{|x-1|}\big) = \lim_{x\to1} 1 + \lim_{x\to1} \frac{1}{|x-1|} = 1 + (+\infty) = +\infty$.

(2) $\lim_{x\to+\infty}\big(-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\big) = \lim_{x\to+\infty}(-1) + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = -1 + 0 + 0 = -1$.

Ιδού μερικά παραδείγματα για την περίπτωση απροσδιόριστης μορφής.

Παραδείγματα: (1) Είναι $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}+c) = +\infty$, $\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x^2}) = -\infty$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+c+(-\frac{1}{x^2})\right) = \lim_{x\to 0} c = c$.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{2}{|x|} = +\infty$, $\lim_{x\to 0}\frac{-1}{|x|} = -\infty$, $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{|x|}+\frac{-1}{|x|}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = +\infty$.

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x\to 0}\frac{-2}{x^2} = -\infty$, $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}+\frac{-2}{x^2}) = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2} = -\infty$.

(4) Είναι $\lim_{x\to 0}(-\frac{2}{x^2}) = -\infty$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}) = +\infty$. Όμως, το $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+(-\frac{2}{x^2})\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Η περίπτωση της $f-g$ ανάγεται στις περιπτώσεις του αθροίσματος συναρτήσεων και της αντίθετης συνάρτησης αφού $f-g = f+(-g)$. Επομένως:

Πρόταση 3.15 ***Κανόνας διαφοράς***. *Έστω $f,g : A\to\mathbf{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$ και η διαφορά $\lim_{x\to\xi} f(x) - \lim_{x\to\xi} g(x)$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi}(f(x)-g(x))$ και*

$$\lim_{x\to\xi}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to\xi} f(x) - \lim_{x\to\xi} g(x).$$

Πρόταση 3.16 ***Κανόνας γινομένου***. *Έστω $f,g : A\to\mathbf{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$ και το γινόμενο $\lim_{x\to\xi} f(x)\lim_{x\to\xi} g(x)$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x)$ και*

$$\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x)\lim_{x\to\xi} g(x).$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $|f(x)-\eta| < \frac{\epsilon}{3|\zeta|+1}$ κοντά στο ξ και $|g(x)-\zeta| < \min\{\frac{\epsilon}{3|\eta|+1},\frac{1}{3}\}$ κοντά στο ξ. Άρα $|f(x)-\eta| < \frac{\epsilon}{3|\zeta|+1}$ και $|g(x)-\zeta| < \min\{\frac{\epsilon}{3|\eta|+1},\frac{1}{3}\}$ κοντά στο ξ. Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-\eta\zeta| &= |(f(x)-\eta)(g(x)-\zeta)+\eta(g(x)-\zeta)+\zeta(f(x)-\eta)|\\ &\le |f(x)-\eta||g(x)-\zeta| + |\eta||g(x)-\zeta| + |\zeta||f(x)-\eta|\\ &\le \frac{\epsilon}{3|\zeta|+1}\frac{1}{3} + |\eta|\frac{\epsilon}{3|\eta|+1} + |\zeta|\frac{\epsilon}{3|\zeta|+1}\\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = \eta\zeta = \lim_{x\to\xi} f(x)\lim_{x\to\xi} g(x)$.

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta > 0$ ή $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$. Θεωρούμε έναν l ώστε $0 < l < \lim_{x\to\xi} g(x)$. Έστω $M > 0$. Τότε $f(x) > \frac{M}{l}$ κοντά στο ξ και $g(x) > l$ κοντά στο ξ. Άρα $f(x) > \frac{M}{l}$ και $g(x) > l$ κοντά στο ξ. Άρα $f(x)g(x) > \frac{M}{l}l = M$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = +\infty = \left\{\begin{matrix}(+\infty)\zeta\\(+\infty)(+\infty)\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to\xi} f(x)\lim_{x\to\xi} g(x)$.

Όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν ουσιαστικά την ίδια αιτιολόγηση. $\natural$

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) = \lim_{x\to+\infty} x \lim_{x\to+\infty}(x-1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$. Παρατηρήστε ότι η εφαρμογή του κανόνα αθροίσματος στο $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

(2) $\lim_{x\to0}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\lim_{x\to0}(2+x) = (+\infty)2 = +\infty$. Ο κανόνας αθροίσματος δεν εφαρμόζεται στο $\lim_{x\to0}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα για περιπτώσεις απροσδιόριστης μορφής.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x\frac{c}{x} = \lim_{x\to+\infty} c = c$.

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4} = +\infty$, $\lim_{x\to0} x^2 = 0$, $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}x^2 = \lim_{x\to0}\frac{1}{x^2} = +\infty$.

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|} = +\infty$, $\lim_{x\to0} x^2 = 0$, $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}x^2 = \lim_{x\to0}|x| = 0$.

(4) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x\to0} x = 0$ αλλά το $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}x = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Πρόταση 3.17 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και $k \in \mathbf{N}$, τότε*

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^k = (\lim_{x\to\xi} f(x))^k\,.$$

Απόδειξη: $\lim_{x\to\xi} f(x)^k = \lim_{x\to\xi} f(x)\cdot\cdot f(x) = \lim_{x\to\xi} f(x)\cdot\cdot\lim_{x\to\xi} f(x) = (\lim_{x\to\xi} f(x))^k$. ♮

Πρόταση 3.18 ***Κανόνας αντιστρόφου, I***. *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και το $\frac{1}{\lim_{x\to\xi} f(x)}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, δηλαδή $\lim_{x\to\xi} f(x) \neq 0$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{f(x)}$ και*

$$\lim_{x\to\xi}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to\xi} f(x)}\,.$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta > 0$. Θεωρούμε έναν l ώστε $0 < l < \eta$, οπότε $f(x) > l$ κοντά στο ξ. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $|f(x)-\eta| < l\eta\epsilon$ κοντά στο ξ. Άρα $f(x) > l$ και $|f(x)-\eta| < l\eta\epsilon$ κοντά στο ξ. Επομένως,

$$\Big|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{\eta}\Big| = \frac{|f(x)-\eta|}{f(x)\eta} < \frac{l\eta\epsilon}{l\eta} = \epsilon$$

κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\lim_{x\to\xi} f(x)}$.

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $f(x) > \frac{1}{\epsilon}$ κοντά στο ξ. Άρα $0 < \frac{1}{f(x)} < \epsilon$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\big|\frac{1}{f(x)} - 0\big| = \frac{1}{f(x)} < \epsilon$ κοντά στο ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{f(x)} = 0 = \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{\lim_{x\to\xi} f(x)}$.

Η περιπτώσεις που το όριο είναι αρνητικός αριθμός ή $-\infty$ είναι παρόμοιες. ♮

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{\lim_{x\to1}(x+1)} = \frac{1}{2}$.

(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

(3) Αν $k \in \mathbf{N}$, τότε $\lim_{x\to\xi} x^k = (\lim_{x\to\xi} x)^k = \xi^k$. Αν, επιπλέον, $\xi \neq 0$, τότε $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{\lim_{x\to\xi} x^k} = \frac{1}{\xi^k}$.

(4) Αν $k \in \mathbf{N}$, $\lim_{x\to\xi+} \frac{1}{(x-\xi)^k} = \big(\lim_{x\to\xi+} \frac{1}{x-\xi}\big)^k = (+\infty)^k = +\infty$.

Αν ο $k \in \mathbf{N}$ είναι άρτιος, $\lim_{x\to\xi-} \frac{1}{(x-\xi)^k} = \big(\lim_{x\to\xi-} \frac{1}{x-\xi}\big)^k = (-\infty)^k = +\infty$.

Αν ο $k \in \mathbf{N}$ είναι περιττός, $\lim_{x\to\xi-} \frac{1}{(x-\xi)^k} = \big(\lim_{x\to\xi-} \frac{1}{x-\xi}\big)^k = (-\infty)^k = -\infty$.

(5) Αν $k \in \mathbf{N}$, $\lim_{x\to+\infty} x^k = (\lim_{x\to+\infty} x)^k = (+\infty)^k = +\infty$.
Αν ο $k \in \mathbf{N}$ είναι άρτιος, $\lim_{x\to-\infty} x^k = (\lim_{x\to-\infty} x)^k = (-\infty)^k = +\infty$.
Αν ο $k \in \mathbf{N}$ είναι περιττός, $\lim_{x\to-\infty} x^k = (\lim_{x\to-\infty} x)^k = (-\infty)^k = -\infty$.

(6) Αν $k \in \mathbf{N}$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = \big(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\big)^k = 0^k = 0$.

(7) Ο κανόνας δεν ισχύει στην περίπτωση που το όριο μιας συνάρτησης είναι 0. Για παράδειγμα, $\lim_{x\to0} x = 0$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$.

Το πρόβλημα στο τελευταίο παράδειγμα είναι ότι η συνάρτηση έχει και θετικές και αρνητικές τιμές. Αν μια συνάρτηση έχει τιμές σταθερού προσήμου, τότε, όπως θα δούμε αμέσως, έχουμε θετικά αποτελέσματα.

Πρόταση 3.19 ***Κανόνας αντιστρόφου, II***. *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$.*
(1) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο ξ, τότε $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
(2) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο ξ, τότε $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Απόδειξη: (1) Έστω $M > 0$. Τότε $|f(x) - 0| < \frac{1}{M}$ κοντά στο ξ. Επειδή $f(x) > 0$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται $|f(x) - 0| < \frac{1}{M}$ και $f(x) > 0$ κοντά στο ξ. Άρα $0 < f(x) < \frac{1}{M}$ κοντά στο ξ. Άρα $\frac{1}{f(x)} > M$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
(2) Ομοίως. ♮

Παράδειγμα: $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 - 0 = 0$. Επίσης, $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = +\infty$.

Τα αποτελέσματα για τη συνάρτηση $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ προκύπτουν από τον κανόνα γινομένου και τον κανόνα αντιστρόφου.

Πρόταση 3.20 ***Κανόνας λόγου***. *Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$ και ο λόγος $\frac{\lim_{x\to\xi} f(x)}{\lim_{x\to\xi} g(x)}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)}$ και*

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\xi} f(x)}{\lim_{x\to\xi} g(x)}.$$

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to1} \frac{x^2+x}{x-2} = \frac{\lim_{x\to1}(x^2+x)}{\lim_{x\to1}(x-2)} = \frac{1^2+1}{1-2} = -2$.

(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim_{x\to+\infty}(1+2\frac{1}{x})} = (+\infty)\frac{1-0+0}{1+2\cdot 0} = +\infty$. Παρατηρήστε ότι η άμεση εφαρμογή του κανόνα λόγου στο $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2}$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

Ιδου μερικά παραδείγματα για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{+\infty}$.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to 0} cx = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{cx}{x} = \lim_{x\to 0} c = c$.

(2) $\lim_{x\to 0}|x| = 0$, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = +\infty$.

(3) $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, $\lim_{x\to 0} x = 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$.

(4) Έστω $c > 0$. $\lim_{x\to+\infty} cx = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{cx}{x} = \lim_{x\to+\infty} c = c$.

(5) $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

(6) $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Πρόταση 3.21 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi}|f(x)|$ και*

$$\lim_{x\to\xi}|f(x)| = \big|\lim_{x\to\xi} f(x)\big|.$$

Απόδειξη: Έστω $\lim f(x) = \eta$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε $|f(x)-\eta| < \epsilon$ κοντά στο ξ. Άρα $\big||f(x)|-|\eta|\big| \le |f(x)-\eta| < \epsilon$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi}|f(x)| = |\eta| = |\lim_{x\to\xi} f(x)|$.

Έστω $\lim f(x) = +\infty$ ή $\lim f(x) = -\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε $f(x) > M$ ή $f(x) < -M$, αντιστοίχως, κοντά στο ξ. Και στις δυο περιπτώσεις, $|f(x)| > M$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi}|f(x)| = +\infty = |\pm\infty| = |\lim_{x\to\xi} f(x)|$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to 1}|x-2| = |\lim_{x\to 1}(x-2)| = |1-2| = 1$.

(2) $\lim_{x\to 0}\big|-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x^2}\big| = \big|\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x^2})\big| = |-\infty-(+\infty)| = |-\infty| = +\infty$.

(3) Δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 3.21. Είναι $\lim_{x\to\xi}\big|\frac{x-\xi}{|x-\xi|}\big| = \lim_{x\to\xi} 1 = 1$. Όμως, το $\lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{|x-\xi|}$ δεν υπάρχει.

Πρόταση 3.22 *Κανόνας σύνθεσης*. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbf{R}$, $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\eta \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του B. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, αν $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ και αν υπάρχει το $\lim_{y\to\eta} g(y)$, τότε*

$$\lim_{x\to\xi}(g\circ f)(x) = \lim_{y\to\eta} g(y).$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{y\to\eta} g(y) = \zeta \in \overline{\mathbf{R}}$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $g(y) \in N_\zeta(\epsilon)$ για κάθε $y \in {N_\eta}^*(\delta_0)\cap B$. Τώρα, επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, ισχύει $f(x) \in N_\eta(\delta_0)$ κοντά στο ξ. Επειδή, επίσης, $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ και $f(x) \in B$ για κάθε $x \in A$, ισχύει $f(x) \in {N_\eta}^*(\delta_0)\cap B$ κοντά στο ξ. Άρα $(g\circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \in N_\zeta(\epsilon)$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi}(g\circ f)(x) = \zeta$. $\natural$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα σύνθεσης, συχνά χρησιμοποιούμε την έκφραση «κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = f(x)$» και γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to\eta} g(y).$$

Παραδείγματα: (1) Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5}$.

Είναι $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x}+1) = 1$ και $\sqrt{x}+1 \neq 1$ για κάθε $x > 0$ και, επομένως, $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5} = \lim_{y\to 1} \frac{y^4}{y^8+y^{13}+5} = \frac{1}{7}$.

(2) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 1}\big(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1\big)$.

Επειδή $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 1}\big(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{(x-1)^3} + 1\big) = \lim_{y\to+\infty}(y-y^6+1) = \lim_{y\to+\infty} y^6(-1+y^{-5}+y^{-6}) = (+\infty)(-1+0+0) = -\infty$.

(3) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2} + (\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\big)$.

Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0\frac{1-0}{1+0+0} = 0$ και $\frac{x-1}{x^2+x+1} \neq 0$ για κάθε x κοντά στο $+\infty$ (και, συγκεκριμένα, για κάθε $x > 1$). Επομένως, $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2} + (\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\big) = \lim_{y\to 0}(y^{-2}+y^{-4}) = +\infty$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τα $\lim_{x\to 0\pm} f(x)$, $\lim_{x\to 1\pm} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ για τις συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$ και $f(x) = \begin{cases} |x-1|^{-\frac{1}{4}}, & x \leq 0 \text{ ή } x > 1, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$

2. Βρείτε τα $\lim_{x\to\xi\pm}[x]$. Για ποιους ξ υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}[x]$;

3. Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty}\big[\frac{1}{x}\big]$, $\lim_{x\to\pm\infty} x\big[\frac{1}{x}\big]$.

4. Βρείτε τα: $\lim_{x\to 2} \frac{1+x}{1+x^3}$, $\lim_{x\to 1\pm} \frac{1-x^2}{1-x^3}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^{-3}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2-|x|}$, $\lim_{x\to 0\pm}\big(x^{-1}+|x|^{-\frac{1}{2}}\big)$, $\lim_{x\to 1}\big((x-1)^{-1}+|x-1|^{-\frac{1}{2}}\big)^2$, $\lim_{x\to\pm\infty}(-x+\frac{1}{x})$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x+1)^3(3x^2+2)^2(x+4)^{13}}{x^{20}}$.

5. Αν $n \in \mathbf{Z}$ (και $\xi \neq 0$ όταν $n \leq 1$), αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} \frac{x^n-\xi^n}{x-\xi} = n\xi^{n-1}$.

6. Βρείτε με τον κανόνα σύνθεσης τα: $\lim_{x\to 0}\big((\frac{x^2+1}{x^5+2})^8 + 3(\frac{x^2+1}{x^5+2})^4 + 1\big)$, $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - \sqrt[4]{\frac{2x+1}{x-1}} + 1}{\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} + \sqrt[4]{\frac{2x+1}{x-1}} + 1}$, $\lim_{x\to 0\pm} \sqrt[3]{2(\sqrt{|x|}+\frac{1}{x})^3 - 3(\sqrt{|x|}+\frac{1}{x})^2 + 17}$.

7. Υπολογίστε τις πιθανές τιμές του $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ αν γνωρίζουμε ότι το όριο αυτό υπάρχει και $f(\sqrt{x}) = -3(f(x))^2 + 1$ για κάθε $x > 0$.

8. Βρείτε τα (i) $\lim_{x\to 1} f(x)$, αν $x - |x-1|^{\frac{1}{2}} < f(x) \leq x + |x-1|^{\frac{1}{2}}$ για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,\frac{3}{2})$, (ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, αν $\frac{x+1}{2x-1} < f(x) < \frac{x-1}{2x+1}$ για κάθε $x \leq -7$, (iii) $\lim_{x\to 1\pm} f(x)$, αν $(x-1)f(x) \geq 1$ για κάθε x, $0 < |x-1| < \frac{1}{4}$.

9. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $[a] \leq a < [a] + 1$, βρείτε τα: $\lim_{x\to\pm\infty}[x]$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{[x]}{x}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{[x^2]}{x}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{[\sqrt{x}]}{x}$, $\lim_{x\to1\pm}\left[\frac{1}{x-1}\right]$.

10. Αν $a, b > 0$, υπολογίστε τα $\lim_{x\to0+}\frac{x}{a}[\frac{b}{x}]$, $\lim_{x\to0+}\frac{b}{x}[\frac{x}{a}]$, $\lim_{x\to0-}\frac{x}{a}[\frac{b}{x}]$, $\lim_{x\to0-}\frac{b}{x}[\frac{x}{a}]$.

11. (1) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = +\infty$. (2) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ και η g είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = -\infty$. (3) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και η g είναι φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = 0$. (4) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως. (5) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και η g έχει αρνητικό άνω φράγμα κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = -\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

12. Υπολογίζοντας κατάλληλα όρια, δείτε αν (i) $\frac{3x^2+7x+1}{x^2-5x+1} < \frac{301}{100}$ κοντά στο $+\infty$, (ii) $\frac{x^8+1}{4x^4-x^2+2x-1} \geq \frac{5}{8}$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 1, (iii) $x^5 - 7x^3 + x^2 \leq 10^7$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$, (iv) $-10^{-8} < \frac{x^4+13x^3+25x^2+33}{x^5+2x+1} < 10^{-7}$ κοντά στο $-\infty$.

13. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) < \lim_{x\to\xi} g(x)$. Αποδείξτε ότι $f(x) < g(x)$ κοντά στο ξ.

14. Υπολογίζοντας κατάλληλα όρια βρείτε ποιες από τις $\frac{1}{x^3}$, $\frac{x^2-2x+2}{x^2+1}$, $-\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$ είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες κοντά στον 0.

15. (1) Αν $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \pm\infty$, η ευθεία $x = \xi$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος της f. Βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες ευθείες των γραφημάτων των $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ \frac{1}{x-1}, & x < 1. \end{cases}$ (2) Αν $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - \mu x - \nu) = 0$, η ευθεία $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται **πλάγια ασύμπτωτη στο** $\pm\infty$, αντιστοίχως, του γραφήματος της f. Αποδείξτε ότι η ευθεία $y = \mu x + \nu$ είναι πλάγια ασύμπτωτη ευθεία του γραφήματος της f αν και μόνο αν $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \mu$ και $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - \mu x) = \nu$. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες στα $\pm\infty$ των γραφημάτων των $\frac{1}{x}$, x, x^2, $\sqrt{x}$, $x + \frac{1}{x}$.

16. Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbf{R}}$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbf{R}}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}\max\{f(x), g(x)\} = \max\{\eta, \zeta\}$ και $\lim_{x\to\xi}\min\{f(x), g(x)\} = \min\{\eta, \zeta\}$.

3.4 Όρια συναρτήσεων και ακολουθίες.

Θεώρημα 3.2 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Ας θεωρήσουμε, επίσης, και τις ακολουθίες (x_n) στο A με τις ιδιότητες: (i) ισχύει τελικά $x_n \neq \xi$, (ii) $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$.*
(1) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbf{R}}$, τότε για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \eta$.
(2) Αντιστρόφως, αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \in \overline{\mathbf{R}}$, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Απόδειξη: (1) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbf{R}}$. Έστω (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii). Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\delta_0)$. Επειδή $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και επειδή ισχύει τελικά $x_n \neq \xi$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A$. Άρα ισχύει τελικά $f(x_n) \in N_\eta(\epsilon)$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \eta$.
(2) Έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \in \overline{\mathbf{R}}$. Κατ' αρχάς θεωρούμε δυο οποιεσδήποτε $(x_n{}')$, $(x_n{}'')$ στο A με τις ιδιότητες (i), (ii), οπότε υπάρχουν τα $\lim_{n\to+\infty} f(x_n{}')$, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n{}'')$. Δημιουργούμε την ακολουθία $(x_1{}', x_1{}'', x_2{}', x_2{}'', x_3{}', x_3{}'', \dots)$. Είναι φανερό ότι η ακολουθία αυτή έχει τις ίδιες ιδιότητες (i), (ii), οπότε υπάρχει το όριο της ακολουθίας $\big(f(x_1{}'), f(x_1{}''), f(x_2{}'), f(x_2{}''), f(x_3{}'), f(x_3{}''), \dots\big)$. Άρα οι $\big(f(x_n{}')\big)$, $\big(f(x_n{}'')\big)$, ως υποακολουθίες της τελευταίας ακολουθίας, έχουν το ίδιο όριο. Δηλαδή, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n{}') = \lim_{n\to+\infty} f(x_n{}'')$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\eta \in \overline{\mathbf{R}}$ ώστε για κάθε (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) να ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \eta$.

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι *δεν* είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

Έστω $\xi \in \mathbf{R}$. Τότε υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A$, $0 < |x-\xi| < \delta$ ώστε $f(x) \notin N_\eta(\epsilon_0)$. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in A$, $0 < |x_n - \xi| < \frac{1}{n}$ ώστε $f(x_n) \notin N_\eta(\epsilon_0)$. Δημιουργείται έτσι μια ακολουθία (x_n) στο A η οποία έχει τις ιδιότητες (i), (ii) αλλά για την οποία *δεν* ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \eta$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Έστω $\xi = +\infty$. Τότε υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $N > 0$ να υπάρχει $x \in A$, $x > N$ ώστε $f(x) \notin N_\eta(\epsilon_0)$. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in A$, $x_n > n$ ώστε $f(x_n) \notin N_\eta(\epsilon_0)$. Δημιουργείται και πάλι μια ακολουθία (x_n) στο A η οποία έχει τις ιδιότητες (i), (ii) αλλά για την οποία *δεν* ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \eta$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Η περίπτωση $\xi = -\infty$ είναι παρόμοια με την προηγούμενη.

Άρα ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Από $\lim_{x\to0} \sqrt{x} = 0$ προκύπτει $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Διότι η $(\frac{1}{n})$ είναι στο πεδίο ορισμού της $\sqrt{x}$, όλοι οι όροι της είναι $\neq 0$ και συγκλίνει στον 0 και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to0} \sqrt{x} = 0$.

(2) Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \big(1 + (1+\frac{1}{n})^{2n} - 3(1+\frac{1}{n})^{3n}\big) = 1 + e^2 - 3e^3$.

Είναι $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ και $(1+\frac{1}{n})^n \neq e$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \big(1 + (1+\frac{1}{n})^{2n} - 3(1+\frac{1}{n})^{3n}\big) = \lim_{x\to e}(1 + x^2 - 3x^3) = 1 + e^2 - 3e^3$.

Το Θεώρημα 3.2 χρησιμοποιείται συνήθως με δυο τρόπους. Όπως κάναμε στα δυο προηγούμενα παραδείγματα, γνωρίζοντας ήδη κάποια όρια συναρτήσεων, βγάζουμε συμπεράσματα για όρια ακολουθιών. Επίσης, έστω ότι δε γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$. Αν βρούμε μια ακολουθία (x_n) στο πεδίο ορισμού της f η οποία έχει όριο ξ, όλοι οι όροι της είναι $\neq \xi$ και το $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ *δεν υπάρχει*, συμπεραίνουμε ότι *ούτε το* $\lim_{x\to\xi} f(x)$ *υπάρχει*. Ή, αν βρούμε *δυο* ακολουθίες (x_n), $(x_n{}')$ στο πεδίο ορισμού της f οι οποίες έχουν όριο ξ, όλοι οι όροι τους είναι $\neq \xi$ και τα $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n{}')$ *είναι διαφορετικά*, συμπεραίνουμε ότι *το* $\lim_{x\to\xi} f(x)$ *δεν υπάρχει*.

Παράδειγμα: Θα αποδείξουμε ότι το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ δεν υπάρχει.

Έστω η ακολουθία (n). Τότε $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ και το $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{[n]} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ δεν υπάρχει. Άρα ούτε το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ υπάρχει.

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες ακολουθίες, αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια: $\lim_{x\to0\pm}(-1)^{[\frac{1}{x}]}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x-[x])$.

2. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, (x_n) στο A, $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$. (1) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και ισχύει $f(x_n) \geq l$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) \geq l$. (2) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και ισχύει $f(x_n) \leq u$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) \leq u$. (3) Αν $u < l$ και ισχύει $f(x_n) \geq l$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ και $f(x_n) \leq u$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

3. (1) Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau > 0$, δηλαδή $f(x+\tau) = f(x)$ για κάθε x. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta \in \overline{\mathbf{R}}$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα, αποδείξτε ότι $\eta \in \mathbf{R}$ και $f(x) = \eta$ για κάθε x. (*Υπόδ.:* Έστω $f(x_0) \neq \eta$. Θεωρήστε την ακολουθία $(x_0+n\tau)$.) (2) Υπάρχουν τα $\lim_{x\to+\infty}\cos x$, $\lim_{x\to+\infty}\sin x$, $\lim_{x\to+\infty}(x-[x])$;

3.5 Παραδείγματα ορίων.

Α. Ρητές συναρτήσεις.

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Τότε $\lim_{x\to\xi} p(x) = \lim_{x\to\xi}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_0 + a_1\xi + \cdots + a_n\xi^n = p(\xi)$.

$$\lim_{x\to\xi} p(x) = p(\xi).$$

Έστω ότι η p είναι βαθμού ≥ 1, δηλαδή $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Τότε $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n(\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + 1) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$. Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = a_n(+\infty), \qquad \lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} a_n(+\infty), & n \text{ άρτιος}, \\ a_n(-\infty), & n \text{ περιττός}. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι τα $\lim_{x\to\pm\infty} p(x)$ εξαρτώνται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο του πολυωνύμου. Για παράδειγμα: $\lim_{x\to+\infty}(-5x^3+x^2-4x-12) = \lim_{x\to+\infty}(-5x^3) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(-5x^3+x^2-4x-12) = \lim_{x\to-\infty}(-5x^3) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(7x^4+x^3-x+5) = \lim_{x\to-\infty} 7x^4 = +\infty$.

Έστω ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_n, b_m \neq 0$. Τότε $r(x) = \frac{a_nx^n}{b_mx^m}\frac{\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x}+1}{\frac{b_0}{b_m}\frac{1}{x^m}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{b_m}\frac{1}{x}+1}$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} r(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}(+\infty), & n>m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m, \\ 0, & n<m, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}(+\infty), & n-m \text{ άρτιος} > 0, \\ \frac{a_n}{b_m}(-\infty), & n-m \text{ περιττός} > 0, \\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m, \\ 0, & n<m. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι τα $\lim_{x\to\pm\infty} r(x)$ εξαρτώνται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή. Για παράδειγμα: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+4}{2x^3+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+4}{2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{2x^2} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2}{x^4+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^4} = 0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4}{2x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{-x^4+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{-x^4} = 0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3-1}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{2x} = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-2}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4}{2x} = -\infty$.

Για το $\lim_{x\to\xi} r(x)$, έχουμε τις εξής περιπτώσεις. Αν $b_0+b_1\xi+\cdots+b_m\xi^m \neq 0$, τότε $\lim_{x\to\xi} r(x) = \frac{a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n}{b_0+b_1\xi+\cdots+b_m\xi^m} = r(\xi)$. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to\xi} r(x) = r(\xi).$$

Για παράδειγμα: $\lim_{x\to1}\frac{3x-2}{x^4+2x^3-4} = \frac{3\cdot1-2}{1^4+2\cdot1^3-4} = -1$.

Αν $b_0+b_1\xi+\cdots+b_m\xi^m = 0$, τότε το $x-\xi$ διαιρεί το $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$. Αν $(x-\xi)^k$ $(k\in\mathbf{N})$ είναι η μέγιστη δύναμη του $x-\xi$ η οποία διαιρεί το $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$, τότε μπορούμε να γράψουμε $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m = (x-\xi)^kq(x)$, όπου $q(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δε διαιρείται από το $x-\xi$ και, επομένως, $q(\xi)\neq0$. Τώρα, είτε το $x-\xi$ διαιρεί το $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ είτε όχι, μπορούμε να γράψουμε $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n = (x-\xi)^lp(x)$ $(l\in\mathbf{Z}, l\geq0)$, όπου $p(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δε διαιρείται από το $x-\xi$ και, επομένως, $p(\xi)\neq0$. Συνολικά, λοιπόν, έχουμε ότι $r(x) = (x-\xi)^{l-k}\frac{p(x)}{q(x)}$ και, επειδή $\lim_{x\to\xi}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\xi)}{q(\xi)} \neq 0$,

$$\lim_{x\to\xi} r(x) \begin{cases} = 0, & l>k, \\ = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}, & l=k, \\ = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}(+\infty), & k-l \text{ άρτιος} > 0, \\ \text{δεν υπάρχει}, & k-l \text{ περιττός} > 0. \end{cases}$$

Ειδικώτερα, αν ο $k-l$ είναι περιττός >0,

$$\lim_{x\to\xi-} r(x)=\frac{p(\xi)}{q(\xi)}(-\infty), \qquad \lim_{x\to\xi+} r(x)=\frac{p(\xi)}{q(\xi)}(+\infty).$$

Παραδείγματα: (1) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$. Ο 1 είναι ρίζα του x^4-2x^2+1, οπότε το x^4-2x^2+1 διαιρείται από το $x-1$. Παραγοντοποιούμε είτε με τον αλγόριθμο της ευκλείδειας διαίρεσης είτε, πιο απλά: $x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2$. Ο 1 είναι ρίζα και του x^3-x^2-x+1, οπότε: $x^3-x^2-x+1=(x-1)x^2-(x-1)=(x-1)^2(x+1)$. Άρα $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}$ για κάθε $x\neq 1,-1$. Επομένως, $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

(2) Για το $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$ βλέπουμε ότι ο 1 είναι ρίζα του x^3-x^2-x+1 και, όπως πριν: $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$. Ο 1 είναι ρίζα και του x^3+4x^2+x-6, οπότε: $x^3+4x^2+x-6=x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6=(x-1)x^2+(x-1)5x+(x-1)6=(x-1)(x^2+5x+6)$. Το $x-1$ δε διαιρεί το x^2+5x+6 διότι ο 1 δεν είναι ρίζα του. 'ρα $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=\frac{(x-1)(x^2+5x+6)}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{1}{x-1}\frac{x^2+5x+6}{x+1}$. Άρα: $\lim_{x\to 1+}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=(+\infty)\frac{1^2+5\cdot 1+6}{1+1}=+\infty$ και $\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=(-\infty)\frac{1^2+5\cdot 1+6}{1+1}=-\infty$. Επομένως, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$.

B. Δυνάμεις.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δύναμης $p_a(x)=x^a$ περιέχει το $(0,+\infty)$. Το πρώτο όριο που θα αποδείξουμε είναι το

$$\lim_{x\to\xi} x^a=\xi^a \quad (\xi>0).$$

Κατ' αρχάς έστω $a>0$. Έστω $\epsilon>0$. Θα βρούμε $\delta_0>0$ ώστε $|x^a-\xi^a|<\epsilon$ για κάθε $x>0$, $0<|x-\xi|<\delta_0$. Ορίζουμε τον $\epsilon'=\min\{\epsilon,\frac{\xi^a}{2}\}>0$, οπότε $\epsilon'\leq\epsilon$ και $\epsilon'<\xi^a$. Ισχύει $|x^a-\xi^a|<\epsilon$ αρκεί να ισχύει $|x^a-\xi^a|<\epsilon'$ αρκεί να ισχύει $\xi^a-\epsilon'<x^a<\xi^a+\epsilon'$ αρκεί να ισχύει $(\xi^a-\epsilon')^{\frac{1}{a}}<x<(\xi^a+\epsilon')^{\frac{1}{a}}$. Παρατηρούμε ότι ο ξ βρίσκεται ανάμεσα στους $(\xi^a-\epsilon')^{\frac{1}{a}}$, $(\xi^a+\epsilon')^{\frac{1}{a}}$, οπότε, αν επιλέξουμε $\delta_0=\min\big\{\xi-(\xi^a-\epsilon')^{\frac{1}{a}},(\xi^a+\epsilon')^{\frac{1}{a}}-\xi\big\}$, τότε για κάθε x, $0<|x-\xi|<\delta_0$ ισχύει $(\xi^a-\epsilon')^{\frac{1}{a}}<x<(\xi^a+\epsilon')^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, $|x^a-\xi^a|<\epsilon$. Άρα $\lim_{x\to\xi}x^a=\xi^a$.

Αν $a<0$ (οπότε $-a>0$), $\lim_{x\to\xi}x^a=\lim_{x\to\xi}(\frac{1}{x})^{-a}=(\frac{1}{\xi})^{-a}=\xi^a$.

Τέλος, αν $a=0$, $\lim_{x\to\xi}x^0=\lim_{x\to\xi}1=1=\xi^0$.

Τα όρια

$$\lim_{x\to 0+}x^a=\begin{cases}0, & a>0,\\ 1, & a=0,\\ +\infty, & a<0,\end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty}x^a=\begin{cases}+\infty, & a>0,\\ 1, & a=0,\\ 0, & a<0\end{cases}$$

έχουν ήδη αποδειχθεί ως παραδείγματα.

Αν θέλουμε να μελετήσουμε το όριο $\lim_{x\to\xi}x^a$ με $\xi<0$ καθώς και τα όρια $\lim_{x\to-\infty}x^a$ και $\lim_{x\to 0-}x^a$, θα πρέπει το πεδίο ορισμού της $p_a(x)=x^a$ να περιέχει και το διάστημα $(-\infty, 0)$, δηλαδή ο a να είναι ρητός με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του $\frac{m}{n}$. Στην περίπτωση αυτή ο τύπος της συνάρτησης γράφεται $x^a = (\sqrt[n]{x})^m$ και είναι φανερό ότι είναι αρκετό να μελετήσουμε τα διάφορα όρια στην ειδική περίπτωση $\sqrt[n]{x}$ με *περιττό* $n \in \mathbf{N}$.

Το πρώτο όριο είναι το

$$\lim_{x \to \xi} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\xi} \quad (n \in \mathbf{N}, n \text{ περιττός}).$$

Αυτό είναι ειδική περίπτωση (με $a = \frac{1}{n}$) του $\lim_{x \to \xi} x^a = \xi^a$, αλλά χωρίς τον περιορισμό $\xi > 0$. Η απόδειξη είναι παρόμοια (και πιο απλή). Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{\xi}| < \epsilon$ για κάθε x, $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Ισχύει $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{\xi}| < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $\sqrt[n]{\xi} - \epsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\xi} + \epsilon$ αρκεί να ισχύει $(\sqrt[n]{\xi} - \epsilon)^n < x < (\sqrt[n]{\xi} + \epsilon)^n$. Ο ξ είναι ανάμεσα στους $(\sqrt[n]{\xi} - \epsilon)^n$, $(\sqrt[n]{\xi} + \epsilon)^n$, οπότε, αν πάρουμε $\delta_0 = \min\{\xi - (\sqrt[n]{\xi} - \epsilon)^n, (\sqrt[n]{\xi} + \epsilon)^n - \xi\}$, τότε για κάθε x, $0 < |x - \xi| < \delta_0$ ισχύει $(\sqrt[n]{\xi} - \epsilon)^n < x < (\sqrt[n]{\xi} + \epsilon)^n$ και, επομένως, $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{\xi}| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x \to \xi} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\xi}$.

Το δεύτερο από τα δυο όρια

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \qquad (n \in \mathbf{N}, n \text{ περιττός})$$

είναι ειδική περίπτωση (με $a = \frac{1}{n} > 0$) του $\lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$. Το πρώτο όριο αποδεικνύεται με τον ορισμό, αλλά και από το δεύτερο όριο με τον κανόνα σύνθεσης: $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{y \to +\infty} \sqrt[n]{-y} = -\lim_{y \to +\infty} \sqrt[n]{y} = -\infty$.

Τέλος, απλώς καταγράφουμε και τα ήδη γνωστά όρια (με $a = \frac{1}{n} > 0$):

$$\lim_{x \to \xi} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\xi} \quad (\xi > 0, n \in \mathbf{N}, n \text{ άρτιος}),$$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \to 0+} \sqrt[n]{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \quad (n \in \mathbf{N}, n \text{ άρτιος}).$$

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$.

(2) Θα αποδείξουμε το $\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$. Από το αποτέλεσμα του (1) φαίνεται ότι το όριο αυτό εμπίπτει στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $(+\infty) - (+\infty)$. Χρησιμοποιώντας την $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}$, $\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{(+\infty)+(+\infty)} = 0$.

(3) $\lim_{x \to 3} \sqrt[5]{\frac{x+1}{x^2+1}} = \lim_{y \to \frac{2}{5}} \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{\frac{2}{5}}$.

Γ. Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.

Θα μελετήσουμε τα όρια της εκθετικής συνάρτησης $\exp_a(x) = a^x$. Κατ' αρχάς:

$$\lim_{x \to \xi} a^x = a^{\xi}.$$

Έστω $a > 1$. Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε $|a^x - a^{\xi}| < \epsilon$ για κάθε x, $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Ορίζουμε τον $\epsilon' = \min\{\epsilon, \frac{a^{\xi}}{2}\} > 0$, οπότε $\epsilon' \le \epsilon$ και $\epsilon' < a^{\xi}$.

Ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon'$ αρκεί να ισχύει $a^\xi - \epsilon' < a^x < a^\xi + \epsilon'$ αρκεί να ισχύει $\log_a(a^\xi - \epsilon') < x < \log_a(a^\xi + \epsilon')$. Ο ξ βρίσκεται ανάμεσα στους $\log_a(a^\xi - \epsilon'), \log_a(a^\xi + \epsilon')$. Αν $\delta_0 = \min\{\xi - \log_a(a^\xi - \epsilon'), \log_a(a^\xi + \epsilon') - \xi\}$, τότε για κάθε x, $0 < |x - \xi| < \delta_0$ ισχύει $\log_a(a^\xi - \epsilon') < x < \log_a(a^\xi + \epsilon')$ και, επομένως, $|a^x - a^\xi| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi$.

Αν $0 < a < 1$ (οπότε $\frac{1}{a} > 1$), $\lim_{x\to\xi} a^x = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} = \frac{1}{(\frac{1}{a})^\xi} = a^\xi$.

Τέλος, αν $a = 1$, $\lim_{x\to\xi} 1^x = \lim_{x\to\xi} 1 = 1 = 1^\xi$.

Το επόμενο όριο είναι το

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty\,, & a > 1, \\ 1\,, & a = 1, \\ 0\,, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

Έστω $a > 1$. Έστω $M > 0$. Θα βρούμε $N_0 > 0$ ώστε $a^x > M$ για κάθε $x > N_0$. Ισχύει $a^x > M$ αρκεί να ισχύει $x > \log_a M$. Επιλέγουμε $N_0 = \log_a M > 0$, αν $M > 1$, και $N_0 = 1 > 0$, αν $0 < M \leq 1$, οπότε για κάθε $x > N_0$ ισχύει $x > \log_a M$ και, επομένως, $a^x > M$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

Αν $0 < a < 1$ (οπότε $\frac{1}{a} > 1$), $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Τέλος, αν $a = 1$, $\lim_{x\to+\infty} 1^x = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$.

Ακόμη:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0\,, & a > 1, \\ 1\,, & a = 1, \\ +\infty\,, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

Τα όρια αυτά μπορούν να αποδειχθούν βάσει των ορισμών, αλλά και από τα προηγούμενα όρια με τον κανόνα σύνθεσης. Για παράδειγμα, αν $a > 1$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{y\to+\infty} a^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{a^y} = \frac{1}{+\infty} = 0$. Η απόδειξη είναι το ίδιο απλή αν $a = 1$ ή $0 < a < 1$.

Τώρα θεωρούμε τη λογαριθμική συνάρτηση $\log_a$. Το πρώτο όριο είναι το:

$$\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi \quad (\xi > 0).$$

Έστω $a > 1$. Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ για κάθε $x > 0$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $\log_a \xi - \epsilon < \log_a x < \log_a \xi + \epsilon$ αρκεί να ισχύει $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^\epsilon$. Ο ξ είναι ανάμεσα στους $\xi a^{-\epsilon}$, ξa^ϵ, οπότε αν επιλέξουμε $\delta_0 = \min\{\xi - \xi a^{-\epsilon}, \xi a^\epsilon - \xi\}$, τότε για κάθε $x > 0$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$ ισχύει $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^\epsilon$ και, επομένως, $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi$.

Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x\to\xi} \log_a x = -\lim_{x\to\xi} \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_{\frac{1}{a}} \xi = \log_a \xi$.

Κατόπιν,

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty\,, & a > 1, \\ -\infty\,, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

Έστω $a > 1$. Έστω $M > 0$. Θα βρούμε $N_0 > 0$ ώστε $\log_a x > M$ για κάθε $x > N_0$. Ισχύει $\log_a x > M$ αρκεί να ισχύει $x > a^M$, οπότε, αν επιλέξουμε $N_0 = a^M > 0$, τότε για κάθε $x > N_0$ ισχύει $x > a^M$ και, επομένως, $\log_a x > M$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$.

Αν $0 < a < 1$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{1}{a}} x = -\infty$.

Τέλος:

$$\lim_{x\to 0}\log_a x = \begin{cases} -\infty\,, & a>1, \\ +\infty\,, & 0<a<1. \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα όρια, αν $a>1$, $\lim_{x\to 0+}\log_a x = \lim_{y\to+\infty}\log_a \frac{1}{y} = -\lim_{y\to+\infty}\log_a y = -(+\infty) = -\infty$. Ομοίως, αν $0<a<1$.

Αξίζει να γράψουμε ξεχωριστά τα όρια αυτής της ενότητας στην περίπτωση $a=e$, δηλαδή για τη συνήθη εκθετική και τη συνήθη λογαριθμική συνάρτηση:

$$\lim_{x\to\xi} e^x = e^\xi\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to\xi}\log x = \log\xi \quad (\xi>0), \qquad \lim_{x\to 0}\log x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty.$$

Δ. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Από την $|\sin x|\leq|x|$ και την $\cos x-\cos\xi = -2\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{x+\xi}{2}$, βρίσκουμε $|\cos x-\cos\xi| = 2\big|\sin\frac{x-\xi}{2}\big|\big|\sin\frac{x+\xi}{2}\big| \leq 2\big|\sin\frac{x-\xi}{2}\big| \leq 2\big|\frac{x-\xi}{2}\big| = |x-\xi|$.

Έστω $\epsilon>0$. Επιλέγουμε $\delta_0=\epsilon$ και, τότε, για κάθε x, $0<|x-\xi|<\delta_0$ ισχύει $|\cos x-\cos\xi|\leq|x-\xi|<\delta_0=\epsilon$. Άρα

$$\lim_{x\to\xi}\cos x = \cos\xi.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, από την $\sin x-\sin\xi = 2\sin\frac{x-\xi}{2}\cos\frac{x+\xi}{2}$ αποδεικνύουμε ότι $|\sin x-\sin\xi|\leq|x-\xi|$ και, επομένως,

$$\lim_{x\to\xi}\sin x = \sin\xi.$$

Από τον κανόνα λόγου:

$$\lim_{x\to\xi}\tan x = \tan\xi \quad \Big(\xi\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\Big),$$

$$\lim_{x\to\xi}\cot x = \cot\xi \quad (\xi\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}).$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί, επίσης, με τον κανόνα λόγου ότι:

$$\lim_{x\to\xi-}\tan x = +\infty, \quad \lim_{x\to\xi+}\tan x = -\infty \qquad \Big(\xi=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\Big),$$

$$\lim_{x\to\xi-}\cot x = -\infty, \quad \lim_{x\to\xi+}\cot x = +\infty \qquad (\xi=k\pi, k\in\mathbf{Z}).$$

Παράδειγμα: Τα $\lim_{x\to\pm\infty}\cos x$, $\lim_{x\to\pm\infty}\sin x$ δεν υπάρχουν.

Θεωρούμε την ακολουθία (πn) η οποία αποκλίνει στο $+\infty$. Η αντίστοιχη ακολουθία $(\cos(\pi n)) = \big((-1)^n\big)$ δεν έχει όριο. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\cos x$. Με την $\big(\frac{\pi}{2}+\pi n\big)$ αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ και με τις αντίθετες ακολουθίες ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to-\infty}$. Δείτε, επίσης, την άσκηση 3 της ενότητας 3.4.

Αξίζει να αποδείξουμε ακόμα δυο πολύ χρήσιμα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\,.$$

Και τα δυο όρια εντάσσονται στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $\frac{0}{0}$.

Συνδυάζοντας την ανισότητα $|\sin x|\leq|x|$ και την $|x|\leq|\tan x|$, η οποία ισχύει όταν $|x|<\frac{\pi}{2}$, βλέπουμε ότι $\cos x\leq\frac{\sin x}{x}\leq 1$ για κάθε $x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$. Επειδή $\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$, με παρεμβολή συνεπάγεται $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Για το δεύτερο όριο γράφουμε $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}$, οπότε $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$.

(2) Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ παρατηρούμε ότι $\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(2x)}{2x}}$. Είναι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$. Με τον ίδιο τρόπο, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$. Επομένως, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τα: $\lim_{x\to\pm\infty}(x^4-4x^3)$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x+1}{-3x^4+x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^8}{1+x^2}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+x^5}{1-x^2}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{x^2-2x+1}{x+1}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^4-x^3+x^2-1}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4+x^3-4x^2+x+1}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3}$.

2. Βρείτε τα: $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^{-2}+2x^{\frac{6}{5}}-4}{x^{\frac{6}{5}}-2x^{\frac{9}{8}}+2}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{6}{5}}}{4x^{\frac{4}{3}}+2}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{7}{4}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^2+3x^{\frac{15}{8}}}$, $\lim_{x\to 3}(2x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-2})$, $\lim_{x\to 1}x^{\sqrt{2}}$, $\lim_{x\to -1}(x^{\frac{4}{3}}+x^{-\frac{1}{5}}+3x^{-\frac{10}{6}})$, $\lim_{x\to 0\pm}(2x^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})$, $\lim_{x\to-\infty}(2x^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})$.

3. Έστω $a\neq 0$. Βρείτε τα: $\lim_{x\to 1\pm}\frac{1}{x^a-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^a-1)^2}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^{3a}-1}{x^a-1}$.

4. Βρείτε τα όρια: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$, $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$.

5. Με τον κανόνα σύνθεσης, βρείτε τα: $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{3x^2-7x}{x^2+1}}$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to 0}\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$, $\lim_{x\to 1}(1-\frac{1}{x-1})^{\frac{2}{3}}$, $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-3\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+7\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}-3\sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+7\sqrt[7]{\frac{x+1}{x-1}}+1}$.

6. Βάσει του Θεωρήματος 3.2, βρείτε τα όρια ακολουθιών: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n}{4^n+1}\right)^{\frac{3}{4}}$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+n+1}{2n^2-1}\right)^{\sqrt{2}}$, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{n^5+n^3+1}{2n^6+n^2+1}}$, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{2^n-4^n}{2^n+3^n+1}}$.

7. Υπολογίστε τα: $\lim_{x\to\pm\infty}(e^x-e^{2x}+1)$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{2x}+e^x+1}{2e^{2x}+1}$, $\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{e^x-1}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(e^x-1)^2}$, $\lim_{x\to+\infty}((\log x)^2-\log x)$, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(2x)}{\log(3x)}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{1}{\log x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1+2(\log x)^2}{2+\log x+2(\log x)^3}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2(\log x)^2}{2+\log x+2(\log x)^3}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{2x}})$, $\lim_{x\to 1}\log(x^3+1)$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\log|x|)^7-(\log|x|)^4+1}{(\log|x|)^5+(\log|x|)^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\log\frac{e^x}{e^{\frac{x}{2}}+1}$.

8. Βρείτε τα όρια ακολουθιών: $\lim_{n\to+\infty}n^n$, $\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{-n^3}{n+1}}$, $\lim_{n\to+\infty}e^{\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to+\infty}2^{2^n}$, $\lim_{n\to+\infty}\log\frac{n+1}{n^2}$, $\lim_{n\to+\infty}\log\frac{n^3+1}{n^2+1}$, $\lim_{n\to+\infty}\log\frac{e^{2n}+1}{e^n+1}$, $\lim_{n\to+\infty}\log(3^n-2^n+1)$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(\log\frac{n}{n^2+1})^2-\log\frac{n}{n^2+1}+2}{-(\log\frac{n}{n^2+1})^2+4\log\frac{n}{n^2+1}-8}$.

9. Βρείτε τα: $\lim_{x\to 0}x\cot x$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\sin x)^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(13x)+x^2}{(\sin(7x))^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(8x)-\cos(15x)}{x^2}$, $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(3x)}{\sin x}$, $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$, $\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\pm\infty}x^2(1-\cos\frac{1}{x})$.

10. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+}x^a\sin x=\begin{cases}0, & a>-1,\\ 1, & a=-1,\\ +\infty, & a<-1.\end{cases}$

11. Αν $a>0$, αποδείξτε με παρεμβολή ότι $\lim_{x\to 0+}x^a\sin\frac{1}{x}=0$.

12. Έστω $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$, $x_n\neq 0$ $(n\in\mathbf{N})$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos x_n}{{x_n}^2}=\frac{1}{2}$. Βρείτε τα όρια ακολουθιών: $\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{\pi}{n}$, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n}$, $\lim_{n\to+\infty}n^2(1-\cos\frac{\pi}{n})$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\cot\frac{\pi}{2n}}{n}$.

13. (1) Θεωρήστε την $x\sin x$ και σχεδιάστε το γράφημά της. Παρατηρήστε ότι το γράφημα βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y=-x$ και $y=x$ και ότι στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x=1$ το γράφημα «ακουμπά» την ευθεία $y=x$ ενώ στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x=-1$ το γράφημα «ακουμπά» την ευθεία $y=-x$. Σε ποια σημεία το γράφημα τέμνει τον x-άξονα; Αποδείξτε, βάσει του Θεωρήματος 3.2, ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\pm\infty}x\sin x$. (2) Θεωρήστε την $\sin\frac{1}{x}$ και σχεδιάστε το γράφημά της. Παρατηρήστε ότι το γράφημα βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y=-1$ και $y=1$. Βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων $\sin\frac{1}{x}=1$ και $\sin\frac{1}{x}=-1$. Παρατηρήστε ότι οι λύσεις των εξισώσεων αυτών καθορίζουν άπειρα διαδοχικά υποδιαστήματα του $(0,+\infty)$ και του $(-\infty,0)$ τα οποία «συσσωρεύονται» στον 0 και στα οποία η $\sin\frac{1}{x}$ είναι εναλλάξ γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα. Παρατηρήστε, επίσης, ότι στις λύσεις της εξίσωσης $\sin\frac{1}{x}=1$ το γράφημα «ακουμπά» την ευθεία $y=1$ ενώ στις λύσεις της εξίσωσης $\sin\frac{1}{x}=-1$ το γράφημα «ακουμπά» την ευθεία $y=-1$. Σε ποια σημεία το γράφημα τέμνει τον x-άξονα; Αποδείξτε, βάσει του Θεωρήματος 3.2, ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to 0\pm}\sin\frac{1}{x}$. (3) Σχεδιάστε τα γραφήματα των $x^2\sin x$, $\sqrt{x}\sin x$, $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$. Αποδείξτε, βάσει του Θεωρήματος 3.2, ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\pm\infty}x^2\sin x$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sin x$ και $\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

14. Αν $a \leq 0$, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0+} x^a \sin\frac{1}{x}$. Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 11.

3.6 Μονότονες συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.3 (1) *Έστω $\xi \in \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, $A \subseteq (-\infty, \xi)$, $f : A \to \mathbf{R}$ και έστω ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι αύξουσα στο A, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι (i) αριθμός, αν η f είναι άνω φραγμένη στο A, και (ii) $+\infty$, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη στο A.*
(2) Με τις υποθέσεις του (1), αν η f είναι φθίνουσα στο A, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι (i) αριθμός, αν η f είναι κάτω φραγμένη στο A, και (ii) $-\infty$, αν η f δεν είναι κάτω φραγμένη στο A.
(3) Έστω $\xi \in \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$, $A \subseteq (\xi, +\infty)$, $f : A \to \mathbf{R}$ και έστω ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι αύξουσα στο A, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι (i) αριθμός, αν η f είναι κάτω φραγμένη στο A, και (ii) $-\infty$, αν η f δεν είναι κάτω φραγμένη στο A.
(4) Με τις υποθέσεις του (3), αν η f είναι φθίνουσα στο A, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι (i) αριθμός, αν η f είναι άνω φραγμένη στο A, και (ii) $+\infty$, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη στο A.

Απόδειξη: (1) (i) Έστω ότι η f είναι άνω φραγμένη στο A. Τότε το μη κενό $\{f(x) : x \in A\}$ είναι άνω φραγμένο, οπότε το $\eta = \sup\{f(x) : x \in A\}$ είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

Έστω $\epsilon > 0$. Ο $\eta - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) : x \in A\}$, οπότε υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $\eta - \epsilon < f(x_0)$. Επειδή η f είναι αύξουσα, για κάθε $x \in (x_0, \xi) \cap A$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0) > \eta - \epsilon$. Επειδή ο η είναι άνω φράγμα του $\{f(x) : x \in A\}$, ισχύει $\eta - \epsilon < f(x) \leq \eta < \eta + \epsilon$ για κάθε $x \in (x_0, \xi) \cap A$. Άρα $|f(x) - \eta| < \epsilon$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.
(ii) Έστω ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη στο A. Τότε το μη κενό $\{f(x) : x \in A\}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup\{f(x) : x \in A\} = +\infty$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.

Έστω $M > 0$. Ο M δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) : x \in A\}$, οπότε υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $f(x_0) > M$. Επειδή η f είναι αύξουσα, για κάθε $x \in (x_0, \xi)\cap A$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0) > M$. Άρα $f(x) > M$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.
(2) − (4) Ομοίως. ♮

Το Θεώρημα 3.3 είναι ιδιαίτερα σημαντικό· τόσο όσο και το αντίστοιχο Θεώρημα 2.1 για μονότονες ακολουθίες. *Μας επιτρέπει να συμπεράνουμε την ύπαρξη ορίου συνάρτησης με μοναδικό δεδομένο τη μονοτονία της.*

Παραδείγματα: (1) Αν $a > 0$, θα αποδείξουμε τα $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$, $\lim_{x\to 0+} x^a = 0$, γνωρίζοντας ότι η x^a είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Η μονοτονία εξασφαλίζει την ύπαρξη των δυο ορίων καθώς και ότι το πρώτο όριο είναι αριθμός ή $+\infty$ και ότι το δεύτερο είναι αριθμός ή $-\infty$.

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $\lim_{x\to+\infty} x^a = \eta$. Συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}(2x)^a = \lim_{y\to+\infty} y^a = \eta$ και, επομένως, $\eta = \lim_{x\to+\infty}(2x)^a = \lim_{x\to+\infty} 2^a x^a = 2^a \lim_{x\to+\infty} x^a = 2^a\eta$. Άρα $\eta = 0$. Άτοπο, διότι $x^a \geq 1^a = 1$ για κάθε $x \geq 1$, οπότε $\eta = \lim_{x\to+\infty} x^a \geq 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.

Επειδή $x^a > 0$ για κάθε $x > 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0+} x^a \geq 0$ και, επομένως, το δεύτερο όριο είναι αριθμός μη αρνητικός: $\lim_{x\to 0+} x^a = \eta \geq 0$. Όπως πριν, $\lim_{x\to 0+}(2x)^a = \lim_{y\to 0+} y^a = \eta$. Άρα $\eta = \lim_{x\to 0+}(2x)^a = \lim_{x\to 0+} 2^a x^a = 2^a\eta$ και, επομένως, $\eta = 0$.

(2) Έστω η $(1+\frac{1}{x})^x$ με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Η συνάρτηση είναι αύξουσα και αυτό αποδεικνύεται με τη βοήθεια του Λήμματος 1.4. Έστω $0 < x_1 < x_2$. Ορίζουμε $x = \frac{x_2}{x_1} > 1$, οπότε $(1+\frac{1}{x_2})^{x_2} = (1+\frac{1}{xx_1})^{xx_1} \geq (1+x\frac{1}{xx_1})^{x_1} = (1+\frac{1}{x_1})^{x_1}$. Επειδή, λοιπόν, η συνάρτηση είναι αύξουσα, το $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $+\infty$. Αν θεωρήσουμε και την ακολουθία (n) τότε, επειδή αυτή αποκλίνει στο $+\infty$, από το Θεώρημα 3.2 συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = e.$$

Ας δούμε μια δεύτερη απόδειξη του ορίου αυτού. Από το $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ εύκολα παίρνουμε τα $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e$ και $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) = e$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0{}' \in \mathbf{N}$ ώστε $e-\epsilon < (1+\frac{1}{n+1})^n < e+\epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0{}'$ και $n_0{}'' \in \mathbf{N}$ ώστε $e-\epsilon < (1+\frac{1}{n})^{n+1} < e+\epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0{}''$. Ορίζουμε τον $N_0 = \max\{n_0{}', n_0{}''\} > 0$, οπότε $N_0 \geq n_0{}'$ και $N_0 \geq n_0{}''$. Άρα ισχύει $e-\epsilon < (1+\frac{1}{n+1})^n < e+\epsilon$ και $e-\epsilon < (1+\frac{1}{n})^{n+1} < e+\epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N_0$. Τότε για κάθε (όχι κατ' ανάγκη φυσικό) $x > N_0$ συνεπάγεται $[x] \geq N_0$, οπότε $e-\epsilon < \big(1+\frac{1}{[x]+1}\big)^{[x]} \leq (1+\frac{1}{x})^x \leq \big(1+\frac{1}{[x]}\big)^{[x]+1} < e+\epsilon$. Άρα έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε $e-\epsilon < (1+\frac{1}{x})^x < e+\epsilon$ ή, ισοδύναμα, $\big|(1+\frac{1}{x})^x - e\big| < \epsilon$ για κάθε $x > N_0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$. Κατόπιν, για κάθε t, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{t}{x})^x = e^t$, διακρίνοντας περιπτώσεις $t > 0$, $t = 0$, $t < 0$.

2. Έστω $a > 1$. (1) Από την $\log_a(ax) = 1 + \log_a x$ και τη μονοτονία της $\log_a$ ξαναβρείτε τα $\lim_{x\to+\infty}\log_a x$, $\lim_{x\to 0}\log_a x$. (2) Από την $a^{x+1} = aa^x$ και τη μονοτονία της $\exp_a$ ξαναβρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty} a^x$.

3. (1) Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbf{R}$ αύξουσα στο $[1,+\infty)$ ώστε $f(\sqrt{n}) \geq \log n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; αν ναι, βρείτε το. (2) Έστω $f : (0,2) \to \mathbf{R}$ φθίνουσα στο $(0,2)$ ώστε $f(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$; αν ναι, βρείτε το.

4. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ αύξουσα στο A και $\xi \in \mathbf{R}$ σημείο συσσώρευσης του $A \cap (-\infty, \xi)$ και του $A \cap (\xi, +\infty)$. (i) Αποδείξτε ότι υπάρχουν τα $\eta = \lim_{x\to\xi-} f(x)$, $\zeta = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, ότι είναι αριθμοί και ότι $\eta \leq \zeta$. (ii) Αποδείξτε ότι οι y με την ιδιότητα $f(x') \leq y \leq f(x'')$ για κάθε $x' \in A\cap(-\infty, \xi)$ και κάθε $x'' \in A\cap(\xi, +\infty)$ είναι ακριβώς τα στοιχεία του διαστήματος $[\eta, \zeta]$.

5. Έστω $\xi \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $A \subseteq (-\infty, \xi)$, $f : A \to \mathbf{R}$ και έστω ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. (i) Αποδείξτε ότι $f(x) < \eta$ για κάθε $x \in A$. Επομένως, το σύνολο τιμών $B = \{f(x) : x \in A\}$ είναι $\subseteq (-\infty, \eta)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ και είναι γνησίως αύξουσα στο B. (ii) Αποδείξτε ότι το η είναι σημείο συσσώρευσης του B. (*Υπόδ.:* Θεώρημα 3.3 και άσκηση 7 της ενότητας 3.1.) (iii) Αποδείξτε ότι $\lim_{y\to\eta} f^{-1}(y) = \xi$.
Προσαρμόστε τα προηγούμενα στην περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A καθώς και στην περίπτωση που είναι $A \subseteq (\xi, +\infty)$, το $\xi \in \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και η f είναι γνησίως μονότονη στο A.

6. $\limsup$, $\liminf$ **και οριακές τιμές συνάρτησης**. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.
(i) Έστω ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή ότι υπάρχει ${\delta_0}' > 0$ ώστε η f να είναι άνω φραγμένη στο ${N_\xi}^*({\delta_0}') \cap A$. Ορίζουμε συνάρτηση $u : (0, {\delta_0}'] \to \mathbf{R}$, $u(\delta) = \sup\{f(x) : x \in {N_\xi}^*(\delta) \cap A\}$ $(0 < \delta \leq {\delta_0}')$. Τότε αποδείξτε ότι η u είναι αύξουσα στο $(0, {\delta_0}']$ και, επομένως, υπάρχει το $\lim_{\delta\to0} u(\delta)$. Ορίζουμε $\limsup_{x\to\xi} f(x) = \lim_{\delta\to0} u(\delta)$.
Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή για κάθε $\delta > 0$ είναι $\sup\{f(x) : x \in {N_\xi}^*(\delta) \cap A\} = +\infty$. Τότε ορίζουμε $\limsup_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.
(ii) Έστω ότι η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή υπάρχει ${\delta_0}'' > 0$ ώστε η f να είναι κάτω φραγμένη στο ${N_\xi}^*({\delta_0}'') \cap A$. Ορίζουμε συνάρτηση $l : (0, {\delta_0}''] \to \mathbf{R}$, $l(\delta) = \inf\{f(x) : x \in {N_\xi}^*(\delta)\cap A\}$ $(0 < \delta \leq {\delta_0}'')$. Αποδείξτε ότι η l είναι φθίνουσα στο $(0, {\delta_0}'']$ και, επομένως, υπάρχει το $\lim_{\delta\to0} l(\delta)$. Ορίζουμε $\liminf_{x\to\xi} f(x) = \lim_{\delta\to0} l(\delta)$.
Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή για κάθε $\delta > 0$ είναι $\inf\{f(x) : x \in {N_\xi}^*(\delta) \cap A\} = -\infty$. Τότε ορίζουμε $\liminf_{x\to\xi} f(x) = -\infty$.
(iii) Αποδείξτε ότι $\limsup_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ. Επίσης, ότι $\limsup_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$.
Αποδείξτε ότι $\liminf_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν δεν ισχύει ότι η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ. Επίσης, ότι $\liminf_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.
Αποδείξτε ότι $\liminf_{x\to\xi} f(x) \leq \limsup_{x\to\xi} f(x)$.
(iv) Αποδείξτε ότι για κάθε $y > \limsup_{x\to\xi} f(x)$ ισχύει $f(x) < y$ κοντά στο ξ. Επίσης, ότι για κάθε $y < \limsup_{x\to\xi} f(x)$ ισχύει $f(x) > y$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

Αποδείξτε ότι για κάθε $y < \liminf_{x\to\xi} f(x)$ ισχύει $f(x) > y$ κοντά στο ξ. Επίσης, ότι για κάθε $y > \liminf_{x\to\xi} f(x)$ ισχύει $f(x) < y$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.
(v) Αποδείξτε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ αν και μόνο αν $\liminf_{x\to\xi} f(x) = \limsup_{x\to\xi} f(x)$. Σ' αυτήν την περίπτωση, $\lim_{x\to\xi} f(x) = \liminf_{x\to\xi} f(x) = \limsup_{x\to\xi} f(x)$.
(vi) Το $\eta \in \overline{\mathbf{R}}$ χαρακτηρίζεται **οριακή τιμή** της f στο ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.
Αποδείξτε ότι το η είναι οριακή τιμή της f στο ξ αν και μόνο αν υπάρχει (x_n) στο A ώστε $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$ και $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \eta$.
Αποδείξτε ότι το $\limsup_{x\to\xi} f(x)$ είναι η μέγιστη και το $\liminf_{x\to\xi} f(x)$ η ελάχιστη οριακή τιμή της f στο ξ.

3.7 Το κριτήριο του Cauchy.

Θεώρημα 3.4 ***Κριτήριο του Cauchy.*** *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Τότε το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι αριθμός αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A$.*

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \mathbf{R}$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - \eta| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x \in N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A$. Άρα για κάθε $x', x'' \in N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A$:

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - \eta| + |f(x'') - \eta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A$.

Έστω (x_n) στο A ώστε: (i) ισχύει τελικά $x_n \neq \xi$ και (ii) $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε τον αντίστοιχο δ_0. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_n \in N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$ ισχύει $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$. Άρα η $\big(f(x_n)\big)$ είναι ακολουθία Cauchy, οπότε συγκλίνει.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \in \mathbf{R}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. $\natural$

Η χρησιμότητα του Θεωρήματος 3.4, όπως και του ανάλογου Θεωρήματος 2.3, είναι ότι *δίνει έναν τρόπο απόδειξης της σύγκλισης μιας συνάρτησης όταν δε γνωρίζουμε εκ των προτέρων την τιμή του υποψήφιου ορίου της.* Αντί να μελετήσουμε τις αποστάσεις $|f(x) - \eta|$ των τιμών της f από τον άγνωστο η, μελετάμε τις αποστάσεις $|f(x') - f(x'')|$ μεταξύ των τιμών της f.

Ασκήσεις.

1. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, ξ σημείο συσσώρευσης του A και $\delta_0 > 0$, $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in A$, $0 < |x' - \xi| < \delta_0$, $0 < |x'' - \xi| < \delta_0$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός.

2. Αποδείξτε ότι το κριτήριο του Cauchy για ακολουθίες (Θεώρημα 2.3) είναι ειδική περίπτωση του κριτηρίου του Cauchy για συναρτήσεις. Παρατηρήστε, επομένως, ότι τα δυο κριτήρια είναι ισοδύναμα.

3. **Ταλάντωση συνάρτησης**. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.
(i) Έστω ότι η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $N_\xi{}^*(\delta_0) \cap A$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$ είναι $0 \leq \sup\{f(x') - f(x'') : x', x'' \in N_\xi{}^*(\delta) \cap A\} < +\infty$. Ορίζουμε συνάρτηση $\omega : (0, \delta_0] \to \mathbf{R}_0^+$, $\omega(\delta) = \sup\{f(x') - f(x'') : x', x'' \in N_\xi{}^*(\delta) \cap A\}$ $(0 < \delta \leq \delta_0)$. Αποδείξτε ότι η ω είναι αύξουσα στο $(0, \delta_0]$ και, επομένως, υπάρχει το $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)$ και είναι αριθμός ≥ 0. Ορίζουμε $\omega(f; \xi) = \lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)$.
Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι για κάθε $\delta > 0$ είναι $\sup\{f(x') - f(x'') : x', x'' \in N_\xi{}^*(\delta) \cap A\} = +\infty$. Τότε ορίζουμε $\omega(f; \xi) = +\infty$.
Σε κάθε περίπτωση, το $\omega(f; \xi)$ ονομάζεται **ταλάντωση** της f στο ξ.
(ii) Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \to \xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός αν και μόνο αν $\omega(f; \xi) = 0$.

Κεφάλαιο 4

Συνεχείς συναρτήσεις.

4.1 Συνεχείς συναρτήσεις.

Α. Ορισμοί.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$. Η f χαρακτηρίζεται **συνεχής στον** ξ αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta_0 > 0$ *ώστε* $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ *για κάθε* $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Με το συμβολισμό των περιοχών, ο ορισμός αυτός διατυπώνεται, ισοδύναμα, ως εξής: *η f είναι συνεχής στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $f(x) \in N_{f(\xi)}(\epsilon)$ για κάθε $x \in N_\xi(\delta_0) \cap A$.*

Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Η πρώτη είναι όταν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Προφανώς, συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Επομένως, $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Παρατηρούμε ότι, αν $x = \xi$, τότε $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$. Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Άρα η f είναι συνεχής στον ξ.

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A ή, με άλλα λόγια, είναι **μεμονωμένο σημείο** του A (δείτε την άσκηση 9 της ενότητας 3.1). Έστω, δηλαδή ότι υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $N_\xi(\delta_0) \cap A = \{\xi\}$ ή, ισοδύναμα, ώστε ο ξ να είναι το μοναδικό σημείο του A στο διάστημα $(\xi - \delta_0, \xi + \delta_0)$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ θεωρούμε τον συγκεκριμένο δ_0 και, προφανώς, για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$, (δηλαδή, για $x = \xi$) ισχύει $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στον ξ.

Συνοψίζουμε: *αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi).$$

Αν ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι, αυτομάτως, συνεχής *στον* ξ.

Πρέπει να τονιστεί ότι για να είναι συνεχής η f στον ξ *προϋποτίθεται* ότι ο ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή ότι ορίζεται ο $f(\xi)$.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ και έστω ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $B = A \cap (-\infty, \xi)$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο B, δηλαδή την $g : B \to \mathbf{R}$ με τύπο $g(x) = f(x)$ $(x \in B)$. Λέμε ότι η f είναι **αριστερά συνεχής στον** ξ αν η g είναι συνεχής στον ξ. Αυτό, όπως είδαμε, ισοδυναμεί με $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$, δηλαδή με $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi)$. Ομοίως, έστω ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $C = A \cap (\xi, +\infty)$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο C, δηλαδή την $h : C \to \mathbf{R}$ με τύπο $h(x) = f(x)$ $(x \in C)$. Λέμε ότι η f είναι **δεξιά συνεχής στον** ξ αν η h είναι συνεχής στον ξ. Αυτό ισοδυναμεί με $\lim_{x\to\xi} h(x) = h(\xi)$, δηλαδή με $\lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi)$. Από τις Προτάσεις 3.2, 3.3 προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα. *(i) Αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $A \cap (-\infty, \xi)$ και του $A \cap (\xi, +\infty)$, η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι αριστερά και δεξιά συνεχής στον ξ. (ii) Αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $A \cap (-\infty, \xi)$ αλλά όχι του $A \cap (\xi, +\infty)$, η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι αριστερά συνεχής στον ξ. (iii) Αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $A \cap (\xi, +\infty)$ αλλά όχι του $A \cap (-\infty, \xi)$, η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι δεξιά συνεχής στον ξ.*

Παραδείγματα: (1) Η x^2 είναι συνεχής στον 3, διότι $\lim_{x\to 3} x^2 = 9 = 3^2$.

(2) Η $\sqrt{x}$ είναι συνεχής στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$.

(3) Έστω η συνάρτηση $[x]$. Είναι $\lim_{x\to 1-}[x] = \lim_{x\to 1-} 0 = 0 \neq [1]$ και $\lim_{x\to 1+}[x] = \lim_{x\to 1+} 1 = 1 = [1]$. Άρα η $[x]$ είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον 1, οπότε δεν είναι συνεχής στον 1. Ακόμη, $\lim_{x\to\frac{1}{2}}[x] = \lim_{x\to\frac{1}{2}} 0 = 0 = [\frac{1}{2}]$. Άρα η $[x]$ είναι συνεχής στον $\frac{1}{2}$.

(4) Η συνάρτηση $\sqrt{-x^2(x+1)}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup \{0\}$. Ο 0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, οπότε η συνάρτηση είναι συνεχής στον 0.

(5) Η σταθερή συνάρτηση c είναι συνεχής σε κάθε ξ. Πράγματι, $\lim_{x\to\xi} c = c$.

Η $f : A \to \mathbf{R}$ χαρακτηρίζεται **συνεχής στο** A ή, απλώς, **συνεχής** αν είναι συνεχής σε *κάθε* $\xi \in A$.

Παραδείγματα: (1) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x)$ είναι συνεχής, αφού, για κάθε ξ, είναι $\lim_{x\to\xi} p(x) = p(\xi)$.

(2) Κάθε ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε ξ ο οποίος δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $q(x)$, είναι $\lim_{x\to\xi} r(x) = r(\xi)$.

(3) Οι $\cos, \sin$ είναι συνεχείς, διότι $\lim_{x\to\xi} \cos x = \cos\xi$, $\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin\xi$ για κάθε ξ. Ομοίως, οι $\tan$, $\cot$ είναι συνεχείς· για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού τους ισχύει $\lim_{x\to\xi} \tan x = \tan\xi$ και $\lim_{x\to\xi} \cot x = \cot\xi$.

(4) Η p_a είναι συνεχής· για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της ισχύει $\lim_{x\to\xi} x^a = \xi^a$.

(5) Αν $a > 0$, η $\exp_a$ είναι συνεχής, αφού είναι $\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi$ για κάθε ξ.

(6) Για κάθε $a>0$, $a\neq 1$, η $\log_a$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε $\xi>0$ είναι $\lim_{x\to\xi}\log_a x=\log_a\xi$.

Έστω $f:A\to\mathbf{R}$ και $B\subseteq A$. Η f χαρακτηρίζεται **συνεχής στο** B αν ο περιορισμός της f στο B, δηλαδή η $g:B\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)$ είναι συνεχής στο B.

Παράδειγμα: Έστω η $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 1,\\ 0, & x<0 \text{ ή } x>1.\end{cases}$ Η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ αφού δεν είναι συνεχής στους $0,1$. Πράγματι: $\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}0=0\neq 1=f(0)$ και $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}1=1=f(0)$. Δηλαδή η f είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον 0. Ομοίως, η f είναι αριστερά συνεχής αλλά όχι δεξιά συνεχής στον 1.

Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $[0,1]$, δηλαδή την σταθερή συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $g(x)=1$. Είναι σαφές ότι η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Άρα η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Β. Είδη ασυνεχειών.

Έστω $f:A\to\mathbf{R}$, $\xi\in A$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο συνέχειας** της f. Αν η f δεν είναι συνεχής στον ξ, λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο ασυνέχειας** της f ή ότι η f **έχει (ή παρουσιάζει) ασυνέχεια** στον ξ. Στην περίπτωση που ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A θα κατατάξουμε τα σημεία ασυνέχειας της f σε διάφορες κατηγορίες.

Άρσιμη ασυνέχεια. Έστω $\lim_{x\to\xi}f(x)\in\mathbf{R}$ και $\lim_{x\to\xi}f(x)\neq f(\xi)$. Τότε λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο άρσιμης ασυνέχειας** της f ή ότι η f παρουσιάζει **άρσιμη ασυνέχεια** στον ξ. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή της f στον ξ (και μόνο στον ξ) έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια νέα συνάρτηση *συνεχής* στον ξ. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε την $g:A\to\mathbf{R}$ με τύπο

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A,\ x\neq\xi,\\ \lim_{x\to\xi}f(x), & x=\xi.\end{cases}$$

Η g έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με την f και διαφέρει από την f μόνο στον ξ. Επειδή $g(x)=f(x)$ για κάθε $x\in A$, $x\neq\xi$, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi}g(x)=\lim_{x\to\xi}f(x)$. Επομένως, επειδή $g(\xi)=\lim_{x\to\xi}f(x)$, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi}g(x)=g(\xi)$, οπότε η g είναι συνεχής στον ξ.

Παραδείγματα: (1) Η $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια στον 0, διότι $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(x+1)=1\neq 0=f(0)$. Αν μετατρέψουμε την f στην $g(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ τότε η g είναι συνεχής στον 0. Παρατηρήστε ότι η g ταυτίζεται με τη συνάρτηση $x+1$.

(2) Για την $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x>0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ είναι $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0\neq 1=f(0)$. Άρα η f παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια στον 0. Η $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

είναι συνεχής στον 0 και ταυτίζεται με τη συνάρτηση $\sqrt{x}$.

Ασυνέχεια πρώτου είδους. Έστω (i) $\lim_{x\to\xi} f(x) = \pm\infty$ ή (ii) $\lim_{x\to\xi+} f(x) \neq \lim_{x\to\xi-} f(x)$. Τότε λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους** της f ή ότι η f παρουσιάζει **ασυνέχεια πρώτου είδους** στον ξ. Στην υποπερίπτωση (ii) η διαφορά $\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x) (\neq 0)$ ονομάζεται **πήδημα** της f στον ξ.

Παραδείγματα: (1) Η $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ έχει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Το ίδιο ισχύει για την $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}}, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(2) Η $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$. Το πήδημα στον 0 είναι $= +\infty - (-\infty) = +\infty$.

(3) Η $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ x, & x < 0, \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$. Το πήδημα στον 0 είναι $= 1 - 0 = 1$. Η f είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον 0.

Ουσιώδης ασυνέχεια. Σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή όταν δεν υπάρχει ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$, $\lim_{x\to\xi-} f(x)$, λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο ασυνέχειας δεύτερου είδους** ή **σημείο ουσιώδους ασυνέχειας** της f ή ότι η f παρουσιάζει **ασυνέχεια δεύτερου είδους** ή **ουσιώδη ασυνέχεια** στον ξ.

Παραδείγματα: (1) Η $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι το $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to+\infty} \sin t$ δεν υπάρχει. Επειδή $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x = 0 = f(0)$, η f είναι αριστερά συνεχής στον 0.

(2) Η $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι δεν υπάρχει κανένα από τα πλευρικά όρια στον 0.

Είναι φανερό ότι, αν ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου ή δεύτερου είδους της f, τότε ο ξ δε μπορεί να μετατραπεί σε σημείο συνέχειας με απλή αλλαγή της τιμής $f(\xi)$. Αυτό γίνεται μόνο στην περίπτωση που ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας.

Έστω, πάλι, $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$. Αξίζει να δούμε πιο προσεκτικά την περίπτωση που ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $A \cap (-\infty, \xi)$ και του $A \cap (\xi, +\infty)$ και η f είναι *αύξουσα* στο A. Τότε η f είναι αύξουσα στο $A \cap (-\infty, \xi)$ και άνω φραγμένη στο σύνολο αυτό, αφού ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A \cap (-\infty, \xi)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και είναι αριθμός και, μάλιστα, $\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi)$. Ομοίως, η f είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη στο $A \cap (\xi, +\infty)$, αφού ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in A \cap (\xi, +\infty)$. Άρα υπάρχει το

$\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και είναι αριθμός και $\lim_{x\to\xi+} f(x) \geq f(\xi)$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi-} f(x)$, $\lim_{x\to\xi+} f(x)$, ότι είναι αριθμοί και $\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim_{x\to\xi+} f(x)$. Τώρα διακρίνουμε ακριβώς δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, οπότε $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$ και, επομένως, η f είναι συνεχής στον ξ. Στη δεύτερη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) < \lim_{x\to\xi+} f(x)$, οπότε η f παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον ξ με *θετικό* πήδημα $\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x) > 0$.

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει όταν η f είναι φθίνουσα στο A· απλώς, τότε όλες οι προηγούμενες ανισότητες αλλάζουν φορά και βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to\xi-} f(x) \geq f(\xi) \geq \lim_{x\to\xi+} f(x)$.

Συνοψίζουμε. *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του $A\cap(-\infty,\xi)$ και του $A\cap(\xi,+\infty)$. Αν η f είναι μονότονη στο A, τότε η f είτε (i) είναι συνεχής στον ξ είτε (ii) παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον ξ με θετικό πήδημα, αν είναι αύξουσα, και αρνητικό πήδημα, αν είναι φθίνουσα.*

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε με τον ορισμό ότι οι x, $2x-3$, x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ είναι συνεχείς στον 1.

2. Είναι οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ συνεχείς στον 0;

3. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{|x|}, & x \neq 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0, \\ \sqrt{x+1}, & x \geq 0. \end{cases}$ Ποιες από αυτές είναι συνεχείς ή δεξιά συνεχείς ή αριστερά συνεχείς στον 0;

4. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $[x]$, $x-[x]$, $x-[x]-\frac{1}{2}$, $\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|$. Σε ποια σημεία είναι συνεχείς ή δεξιά συνεχείς ή αριστερά συνεχείς; Σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

5. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ και $\delta_0 > 0$, $M \geq 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$, $|x-\xi| < \delta_0$. Έστω $g : A \to \mathbf{R}$, $g(x) = (x-\xi)f(x)$. Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής στον ξ.

6. (1) Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ και $\delta_0 > 0$, $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε $|f(x)-f(\xi)| \leq M|x-\xi|^\rho$ για κάθε $x \in A$, $|x-\xi| < \delta_0$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Αν η f ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις, τότε χαρακτηρίζεται **Hölder συνεχής** στον ξ με **εκθέτη Hölder** ρ. Στην ειδική περίπτωση $\rho = 1$, η f χαρακτηρίζεται **Lipschitz συνεχής** στον ξ. (2) Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x, $|x|$, $\sqrt{|x|}$, $x\sqrt{|x|}$ είναι Hölder συνεχείς στον 0 και βρείτε τους αντίστοιχους εκθέτες Hölder. Αποδείξτε ότι οι ίδιες συναρτήσεις είναι Hölder συνεχείς σε κάθε $\xi \neq 0$ και βρείτε τους αντίστοιχους εκθέτες Hölder. Παρατηρήστε ότι για τις δυο τελευταίες συναρτήσεις είναι άλλος ο εκθέτης Hölder για τον $\xi = 0$ και άλλος για τον οποιονδήποτε $\xi \neq 0$.

7. (i) Έστω μη κενό σύνολο B και $f_B : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_B(x) = \inf\{|x-b| : b \in B\}$. Αποδείξτε ότι $|f_B(x) - f_B(y)| \le |x-y|$ για κάθε x, y. (*Υπόδ.:* $f_B(x) - |x-y| \le |x-b| - |x-y| \le |y-b|$ για κάθε $b \in B$. Άρα $f_B(x) - |x-y| \le f_B(y)$.) Κατόπιν, αποδείξτε ότι η f_B είναι συνεχής. (ii) Σχεδιάστε το γράφημα της f_B στις περιπτώσεις $B = \{a\}$, $B = [a,b]$, $B = (a, +\infty)$, $B = [a,b] \cup [c,d]$.

8. Αποδείξτε: (1) η $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Z}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}, \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbf{Z}$, συνεχής σε κάθε $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, (2) η $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε x, (3) η $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 1$, συνεχής στον 1, (4) η $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}\,(m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, \gcd(m,n) = 1), \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbf{Q}$, συνεχής σε κάθε $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

9. Έστω, για κάθε $n \in \mathbf{N}$, ένα πεπερασμένο σύνολο A_n ώστε $A_m \cap A_n = \emptyset$ για κάθε $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq n$. Ορίζουμε την $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in A_n\,(n \in \mathbf{N}), \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbf{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ και ασυνεχής σε κάθε $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

10. Συνήθως, λέμε ότι το να είναι μια συνάρτηση f συνεχής στον ξ σημαίνει ότι το γράφημά της *«δεν διακόπτεται» στο σημείο* $(\xi, f(\xi))$ *ή, με άλλα λόγια, είναι «συνεχές» στο σημείο αυτό.* Αυτή η διατύπωση είναι ασαφής και όχι τόσο απλή όσο φαίνεται. Δείτε το εξής παράδειγμα.
Έστω η $f(x) = \begin{cases} x(-1)^{[\frac{1}{x}]}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Σχεδιάστε το γράφημα της $f(x)$, θεωρώντας τα διαστήματα $(1, +\infty)$ και $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ $(n \in \mathbf{N})$ και τα συμμετρικά τους ως προς τον 0. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον 0 και ασυνεχής σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0.

11. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x > 0, \\ 1, & x \le 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Χαρακτηρίστε το είδος ασυνέχειας που παρουσιάζουν στον 0. Σε περίπτωση άρσιμης ασυνέχειας αλλάξτε την τιμή της f στον 0 ώστε να γίνει συνεχής στον 0. Σε περίπτωση πηδήματος υπολογίστε το.

12. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $A \subseteq (-\infty, \xi]$ ή $A \subseteq [\xi, +\infty)$. Αν η f είναι μονότονη στο A, αποδείξτε ότι είτε είναι συνεχής στον ξ είτε παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια στον ξ.

13. Έστω $A \subseteq B$, $\xi \in A$, $g : B \to \mathbf{R}$ και έστω ότι η $f : A \to \mathbf{R}$ είναι ο περιορισμός της g στο A. Αποδείξτε ότι, αν η g είναι συνεχής στον ξ, τότε και η f είναι συνεχής στον ξ.

14. (Συνέχεια της άσκησης 6 της ενότητας 3.6.) Έστω $\xi \in A$, $f : A \to \mathbf{R}$. (1) Η f χαρακτηρίζεται **άνω ημισυνεχής** στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $f(x) < f(\xi) + \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Αποδείξτε ότι (i) αν ο ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι άνω ημισυνεχής στον ξ, (ii) αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι άνω ημισυνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\limsup_{x\to\xi} f(x) \leq f(\xi)$. (2) Η f χαρακτηρίζεται **κάτω ημισυνεχής** στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $f(x) > f(\xi) - \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Αποδείξτε ότι (i) αν ο ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι κάτω ημισυνεχής στον ξ, (ii) αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι κάτω ημισυνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\liminf_{x\to\xi} f(x) \geq f(\xi)$. (3) Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ είναι κάτω ημισυνεχής στον 0, ενώ η $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$ είναι άνω ημισυνεχής στον 0. (4) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι κάτω και άνω ημισυνεχής στον ξ.

4.2 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων.

Πρόταση 4.1 *Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $f(\xi) = g(\xi)$ και ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ. Αν η μια από τις f, g είναι συνεχής στον ξ, το ίδιο ισχύει και για την άλλη.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Επειδή οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ, είναι $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x)$, οπότε $\lim_{x\to\xi} g(x) = f(\xi) = g(\xi)$. Άρα η g είναι συνεχής στον ξ. $\natural$

Παράδειγμα: Η $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & |x - 1| \geq \frac{1}{2}, \\ \log x, & |x - 1| < \frac{1}{2}, \end{cases}$ και η $\log$ ταυτίζονται στο διάστημα $(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2})$. Η $\log$ είναι συνεχής στον 1, οπότε και η f είναι συνεχής στον 1.

Πρόταση 4.2 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και η f είναι συνεχής στον ξ.*
(1) Αν $f(\xi) > u$, τότε $f(x) > u$ κοντά στον ξ.
(2) Αν $f(\xi) < l$, τότε $f(x) < l$ κοντά στον ξ.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 3.5 και $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. $\natural$

Παράδειγμα: Η $\frac{x^8+x^3+1}{x^5+3x^4-x^2+1}$ είναι συνεχής στον 1 και $\frac{1^8+1^3+1}{1^5+3\cdot 1^4-1^2+1} = \frac{3}{4}$. Άρα υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $\frac{3}{5} < \frac{x^8+x^3+1}{x^5+3x^4-x^2+1} < \frac{7}{8}$ για κάθε $x \in (1 - \delta_0, 1 + \delta_0)$.

Πρόταση 4.3 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A.*
(1) Αν η f είναι συνεχής στον ξ και $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε $f(\xi) \geq l$.
(2) Αν η f είναι συνεχής στον ξ και $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε $f(\xi) \leq u$.
(3) Αν $u < l$ και $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ και $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε η f είναι ασυνεχής στον ξ.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 3.6 και $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. $\natural$

Πρόταση 4.4 *Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, g είναι συνεχείς στον ξ και $f(x) \leq g(x)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, τότε $f(\xi) \leq g(\xi)$.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 3.8 και $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$. $\natural$

Παράδειγμα: Έστω $f : [0, \frac{\pi}{4}) \to \mathbf{R}$ συνεχής στον 0 και $f(x) \leq \sin x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Τότε $f(0) \leq \sin 0 = 0$.

Πρόταση 4.5 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε είναι φραγμένη κοντά στον ξ.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 3.11 και $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. $\natural$

Παράδειγμα: Η $\frac{1}{x(x-1)}$ είναι συνεχής στον $\frac{1}{2}$. Άρα η συνάρτηση είναι φραγμένη κοντά στον $\frac{1}{2}$, παρά το ότι δεν είναι φραγμένη στο πεδίο ορισμού της ούτε καν στο διάστημα $(0, 1)$.

Πρόταση 4.6 ***Αλγεβρικοί κανόνες.*** *Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ και οι f, g είναι συνεχείς στον ξ. Τότε και οι $f + g, f - g, fg, |f| : A \to \mathbf{R}$ είναι συνεχείς στον ξ. Αν, επιπλέον, $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη: Αν ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στον ξ. Αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε από την Πρόταση 3.14 και $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$ συνεπάγεται ότι η $f + g$ είναι συνεχής στον ξ. Η απόδειξη είναι ίδια για τις περιπτώσεις των $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$, $|f|$. $\natural$

Παράδειγμα: Οι $\frac{\sqrt{x}+e^x}{(x-2x^2)\log x}$ και $\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sin x+\cos x}$ είναι συνεχείς.

Πρόταση 4.7 ***Κανόνας σύνθεσης, I.*** *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ και η g είναι συνεχής στον $\eta = f(\xi)$, τότε η $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η g είναι συνεχής στον η, υπάρχει ${\delta_0}' > 0$ ώστε $|g(y) - g(\eta)| < \epsilon$ για κάθε $y \in B$, $|y - \eta| < {\delta_0}'$. Επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - \eta| = |f(x) - f(\xi)| < {\delta_0}'$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Τώρα, για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$ συνεπάγεται $|f(x) - \eta| < {\delta_0}'$

και, επειδή $f(x) \in B$, συνεπάγεται $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)| = \big|g\big(f(x)\big) - g(\eta)\big| < \epsilon$. Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στον ξ. $\natural$

Παράδειγμα: Οι $\sin\sqrt{x}$, $\sqrt{\sin x}$ είναι συνεχείς.

Ένα θέμα παρεμφερές με την Πρόταση 4.7 αλλά και – ίσως πιο πολύ – με την Πρόταση 3.22 είναι ο υπολογισμός του ορίου της σύνθεσης $g \circ f$ στην περίπτωση που το $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι *αριθμός* και η g είναι *συνεχής* στον η.

Πρόταση 4.8 *Κανόνας σύνθεσης, ΙΙ.* *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbf{R}$, ξ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in B$ και η g είναι συνεχής στον η, τότε*
$$\lim_{x\to\xi}(g \circ f)(x) = g(\eta).$$

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η g είναι συνεχής στον η, υπάρχει ${\delta_0}' > 0$ ώστε $|g(y) - g(\eta)| < \epsilon$ για κάθε $y \in B$, $|y - \eta| < {\delta_0}'$. Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - \eta| < {\delta_0}'$ για κάθε $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Τώρα, για κάθε $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$ συνεπάγεται $|f(x) - \eta| < {\delta_0}'$ και, επειδή $f(x) \in B$, συνεπάγεται $|(g\circ f)(x) - g(\eta)| = \big|g\big(f(x)\big) - g(\eta)\big| < \epsilon$. Άρα $|(g\circ f)(x) - g(\eta)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi}(g \circ f)(x) = g(\eta)$. $\natural$

Όταν εφαρμόζουμε τον κανόνα σύνθεσης, συχνά χρησιμοποιούμε την έκφραση «κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = f(x)$» και γράφουμε
$$\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to\eta} g(y) = g(\eta).$$

Παραδείγματα: (1) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8 + (\sqrt{x}+1)^{12} + 5}$.

Είναι $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x} + 1) = 1$ και η $\frac{y^4}{y^8+y^{12}+5}$ είναι συνεχής στον 1. Επομένως, $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{12}+5} = \frac{1^4}{1^8+1^{12}+5} = \frac{1}{7}$.

(2) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}} + \left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2 + \frac{x-1}{x^2+x+1} + 1}{3\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^4 + 2\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}} + 1}$.

Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+x+1} = 0$ και η $\frac{\sqrt{y}+y^2+y+1}{3y^4+2\sqrt{y}+1}$ είναι συνεχής στον 0. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}} + \left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2 + \frac{x-1}{x^2+x+1} + 1}{3\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^4 + 2\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}} + 1} = \frac{\sqrt{0}+0^2+0+1}{3\cdot 0^4+2\sqrt{0}+1} = 1$.

(3) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{\sin x}{x})^3 + \frac{\sin x}{x}\big)$.

Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ και η $y^3 + y$ είναι συνεχής στον 0 και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{\sin x}{x})^3 + \frac{\sin x}{x}\big) = 0^3 + 0 = 0$.

Υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις Προτάσεις 3.22 και 4.8. (*i*) Στην Πρόταση 3.22 το όριο της f δε χρειάζεται να είναι αριθμός ενώ στην Πρόταση 4.8 το όριο της f πρέπει να είναι αριθμός. Άρα η Πρόταση 4.8 δεν εφαρμόζεται στο δεύτερο παράδειγμα μετά την Πρόταση 3.22. (*ii*) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, μια από τις υποθέσεις της Πρότασης 3.22 είναι ότι ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στον ξ. Στην Πρόταση

4.8 υπάρχει η υπόθεση ότι η g είναι συνεχής στον η. Άρα η Πρόταση 4.8 δεν εφαρμόζεται στο τρίτο παράδειγμα μετά την Πρόταση 3.22 και η Πρόταση 3.22 δεν εφαρμόζεται στο τρίτο παράδειγμα μετά την Πρόταση 4.8 (διότι δεν υπάρχει κανένας N_0 ώστε $\frac{\sin x}{x} \neq 0$ για κάθε $x > N_0$).

Ασκήσεις.

1. Έστω οι $\frac{x^2 \log x + xe^x}{(\sin x - \cos x)^2}$, $x^{-\frac{3}{4}} (\log x)^2 \frac{\tan x - \cot x}{(\sin x)^2 - 2\sin x + 1}$. Βρείτε τα σημεία συνέχειάς τους.

2. Βρείτε, με τον κανόνα σύνθεσης, τα σημεία συνέχειας των $\log(x^2+2)$, $\sqrt{[x]}$, $\frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$, $\sin(\log x)$, $\sqrt{1-\cos x}$, $e^{\frac{1}{\sin x}}$, $(x^2 - 5x + 6)^{\sqrt{2}}$, $\log(x^2 - 5x + 6)$, $\log(\sin x)$, $\log(1 - \cos x)$.

3. (1) Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ συνεχείς στον $\xi \in A$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι η $f^g : A \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στον ξ. (2) Αποδείξτε ότι οι x^x , $(x^2 - 3)^{\frac{x-2}{x+2}}$, $(\log x)^{\log x}$ είναι συνεχείς. Ποια είναι τα πεδία ορισμού τους;

4. Βρείτε με τον κανόνα σύνθεσης τα: $\lim_{x\to+\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\lim_{x\to-\infty} \cos \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to1} e^{(x-1)\sin\frac{1}{x-1}}$. Σε ποια από αυτά εφαρμόζεται η Πρόταση 3.22;

5. Αποδείξτε ότι: (i) υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε $x \in [0, \delta_0)$ να ισχύει $\frac{1}{2} < \frac{\log(1+x) + \cos\sqrt{x}}{e^x + \sin\sqrt{x}} < \frac{3}{2}$, (ii) υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε $x \in (1 - \delta_0, 1 + \delta_0)$ να ισχύει $\frac{1}{2} < \frac{x^8 - x^5 + 3}{4x^4 - 1} < \frac{3}{2}$ και $\frac{1}{6} < \frac{e^x - 2^x}{7x - 3} < \frac{1}{4}$.

6. Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ συνεχείς στον $\xi \in A$. Αποδείξτε ότι η $h = \max\{f, g\} : A \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στον ξ.

4.3 Συνεχείς συναρτήσεις και ακολουθίες.

Θεώρημα 4.1 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$. Η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν για κάθε (x_n) στο A, με την ιδιότητα $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - \xi| < \delta_0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $|f(x_n) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A, με την ιδιότητα $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η f δεν είναι συνεχής στον ξ. Τότε υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A$, $|x - \xi| < \delta$, ώστε $|f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon_0$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in A$, $|x_n - \xi| < \frac{1}{n}$ ώστε $|f(x_n) - f(\xi)| \geq \epsilon_0$. Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$ για την οποία, όμως, δεν ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$. Άτοπο. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Αν $p(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση και $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} p(x_n) = p(\xi)$.

(2) Αν η $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, αν $q(\xi) \neq 0$ και $q(x_n) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} r(x_n) = r(\xi)$.

(3) Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \cos x_n = \cos\xi$, $\lim_{n\to+\infty} \sin x_n = \sin\xi$.

(4) Αν ο ξ και όλοι οι όροι της (x_n) είναι θετικοί και αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} {x_n}^a = \xi^a$.

(5) Αν $a > 0$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} a^{x_n} = a^\xi$.
Ειδικότερα, με $x_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, ξαναβρίσκουμε το $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(6) Αν ο ξ και όλοι οι όροι της (x_n) είναι θετικοί και αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \log_a x_n = \log_a \xi$.

Οι σχέσεις $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$ συνδυάζονται στην:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big).$$

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η «εναλλαγή» των συμβόλων $\lim_{n\to+\infty}$ και f ισχύει με την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στον ξ, δηλαδή στο όριο της (x_n).

Το Θεώρημα 4.1 σχετίζεται με το Θεώρημα 3.2. Παρατηρήστε ότι, ενώ στο Θεώρημα 4.1 δε χρειάζεται να υποθέσουμε τίποτα για τους όρους της ακολουθίας (πέρα από το ότι ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης), στο Θεώρημα 3.2 πρέπει να υποθέσουμε, επιπλέον, ότι όλοι οι όροι της είναι $\neq \xi$.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}$.

Επειδή $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{n} = 0$ και η sin είναι συνεχής στον 0, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} = \sin\big(\lim_{n\to+\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\big) = \sin 0 = 0$. Δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.2, διότι ισχύει $\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} = 0$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$.

Απόδειξη της Πρότασης 2.19: Ορίζουμε $z_n = {x_n}^{y_n}$ και έστω $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Υποθέτουμε ότι $0 < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ και θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} z_n = x^y$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1, είναι $\lim_{n\to+\infty} \log x_n = \log x$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} \log z_n = \lim_{n\to+\infty} y_n \log x_n = y \log x$. Πάλι από το Θεώρημα 4.1, $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\log z_n} = e^{\lim_{n\to+\infty} \log z_n} = e^{y\log x} = x^y$.

Για τις περιπτώσεις που απομένουν εφαρμόζουμε τα Θεωρήματα 3.2 και 4.1.

Αν $0 < x < 1$, $y = -\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \log x_n = \log x$, $\lim_{n\to+\infty} \log z_n = \lim_{n\to+\infty} y_n \log x_n = +\infty$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\log z_n} = +\infty = x^y$.

Αν $0 < x < 1$, $y = +\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \log x_n = \log x$, $\lim_{n\to+\infty} \log z_n = \lim_{n\to+\infty} y_n \log x_n = -\infty$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\log z_n} = 0 = x^y$.

Αν $x > 1$, $y = -\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \log x_n = \log x$, $\lim_{n\to+\infty} \log z_n = \lim_{n\to+\infty} y_n \log x_n = -\infty$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\log z_n} = 0 = x^y$.

Αν $x > 1$, $y = +\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \log x_n = \log x$, $\lim_{n\to+\infty} \log z_n = \lim_{n\to+\infty} y_n \log x_n = +\infty$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\log z_n} = +\infty = x^y$.

Αν $x = +\infty$, $0 < y \le +\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \log x_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \log z_n = \lim_{n\to+\infty} y_n \log x_n = +\infty$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\log z_n} = +\infty = x^y$.

Αν $x = +\infty$, $-\infty \le y < 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \log x_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \log z_n = \lim_{n\to+\infty} y_n \log x_n = -\infty$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\log z_n} = 0 = x^y$.

Αν $x = 0$, $y = -\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \log x_n = -\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \log z_n = \lim_{n\to+\infty} y_n \log x_n = +\infty$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\log z_n} = +\infty$. $\natural$

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα όρια ακολουθιών: $\lim_{n\to+\infty} \big((1+\frac{1}{n})^8 + 4(1+\frac{1}{n})^5 + 7\big)$, $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1+(-1)^n}{n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \log(1+\frac{1}{n})$, $\lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{3n^4+n-4}{n^4+n^3+4}} \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^2})$, $\lim_{n\to+\infty} n \log(1+\frac{1}{n})$, $\lim_{n\to+\infty} (\frac{n^2+3}{4n^2-3})^{\frac{3}{2}} \log(\cos\frac{1}{n})$, $\lim_{n\to+\infty} \tan\frac{1}{2^n}$.

2. Έστω διάστημα I (όχι μονοσύνολο), $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I και έστω $f(r) = 0$ για κάθε ρητό $r \in I$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. (*Υπόδ.:* Άσκηση 25 της ενότητας 2.4.)

3. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Έστω ότι για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $x' \in [a,b]$ ώστε $|f(x')| \le \frac{|f(x)|}{2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = 0$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε οποιονδήποτε $x_0 \in [a,b]$ και $x_1 = x_0{}'$, $x_2 = x_1{}'$ κλπ. Θα χρειαστείτε και το Θεώρημα 2.2.)

4. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ώστε $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ για κάθε x_1, x_2. Αποδείξτε ότι: (*i*) $f(m) = f(1)m$ για κάθε $m \in \mathbf{N}$ και $f(0) = 0$, (*ii*) $f(r) = f(1)r$ για κάθε $r \in \mathbf{Q}$, (*iii*) αν η f είναι συνεχής στον 0, τότε είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ (*Υπόδ.:* $f(x) = f(\xi) + f(x-\xi)$.), (*iv*) αν η f είναι συνεχής στον 0, τότε $f(x) = f(1)x$ για κάθε x. (*Υπόδ.:* Άσκηση 2.)

5. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ώστε $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ για κάθε x_1, x_2 και $f(0) \ne 0$. Είτε μιμούμενοι την προηγούμενη άσκηση είτε εφαρμόζοντας το αποτέλεσμά της, αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον 0, υπάρχει c ώστε $f(x) = e^{cx}$ για κάθε x.

4.4 Τα τρία βασικά θεωρήματα.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις τρεις πιο σημαντικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων. Θα παρατηρήσετε ότι και οι τρεις ιδιότητες αναφέρονται σε συναρτήσεις συνεχείς σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα.

Θεώρημα 4.2 *Φραγμένης Συνάρτησης*. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη: Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[a,b]$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $x_n \in [a,b]$ ώστε $|f(x_n)| > n$. Προκύπτει, λοιπόν, ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ ώστε $|f(x_n)| > n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n)| = +\infty$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω $\xi = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$. Επειδή $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$. Επειδή $\xi \in [a,b]$, η f είναι συνεχής στον ξ, οπότε από το $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \xi$ συνεπάγεται $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$ και $\lim_{k\to+\infty} |f(x_{n_k})| = |f(\xi)|$. Όμως, $\lim_{k\to+\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$ και καταλήγουμε σε άτοπο. $\natural$

Παραδείγματα: Η $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ δεν είναι συνεχής ούτε φραγμένη στο $[0,1]$.

(2) Η $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ δεν είναι συνεχής αλλά είναι φραγμένη στο $[0,1]$.

(3) Η $\frac{1}{x(x-1)}$ είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη στο $(0,1)$.

(4) Η x είναι συνεχής και φραγμένη στο $(-1,1)$.

(5) Η x είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη στο $\mathbf{R}$.

(6) Η $\frac{1}{x^2+1}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbf{R}$.

Θεώρημα 4.3 ***Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής***. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε υπάρχουν $\zeta, \eta \in [a,b]$ ώστε*

$$f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$$

για κάθε $x \in [a,b]$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα Φραγμένης Συνάρτησης, η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, δηλαδή το $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ είναι φραγμένο. Άρα τα infimum και supremum του $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ είναι αριθμοί.

Έστω $u = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ο $u - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, οπότε υπάρχει $x_n \in [a,b]$ ώστε $u - \frac{1}{n} < f(x_n)$. Επειδή ο u είναι άνω φράγμα του $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, συνεπάγεται $u - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq u$. Άρα προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ ώστε $u - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = u$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω $\eta = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$. Επειδή $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $a \leq \eta \leq b$, οπότε η f είναι συνεχής στον η. Από το $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \eta$ συνεπάγεται $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\eta)$. Επειδή $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = u$, συνεπάγεται $f(\eta) = u$ και, επειδή ο u είναι άνω φράγμα του $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, συνεπάγεται $f(x) \leq f(\eta)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Με τον ίδιο τρόπο, από το infimum του $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, προκύπτει ο ζ. $\natural$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι ζ, η στο Θεώρημα 4.3 μπορεί να μην είναι μοναδικοί. Μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας ζ στους οποίους η f έχει την (ίδια) ελάχιστη τιμή της και περισσότεροι από ένας η στους οποίους η f έχει την (ίδια) μέγιστη τιμή της. Επίσης, το Θεώρημα 4.3 δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης των ζ, η στους οποίους η f έχει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της ούτε τρόπο εύρεσης της ελάχιστης και μέγιστης τιμής της. Για τέτοιους υπολογισμούς θα γνωρίσουμε διάφορες μεθόδους στο Κεφάλαιο 5.

Παραδείγματα: (1) Η $f(x) = \begin{cases} x+1\,, & -1 \le x < 0, \\ 0\,, & x = 0, \\ x-1\,, & 0 < x \le 1, \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή. Είναι, όμως, φραγμένη στο $[-1,1]$.

(2) Η $f(x) = \begin{cases} 0\,, & -1 \le x < 0, \\ 1\,, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[-1,1]$ αλλά έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

(3) Η x είναι συνεχής (και φραγμένη) στό $(-1,1)$ αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στό $(-1,1)$.

(4) Η $f(x) = \begin{cases} x+2\,, & -2 < x < -1, \\ -x\,, & -1 \le x \le 1, \\ x-2\,, & 1 < x < 2, \end{cases}$ είναι συνεχής στο $(-2,2)$ και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

(5) Η $\frac{x|x|}{x^2+1}$ είναι συνεχής (και φραγμένη) στο $\mathbf{R}$ αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

(6) Η $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & |x| > 1, \\ x\,, & |x| \le 1, \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Θεώρημα 4.4 *Ενδιάμεσης Τιμής*. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε, για κάθε λ με την ιδιότητα $f(a) \le \lambda \le f(b)$ ή $f(b) \le \lambda \le f(a)$ υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.*

Απόδειξη: Έστω $f(a) \le \lambda \le f(b)$.

Θεωρούμε τα ισομήκη διαστήματα $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ και παρατηρούμε ότι είτε $f(a) \le \lambda \le f(\frac{a+b}{2})$ είτε $f(\frac{a+b}{2}) \le \lambda \le f(b)$. Στην πρώτη περίπτωση συμβολίζουμε $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Στη δεύτερη περίπτωση συμβολίζουμε $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $[a_1, b_1] \subseteq [a,b]$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ και $f(a_1) \le \lambda \le f(b_1)$.

Κατόπιν, θεωρούμε τα ισομήκη διαστήματα $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ και παρατηρούμε ότι είτε $f(a_1) \le \lambda \le f(\frac{a_1+b_1}{2})$ είτε $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \le \lambda \le f(b_1)$. Στην πρώτη περίπτωση συμβολίζουμε $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Στη δεύτερη περίπτωση συμβολίζουμε $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$, $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2}$ και $f(a_2) \le \lambda \le f(b_2)$.

Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ΄ άπειρον. Δημιουργούμε έτσι διαδοχικά διαστήματα $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$ ώστε $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ και $f(a_n) \le \lambda \le f(b_n)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Από το ότι $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ συνεπάγεται $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.22, οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Έστω $\xi = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$. Επειδή $a_n, b_n \in [a,b]$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $\xi \in [a,b]$, οπότε η f είναι συνεχής στον ξ. Επομένως, από το $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \xi$

συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\xi)$. Τέλος, επειδή $f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $f(\xi) \leq \lambda \leq f(\xi)$ και, επομένως, $f(\xi) = \lambda$.

Αν $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$, η απόδειξη είναι παρόμοια. $\natural$

Δείτε στην άσκηση 21 μια *δεύτερη απόδειξη* του Θεωρήματος 4.4.

Παρατηρήστε τα εξής. Αν $f(a) = f(b)$, τότε, αναγκαστικά, $\lambda = f(a) = f(b)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δυο προφανείς λύσεις: τις $\xi = a$, $\xi = b$. Επίσης, αν $f(a) \neq f(b)$ και $\lambda = f(a)$ ή $\lambda = f(b)$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μια προφανή λύση: την $\xi = a$ ή την $\xi = b$, αντιστοίχως. Άρα μόνο αν υποθέσουμε ότι $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(b) < \lambda < f(a)$, το συμπέρασμα του Θεωρήματος 4.4 αποκτά ενδιαφέρον. Φυσικά, τότε οι a, b δεν είναι λύσεις της $f(x) = \lambda$, οπότε το συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.

Το Θεώρημα 4.4 δεν υποδεικνύει *πώς* υπολογίζουμε τον ξ. Επίσης, ο ξ μπορεί να μην είναι μοναδικός: μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας ξ στους οποίους η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή λ.

Παραδείγματα: (1) Η $f(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x \leq 1, \\ 0\,, & x = 0, \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Κανένας $\lambda \in (f(0), f(1))$ δεν είναι τιμή της f.

(2) Η $f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$, αλλά κάθε $\lambda \in [f(0), f(1)]$ είναι τιμή της f.

Θα δούμε, τώρα, δυο τυπικές εφαρμογές του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Παραδείγματα: (1) Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Η $\cos x - x$ είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$. Είναι $\cos 0 - 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ και $-\frac{\pi}{2} < 0 < 1$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ώστε $\cos\xi - \xi = 0$.

(2) Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 - 5x^2 - 18x + 7 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση. Δε χρειάζεται να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση σε συγκεκριμένο διάστημα.

Έστω η $f(x) = x^3 - 5x^2 - 18x + 7$. Βρίσκουμε μόνοι μας a, b ώστε $a < b$ και ο 0 να είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a), f(b)$. Δοκιμάζουμε λίγο - πολύ στην τύχη: $f(0) = 7$, $f(1) = -15$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $\xi^3 - 5\xi^2 - 18\xi + 7 = f(\xi) = 0$.

Μάλιστα, δεν είναι ανάγκη ούτε καν να θεωρήσουμε συγκεκριμένο διάστημα. Αυτό γίνεται (όχι στην τύχη!) ως εξής. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος $a < 0$ (δεν είναι ανάγκη να βρούμε συγκεκριμένη τιμή) ώστε $f(a) < 0$. Επίσης, επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος $b > 0$ ώστε $f(b) > 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $\xi^3 - 5\xi^2 - 18\xi + 7 = f(\xi) = 0$.

(3) **Ύπαρξη n-οστής ρίζας** Θεωρούμε οποιονδήποτε $y > 0$. Επειδή είναι $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, υπάρχει $b > 0$ ώστε να είναι $b^n > y$. Αλλά και χωρίς αναφορά στο όριο, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε $b > 1 + \frac{y-1}{n}$ και τότε, βάσει του Λήμματος 1.1, είναι $b^n > (1 + \frac{y-1}{n})^n \geq 1 + n\frac{y-1}{n} = y$. Η συνάρτηση x^n είναι συνεχής στο $[0, b]$ και είναι $0^n < y < b^n$. Άρα υπάρχει $x \in (0, b)$ ώστε $x^n = y$. Αποδείξαμε, λοιπόν, το ουσιαστικό μέρος του Θεωρήματος 1.2: *για κάθε*

$y > 0$ υπάρχει $x > 0$ ώστε $x^n = y$.

Ιδού, τέλος, δυο πορίσματα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Πρόταση 4.9 ***Bolzano.*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Αν είναι $f(a)f(b) < 0$, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.*

Απόδειξη: Από $f(a)f(b) < 0$ συνεπάγεται $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$. $\natural$

Πρόταση 4.10 ***Ιδιότητα σταθερού προσήμου.*** *Έστω διάστημα I (οποιουδήποτε τύπου) και $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε είτε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη: Έστω ότι το συμπέρασμα δεν είναι σωστό. Τότε υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$. Επειδή το I είναι διάστημα, το διάστημα $[a, b]$ ή $[b, a]$ είναι υποσύνολο του I, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ή $[b, a]$ και, επομένως, $\xi \in I$ ώστε $f(\xi) = 0$. Αυτό είναι άτοπο. $\natural$

Ασκήσεις.

1. Έχουν οι $x^2 - x + 1$, $\sin(\pi x)$, $\cot(\pi x)$, $\sin(2\pi x)$ μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο $(0, 1)$;

2. Ξαναδείτε την άσκηση 13 της ενότητας 3.5. (1) Αποδείξτε ότι η $\sin\frac{1}{x}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0, +\infty)$ και ότι παίρνει και τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της σε άπειρα σημεία του $(0, +\infty)$. Ποια είναι αυτά τα σημεία; (2) Αποδείξτε ότι οι $x \sin x$, $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ δεν είναι άνω φραγμένες ούτε κάτω φραγμένες στο $(0, +\infty)$. (3) Αποδείξτε ότι η $\frac{1}{1+x}\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0, +\infty)$.

3. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ και $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $f(x) \geq g(x) + \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.

4. Δώστε δεύτερη λύση της άσκησης 3 της ενότητας 4.3. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε τη συνεχή $|f| : A \to \mathbf{R}$.)

5. Έστω $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ συνεχής στο (a, b). Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to b} f(x)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) > \lim_{x \to a} f(x)$ και $f(x_0) > \lim_{x \to b} f(x)$, αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή. (*Υπόδ.:* Υπάρχουν a', b' ώστε $a < a' < b' < b$ και $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in (a, a')$ και κάθε $x \in (b', b)$. Θεωρήστε το $[a', b']$.)

6. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι για κάθε $x \in I$, $\delta > 0$ υπάρχει $x' \in (x - \delta, x) \cap I$ ώστε $f(x') \leq f(x)$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I. (*Υπόδ.:* Έστω $a, b \in I$ ώστε $a < b$ και $f(a) > f(b)$. Θεωρήστε το $\xi = \inf\{x \in [a, b] : f(x) \leq f(b)\}$. Αποδείξτε ότι $a < \xi \leq b$ και $f(x) > f(\xi) = f(b)$ για κάθε $x \in [a, \xi)$.) Να αντιπαραβάλετε με το παράδειγμα της $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ καθώς και με την άσκηση 10 της ενότητας 2.5.

7. **Λήμμα του Ανατέλλοντος Ηλίου**. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $\mathbf{R}$. Ο x χαρακτηρίζεται *σημείο σκιάς* της f αν υπάρχει $x' > x$ ώστε $f(x') > f(x)$. Έστω ότι κάθε $x \in (a,b)$ είναι σημείο σκιάς της f ενώ τα a, b δεν είναι σημεία σκιάς της f. Αποδείξτε ότι: (i) $f(x) < f(b)$ για κάθε $x \in (a,b)$, (ii) $f(a) \leq f(b)$, (iii) $f(a) \geq f(b)$.

8. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Ορίζουμε $g : [a,b] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \max\{f(t) : a \leq t \leq x\}$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι η g είναι αύξουσα και συνεχής στο $[a,b]$. (*Υπόδ.:* Αν $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, αποδείξτε ότι $0 \leq g(x_2) - g(x_1) \leq \max\{f(x) - f(x_1) : x \in [x_1, x_2]\}$.)

9. (Συνέχεια της άσκησης 13 της ενότητας 3.1.) Έστω κλειστό και φραγμένο σύνολο A και $f : A \to \mathbf{R}$ συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A. (*Υπόδ.:* Χρησιμοποιήστε το (8) της άσκησης 13 της ενότητας 3.1.)

10. (Συνέχεια των ασκήσεων 13 των ενοτήτων 3.1, 4.1.) Έστω κλειστό και φραγμένο σύνολο A και $f : A \to \mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι: (1) αν η f είναι άνω ημισυνεχής στο A, τότε είναι άνω φραγμένη και έχει μέγιστη τιμή στο A, (2) αν η f είναι κάτω ημισυνεχής στο A, τότε είναι κάτω φραγμένη και έχει ελάχιστη τιμή στο A.

11. Αποδείξτε ότι: (1) η $x^7 - 3x^6 + 5x^5 + 13x^4 - x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $[0,1]$, (2) η $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον δυο λύσεις, (3) η $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3} = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση σε καθένα από τα $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, (4) η $\tan x = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση σε κάθε $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$.

12. Έστω $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ συνεχής στο (a,b) και έστω $f(x) \in \mathbf{Q}$ για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο (a,b).

13. (1) Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$. Αν $f(a) \leq g(a)$, $f(b) \geq g(b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$. (2) **Θεώρημα Σταθερού Σημείου**. Έστω $f : [a,b] \to [a,b]$ συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = \xi$. (3) Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $\mathbf{R}$ και ότι *δεν ισχύει* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ *ούτε* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbf{R}$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

14. Έστω $f, g : [a,b] \to [a,b]$ συνεχείς στο $[a,b]$. Έστω ότι η g είναι αύξουσα και $f \circ g = g \circ f$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi) = \xi$. (*Υπόδ.:* Υπάρχει $\zeta \in [a,b]$ ώστε $f(\zeta) = \zeta$ (Άσκηση 13). Δημιουργήστε την (x_n) στο $[a,b]$ με $x_1 = \zeta$ και με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = g(x_n)$.)

15. Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο I ώστε $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in I$. (1) Αποδείξτε ότι είτε $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in I$. (2) Έστω και $h : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I. Αν $h(x) = f(x)$ ή $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι είτε $h(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε την $\frac{f+g}{2}$.)

16. (1) Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο I. Αν $g(x)^2 = f(x)^2 > 0$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι είτε $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε $g(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in I$. (2) Έστω διάστημα $I \subseteq [0, +\infty)$ ή $I \subseteq (-\infty, 0]$ και $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I. Έστω $f(x)^2 = x^2$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε $f(x) = x$ για κάθε $x \in I$ είτε $f(x) = -x$ για κάθε $x \in I$. (3) Πόσες $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ υπάρχουν συνεχείς στο $\mathbf{R}$ ώστε $f(x)^2 = x^2$ για κάθε x; (4) Έστω διάστημα $I \subseteq [-1, 1]$ και $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I. Έστω $x^2 + f(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in I$ είτε $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in I$.

17. Γενικεύστε την άσκηση 15 ως εξής. (1) Έστω διάστημα I και $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο I. Έστω ότι οι $f_1, \ldots, f_n$ σε κάθε $x \in I$ έχουν n *διαφορετικές* τιμές. Τι συμπεραίνετε σχετικά με τη διάταξη μεγέθους αυτών των συναρτήσεων; (2) Έστω, επιπλέον, ότι η $h : I \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι σε κάθε $x \in I$ η τιμή της είναι ίση με την τιμή (στον ίδιο x) μιας από τις n αρχικές συναρτήσεις ή, ισοδύναμα, ότι $(h(x) - f_1(x)) \cdots (h(x) - f_n(x)) = 0$ για κάθε $x \in I$. Τι συμπεραίνετε για τη σχέση της h με τις $f_1, \ldots, f_n$; (3) Έστω διάστημα $I \subseteq [1, +\infty)$ ή $I \subseteq [0, 1]$ και $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I. Έστω $(f(x) - x)(f(x) - x^2)(f(x) - x^3) = 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε $f(x) = x$ για κάθε $x \in I$ είτε $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in I$ είτε $f(x) = x^3$ για κάθε $x \in I$. (4) Αν $I = [0, +\infty)$, τότε – με τις ίδιες κατά τα άλλα υποθέσεις – ποιες είναι οι δυνατότητες για την f;

18. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής και ένα-προς-ένα στο I. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

19. Έστω διάστημα I (όχι μονοσύνολο) και $f : I \to \mathbf{R}$ ώστε για κάθε λ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είτε έχει ακριβώς δυο λύσεις είτε δεν έχει καμιά λύση. Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο I.

20. Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ μονότονη στο $[a, b]$. Αν για την f ισχύει το συμπέρασμα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής, αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο $[a, b]$.

21. **Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής**. *Δεύτερη απόδειξη:* Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) < \lambda < f(b)$. Θεωρήστε το $A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq \lambda\}$. Το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο. Έστω $\xi = \sup A$, οπότε $\xi \in [a, b]$. Υπάρχει (x_n) στο A ώστε $\lim_{n \to +\infty} x_n = \xi$. Συνεπάγεται $f(\xi) \leq \lambda$. Άρα $\xi < b$. Ισχύει $f(x) > \lambda$ για κάθε $x \in (\xi, b]$. Συνεπάγεται $f(\xi) \geq \lambda$.

4.5 Σύνολο τιμών. Αντίστροφη συνάρτηση.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f αφού αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως, για παράδειγμα, αν για συγκεκριμένο λ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει λύση ή όχι. Θα δούμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις στις οποίες το πρόβλημα του προσδιορισμού του συνόλου τιμών συνάρτησης έχει απλή – τουλάχιστο θεωρητικά – λύση.

Πρόταση 4.11 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε το $\{f(x) : x \in [a,b]\}$ είναι ίσο με το κλειστό και φραγμένο διάστημα με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο I.*

Απόδειξη: Υπάρχουν $\zeta, \eta \in [a,b]$ ώστε $f(\zeta) \le f(x) \le f(\eta)$ ή, ισοδύναμα, $f(x) \in [f(\zeta), f(\eta)]$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα $\{f(x) : x \in [a,b]\} \subseteq [f(\zeta), f(\eta)]$.

Αντιστρόφως, έστω $\lambda \in [f(\zeta), f(\eta)]$, δηλαδή $f(\zeta) \le \lambda \le f(\eta)$. Το διάστημα $[\zeta, \eta]$ ή $[\eta, \zeta]$ είναι υποσύνολο του $[a,b]$, οπότε η f είναι συνεχής στο $[\zeta, \eta]$ ή $[\eta, \zeta]$. Άρα υπάρχει $\xi \in [\zeta, \eta]$ ή $[\eta, \zeta]$ και, επομένως, $\xi \in [a,b]$ ώστε $\lambda = f(\xi)$. Άρα $\lambda \in \{f(x) : x \in [a,b]\}$. Επομένως, $[f(\zeta), f(\eta)] \subseteq \{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Άρα $\{f(x) : x \in [a,b]\} = [f(\zeta), f(\eta)]$. $\natural$

Άρα για να βρούμε το σύνολο τιμών συνάρτησης συνεχούς σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι αρκετό να υπολογίσουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό. Αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό. Στο Κεφάλαιο 5 θα γνωρίσουμε, με τη βοήθεια των παραγώγων, μερικές μεθόδους υπολογισμού αυτών των τιμών της συνάρτησης. Πάντως, σε μερικές απλές περιπτώσεις οι υπολογισμοί αυτοί είναι και τώρα εφικτοί.

Παραδείγματα: (1) Η $p_2 : [1,4] \to \mathbf{R}$ είναι αύξουσα στο $[1,4]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ο $1^2 = 1$ και η μέγιστη τιμή της ο $4^2 = 16$. Άρα το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[1,16]$.

(2) Η $p_{-1} : [\frac{1}{2}, 3] \to \mathbf{R}$ είναι φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}, 3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ο $3^{-1} = \frac{1}{3}$ και η μέγιστη τιμή της ο $(\frac{1}{2})^{-1} = 2$. Άρα το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[\frac{1}{3}, 2]$.

(3) Θεωρούμε την $f : [-1,6] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Είναι $f(x) = (x-3)^2 - 4$, οπότε η f είναι φθίνουσα στο $[-1,3]$ και αύξουσα στο $[3,6]$. Άρα η ελάχιστη τιμή της f είναι ο $f(3) = -4$ και η μέγιστη τιμή της ο $\max\{f(-1), f(6)\} = 12$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[-4,12]$.

Θα δούμε, τώρα, τη σημαντική περίπτωση υπολογισμού του συνόλου τιμών πολυωνυμικής συνάρτησης. Η περίπτωση αυτή δεν εμπίπτει στην Πρόταση 4.11.

Πρόταση 4.12 *Έστω η $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.*
(1) Έστω ότι η p είναι περιττού βαθμού, δηλαδή $n = 2k-1$, $k \in \mathbf{N}$, $a_n \ne 0$. Τότε το σύνολο τιμών της p είναι το $(-\infty, +\infty)$.
(2) Έστω ότι η p είναι άρτιου βαθμού, δηλαδή $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, $a_n \ne 0$. Αν $a_n > 0$, τότε η p έχει ελάχιστη τιμή, έστω l, και το σύνολο τιμών της είναι το $[l, +\infty)$. Αν $a_n < 0$, τότε η p έχει μέγιστη τιμή, έστω u, και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, u]$.

Απόδειξη: (1) Έστω $a_n > 0$, οπότε $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$. Έστω λ. Τότε $p(x) < \lambda$ κοντά στο $-\infty$ και $p(x) > \lambda$ κοντά στο $+\infty$. Άρα υπάρχουν $a < 0$ και $b > 0$ ώστε $p(a) < \lambda < p(b)$. Άρα ο λ είναι τιμή της p. Αποδείξαμε ότι κάθε $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ ανήκει στο σύνολο τιμών της p. Δηλαδή, το $(-\infty, +\infty)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της p και, επειδή το αντίστροφο είναι προφανές, το σύνολο τιμών της p είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Αν $a_n < 0$, τότε $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$ και η απόδειξη μένει ουσιαστικά ίδια.

(2) Έστω $a_n > 0$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, υπάρχει $a < 0$ ώστε $p(x) > p(0)$ για κάθε $x \in (-\infty, a)$ και $b > 0$ ώστε $p(x) > p(0)$ για κάθε $x \in (b, +\infty)$. Η p είναι συνεχής στο $[a, b]$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή, έστω l, στο διάστημα αυτό. Επειδή $0 \in [a, b]$, είναι $l \leq p(0)$, οπότε $l \leq p(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, a)$ και κάθε $x \in (b, +\infty)$. Άρα ο l είναι η ελάχιστη τιμή της p στο $\mathbf{R}$. Άρα το σύνολο τιμών της p είναι υποσύνολο του $[l, +\infty)$.

Αντιστρόφως, έστω $\lambda \in [l, +\infty)$, δηλαδή $l \leq \lambda < +\infty$. Ο l είναι τιμή (η ελάχιστη) της p, δηλαδή υπάρχει ζ ώστε $p(\zeta) = l$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, ισχύει $p(x) > \lambda$ κοντά στο $+\infty$. Άρα υπάρχει b' ώστε $p(b') > \lambda$. Επειδή $p(\zeta) \leq \lambda < p(b')$, ο λ ανήκει στο σύνολο τιμών της p. Άρα το $[l, +\infty)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της p.

Άρα το σύνολο τιμών της p είναι το $[l, +\infty)$.

Αν $a_n < 0$, η απόδειξη είναι παρόμοια. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Το σύνολο τιμών της $p(x) = -2x^5 + 4x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 1$ είναι το $(-\infty, +\infty)$.

(2) Έστω η $p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7 = x^2(x-2)^2 - 7$. Προφανώς, $p(x) \geq -7$ για κάθε x και $-7 = p(0) = p(2)$. Άρα ο -7 είναι η ελάχιστη τιμή της p και το σύνολο τιμών της είναι το $[-7, +\infty)$.

Μπορεί να δοθεί πλήρης περιγραφή του συνόλου τιμών συνάρτησης *συνεχούς σε διάστημα* οποιουδήποτε τύπου. Δείτε σχετικά τις ασκήσεις 8, 9. Εδώ θα περιοριστούμε στη σημαντική ειδική περίπτωση που η συνάρτηση εκτός από συνεχής είναι *και γνησίως μονότονη* σε διάστημα. Οι μέθοδοι του Κεφαλαίου 5 επιτρέπουν να χωρίζουμε τα πεδία ορισμού των περισσότερων συναρτήσεων που εμφανίζονται στην πράξη σε διαστήματα στα οποία αυτές είναι γνησίως μονότονες.

Πριν διατυπώσουμε την Πρόταση 4.13 ας θυμηθούμε ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3, αν μια συνάρτηση είναι μονότονη σε διάστημα, τότε υπάρχουν τα (πλευρικά) όριά της στα άκρα του διαστήματος. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα. Ειδικότερα, αν η $f : I \to J$ είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα I με σύνολο τιμών το διάστημα J, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$ με πεδίο ορισμού το J και σύνολο τιμών το I. Μάλιστα, αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, τότε η f^{-1} είναι, αντιστοίχως, γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Το επιπλέον στοιχείο, το οποίο εισάγεται στην Πρόταση 4.13, είναι η *συνέχεια* της f και της f^{-1}.

Πρόταση 4.13 (1) *Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[A, B]$, όπου $A = f(a)$, $B = f(b)$. Επίσης, η $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B]$.*

(2) *Έστω $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (a, b). Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το (A, B), όπου $A = \lim_{x\to a} f(x)$, $B = \lim_{x\to b} f(x)$. Επίσης, η $f^{-1} : (A, B) \to (a, b)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (A, B).*

(3) *Έστω $a \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b] \to \mathbf{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(a, b]$.*

Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $(A, B]$, όπου $A = \lim_{x\to a} f(x)$, $B = f(b)$. Επίσης, η $f^{-1} : (A, B] \to (a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(A, B]$.
(4) *Έστω $b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < b$ και $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b)$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[A, B)$, όπου $A = f(a)$, $B = \lim_{x\to b} f(x)$. Επίσης, η $f^{-1} : [A, B) \to [a, b)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B)$.*

Τα συμπεράσματα των (1) - (4) ισχύουν και στην περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής. Η μόνη διαφορά είναι ότι τα άκρα A, B αλλάζουν διάταξη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση (1) πρέπει να είναι $[B, A]$ αντί $[A, B]$.

Απόδειξη: (1) Σύμφωνα με την Πρόταση 4.11, το σύνολο τιμών της f είναι το $[A, B]$, όπου $A = f(a)$, $B = f(b)$, οπότε η $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[A, B]$ με σύνολο τιμών το $[a, b]$. Μένει να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής σε κάθε $\eta \in [A, B]$.

Έστω $A < \eta < B$ και $\xi = f^{-1}(\eta)$, οπότε $a < \xi < b$. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε $x_1, x_2 \in [a, b]$ ώστε $\xi - \epsilon \leq x_1 < \xi < x_2 \leq \xi + \epsilon$. Ορίζουμε τους $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ στο $[A, B]$, οπότε $y_1 < \eta < y_2$. Ορίζουμε και $\delta = \min\{\eta - y_1, y_2 - \eta\} > 0$. Τότε για κάθε y, $|y - \eta| < \delta$, συνεπάγεται $y_1 \leq \eta - \delta < y < \eta + \delta \leq y_2$, οπότε $\xi - \epsilon \leq x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 \leq \xi + \epsilon$ και, επομένως, $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| = |f^{-1}(y) - \xi| < \epsilon$. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στον η.

Έστω $\eta = A$, οπότε $\xi = f^{-1}(\eta) = a$. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε $x_2 \in [a, b]$ ώστε $a < x_2 \leq a + \epsilon$. Ορίζουμε τον $y_2 = f(x_2)$ στο $[A, B]$, οπότε $A < y_2$. Ορίζουμε και $\delta = y_2 - A > 0$. Τότε για κάθε y, $A \leq y < A + \delta = y_2$, συνεπάγεται $a = f^{-1}(A) \leq f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 \leq a + \epsilon$ και, επομένως, $|f^{-1}(y) - f^{-1}(A)| = |f^{-1}(y) - a| < \epsilon$. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στον $\eta = A$.

Αν $\eta = B$, με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η f^{-1} είναι συνεχής στον η. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο $[A, B]$.
(2) Έστω $x \in (a, b)$. Θεωρούμε x' ώστε $a < x' < x$ και, επειδή ισχύει $f(x'') < f(x') < f(x)$ για κάθε x'', $a < x'' < x' < x$, συνεπάγεται $A = \lim_{x''\to a} f(x'') \leq f(x')$ και, επομένως, $A < f(x)$. Κατόπιν, θεωρούμε x' ώστε $x < x' < b$ και, επειδή ισχύει $f(x) < f(x') < f(x'')$ για κάθε x'', $x < x' < x'' < b$, συνεπάγεται $f(x') \leq \lim_{x''\to b} f(x'') = B$ και, επομένως, $f(x) < B$. Άρα ισχύει $f(x) \in (A, B)$ για κάθε $x \in (a, b)$, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του (A, B).

Αντιστρόφως, έστω $\lambda \in (A, B)$, δηλαδή $A < \lambda < B$. Επειδή $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to b} f(x) = B$, ισχύει $f(x) < \lambda$ κοντά στον a και $\lambda < f(x)$ κοντά στον b. Άρα υπάρχει $a' \in (a, b)$ ώστε $f(a') < \lambda$ και $b' \in (a, b)$ ώστε $\lambda < f(b')$. Άρα $f(a') < \lambda < f(b')$, οπότε ο λ είναι τιμή της f. Άρα το διάστημα (A, B) είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της f.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το (A, B), οπότε μένει να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής σε κάθε $\eta \in (A, B)$: απλώς, επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους του (1).
(3) Για κάθε $x \in (a, b]$, δηλαδή $a < x \leq b$, αποδεικνύουμε όπως πριν ότι $A < f(x) \leq B$ και, επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του $(A, B]$.

Αντιστρόφως, έστω $\lambda \in (A, B]$, δηλαδή $A < \lambda \leq B = f(b)$. Όπως πριν, βλέπουμε ότι υπάρχει $a' \in (a, b]$ ώστε $f(a') < \lambda$. Από την $f(a') < \lambda \leq f(b)$ συνεπάγεται ότι ο λ είναι τιμή της f. Άρα το $(A, B]$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της f.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το $(A, B]$. Για να αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής σε κάθε $\eta \in (A, B]$ επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους του (1).
(4) Όπως στο (3).

Τέλος, οι αλλαγές που πρέπει να γίνουν στην περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι προφανείς. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Έστω $f : (1, 3) \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1$. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(1, 3)$ και $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 3} f(x) = 19$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(3, 19)$. Η $f^{-1} : (3, 19) \to (1, 3)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(3, 19)$. Είναι εύκολο να βρούμε τον τύπο της: $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$. Από τον τύπο της f^{-1} επιβεβαιώνεται ότι αυτή είναι συνεχής.

(2) Έστω $f : (1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1, +\infty)$ και $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(1, +\infty)$. Η $f^{-1} : (1, +\infty) \to (1, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1, +\infty)$ και ο τύπος της είναι $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$.

(3) Έστω η $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \log \frac{1}{x}$. Υπολογίζουμε: $f(1) = 0$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, 0]$. Η $f^{-1} : (-\infty, 0] \to [1, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και ο τύπος της είναι $f^{-1}(y) = e^{-y}$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα ο υπολογισμός του τύπου της f^{-1} είναι απλός. Από τον τύπο της f^{-1} προκύπτει αμέσως ότι αυτή είναι συνεχής. *Όμως, η συνέχεια της f^{-1} προκύπτει και από την Πρόταση 4.13 και αυτό είναι χρήσιμο σε περιπτώσεις που δεν μπορεί να υπολογιστεί ο τύπος της f^{-1} .*

(4) Η $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbf{R}$ και $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$ (το γνωρίζαμε, διότι η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού). Άρα η $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $\mathbf{R}$. Μπορείτε να διαπιστώσετε ότι δεν είναι εύκολο να βρεθεί ο τύπος της f^{-1} .

(5) Η $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = -xe^x + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$. Είναι $f(0) = 1$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, 1]$ και η $f^{-1} : (-\infty, 1] \to [0, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και *συνεχής* στο $(-\infty, 1]$. Είναι αδύνατο να βρεθεί ο τύπος της f^{-1} , αφού *δε* λύνεται η εξίσωση $-xe^x + 1 = y$ με άγνωστο τον x.

Ιδού μερικά πιο σημαντικά παραδείγματα.

Παραδείγματα: (1) **Η λογαριθμική συνάρτηση**. Η εκθετική συνάρτηση $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbf{R}$. Είναι $\lim_{x\to -\infty} \exp x = 0$, $\lim_{x\to +\infty} \exp x = +\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της exp είναι το $(0, +\infty)$. Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή η $\log : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $(0, +\infty)$.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η log είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$. Είναι, όμως, ενδιαφέρον ότι *η συνέχεια της* log *προκύπτει και ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.13.* Επίσης, ήδη γνωρίζουμε τα όρια $\lim_{y\to 0}\log y = -\infty$, $\lim_{y\to+\infty}\log y = +\infty$. Κι αυτά, όμως, προκύπτουν ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.13. Πράγματι, επειδή η log είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα τα $\lim_{y\to 0}\log y$, $\lim_{y\to+\infty}\log y$. Επειδή το σύνολο τιμών της log (δηλαδή το πεδίο ορισμού της exp) είναι το $\mathbf{R}$, συνεπάγεται $\lim_{y\to 0}\log y = -\infty$, $\lim_{y\to+\infty}\log y = +\infty$.

(2) **Οι n-οστές ρίζες**. (i) Έστω περιττός $n \in \mathbf{N}$. Η $p_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbf{R}$. Είναι $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της p_n είναι το $\mathbf{R}$. Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή η $p_{\frac{1}{n}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $\mathbf{R}$.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η $p_{\frac{1}{n}}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$. Και πάλι, όμως, *η συνέχεια της $p_{\frac{1}{n}}$ προκύπτει ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.13.* Επίσης, επειδή η $p_{\frac{1}{n}}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα τα όρια $\lim_{y\to-\infty}\sqrt[n]{y}$, $\lim_{y\to+\infty}\sqrt[n]{y}$. Επειδή το σύνολο τιμών είναι το $\mathbf{R}$, συνεπάγεται $\lim_{y\to-\infty}\sqrt[n]{y} = -\infty$, $\lim_{y\to+\infty}\sqrt[n]{y} = +\infty$.

(ii) Έστω άρτιος $n \in \mathbf{N}$. Η $p_n : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$. Είναι $0^n = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της p_n είναι το $[0, +\infty)$ και η αντίστροφη συνάρτηση $p_{\frac{1}{n}} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $[0, +\infty)$. Επίσης, επειδή η $p_{\frac{1}{n}}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα τον $\sqrt[n]{0} = 0$ και το όριο $\lim_{y\to+\infty}\sqrt[n]{y}$. Επειδή το σύνολο τιμών της $p_{\frac{1}{n}}$ είναι το $[0, +\infty)$, συνεπάγεται $\lim_{y\to+\infty}\sqrt[n]{y} = +\infty$.

(3) **Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις**. (i) Έστω ο περιορισμός της cos στο $[0, \pi]$. Η $\cos : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0, \pi]$. Επειδή $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, το σύνολο τιμών είναι το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο-συνημίτονο**, την οποία συμβολίζουμε

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

και είναι *συνεχής* και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.

(ii) Έστω ο περιορισμός της sin στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Η $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Επειδή $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, το σύνολο τιμών είναι το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο-ημίτονο**, την οποία συμβολίζουμε

$$\arcsin : [-1, 1] \to \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]$$

και είναι *συνεχής* και γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(iii) Έστω ο περιορισμός της tan στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Η $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Επειδή $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}\tan x = -\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x = +\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $\mathbf{R}$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο-εφαπτόμενη**, την οποία συμβολίζουμε

$$\arctan : \mathbf{R} \to \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big)$$

και είναι *συνεχής* και γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Βρίσκουμε, επίσης, τα όρια: $\lim_{y\to-\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$.

(iv) Τέλος, θεωρούμε τον περιορισμό της cot στο $(0,\pi)$. Η $\cot : (0,\pi) \to \mathbf{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0,\pi)$. Επειδή $\lim_{x\to0+} \cot x = +\infty$, $\lim_{x\to\pi-} \cot x = -\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $\mathbf{R}$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο-συνεφαπτόμενη**, την οποία συμβολίζουμε

$$\operatorname{arccot} \ : \mathbf{R} \to (0,\pi)$$

και είναι *συνεχής* και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$ με σύνολο τιμών το $(0,\pi)$. Επίσης: $\lim_{y\to-\infty} \operatorname{arccot} y = \pi$ και $\lim_{y\to+\infty} \operatorname{arccot} y = 0$.

Ασκήσεις.

1. Ποια είναι τα σύνολα τιμών των $-2x^3 + x^2 - 5x + 6$, $x^4 - 2x^2 + 7$, $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$;

2. Βρείτε τα σύνολα τιμών των: (i) $\sin x$, $\cos(5x)$ στο $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, (ii) $x + \frac{1}{x}$ στα $(-\infty,-1]$, $[-1,0)$, $(0,1]$, $[1,+\infty)$, (iii) $e^x + x$, $\frac{1}{1+e^{2x}}$ στο $\mathbf{R}$.

3. Πόσες *ακριβώς* λύσεις έχει η εξίσωση $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3} = c$;

4. Έστω οι $x^2 + 2x$ στο $[0,1]$, $\frac{1}{x}$ στο $(0,1]$ και $\frac{1}{x^2+1}$ στο $[0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι είναι γνησίως μονότονες και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τι συμπεραίνετε για τις αντίστροφες συναρτήσεις; Τέλος, βρείτε τους τύπους των αντίστροφων συναρτήσεων και ελέγξτε τα προηγούμενα συμπεράσματά σας.

5. Έστω η $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Αν $a_0a_n < 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $p(\xi) = 0$.

6. Έστω οι $f_1 : (-\infty,-1] \to \mathbf{R}$, $f_2 : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $f_3 : [1,+\infty) \to \mathbf{R}$ με τον ίδιο τύπο $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = x^3 - 3x$. (1) Αποδείξτε ότι οι f_1 , f_3 είναι γνησίως αύξουσες και η f_2 γνησίως φθίνουσα και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τι συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τη μονοτονία και τη συνέχεια των ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$; (2) Αποδείξτε ότι, αν η g είναι οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$, τότε ισχύει $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της. (3) Έστω διάστημα I, $g : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I ώστε $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε $y \in I$. Αν $I = [-2,+\infty)$, αποδείξτε ότι $g = {f_3}^{-1}$. Αν $I = (-\infty,2]$, αποδείξτε ότι $g = {f_1}^{-1}$. Αν, όμως, $I = [-2,2]$, αποδείξτε ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$ είτε $g = {f_3}^{-1}$. (4) Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

7. **Γενίκευση της Πρότασης 4.12**. Έστω $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ συνεχής στο (a, b). (1) Αν $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = -\infty$, αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή στο (a, b). (*Υπόδ.:* Δείτε την άσκηση 5 της ενότητας 4.4.) Αν u είναι η μέγιστη τιμή, αποδείξτε ότι $\{f(x) : x \in (a, b)\} = (-\infty, u]$. (2) Ποιο είναι το συμπέρασμα αν $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = +\infty$;

8. Έστω διάστημα I (οποιουδήποτε τύπου), $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I και $u = \sup\{f(x) : x \in I\}$, $l = \inf\{f(x) : x \in I\}$. Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών $\{f(x) : x \in I\}$ είναι ίσο με (i) το $[l, u]$, αν η f έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή, (ii) το $[l, u)$, αν η f έχει ελάχιστη τιμή αλλά όχι μέγιστη τιμή, (iii) το $(l, u]$, αν η f έχει μέγιστη τιμή αλλά όχι ελάχιστη τιμή και (iv) το (l, u), αν η f δεν έχει ούτε μέγιστη τιμή ούτε ελάχιστη τιμή.

9. Έστω $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ συνεχής στο (a, b). Έστω ότι υπάρχουν τα $A = \lim_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbf{R}}$, $B = \lim_{x\to b} f(x) \in \overline{\mathbf{R}}$ και $A < B$. (i) Αν $A < f(x) < B$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι $\{f(x) : a < x < b\} = (A, B)$. (ii) Αν $f(x) < B$ για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) \leq A$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή στο (a, b). Αν l είναι η ελάχιστη τιμή, αποδείξτε ότι $\{f(x) : a < x < b\} = [l, B)$. (iii) Αν $A < f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $B \leq f(x_0)$, αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή στο (a, b). Αν u είναι η μέγιστη τιμή, αποδείξτε ότι $\{f(x) : a < x < b\} = (A, u]$. (iv) Αν υπάρχουν ${x_0}', {x_0}'' \in (a, b)$ ώστε $f({x_0}') \leq A$ και $B \leq f({x_0}'')$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο (a, b). Αν l είναι η ελάχιστη και u η μέγιστη τιμή, αποδείξτε ότι $\{f(x) : a < x < b\} = [l, u]$. (v) Ποια είναι τα αντίστοιχα συμπεράσματα αν $A > B$ ή $A = B$; Τι γίνεται αν το διάστημα είναι $(a, b]$ ή $[a, b)$ αντί (a, b);

4.6 Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$. Κατ' αρχάς ας θυμηθούμε τον ορισμό της συνέχειας της f στον $\xi \in A$. Η f χαρακτηρίζεται **συνεχής στον** ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι *ο δ_0 εξαρτάται από τον ϵ **και** από τον ξ*. Αυτό το εκφράζουμε συμβολικά ως εξής: $\delta_0 = \delta_0(\epsilon, \xi)$. Πράγματι: (i) επιλέγουμε τον ξ, στον οποίο θέλουμε να εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής, επιλέγουμε τον ϵ και (μετά τις συγκεκριμένες επιλογές των ξ, ϵ) επιλέγουμε τον κατάλληλο δ_0, (ii) αν επιλέξουμε διαφορετικό ξ ή ϵ, τότε μπορεί να πρέπει να επιλέξουμε διαφορετικό δ_0 από τον προηγούμενο.

Στην παρούσα ενότητα μας ενδιαφέρει η εξάρτηση του δ_0 από τον ξ.

Παράδειγμα: Έστω η $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Γνωρίζουμε ότι η f *είναι* συνεχής σε κάθε $\xi \in (0, +\infty)$. Επομένως, για κάθε $\xi \in (0, +\infty)$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|\frac{1}{x} - \frac{1}{\xi}| < \epsilon$ για κάθε $x > 0$, $|x - \xi| < \delta_0$. Θα δούμε ότι *δεν* υπάρχει επιλογή του δ_0 ανεξάρτητη του ξ.

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι (με προεπιλεγμένο $\epsilon > 0$) υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε, *για κάθε* $\xi \in (0, +\infty)$, να ισχύει $|\frac{1}{x} - \frac{1}{\xi}| < \epsilon$ για κάθε $x > 0$, $|x - \xi| < \delta_0$. Τότε, για κάθε $\xi \in (0, +\infty)$, ο $x = \xi + \frac{\delta_0}{2}$ ικανοποιεί τις $x > 0$, $|x - \xi| < \delta_0$ και, επομένως, πρέπει να ικανοποιεί και την $|\frac{1}{x} - \frac{1}{\xi}| < \epsilon$. Άρα (μετά από πράξεις) $\frac{\delta_0}{(2\xi + \delta_0)\xi} < \epsilon$. Συνοψίζουμε: για *κάθε* $\xi \in (0, +\infty)$ πρέπει να ισχύει $\frac{\delta_0}{(2\xi + \delta_0)\xi} < \epsilon$ *με τους ίδιους* δ_0, ϵ. Αυτό είναι αδύνατο!! Αν ο ξ πλησιάζει τον 0 (μέσα από το $(0, +\infty)$), ο $\frac{\delta_0}{(2\xi + \delta_0)\xi}$ αυξάνει απεριόριστα: πράγματι, $\lim_{\xi \to 0+} \frac{\delta_0}{(2\xi + \delta_0)\xi} = +\infty$. Επομένως, δε μπορεί να ισχύει $\frac{\delta_0}{(2\xi + \delta_0)\xi} < \epsilon$ για κάθε $\xi \in (0, +\infty)$.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **ομοιόμορφα συνεχής στο** A αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta_0 > 0$ *ώστε για κάθε* $\xi \in A$ *να ισχύει* $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ *για κάθε* $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$.

Από τη διατύπωση του ορισμού προκύπτει ότι ο δ_0 εξαρτάται μόνο από τον ϵ: επιλέγουμε $\epsilon > 0$ και κατόπιν βρίσκουμε κατάλληλο $\delta_0 > 0$ ώστε η ανισότητα $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ να ισχύει (με τον ίδιο δ_0) για κάθε $\xi \in A$ και κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Ιδού μια μικρή απλοποίηση στη διατύπωση του ορισμού: *η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x, \xi \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$*. Τέλος, για να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύμβολο για τις τιμές x, ξ της ανεξάρτητης μεταβλητής, ξαναδιατυπώνουμε τον ορισμό: η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta_0 > 0$ *ώστε* $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ *για κάθε* $x', x'' \in A$, $|x' - x''| < \delta_0$.

Είναι σαφές ότι, αν η $f : A \to \mathbf{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, τότε είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in A$. Όμως, δεν ισχύει το αντίστροφο.

Παραδείγματα: (1) Η $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.

(2) Έστω η $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Έστω $\epsilon > 0$. Ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ αρκεί να ισχύει $|x' - x''| < \frac{\epsilon}{3}$. Ορίζουμε $\delta_0 = \frac{\epsilon}{3} > 0$. Τότε, για κάθε $x', x'' \in \mathbf{R}$, $|x' - x''| < \delta_0$ ισχύει $|x' - x''| < \frac{\epsilon}{3}$ και, επομένως, $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Θεώρημα 4.5 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. Άρα υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x', x'' \in [a, b]$, $|x' - x''| < \delta$ ώστε $|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon_0$. Άρα για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχουν ${x_n}', {x_n}'' \in [a, b]$, $|{x_n}' - {x_n}''| < \frac{1}{n}$ ώστε $|f({x_n}') - f({x_n}'')| \geq \epsilon_0$.

Η $({x_n}')$ είναι φραγμένη, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2, υπάρχει υποακολουθία $({x_{n_k}}')$ που συγκλίνει σε κάποιον ξ: $\lim_{k \to +\infty} {x_{n_k}}' = \xi$. Επειδή $a \leq {x_{n_k}}' \leq b$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, είναι $a \leq \xi \leq b$. Επειδή $\xi \in [a, b]$, η f είναι συνεχής στον ξ. Άρα, από το $\lim_{k \to +\infty} {x_{n_k}}' = \xi$, συνεπάγεται $\lim_{k \to +\infty} f({x_{n_k}}') = f(\xi)$. Επειδή $|{x_{n_k}}' - {x_{n_k}}''| < \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $\lim_{k \to +\infty}({x_{n_k}}' - {x_{n_k}}'') = 0$. Σε συνδυασμό με το $\lim_{k \to +\infty} {x_{n_k}}' = \xi$, προκύπτει $\lim_{k \to +\infty} {x_{n_k}}'' = \xi$. Και πάλι, επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, συνεπάγεται $\lim_{k \to +\infty} f({x_{n_k}}'') = f(\xi)$.

Τέλος, από τις $\lim_{k\to+\infty} f({x_{n_k}}') = f(\xi)$, $\lim_{k\to+\infty} f({x_{n_k}}'') = f(\xi)$ συνεπάγεται $\lim_{k\to+\infty}\big(f({x_{n_k}}') - f({x_{n_k}}'')\big) = 0$. Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ισχύει $|f({x_{n_k}}') - f({x_{n_k}}'')| \geq \epsilon_0$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. $\natural$

Ασκήσεις.

1. (1) Αποδείξτε ότι οι x, $|x|$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbf{R}$. (2) Αποδείξτε ότι η x^2 δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$. (3) Αποδείξτε ότι η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

2. Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x \in (1,2], \end{cases}$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1) \cup (1,2]$.

3. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $\rho > 0$, $M \geq 0$ ώστε $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in A$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αν η f ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις, τότε χαρακτηρίζεται **Hölder συνεχής** στο A με **εκθέτη Hölder** ρ. Στην ειδική περίπτωση $\rho = 1$, η f χαρακτηρίζεται **Lipschitz συνεχής** στο A.

4. Έστω $A \subseteq B$, $f : B \to \mathbf{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο A.

5. Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbf{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και η g ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

6. Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς στο A. (1) Αποδείξτε ότι η $f + g : A \to \mathbf{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. (2) Αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι οι f, g είναι φραγμένες, αποδείξτε ότι η $fg : A \to \mathbf{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. (3) Βρείτε A και $f, g : A \to \mathbf{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς στο A ώστε η fg να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

7. Έστω $a < b < c$, $f : (a,c) \to \mathbf{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στα $(a,b]$, $[b,c)$, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο (a,c).

8. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε $({x_n}')$, $({x_n}'')$ στο A με την ιδιότητα $\lim_{n\to+\infty}({x_n}' - {x_n}'') = 0$ ισχύει $\lim_{n\to+\infty}(f({x_n}') - f({x_n}'')) = 0$.

9. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αν η (x_n) στο A είναι ακολουθία Cauchy, αποδείξτε ότι η $(f(x_n))$ είναι κι αυτή ακολουθία Cauchy. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε από τη συνάρτηση x^2;

10. Έστω $f : [a,b) \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b)$. (1) Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b)$ αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to b} f(x)$ και είναι αριθμός. (*Υπόδ.:* Θεώρημα 3.2 και άσκηση 9.) (2) Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b)$ αν και μόνο αν υπάρχει $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ ώστε $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b)$.
    Τι γίνεται αν έχουμε διάστημα $(a,b]$ ή (a,b) αντί $[a,b)$.

11. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $\mathbf{R}$ και περιοδική. Δηλαδή υπάρχει $\tau > 0$ ώστε $f(x+\tau) = f(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$. (*Υπόδ.:* Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 2\tau]$. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρήστε τον αντίστοιχο $\delta_0{}' > 0$ για το $[0, 2\tau]$ και τον $\delta_0 = \min\{\delta_0{}', \tau\} > 0$. Για κάθε x', x'', $|x' - x''| < \delta_0$, υπάρχουν $x_1{}', x_1{}'' \in [0, 2\tau]$, $|x_1{}' - x_1{}''| < \delta_0$ ώστε $f(x') = f(x_1{}')$, $f(x'') = f(x_1{}'')$.)

12. Αποδείξτε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.5. (*Υπόδ.:* Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) < \lambda < f(b)$. Για κάθε $k \in \mathbf{N}$ θεωρήστε το $\delta_0 > 0$ που αντιστοιχεί στο $\epsilon = \frac{1}{k}$ βάσει του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας. Χωρίστε το $[a, b]$ με σημεία $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ σε διαστήματα μήκους $< \delta_0$. Έστω n_k ο μεγαλύτερος από τους $1, \ldots, n-1$ ώστε $f(x_{n_k}) \leq \lambda$. Τότε $f(x_{n_k}) \leq \lambda < f(x_{n_k+1})$. Άρα $|f(x_{n_k}) - \lambda| < \frac{1}{k}$ και επομένως $\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lambda$. Εφαρμόστε το Θεώρημα 2.2 στην (x_{n_k}).)

13. (Συνέχεια της άσκησης 13 της ενότητας 3.1.) Έστω κλειστό και φραγμένο σύνολο A και $f : A \to \mathbf{R}$ συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. (*Υπόδ.:* Μιμηθείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.5 και χρησιμοποιήστε το (8) της άσκησης 13 της ενότητας 3.1.)

14. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a, b \geq 0$ ώστε $|f(x)| \leq a|x| + b$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

15. Έστω φραγμένο σύνολο A και $f : A \to \mathbf{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

16. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $\mathbf{R}$, αύξουσα και φραγμένη. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Κεφάλαιο 5

Παράγωγοι.

5.1 Παράγωγος.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$. Τότε ορίζεται η $g : A \setminus \{\xi\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Υποθέτουμε ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, δηλαδή ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$, $0 < |x - \xi| < \delta$. Επειδή, προφανώς, κάθε τέτοιος x είναι $\neq \xi$, μπορούμε να πούμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A \setminus \{\xi\}$, $0 < |x-\xi| < \delta$. Άρα ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης και του $A \setminus \{\xi\}$. Επομένως, έχει νόημα να εξετάσουμε την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Το όριο αυτό, αν υπάρχει, ονομάζεται **παράγωγος της f στον** ξ και συμβολίζεται

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} .$$

Από τον ορισμό της ως όριο, η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι στοιχείο του $\overline{\mathbf{R}}$. Αν $f'(\xi) \in \mathbf{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσιμη στον** ξ.

Προσοχή: Όταν γράφουμε $f'(\xi)$ χωρίς άλλη επεξήγηση, θα εννοούμε ότι η $f'(\xi)$ είναι στοιχείο του $\overline{\mathbf{R}}$.

Παραδείγματα: (1) Είναι ${p_2}'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x + 1) = 2$. Άρα η p_2 είναι παραγωγίσιμη στον 1.

(2) Είναι ${p_{\frac{1}{3}}}'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty$. Άρα η $p_{\frac{1}{3}}$ έχει παράγωγο στον 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στον 0.

Μερικές φορές το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ το γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} ,$$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $h = x - \xi$.

Παρατηρήστε ότι το $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι πάντοτε απροσδιόριστη μορφή διότι το όριο του παρονομαστή είναι 0. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε το όριο του αριθμητή είναι κι αυτό 0 και προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$. Αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $A\cap(-\infty,\xi)$ και υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε αυτό ονομάζεται **αριστερή (πλευρική) παράγωγος της f στον** ξ. Ομοίως, αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $A\cap(\xi,+\infty)$ και υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε αυτό ονομάζεται **δεξιά (πλευρική) παράγωγος της f στον** ξ. Συμβολίζουμε

$$f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,,\qquad f'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,.$$

Τα παρακάτω είναι προφανή. (i) Έστω ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $A\cap(-\infty,\xi)$ και του $A\cap(\xi,+\infty)$. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχουν οι $f'_-(\xi)$, $f'_+(\xi)$ και είναι ίσες και, σ΄ αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi)=f'_-(\xi)=f'_+(\xi)$. (ii) Έστω ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $A\cap(-\infty,\xi)$ αλλά όχι του $A\cap(\xi,+\infty)$. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και, σ΄ αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi)=f'_-(\xi)$. (iii) Έστω ότι ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $A\cap(\xi,+\infty)$ αλλά όχι του $A\cap(-\infty,\xi)$. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και, σ΄ αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi)=f'_+(\xi)$.

Παραδείγματα: (1) Έστω η $f(x)=|x|$. Είναι $f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$ και $f'_-(0)=\lim_{x\to0-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$. Άρα η f δεν έχει παράγωγο στον 0.

(2) Έστω η $f(x)=\sqrt{|x|}$. Τώρα $f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ και $f'_-(0)=\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{1}{-\sqrt{|x|}}=-\infty$. Άρα η f δεν έχει παράγωγο στον 0.

(3) Έστω η $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,, & x>0,\\ 0\,, & x=0,\\ -\sqrt{-x}\,, & x<0.\end{cases}$ Υπολογίζουμε $f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$. Επίσης, $f'_-(0)=\lim_{x\to0-}\frac{-\sqrt{-x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{1}{\sqrt{-x}}=+\infty$. Άρα η f έχει παράγωγο στον 0 ίση με $f'(0)=f'_+(0)=f'_-(0)=+\infty$.

(4) Έστω η $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}\,, & x\neq0,\\ 0\,, & x=0.\end{cases}$ Τώρα, η $f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0+}\sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. Η $f'_-(0)=\lim_{x\to0-}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0-}\sin\frac{1}{x}$, επίσης, δεν υπάρχει. Άρα η f δεν έχει δεξιά ούτε αριστερή παράγωγο στον 0.

(5) Είναι ${p_{\frac{1}{2}}}'(0)={p_{\frac{1}{2}}}'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

Έστω $f : A\to\mathbf{R}$ και $B\subseteq A$. Αν για κάθε $\xi\in B$ υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε λέμε ότι **η f έχει παράγωγο στο** B. Αν για κάθε $\xi\in B$ υπάρχει η $f'(\xi)$ και είναι αριθμός, τότε λέμε ότι **η f είναι παραγωγίσιμη στο** B.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{\xi \in A : f'(\xi) \in \mathbf{R}\}$, δηλαδή το σύνολο όλων των ξ στο πεδίο ορισμού της f στους οποίους αυτή είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται η **παράγωγος συνάρτηση** της f με πεδίο ορισμού το B και συμβολίζεται

$$f' : B \to \mathbf{R}.$$

Ασκήσεις.

1. Έστω οι $f(x) = 2$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$, $f(x) = \sqrt[5]{x}\,$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 2x\,, & x \leq 0, \\ -3x\,, & x \geq 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 2x^2\,, & x \leq 0, \\ -3x^2\,, & x \geq 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\,, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{-x}\,, & x \leq 0, \\ \sqrt[3]{x}\,, & x \geq 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ Βρείτε, αν υπάρχουν, τις $f'(0)$, $f'_+(0)\,$, $f'_-(0)\,$.

2. Έστω $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & x \leq 0, \\ ax + b, & x > 0. \end{cases}$ Βρείτε τους a, b ώστε να υπάρχει η $f'(0)$. Κάντε το ίδιο για την $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & x < 0, \\ ax + b, & x \geq 0. \end{cases}$

3. Έστω $g : (a, \xi] \to \mathbf{R}$, $h : [\xi, b) \to \mathbf{R}$, $g(\xi) = h(\xi)$ και $g'(\xi) = h'(\xi)$. Θεωρήστε την $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} g(x)\,, & a < x \leq \xi, \\ h(x)\,, & \xi \leq x < b. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(\xi) = g'(\xi) = h'(\xi)$.

4. Βρείτε τα σημεία στα οποία είναι παραγωγίσιμες οι $[x]$, $x - [x]$, $\left|x - [x] - \frac{1}{2}\right|$, $\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)^2$.

5. Έστω η $f(x) = \begin{cases} x^2 (-1)^{[\frac{1}{|x|}] - 1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0) = 0$.

6. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής στον 0 και $0 < \mu < 1$. Αν $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(\mu x)}{x} = b \in \mathbf{R}$, αποδείξτε ότι υπάρχει η $f'(0)$ και υπολογίστε την τιμή της.

5.2 Παραδείγματα παραγώγων, Ι.

Ας θυμηθούμε ότι δυο συναρτήσεις $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ χαρακτηρίζονται *ίσες* και γράφουμε $f = g$ αν $A = B$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A = B$.

Α. Για τη σταθερή συνάρτηση c είναι $c'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{c - c}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} 0 = 0$ για κάθε ξ. Επομένως, η παράγωγος συνάρτηση είναι η σταθερή 0:

$$c' = 0.$$

Β. Η παράγωγος της p_1 σε κάθε ξ είναι $p_1{}'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{x-\xi}{x-\xi} = 1$. Δηλαδή, η παράγωγος συνάρτηση είναι η σταθερή 1:

$$p_1{}' = 1.$$

Γ. Θα αποδείξουμε ότι, για κάθε $a \in \mathbf{Q}$, $a \neq 1$,

$$p_a{}' = a p_{a-1}\,.$$

Αποφεύγουμε να γράψουμε τον τύπο $p_a{}' = ap_{a-1}$ στην περίπτωση $a = 1$. Ο τύπος $p_1{}' = 1p_0$ δεν είναι ακριβώς σωστός. Το αριστερό μέλος είναι η σταθερή συνάρτηση 1 και ορίζεται στο $\mathbf{R}$ ενώ το δεξιό μέλος είναι η συνάρτηση p_0 και ορίζεται στο $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται στο κοινό μέρος των πεδίων ορισμού τους αλλά δεν έχουν ίδιο πεδίο ορισμού.

Έστω, κατ' αρχάς, $a = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $\gcd(m,n) = 1$, $m > n$ και n περιττός. Δηλαδή, $a > 1$ και η ανάγωγη μορφή του a έχει περιττό παρονομαστή. Τότε είναι $a-1 > 0$ και, επίσης, η ανάγωγη μορφή του $a-1$ έχει περιττό παρονομαστή. Άρα $p_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και $p_{a-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Αν $\xi = 0$, είναι $p_a{}'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[n]{x})^m - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0}(\sqrt[n]{x})^{m-n} = 0$. Επίσης, $ap_{a-1}(0) = 0$, οπότε $p_a{}'(0) = ap_{a-1}(0)$. Αν $\xi \neq 0$, θα χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \sqrt[n]{x}$. Τότε $x^a = y^m$ και ορίζουμε $\eta = \sqrt[n]{\xi}$, οπότε $\xi^a = \eta^m$. Τότε $p_a{}'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{x^a - \xi^a}{x-\xi} = \lim_{y\to\eta} \frac{y^m-\eta^m}{y^n-\eta^n} = \lim_{y\to\eta} \frac{y^{m-1}+y^{m-2}\eta+\cdots+y\eta^{m-2}+\eta^{m-1}}{y^{n-1}+y^{n-2}\eta+\cdots+y\eta^{n-2}+\eta^{n-1}} = \frac{m\eta^{m-1}}{n\eta^{n-1}} = \frac{m}{n}\eta^{m-n} = \frac{m}{n}\big(\sqrt[n]{\xi}\big)^{m-n} = a\xi^{a-1} = ap_{a-1}(\xi)\,.$

Άρα το πεδίο ορισμού της $p_a{}'$ είναι το $\mathbf{R}$ και οι $p_a{}'$, ap_{a-1} ταυτίζονται στο κοινό πεδίο ορισμού τους.

Τώρα, έστω $a = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $\gcd(m,n) = 1$, $0 < m < n$ και n περιττός. Δηλαδή, $0 < a < 1$ και η ανάγωγη μορφή του a έχει περιττό παρονομαστή. Άρα $p_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και $p_{a-1} : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$. Αν $\xi = 0$, είναι $p_a{}'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[n]{x})^m - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0}(\sqrt[n]{x})^{m-n}$ και αυτό είναι $+\infty$, αν ο $m-n$ είναι άρτιος, ή δεν υπάρχει, αν ο $m-n$ είναι περιττός. Άρα δεν ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση της p_a στον 0. Αν $\xi \neq 0$, με τον ίδιο, όπως πριν, υπολογισμό του ορίου, βρίσκουμε $p_a{}'(\xi) = ap_{a-1}(\xi)$. Άρα το πεδίο ορισμού της $p_a{}'$ είναι το $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ και οι $p_a{}'$, ap_{a-1} ταυτίζονται στο κοινό πεδίο ορισμού τους.

Κατόπιν, έστω $a = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $\gcd(m,n) = 1$, $m \leq 0$ και n περιττός. Δηλαδή, $a \leq 0$ και η ανάγωγη μορφή του a έχει περιττό παρονομαστή. Άρα $p_a : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$ και $p_{a-1} : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$. Τώρα, η $p_a{}'(0)$ δεν έχει καν νόημα και, αν $\xi \neq 0$, με τον ίδιο υπολογισμό του ορίου, αποδεικνύουμε ότι $p_a{}'(\xi) = ap_{a-1}(\xi)$. Άρα, και πάλι, το πεδίο ορισμού της $p_a{}'$ είναι το $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ και οι $p_a{}'$, ap_{a-1} ταυτίζονται στο κοινό πεδίο ορισμού τους.

Η περίπτωση που απομένει είναι όταν $a = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $\gcd(m,n) = 1$ και ο n είναι άρτιος. Η μοναδική ουσιαστική αλλαγή από τις προηγούμενες περιπτώσεις είναι ότι, τώρα, το πεδίο ορισμού των p_a, p_{a-1} δεν περιέχει το $(-\infty, 0)$. Κατά τα άλλα, επαναλαμβάνοντας τους ίδιους υπολογισμούς, βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της $p_a{}'$ είναι το $[0,+\infty)$, αν $a > 1$, ή το $(0,+\infty)$, αν $a < 1$, και ότι οι $p_a{}'$, ap_{a-1} ταυτίζονται στο κοινό πεδίο ορισμού τους.

Δ. Θα υπολογίσουμε τις παραγώγους συναρτήσεις των $\sin x$, $\cos x$.

Είναι $\cos' \xi = \lim_{x\to\xi} \frac{\cos x - \cos \xi}{x-\xi} = -\lim_{x\to\xi} \frac{\sin\frac{x-\xi}{2}}{\frac{x-\xi}{2}} \sin \frac{x+\xi}{2} = -\sin \xi$ και $\sin' \xi = \lim_{x\to\xi} \frac{\sin x - \sin \xi}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{\sin\frac{x-\xi}{2}}{\frac{x-\xi}{2}} \cos \frac{x+\xi}{2} = \cos \xi$ για κάθε ξ. Άρα

$$\cos' x = -\sin x, \qquad \sin' x = \cos x.$$

Ασκήσεις.

1. Λύστε τις: $\sin' x = -1$, $\sin' x + \sin x = \sqrt{2}$, $\cos x \sin' x - \sin x \cos' x = 1$.
2. Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των $x^5 + 3x^2 - 4$, $(\sin x)^2$, $(\cos x)^3$, $\sin(2x)$, $\cos(7x)$.

5.3 Ιδιότητες των παραγώγων.

Πρόταση 5.1 *Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, $f(\xi) = g(\xi)$ και ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ. Αν υπάρχει η μια από τις $f'(\xi)$, $g'(\xi)$, τότε υπάρχει και η άλλη και $f'(\xi) = g'(\xi)$.*

Απόδειξη: Επειδή οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$ κοντά στον ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Η $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ και η σταθερή 1 ταυτίζονται στο $(0, +\infty)$. Άρα $f'(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (0, +\infty)$. Ομοίως, η f και η σταθερή -1 ταυτίζονται στο $(-\infty, 0)$. Άρα $f'(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (-\infty, 0)$.

(2) Η $f(x) = \sqrt{|x|}$ ταυτίζεται στο $[0, +\infty)$ με την $p_{\frac{1}{2}}$. Άρα $f'(\xi) = {p_{\frac{1}{2}}}'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$ για κάθε $\xi \in (0, +\infty)$ και $f'_+(0) = {p_{\frac{1}{2}}}'(0) = +\infty$.

Πρόταση 5.2 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, δηλαδή $f'(\xi) \in \mathbf{R}$, τότε η f είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη: Επειδή $f(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$, είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = f'(\xi)0 + f(\xi) = f(\xi)$. $\natural$

Οι Προτάσεις 5.1, 5.2 ισχύουν, με τις προφανείς προσαρμογές, και για πλευρικές παραγώγους (και πλευρική συνέχεια).

Παραδείγματα: (1) Η $|x|$ είναι συνεχής στον 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στον 0. Άρα το αντίστροφο της Πρότασης 5.2 δεν ισχύει εν γένει.

(2) Στην Πρόταση 5.2 υποθέτουμε ότι $f'(\xi) \in \mathbf{R}$. Αν $f'(\xi) = \pm\infty$, η f δεν είναι κατ΄ ανάγκη συνεχής στον ξ. Η $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ δεν είναι ούτε δεξιά

ούτε αριστερά συνεχής στον 0. Όμως, $f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{1-0}{x-0} = +\infty$, $f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{-1-0}{x-0} = +\infty$, οπότε $f'(0) = +\infty$.

Πρόταση 5.3 *Αλγεβρικοί κανόνες*. *Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στον ξ, τότε οι $f+g, f-g, fg : A \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμες στον ξ. Αν, επιπλέον, $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $\frac{f}{g} : A \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Επίσης:*

$$(f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi), \quad (f-g)'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi),$$

$$(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi), \quad \Big(\frac{f}{g}\Big)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}\,.$$

Απόδειξη: Για την $f+g$ έχουμε $(f+g)'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{(f(x)+g(x))-(f(\xi)+g(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \big(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\big) = f'(\xi) + g'(\xi)$. Ομοίως για την $f-g$.

Για την fg: $(fg)'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)g(x)-f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \big(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} g(x) + f(\xi)\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\big) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)$.

Τέλος, για την $\frac{f}{g}$: $(\frac{f}{g})'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(\xi)}{g(\xi)}}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \big(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\frac{1}{g(x)} - \frac{f(\xi)}{g(\xi)g(x)}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\big) = f'(\xi)\frac{1}{g(\xi)} - \frac{f(\xi)}{(g(\xi))^2}g'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}$. ♮

Παραδείγματα: (1) Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $c \in \mathbf{R}$, τότε και η $cf : A \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και

$$(cf)'(\xi) = cf'(\xi).$$

Πράγματι, επειδή η σταθερή συνάρτηση c έχει παράγωγο μηδέν, $(cf)'(\xi) = c'f(\xi) + cf'(\xi) = 0f(\xi) + cf'(\xi) = cf'(\xi)$.

(2) Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Τότε $p'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$ για κάθε x. Άρα η παράγωγος πολυωνυμικής συνάρτησης βαθμού n είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n-1$.

(3) Έστω ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Τότε, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της r, δηλαδή για κάθε x ώστε $q(x) \neq 0$, είναι $r'(x) = \frac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{(q(x))^2}$. Άρα η παράγωγος ρητής συνάρτησης είναι ρητή συνάρτηση.

(4) Είναι $\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$ για κάθε $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. Επίσης, $\cot' x = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2}$ για κάθε $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. Άρα

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2}\,, \qquad \cot' = -\frac{1}{\sin^2}\,.$$

Η επόμενη ιδιότητα είναι ιδιαιτέρως σημαντική για τον υπολογισμό παραγώγων.

Πρόταση 5.4 *Κανόνας αλυσίδας*. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $\eta = f(\xi) \in B$ σημείο συσσώρευσης του B. Αν η*

f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και η g παραγωγίσιμη στον η, τότε η $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta) f'(\xi) = g'\big(f(\xi)\big) f'(\xi).$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $G : B \to \mathbf{R}$, $G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}, & y \in B,\, y \neq \eta, \\ g'(\eta), & y = \eta. \end{cases}$

Η G είναι συνεχής στον η διότι $\lim_{y\to\eta} G(y) = \lim_{y\to\eta} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} = g'(\eta) = G(\eta)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, είναι συνεχής στον ξ, οπότε και η $G \circ f$ είναι συνεχής στον ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi} G(f(x)) = G(f(\xi)) = G(\eta) = g'(\eta)$. Επίσης, $g(y) - g(\eta) = G(y)(y-\eta)$ για κάθε $y \in B$.

Άρα είναι $(g \circ f)'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{G(f(x))(f(x)-f(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} G(f(x)) \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = g'(\eta) f'(\xi)$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Έστω η $h(x) = \sin(x^2+3)$. Θα υπολογίσουμε την $h'(2)$. Θεωρούμε τις $f(x) = x^2 + 3$ και $g(y) = \sin y$. Τότε $h = g \circ f$ και, επομένως, $h'(2) = g'\big(f(2)\big) f'(2) = g'(7) f'(2) = 4\cos 7$. Γενικά: $h'(x) = g'\big(f(x)\big) f'(x) = \cos\big(f(x)\big) f'(x) = 2x\cos(x^2+3)$ για κάθε x.

(2) Έστω η $h(x) = (\sin x)^n$. Θεωρούμε τις $f(x) = \sin x$ και $g(y) = y^n$. Τότε $h = g \circ f$, οπότε $h'(x) = g'\big(f(x)\big) f'(x) = n(\sin x)^{n-1} \cos x$ για κάθε x.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα στο A και ότι υπάρχει η $f'(\xi)$. Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$ και, επομένως, $f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$. Ομοίως, αν η f είναι φθίνουσα στο A και υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε $f'(\xi) \leq 0$.

Αν η συνάρτηση είναι μονότονη στο $A \cap (-\infty, \xi]$ ή στο $A \cap [\xi, +\infty)$, έχουμε ανάλογα συμπεράσματα για το πρόσημο των αντίστοιχων $f'_-(\xi)$ ή $f'_+(\xi)$.

Πρόταση 5.5 ***Κανόνας αντίστροφης συνάρτησης***. *Έστω διάστημα I, $\xi \in I$, $f : I \to \mathbf{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο I και $\eta = f(\xi)$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα, έστω J, ότι, φυσικά, $\eta \in J$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο J. Αν υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε υπάρχει και η $(f^{-1})'(\eta)$ και*

$$\big(f^{-1}\big)'(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{f'(\xi)}, & f'(\xi) \in \mathbf{R},\, f'(\xi) > 0, \\ 0, & f'(\xi) = +\infty, \\ +\infty, & f'(\xi) = 0. \end{cases}$$

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύουν τα ίδια με < 0 αντί > 0 και $-\infty$ αντί $+\infty$.

Απόδειξη: Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από y σε $x = f^{-1}(y)$, προκύπτει ότι $(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y\to\eta} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)}{y-\eta} = \lim_{x\to\xi} \frac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)} = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}$. Το τελευταίο όριο είναι ίσο με $\frac{1}{f'(\xi)}$, αν $f'(\xi) \in \mathbf{R}$, $f'(\xi) > 0$, και ίσο με 0 αν

$f'(\xi) = +\infty$. Στην περίπτωση $f'(\xi) = 0$, τότε, επειδή $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > 0$ για κάθε $x \in I$, $x \neq \xi$, το τελευταίο όριο είναι $+\infty$. $\natural$

Στην άσκηση 10 υπάρχει μια άλλη παραλλαγή του κανόνα αντίστροφης συνάρτησης.

Παραδείγματα: (1) Η $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με σύνολο τιμών το $[-1,1]$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-1,1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Θα υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση της arcsin.

Έστω $\xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\eta \in [-1,1]$, $\eta = \sin\xi$, $\xi = \arcsin\eta$. Είναι $\sin'\xi = \cos\xi = \sqrt{1-(\sin\xi)^2} = \sqrt{1-\eta^2} \neq +\infty$. Παρατηρήστε ότι από τις τιμές $\cos\xi = \pm\sqrt{1-(\sin\xi)^2}$ επιλέξαμε αυτήν με το $+$ διότι $\cos\xi \geq 0$ για κάθε $\xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Αν $\sqrt{1-\eta^2} > 0$, τότε $\arcsin'\eta = \frac{1}{\sin'\xi} = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}$. Αν $\sqrt{1-\eta^2} = 0$, τότε $\arcsin'\eta = +\infty$. Άρα

$$\arcsin'\eta = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}, & -1 < \eta < 1, \\ +\infty, & \eta = \pm 1. \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού της $\arcsin'$ είναι το $(-1,1)$.

(2) Η $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0,\pi]$ με σύνολο τιμών το $[-1,1]$ και η αντίστροφή της είναι η $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[-1,1]$ με σύνολο τιμών το $[0,\pi]$. Ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε ότι

$$\arccos'\eta = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}, & -1 < \eta < 1, \\ -\infty, & \eta = \pm 1. \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού της $\arccos'$ είναι το $(-1,1)$.

(3) Η $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbf{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με σύνολο τιμών το $\mathbf{R}$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $\arctan : \mathbf{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbf{R}$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Έστω $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\eta \in \mathbf{R}$, $\eta = \tan\xi$, $\xi = \arctan\eta$. Είναι $\tan'\xi = \frac{1}{(\cos\xi)^2} \neq 0, +\infty$, οπότε $\arctan'\eta = \frac{1}{\tan'\xi} = (\cos\xi)^2 = \frac{1}{1+(\tan\xi)^2} = \frac{1}{1+\eta^2}$. Άρα

$$\arctan'\eta = \frac{1}{1+\eta^2}.$$

Το πεδίο ορισμού της $\arctan'$ είναι το $\mathbf{R}$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των $\sin(x^3)$, $\sqrt[4]{1+\cos x}$, $\arcsin(\cos x)$, $\arcsin(\sin x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\sin(\arcsin x)$.

2. (1) Έστω η $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}\,, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Βρείτε την f'. (2) Έστω η $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}\,, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Βρείτε την f' και δείτε αν είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$; (3) Γενικεύστε ως εξής. Για κάθε a θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} x^a\sin\frac{1}{x}\,, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Για ποιές τιμές του a είναι η f συνεχής στο $\mathbf{R}$; παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$; είναι η f' συνεχής στο $\mathbf{R}$;

3. Από την $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} - 1$ βρείτε ανάλογες ισότητες για τα $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$, $x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^2x^n$.

4. Έστω $f_1, \ldots, f_n : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι $f_1, \ldots, f_n$ είναι παραγωγίσιμες στον ξ, $f_1(\xi) \neq 0, \ldots, f_n(\xi) \neq 0$ και $g = f_1 \cdots f_n : A \to \mathbf{R}$, αποδείξτε ότι $\frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{{f_1}'(\xi)}{f_1(\xi)} + \cdots + \frac{{f_n}'(\xi)}{f_n(\xi)}$.

5. Για ποιες ρητές συναρτήσεις r ισχύει $\lim_{x\to+\infty} \frac{xr'(x)}{r(x)} = 0$;

6. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα διάστημα (a, b) και καμιά ρητή συνάρτηση r ώστε $r'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (a, b)$.

7. Αποδείξτε ότι η παράγωγος άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση και η παράγωγος περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η παράγωγος περιοδικής συνάρτησης είναι περιοδική συνάρτηση.

8. Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ συνεχής στο A ώστε $(f(x))^2 + 4f(x) = x^3 - 5x^2 - 5x + 21$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι $(2f(\xi) + 4)f'(\xi) = 3\xi^2 - 10\xi - 5$ για κάθε $\xi \in A$ στον οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Βρείτε το μέγιστο δυνατό A, αποδείξτε ότι υπάρχουν τέσσερις τέτοιες f και βρείτε τους τύπους τους και τους τύπους των αντίστοιχων f'.

9. Έστω η $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 7$. Αποδείξτε (με στοιχειώδη τρόπο) ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f; Χωρίς να βρείτε την f^{-1}, αποδείξτε ότι $\big(f^{-1}\big)'(y) = \begin{cases} \frac{1}{3(f^{-1}(y)+1)^2}\,, & y \neq 6, \\ +\infty, & y = 6. \end{cases}$ Τέλος, βρείτε την f^{-1}, το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της και επαληθεύστε την παραπάνω ισότητα.

10. Έστω $f : A \to B$ ένα-προς-ένα στο A και επί του B και η αντίστροφη $f^{-1} : B \to A$. Έστω $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Τέλος, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, $f'(\xi) \neq 0$ και ότι η f^{-1} είναι συνεχής στον η. (i) Αποδείξτε ότι το $\eta = f(\xi)$ είναι σημείο συσσώρευσης του B. (ii) Αποδείξτε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στον η και $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$. (*Υπόδ.:* Μιμηθείτε την απόδειξη της Πρότασης 5.5.) (iii) Μερικές φορές συναντά κανείς την εξής 'απόδειξη' του (ii). *Από το ότι ισχύει* $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ *για κάθε* $x \in A$ *και την Πρόταση 5.4 συνεπάγεται* $(f^{-1})'(\eta)f'(\xi) = 1$. *Άρα υπάρχει η* $(f^{-1})'(\eta)$ *και* $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$. Πεισθήτε ότι υπάρχει λογικό

λάθος στην απόδειξη αυτή. Η αποτυχημένη αυτή απόδειξη λειτουργεί μόνον αν *υποθέσουμε* την ύπαρξη της $(f^{-1})'(\eta)$ και, τότε, αποδεικνύει την ισότητα $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$.

5.4 Παραδείγματα παραγώγων, ΙΙ.

Θα βρούμε τις παραγώγους συναρτήσεις τριών σημαντικών συναρτήσεων.

Α. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$ και η συνάρτηση $\log_a$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\log_a{}' x = \frac{1}{x \log a} \qquad (x > 0).$$

Εκτός από το γνωστό όριο $\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$, θα μας χρειαστεί και το $\lim_{t \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{t-1})^t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})} = \frac{1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e}$.

Επειδή η $\log_a$ είναι συνεχής, $\lim_{t \to +\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \log_a e = \frac{1}{\log a}$ και $\lim_{t \to +\infty} \log_a \left(1 - \frac{1}{t}\right)^t = \log_a \frac{1}{e} = -\log_a e = -\frac{1}{\log a}$.

Με αλλαγή μεταβλητής από h σε $t = \frac{x}{h}$, έχουμε $\lim_{h \to 0+} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \log_a(\frac{x+h}{x}) = \frac{1}{x} \lim_{t \to +\infty} \log_a(1 + \frac{1}{t})^t = \frac{1}{x \log a}$.

Με αλλαγή μεταβλητής από h σε $t = -\frac{x}{h}$, έχουμε $\lim_{h \to 0-} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{1}{h} \log_a(\frac{x+h}{x}) = -\frac{1}{x} \lim_{t \to +\infty} \log_a(1 - \frac{1}{t})^t = \frac{1}{x \log a}$.

Άρα $\log_a{}' x = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{x \log a}$.

Ειδική περίπτωση:

$$\log' x = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = \log|x|$. Θα αποδείξουμε ότι $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$. Πράγματι στο $(0, +\infty)$ είναι $f(x) = \log x$, οπότε $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Στο $(-\infty, 0)$ είναι $f(x) = \log(-x)$ και, από τον κανόνα αλυσίδας, $f'(x) = -\log'(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Β. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$, η $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ και η αντίστροφη $\exp_a : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$. Γράφουμε $x = \log_a y$ και $y = \exp_a x$ και από τον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης: $\exp_a{}' x = \frac{1}{\log_a{}' y} = y \log a = \log a \exp_a x$ για κάθε x. Με άλλα λόγια:

$$\exp_a{}' x = \log a \, \exp_a x \, .$$

Αν $a = 1$, η συνάρτηση $\exp_1$ είναι σταθερή 1 και έχει παράγωγο συνάρτηση τη σταθερή 0. Αλλά και η συνάρτηση $\log 1 \exp_1$ είναι σταθερή 0 και, επομένως, ισχύει ο τύπος της παραγώγου και σ' αυτήν την περίπτωση.

Ειδική περίπτωση:

$$\exp' x = \exp x.$$

Γ. Τέλος, έστω $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ και η συνάρτηση δύναμη p_a . Θα αποδείξουμε ότι

$$p_a{}' = a p_{a-1} \, .$$

Η ίδια ισότητα έχει ήδη αποδειχθεί στην περίπτωση $a \in \mathbf{Q}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας και την ισότητα $p_a(x) = x^a = \exp(\log(x^a)) = \exp(a \log x)$.

Έστω $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $a > 1$, οπότε $p_a : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ και $p_{a-1} : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$. Αν $x > 0$, τότε ${p_a}'(x) = \exp'(a \log x) \cdot a \cdot \log' x = \exp(a \log x) a \frac{1}{x} = x^a a \frac{1}{x} = a x^{a-1} = a p_{a-1}(x)$. Αν $x = 0$, είναι ${p_a}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^a - 0}{h-0} = \lim_{h\to 0} h^{a-1} = 0 = 0^{a-1} = a p_{a-1}(0)$. Άρα το πεδίο ορισμού της ${p_a}'$ είναι το $[0,+\infty)$ και οι ${p_a}'$, $a p_{a-1}$ ταυτίζονται στο κοινό πεδίο ορισμού τους.

Έστω $a \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, $0 < a < 1$, οπότε $p_a : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ και $p_{a-1} : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$. Αν $x > 0$, τότε, όπως πριν, ${p_a}'(x) = a p_{a-1}(x)$. Αν $x = 0$, είναι ${p_a}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^a - 0}{h-0} = \lim_{h\to 0} h^{a-1} = +\infty$. Άρα το πεδίο ορισμού της ${p_a}'$ είναι το $(0,+\infty)$ και οι ${p_a}'$, $a p_{a-1}$ ταυτίζονται στο κοινό πεδίο ορισμού τους.

Τέλος, έστω $a \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, $a < 0$, οπότε $p_a : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ και $p_{a-1} : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$. Αν $x > 0$, τότε, όπως πριν, ${p_a}'(x) = a p_{a-1}(x)$. Αν $x = 0$, η ${p_a}'(0)$ δεν έχει καν νόημα. Άρα το πεδίο ορισμού της ${p_a}'$ είναι το $(0,+\infty)$ και οι ${p_a}'$, $a p_{a-1}$ ταυτίζονται στο κοινό πεδίο ορισμού τους.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τις παραγώγους των $x \log x$, $\log\big|\log|x|\big|$, $\log\big(e^{3x^2+4} + \sin\big(x^{-\frac{5}{4}}\big)\big)$, $2^{x^2+1} \log_3(\sin x)$, $3^{-\sin(\log x)}$, $\sin\big(e^{\sqrt{\log(x^2+1)}}\big)$.

2. Παρατηρήστε ότι τα όρια $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^a - 1}{x-1}$ είναι γνωστές παράγωγοι γνωστών συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και ως *τέτοιες* υπολογίστε τα. Βάσει των προηγούμενων ορίων βρείτε τα $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^a - 1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^a - x^b}{x-1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^a - x^b}{\log x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{x(e^{ax} + e^{-ax})}$.

3. (1) Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στον ξ, αποδείξτε ότι και η $f^g : A \to \mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και υπολογίστε την $(f^g)'(\xi)$. (2) Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των x^x, $(x^2+1)^{\sin x}$, $|x-1|^{x-2}|x-2|^{x-1}$.

5.5 Τέσσερα σημαντικά θεωρήματα.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$. Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού μεγίστου** της f αν υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in N_\xi(\delta_0) \cap A$. Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ελαχίστου** της f αν υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in N_\xi(\delta_0) \cap A$. Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ακροτάτου** της f αν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου.

Είναι προφανές ότι, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) μεγίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού μεγίστου. Ομοίως, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) ελαχίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού ελαχίστου.

Θεώρημα 5.1 ***Fermat***. *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του $A \cap (-\infty, \xi)$ και του $A \cap (\xi, +\infty)$. Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'(\xi)$ είτε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Δηλαδή υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in N_\xi(\delta_0) \cap A$. Με άλλα λόγια, $f(x) \leq f(\xi)$ κοντά στον ξ. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η $f'(\xi) \in \overline{\mathbf{R}}$. Τότε $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$.

Ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x > \xi$. Άρα $f'(\xi) = f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$. Επίσης, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x < \xi$. Άρα $f'(\xi) = f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$. Άρα $f'(\xi) = 0$.

Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, τότε επαναλαμβάνουμε τους ίδιους συλλογισμούς με ≥ 0 αντί ≤ 0 και αντιστρόφως. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Ο 0 είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου της $f(x) = |x|$ αλλά δεν υπάρχει η $f'(0)$.

(2) Ο 0 είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου της p_2 και ${p_2}'(0) = 0$.

Το Θεώρημα του Fermat μας δίνει το εξής πρακτικό πόρισμα. *Αν θέλουμε να βρούμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να τα ψάξουμε ανάμεσα στα παρακάτω σημεία: τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος, τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο και τα σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με* 0. *Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.*

Παράδειγμα: Έστω η $f : [0, 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$. Τότε $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$, οπότε τα μόνα υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου της f είναι τα άκρα 0, 4 του $[0, 4]$ καθώς και οι 1, 2 στους οποίους μηδενίζεται η f'. Οι τιμές της f στα σημεία αυτά είναι 5, 37, 10, 9, αντιστοίχως.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 4]$, οπότε έχει οπωσδήποτε σημεία ολικού μεγίστου και ελαχίστου. Αυτά είναι οπωσδήποτε κάποια από τα παραπάνω τέσσερα σημεία και, επομένως, ο 0 είναι το σημείο ολικού ελαχίστου – οπότε η ελάχιστη τιμή της f είναι 5 – και ο 4 είναι το σημείο ολικού μεγίστου – οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι 37. Μένει να δούμε αν οι 1, 2 είναι σημεία τοπικού ακροτάτου ή όχι.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, οπότε έχει σημεία ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου στο $[0, 2]$. Αυτά είναι κάποια από τα τρία σημεία 0, 1, 2 – τα άκρα και το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η f'. Οι αντίστοιχες τιμές της f είναι 5, 10, 9, οπότε ο 1 είναι το σημείο ολικού μεγίστου στο $[0, 2]$ και, επομένως, είναι και σημείο τοπικού μεγίστου στο $[0, 4]$.

Ομοίως, επειδή οι τιμές στους 1, 2, 4 είναι 10, 9, 37, αντιστοίχως, ο 2 είναι σημείο ολικού ελαχίστου στο $[1, 4]$ και, επομένως, είναι σημείο τοπικού ελαχίστου στο $[0, 4]$.

Θα ξαναδούμε το παράδειγμα αυτό στην επόμενη ενότητα με πιο απλό τρόπο.

Το Θεώρημα του Fermat έχει το εξής συμπλήρωμα.

Πρόταση 5.6 (1) *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του $A \cap (\xi, +\infty)$. Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, αντιστοίχως.*
(2) *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του $A \cap (-\infty, \xi)$. Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'_-(\xi)$ είτε $f'_-(\xi) \geq 0$ ή $f'_-(\xi) \leq 0$, αντιστοίχως.*

Απόδειξη: (1) Έστω ξ σημείο τοπικού μεγίστου της f. Δηλαδή υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in N_\xi(\delta_0) \cap A$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η $f'_+(\xi)$.

Ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x > \xi$. Άρα $f'_+(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$.

Η περίπτωση τοπικού ελαχίστου στο (1) και το (2) έχουν ίδια απόδειξη. ♮

Υπενθυμίζουμε ότι, γράφοντας $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, περιλαμβάνουμε την περίπτωση $f'_+(\xi) = -\infty$ ή $f'_+(\xi) = +\infty$, αντιστοίχως. Ομοίως για την $f'_-(\xi)$.

Παραδείγματα: (1) Η $p_1 : [0, 2] \to \mathbf{R}$ έχει σημείο τοπικού ελαχίστου τον 0 και ${p_1}'_+(0) = 1 \geq 0$. Η p_1 έχει σημείο τοπικού μεγίστου τον 2 και ${p_1}'_-(2) = 1 \geq 0$.

(2) Η $p_{\frac{1}{2}} : [0, 2] \to \mathbf{R}$ έχει σημείο τοπικού ελαχίστου τον 0 και ${p_{\frac{1}{2}}}'_+(0) = +\infty \geq 0$.

Θεώρημα 5.2 ***Rolle***. *Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$, δηλαδή $f(x) = f(a) = f(b)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε $f'(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (a, b)$.

Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο $[a, b]$. Τότε είτε (i) η f έχει μια τουλάχιστον τιμή $> f(a) = f(b)$ είτε (ii) η f έχει μια τουλάχιστον τιμή $< f(a) = f(b)$. Εξετάζουμε τις δυο περιπτώσεις ξεχωριστά.
(i) Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ο οποίος είναι σημείο ολικού μεγίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μεγαλύτερη από $f(a) = f(b)$, είναι $f(\xi) > f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, $f'(\xi) = 0$.
(ii) Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ο οποίος είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μικρότερη από $f(a) = f(b)$, είναι $f(\xi) < f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, $f'(\xi) = 0$. ♮

Παράδειγμα: Η $f : [-2, \sqrt{3}] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ είναι συνεχής στο $[-2, \sqrt{3}]$, υπάρχει η $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$ για κάθε $x \in (-2, \sqrt{3})$ και $f(-2) = f(\sqrt{3}) = 1$. Άρα υπάρχει $\xi \in (-2, \sqrt{3})$ ώστε $3\xi^2 + 4\xi - 3 = 0$. Για να βρούμε τον ξ λύνουμε την εξίσωση $3x^2 + 4x - 3 = 0$. Οι λύσεις είναι οι $\frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}$ και ανήκουν και οι δυο στο $(-2, \sqrt{3})$.

Σε σχέση με το Θεώρημα του Rolle παρατηρούμε τα εξής. Κατ' αρχάς το θεώρημα δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης του ξ για τον οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$. Κατόπιν, αν η f δεν έχει παράγωγο έστω και σε ένα μόνο σημείο του (a, b), υπάρχει περίπτωση να μην υπάρχει κανένας $\xi \in (a, b)$ ωστε $f'(\xi) = 0$. Τέλος, οι υποθέσεις του θεωρήματος επιτρέπουν να είναι η παράγωγος $\pm\infty$ σε σημεία του (a, b). Το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει.

Παραδείγματα: (1) Η $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = f(1) = 1$. Όμως, δεν υπάρχει κανένας $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

(2) Έστω η $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{7}{3}}$. Είναι $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$, αν $x \neq 0$, και $f'(0) = +\infty$. Επίσης, $f(-1) = f(1) = 0$ και $f'(\xi) = 0$ για $\xi = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Θεώρημα 5.3 ***Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange).*** *Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Απόδειξη: Ορίζουμε την $h : [a, b] \to \mathbf{R}$, $h(x) = (b-a)f(x) - (f(b) - f(a))x$. Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Επίσης, $h(a) = h(b)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $h'(\xi) = 0$. Συνεπάγεται $(b - a)f'(\xi) - (f(b) - f(a)) = 0$ και, επομένως, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$. $\natural$

Παράδειγμα: Η $p_{\frac{1}{3}} : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$. Επίσης, $p_{\frac{1}{3}}{}'(0) = +\infty$ και $p_{\frac{1}{3}}{}'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $\frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}} = \frac{1^{\frac{1}{3}} - (-1)^{\frac{1}{3}}}{1-(-1)} = 1$. Λύνοντας, βρίσκουμε $\xi = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Θεώρημα 5.4 ***Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy).*** *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε*

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(\xi).$$

Απόδειξη: Έστω $h : [a, b] \to \mathbf{R}$, $h(x) = (g(b)-g(a))f(x)-(f(b)-f(a))g(x)$. Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και $h(a) = h(b)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $h'(\xi) = 0$, οπότε $(g(b) - g(a))f'(\xi) - (f(b) - f(a))g'(\xi) = 0$. $\natural$

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα του Rolle είναι απλή εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange) και ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) είναι απλή εφαρμογή (με $g(x) = x$) του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Cauchy). Από την άλλη μεριά, το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy) αποδείχτηκε ως εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle. Συμπεραίνουμε ότι *τα τρία θεωρήματα είναι ισοδύναμα*.

Πολλές φορές το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy) εφαρμόζεται με κάποιες επιπλέον υποθέσεις. Συγκεκριμένα, αν $g(a) \neq g(b)$ και αν δεν ισχύει $f'(x) = g'(x) = 0$ για κανένα $x \in (a, b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Πράγματι, από $(f(b)-f(a))g'(\xi)=(g(b)-g(a))f'(\xi)$ προκύπτει $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=f'(\xi)$. Από αυτήν συνεπάγεται ότι, αν $g'(\xi)=0$, τότε $f'(\xi)=0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $g'(\xi)\neq 0$, οπότε $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Ασκήσεις.

1. Έχει η $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ τον 0 ως σημείο τοπικού ακροτάτου;

2. (1) Βρείτε απλή $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ώστε $f'(0)=0$ και ο 0 να μην είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f. (2) Το (1) είναι πιο δύσκολο αν θέλουμε η f να είναι και *άρτια*. Δείτε την $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3. Έστω $a<b$. Αποδείξτε ότι: (i) υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $\frac{\sin b-\sin a}{b-a}=\cos\xi$, (ii) υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $\frac{\sin b-\sin a}{e^b-e^a}=e^{-\xi}\cos\xi$.

4. Μπορεί η $x^3-12x=c$ να έχει δυο λύσεις στο $[-2,2]$; στο $(-\infty,-2]$; στο $[2,+\infty)$;

5. Έστω η $f(x)=2-x^{\frac{2}{5}}$. Παρατηρήστε ότι $f(1)=f(-1)=1$. Υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$;

6. (1) Με το Θεώρημα του Rolle και την αρχή της επαγωγής, αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες. (2) Έστω $a_1<\cdots<a_n$ και η $p(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)$. Αποδείξτε ότι η p' έχει ακριβώς $n-1$ ρίζες. Προσδιορίστε τη θέση των ριζών της p' σε σχέση με τους $a_1,\ldots,a_n$.

7. Αποδείξτε ότι η $x^2=x\sin x+\cos x$ έχει ακριβώς δυο λύσεις και προσδιορίστε τη θέση τους σε σχέση με τον 0.

8. Πόσες λύσεις έχει η $e^x=1$; η $e^x=1+x$; η $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}$; Γενικεύστε με την αρχή της επαγωγής: πόσες λύσεις έχει η $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$; (*Υπόδ.:* Όλες οι εξισώσεις έχουν μια προφανή λύση.)

9. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$ έχει ακριβώς μια λύση, αν ο n είναι περιττός, και καμιά λύση, αν ο n είναι άρτιος.

10. Έστω $\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+\cdots+\frac{a_1}{2}+a_0=0$. Αποδείξτε ότι η $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0,1)$.

11. Έστω διάστημα I, $f:I\to\mathbf{R}$ συνεχής στο I και $f'(x)\neq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I.

12. Έστω διάστημα I, $f:I\to\mathbf{R}$ συνεχής στο I και έστω ότι υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I. Έστω $x_1,x_2\in I$ και $|f(x_2)-f(x_1)|=d$. (i) Αν $|f'(x)|\geq m>0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I, αποδείξτε ότι

$|x_2 - x_1| \leq \frac{d}{m}$. (ii) Αν $|f'(x)| \leq m < +\infty$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I, αποδείξτε ότι $|x_2 - x_1| \geq \frac{d}{m}$.

13. Έστω διάστημα I, $f, g : I \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμες στο I και $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε δυο οποιεσδήποτε λύσεις της $f(x) = 0$ βρίσκεται τουλάχιστον μια λύση της $g(x) = 0$ και αντιστρόφως. (*Υπόδ.:* Έστω $a, b \in I$, $a < b$ και $f(a) = f(b) = 0$. Υποθέστε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Μπορεί να είναι $g(a) = 0$ ή $g(b) = 0$; Κατόπιν, θεωρήστε την $\frac{f}{g} : [a, b] \to \mathbf{R}$ και καταλήξτε σε άτοπο.)
Ταιριάζει το συμπέρασμα αυτό με το ζευγάρι των $\cos, \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$;

14. (1) Αν η $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και αν $f'(a) < 0 < f'(b)$, αποδείξτε ότι οποιοδήποτε σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο $[a, b]$ (την ύπαρξη του οποίου εγγυάται το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής) ανήκει οπωσδήποτε στο (a, b). Ποιο είναι το συμπέρασμα αν $f'(a) > 0 > f'(b)$; (2) **Θεώρημα του Darboux**. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής και έχει παράγωγο στο $[a, b]$ και $f'(a) < \lambda < f'(b)$ ή $f'(a) > \lambda > f'(b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = \lambda$. (*Υπόδ.:* Εφαρμόστε το πρώτο αποτέλεσμα στην $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda x$.) Το αποτέλεσμα αυτό είναι κάτι σαν «θεώρημα ενδιάμεσης τιμής» για την παράγωγο χωρίς, όμως, να προϋποτίθεται η συνέχεια της παραγώγου. (3) Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο I. Αν η f' είναι μονότονη στο I, αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο I.

15. Έστω $f : [\xi - h, \xi + h] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[\xi - h, \xi + h]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi - h, \xi) \cup (\xi, \xi + h)$. Αποδείξτε ότι: (i) υπάρχει $\zeta \in (0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h) - f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) + f'(\xi - \zeta)$, (ii) υπάρχει $\zeta \in (0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h) - 2f(\xi) + f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) - f'(\xi - \zeta)$.

16. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x + \sqrt{x}) - f(x)\big) = 0$.

17. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} (f(x + 1) - f(x)) = 0$.

18. Έστω $f : [\xi, b) \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[\xi, b)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, b). Αν υπάρχει το $\lim_{x \to \xi+} f'(x)$, αποδείξτε ότι υπάρχει και η $f'_+(\xi)$ και είναι ίση με την τιμή του ορίου. Ποιο είναι το ανάλογο αποτέλεσμα για το $\lim_{x \to \xi-} f'(x)$ και την $f'_-(\xi)$;

19. Έστω διάστημα I, $M \geq 0$, $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I και $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι, αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στο I, τότε η $\big(f(x_n)\big)$ είναι ακολουθία Cauchy.

20. **Κριτήριο ομοιόμορφης συνέχειας**. Έστω διάστημα I, $M \geq 0$, $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I και $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

21. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι η f' είναι συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(y)\right| < \epsilon$ για κάθε $x, y \in [a,b]$, $0 < |x-y| < \delta_0$.

22. (1) **Γενίκευση του Θεωρήματος του Rolle.** Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$, $f(a) = f(b)$ και έστω ότι οι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε είτε $f'_-(\xi) \leq 0 \leq f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq 0 \leq f'_-(\xi)$. (2) **Γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής**. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και έστω ότι οι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε είτε $f'_-(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_-(\xi)$.

5.6 Εφαρμογές.

Έστω διάστημα I οποιουδήποτε τύπου. Το διάστημα το οποίο προκύπτει αν από το I αφαιρέσουμε τα άκρα του (όποια ανήκουν στο I), δηλαδή το σύνολο των εσωτερικών σημείων του I, ονομάζεται **εσωτερικό του** I.

Α. Ακρότατα και μονοτονία.

Πρόταση 5.7 *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*
(1) Η f είναι σταθερή αν και μόνο αν $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
(2) Η f είναι αύξουσα αν και μόνο αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
(3) Η f είναι φθίνουσα αν και μόνο αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.

Απόδειξη: (1) Αν η f είναι σταθερή, γνωρίζουμε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Αντιστρόφως, έστω $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ (πιθανόν κάποιος από αυτούς να είναι άκρο του I). Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ και, επομένως, ξ στο εσωτερικό του I, ώστε $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) = 0$. Άρα $f(x_1) = f(x_2)$. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι τιμές της f είναι ίσες μεταξύ τους, οπότε η f είναι σταθερή.
(2) Αν η f είναι αύξουσα, τότε, όπως αποδείξαμε πριν από την Πρόταση 5.5, ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Αντιστρόφως, έστω $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Όπως πριν, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ και, επομένως, ξ στο εσωτερικό του I, ώστε $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0$. Άρα $f(x_1) \leq f(x_2)$ και, επομένως, η f είναι αύξουσα.
(3) Όπως στο (2). $\natural$

Αξίζει να διατυπώσουμε μια παραλλαγή της Πρότασης 5.7.

Πρόταση 5.8 *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*
(1) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.
(2) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη: Ίδια με την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους της Πρότασης 5.7. ♮

Στις Προτάσεις 5.7, 5.8, 5.9 όταν γράφουμε $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) > 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = +\infty$. Ομοίως, όταν γράφουμε $f'(x) \leq 0$ ή $f'(x) < 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = -\infty$. Πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν ισχύουν τα αντίστροφα των (1), (2) της Πρότασης 5.8. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε το μόνο γενικό συμπέρασμα είναι αυτό που ισχύει επειδή η f είναι αύξουσα, δηλαδή $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει αν η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης, στις Προτάσεις 5.7, 5.8 οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα ισχύουν σε διάστημα. Αν οι υποθέσεις ισχύουν σε ενώσεις διαστημάτων, τότε τα συμπεράσματα μπορεί να μην ισχύουν κι αυτά στις ενώσεις διαστημάτων.

Παραδείγματα: (1) Η p_3 είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ αλλά δεν είναι σωστό ότι ισχύει ${p_3}'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Πράγματι, είναι ${p_3}'(x) = 3x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ αλλά ${p_3}'(0) = 0$.

(2) Έστω η $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Είναι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, αλλά η f δεν είναι σταθερή στο $\mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι σταθερή -1 στο *διάστημα* $(-\infty, 0)$ και σταθερή 1 στο *διάστημα* $(0, +\infty)$.

(3) Είναι ${p_{-1}}'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Όμως η p_{-1} δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο *διάστημα* $(-\infty, 0)$ και στο *διάστημα* $(0, +\infty)$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι χρήσιμο για την αναγνώριση των σημείων τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης.

Πρόταση 5.9 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $(a, b) \subseteq A$, $a < \xi < b$ και έστω ότι η f είναι συνεχής στο (a, b).*
(1) Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.
(2) Αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.

Απόδειξη: (1) Η f είναι αύξουσα στο $(a, \xi]$ και φθίνουσα στο $[\xi, b)$, οπότε ο $f(\xi)$ είναι η μέγιστη τιμή της στο διάστημα (a, b).
(2) Ομοίως. ♮

Παρατηρήστε ότι, στην Πρόταση 5.9, δε χρειάζεται να έχει παράγωγο η f στον ξ· αρκεί μόνο να είναι συνεχής στον ξ.

Ιδού μια συνηθισμένη περίπτωση εφαρμογής της Πρότασης 5.9. *Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα (οποιουδήποτε τύπου) και έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ στα οποία περιλαμβάνονται τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος ώστε σε καθένα από τα ενδιάμεσα ανοικτά υποδιαστήματα η f' έχει σταθερό πρόσημο. Τότε (i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος είναι σημεία τοπικού ακροτάτου, (ii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η f' έχει διαφορετικό πρόσημο είναι σημείο τοπικού ακροτάτου και (iii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η f'*

έχει ίδιο πρόσημο δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παραδείγματα: (1) Ένα από τα παραδείγματα της ενότητας 5.5. Η $f : [0,4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ είναι συνεχής στο $[0,4]$ και $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ για κάθε $x \in (0,4)$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και κάθε $x \in (2,4)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και στο $[2,4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ και, επομένως, οι 0, 2 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της f και οι 1, 4 σημεία τοπικού μεγίστου.

(2) Η $f(x) = x^4(x-1)^4$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$. Επίσης, $f'(x) = 4x^3(x-1)^4 + 4x^4(x-1)^3 = 8x^3(x-1)^3(x-\frac{1}{2})$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2})$ και κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και κάθε $x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[0, \frac{1}{2}]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 0]$, $[\frac{1}{2}, 1]$. Επομένως, οι 0, 1 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και ο $\frac{1}{2}$ σημείο τοπικού μεγίστου. Είναι $f(0) = f(1) = 0$ και, επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε x, οι 0, 1 είναι σημεία ολικού ελαχίστου. Ο $\frac{1}{2}$ δεν είναι σημείο ολικού μεγίστου, διότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

(3) Έστω η $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Επίσης, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ και κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$ και κάθε $x \in (0,1)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 0)$, $(0, 1]$ και, επομένως, ο -1 είναι σημείο τοπικού μεγίστου και ο 1 σημείο τοπικού ελαχίστου. Μάλιστα, ο -1 είναι σημείο ολικού μεγίστου για το διάστημα $(-\infty, 0)$ και ο 1 είναι σημείο ολικού ελαχίστου για το διάστημα $(0, +\infty)$.

(4) Έστω η $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ x-2, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$ Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$ και $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $x \in (2,3)$ και $f'(x) = -1$ για κάθε $x \in (1,2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[0,1]$, $[2,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$. Επομένως, οι 0, 2 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και οι $1, 3$ σημεία τοπικού μεγίστου. Επειδή $f(0) = f(2) = 0$, $f(1) = f(3) = 1$ και $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,3]$, τα $0, 2$ είναι σημεία ολικού ελαχίστου και τα $1, 3$ σημεία ολικού μεγίστου.

Παρεμπιπτόντως, η f δεν έχει παράγωγο στους 1, 2.

Β. Ισότητες, ανισότητες.

Με τη βοήθεια των Θεωρημάτων Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού ή των Προτάσεων 5.7, 5.8 αποδεικνύονται διάφορες ισότητες και ανισότητες.

Παραδείγματα: (1) Χρησιμοποιώντας τις παραγώγους $\cos' x = -\sin x$ και $\sin' x = \cos x$ θα αποδείξουμε ότι $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ για κάθε x.

Έστω $f(x) = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$. Είναι $f'(x) = -2\cos x \sin x + 2 \sin x \cos x = 0$ για κάθε x. Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$, οπότε είναι $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = (\cos 0)^2 + (\sin 0)^2 = 1$ για κάθε x.

(2) Θα αποδείξουμε ότι $e^x > x + 1$ για κάθε $x \neq 0$.
Πρώτος τρόπος: Έστω η $f(x) = e^x - x - 1$. Έστω $x > 0$. Υπάρχει $\xi \in (0, x)$

ώστε $\frac{e^x-x-1}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)=e^\xi-1$. Επειδή $\xi>0$, συνεπάγεται $e^\xi-1>0$ και, επομένως, $e^x-x-1>0$. Κατόπιν, έστω $x<0$. Υπάρχει $\xi\in(x,0)$ ώστε $\frac{e^x-x-1}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)=e^\xi-1$. Επειδή $\xi<0$, συνεπάγεται $e^\xi-1<0$, οπότε, και πάλι, $e^x-x-1>0$. Άρα για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $e^x>x+1$.
Δεύτερος τρόπος: Έστω η ίδια f. Είναι $f'(x)=e^x-1>0$ για κάθε $x>0$ και $f'(x)=e^x-1<0$ για κάθε $x<0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Άρα $e^x-x-1=f(x)>f(0)=0$ για κάθε $x\neq 0$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικού και ολικού ακροτάτου των x^2-x-1, $x^3-15x^2+72x+7$, $\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+3}$, $\frac{\sqrt{x}}{x+4}$, x^2e^{-x}, $\sin x-\cos x$, $\frac{\sin(3x)}{3}-\cos x$, $x+\sin x$, $x+|\sin x|$, $\frac{\log x}{x}$, $|x|e^{-|x-1|}$, $\arctan x-\log(1+x^2)$.

2. Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των (1) $(x-1)|x|$ στο $[-1,3]$, (2) $|x^2-3x+2|$ στο $[-3,10]$, (3) $\frac{(\log x)^2}{x}$ στο $[1,3]$, (4) $x+\frac{1}{x}$ στο $[\frac{1}{3},3]$, (5) $e^x\sin x$ στο $[0,2\pi]$.

3. Έστω $a_1<\cdots<a_n$. Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου των $(x-a_1)^2+\cdots+(x-a_n)^2$, $|x-a_1|+\cdots+|x-a_n|$.

4. Αποδείξτε ότι η $(1+\frac{1}{x})^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

5. Βρείτε την τιμή του $a>0$ για την οποία η μέγιστη τιμή της x^ae^{2a-x} στο $[0,+\infty)$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

6. (1) Έστω $f:A\to\mathbf{R}$, $\xi\in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $f'(\xi)>0$. Αποδείξτε ότι $f(x)>f(\xi)$ για κάθε $x\in A$ κοντά στον ξ, $x>\xi$ και $f(x)<f(\xi)$ για κάθε $x\in A$ κοντά στον ξ, $x<\xi$. (*Υπόδ.:* Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του $f'(\xi)$.) Μπορεί να είναι ο ξ σημείο τοπικού ακροτάτου της f; Τι γίνεται αν $f'(\xi)<0$; (2) Έστω η $f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0)=1$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένας $a>0$ ώστε η f να είναι αύξουσα στο διάστημα $(-a,a)$.

7. (1) Έστω $f:A\to\mathbf{R}$, $\xi\in A$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι Hölder συνεχής στον ξ με εκθέτη Hölder $\rho>1$ (δείτε την άσκηση 6 της ενότητας 4.1). Αποδείξτε ότι $f'(\xi)=0$. (2) Έστω διάστημα I, $f:I\to\mathbf{R}$ και έστω ότι η f είναι Hölder συνεχής στο I με εκθέτη Hölder $\rho>1$ (δείτε την άσκηση 3 της ενότητας 4.6). Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I.

8. Έστω διάστημα I, $f:I\to\mathbf{R}$ συνεχής στο I και $f'(x)\neq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Από την άσκηση 11 της προηγούμενης ενότητας γνωρίζουμε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I. (i) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I. (*Υπόδ.: Πρώτος τρόπος:* Δείτε την άσκηση 18 της ενότητας 4.4. *Δεύτερος τρόπος:* Από το Θεώρημα του Fermat και την υπόθεση,

για κάθε $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ τα μοναδικά σημεία μεγίστου και ελαχίστου της f στο $[x_1, x_2]$ είναι τα x_1, x_2. *Τρίτος τρόπος:* Συνέπεια του (ii) που ακολουθεί.) (ii) Αποδείξτε ότι είτε $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I είτε $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. (*Υπόδ.: Πρώτος τρόπος:* Συνέπεια του (i). *Δεύτερος τρόπος:* Άσκηση 14 της ενότητας 5.5.)

9. (1) Έστω $f, g : [0, b] \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο $[0, b]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, b)$, $f(0) = g(0) = 0$ και $f'(x), g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, b)$. Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0, b)$, αποδείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0, b]$. (2) Αποδείξτε ότι οι $\frac{x}{\sin x}$, $\frac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x}$, $\frac{\frac{1}{6}x^3}{x-\sin x}$, $\cdots$ είναι αύξουσες στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

10. (1) Έστω η $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. Αποδείξτε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αποδείξτε ότι $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. (2) Έστω η $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Αποδείξτε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x > 0$ και $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ για κάθε $x < 0$.

11. Έστω $f, g : (a, b) \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμες στο (a, b), $a < 0 < b$. Έστω, επίσης, $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Γνωρίζετε κάποιο ζευγάρι τέτοιων συναρτήσεων; Αποδείξτε ότι $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν οι F, G έχουν τις ίδιες ιδιότητες, αποδείξτε ότι $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε την $(F(x) - f(x))^2 + (G(x) - g(x))^2$.)

12. Αποδείξτε ότι (1) $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, (2) $\log \frac{1+x}{1-x} > 2x + \frac{2x^3}{3}$ για κάθε $x \in (0, 1)$, (3) $\log \frac{1+x}{1-x} < 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2}$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2}]$, (4) $e^{\frac{x}{x+1}} < 1 + x$ για κάθε $x > -1$, (5) $x > \arctan x > x - \frac{x^3}{3}$ για κάθε $x > 0$.

13. (1) Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). (i) Αν $f'(x) \geq \mu$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι $f(a) + \mu(x - a) \leq f(x) \leq f(b) + \mu(x - b)$ για κάθε $x \in [a, b]$. (ii) Αν $f'(x) \leq \mu$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι $f(b) + \mu(x - b) \leq f(x) \leq f(a) + \mu(x - a)$ για κάθε $x \in [a, b]$. (2) Έστω $f : [1, 4] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[1, 4]$, $f(1) = -7$ και $f'(x) \geq 3$ για κάθε $x \in (1, 4)$. Αποδείξτε ότι $f(4) \geq 2$. Για κάθε $\mu \geq 2$ βρείτε συγκεκριμένη f με όλες τις παραπάνω ιδιότητες ώστε $f(4) = \mu$.

14. (1) Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι $ax^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y - x} < ay^{a-1}$, αν $a > 1$, και $ay^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y - x} < ax^{a-1}$, αν $0 < a < 1$. (2) Έστω $x < y$, $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $a^x \log a < \frac{a^y - a^x}{y - x} < a^y \log a$. (3) Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{y} < \frac{1}{y-x} \log(\frac{y}{x}) < \frac{1}{x}$. (4) Αποδείξτε ότι $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.

15. Αποδείξτε ότι $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!}$, $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$, $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ για κάθε $x \geq 0$. Ποια είναι η γενική μορφή αυτών των ανισοτήτων; Κατόπιν, αποδείξτε ότι για $x \leq 0$ ισχύει η πρώτη, η τρίτη, η πέμπτη κλπ ανισότητα καθώς και η αντίστροφη της δεύτερης, της τέταρτης κλπ ανισότητας.

16. Αποδείξτε ότι $\sin x \le \frac{x}{1!}$, $\sin x \ge \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}$, $\sin x \le \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ για κάθε $x \ge 0$ και ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται για $x \le 0$. Αποδείξτε, επίσης, ότι $\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2!}$, $\cos x \le 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, $\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$ για κάθε x. Ποια είναι η γενική μορφή αυτών των ανισοτήτων;

17. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$, $f(a) = 0$ και $|f'(x)| \le M|f(x)|$ για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

18. (1) Έστω $a_1, \ldots, a_n > 0$ και η $f : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{a_1+\cdots+a_n+x}{(n+1)\sqrt[n+1]{a_1\cdots a_n x}}$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή και όλα τα σημεία ολικού ελαχίστου της f.
(2) **Ανισότητα του Cauchy**. Αποδείξτε ότι

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

(*Υπόδ.:* Χρησιμοποιήστε το (1) και την αρχή της επαγωγής.) Αποδείξτε ότι: $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n$.

19. Έστω $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \mu_1, \ldots, \mu_n > 0$ και $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$. Επίσης, έστω $0 < t < 1$ και $a, b > 0$. (1) **Ανισότητα του Young**. Αποδείξτε ότι

$$a^{1-t}b^t \le (1-t)a + tb$$

και ότι η ανισότητα γίνεται ισότητα αν και μόνο αν $a = b$. (*Υπόδ.:* Έστω $x = \frac{b}{a}$ και $f : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^t - tx + t$.) (2) **Ανισότητα του Hölder**. Αποδείξτε ότι

$$a_1{}^{1-t}b_1{}^t + \cdots + a_n{}^{1-t}b_n{}^t \le \big(a_1 + \cdots + a_n\big)^{1-t}\big(b_1 + \cdots + b_n\big)^t$$

και ότι η ανισότητα γίνεται ισότητα αν και μόνο αν $\frac{a_k}{A} = \frac{b_k}{B}$ για κάθε k, όπου $A = a_1 + \cdots + a_n$ και $B = b_1 + \cdots + b_n$. (*Υπόδ.:* Εφαρμόστε την ανισότητα του Young σε κάθε ζεύγος $\frac{a_k}{A}$, $\frac{b_k}{B}$.) (3) Αποδείξτε ότι η $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (\mu_1 a_1{}^x + \cdots + \mu_n a_n{}^x)^{\frac{1}{x}}$ είναι αύξουσα. (*Υπόδ.:* Αν $0 < x < x'$, εφαρμόστε το (2) στους μ_k, $\mu_k a_k{}^{x'}$ με $t = \frac{x}{x'}$. Ομοίως, αν $x < x' < 0$ ή $x < 0 < x'$.) (4) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0}(\mu_1 a_1{}^x + \cdots + \mu_n a_n{}^x)^{\frac{1}{x}} = a_1{}^{\mu_1} \cdots a_n{}^{\mu_n}$. (*Υπόδ.:* Αν $g(x) = \mu_1 a_1{}^x + \cdots + \mu_n a_n{}^x$, τότε $\log(g(x))^{\frac{1}{x}} = \frac{\log g(x)}{g(x)-1}\,\frac{g(x)-1}{x}$.)
(5) Αν $x < 0 < x'$, αποδείξτε ότι

$$(\mu_1 a_1{}^x + \cdots + \mu_n a_n{}^x)^{\frac{1}{x}} \le a_1{}^{\mu_1} \cdots a_n{}^{\mu_n} \le (\mu_1 a_1{}^{x'} + \cdots + \mu_n a_n{}^{x'})^{\frac{1}{x'}}.$$

Δείτε ότι η ανισότητα του Cauchy της άσκησης 18 είναι ειδική περίπτωση.

5.7 Δεύτερη παράγωγος και εφαρμογές.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και $B = \{x \in A : f'(x) \in \mathbf{R}\}$. Όπως έχουμε ήδη πει, ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $f' : B \to \mathbf{R}$. Θεωρούμε, τώρα, $\xi \in B$

σημείο συσσώρευσης του B και εξετάζουμε αν υπάρχει η $(f')'(\xi)$, δηλαδή το όριο $\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$. Αν υπάρχει η $(f')'(\xi)$ τη συμβολίζουμε, πιο απλά,

$$f''(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}\,,$$

και την ονομάζουμε **δεύτερη παράγωγο της f στον** ξ.

Ομοίως, ορίζεται η τρίτη παράγωγος ως η πρώτη παράγωγος της δεύτερης παραγώγου και, επαγωγικά, μπορούμε να ορίσουμε την n-οστή παράγωγο ως την πρώτη παράγωγο της $(n-1)$-οστής παραγώγου. Η πρώτη παράγωγος της f στον ξ συμβολίζεται και $f^{(1)}(\xi)$ και η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται και $f^{(2)}(\xi)$. Για την τρίτη παράγωγο χρησιμοποιούμε και τα δυο σύμβολα $f'''(\xi)$, $f^{(3)}(\xi)$ αλλά για μεγαλύτερης τάξης παραγώγους το σύμβολο με τους τόνους είναι άβολο, οπότε για την n-οστή παράγωγο χρησιμοποιούμε το σύμβολο $f^{(n)}(\xi)$. Τονίζουμε ότι, βάσει του ορισμού, η n-οστή παράγωγος της f στον ξ είναι το όριο

$$f^{(n)}(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(\xi)}{x-\xi}\,.$$

Τέλος, ας αναφέρουμε ότι μερικές φορές το $f(\xi)$ συμβολίζεται $f^{(0)}(\xi)$.

Παραδείγματα: (1) Αν $n\in\mathbf{N}$, οι παράγωγοι συναρτήσεις της p_n είναι: ${p_n}^{(1)}=np_{n-1}\,,\ {p_n}^{(2)}=n(n-1)p_{n-2}\,,\ {p_n}^{(3)}=n(n-1)(n-2)p_{n-3}\,,\dots,{p_n}^{(n-1)}=n(n-1)\cdots 2p_1$ και ${p_n}^{(n)}=n(n-1)\cdots2\cdot1=n!\,$. Επειδή η ${p_n}^{(n)}$ είναι σταθερή, κάθε παράγωγος μεγαλύτερης τάξης είναι σταθερή 0, δηλαδή ${p_n}^{(m)}=0$ για κάθε $m\in\mathbf{N}$, $m>n$.

(2) Αν $a\notin\mathbf{N}\cup\{0\}$, οι παράγωγοι συναρτήσεις της p_a είναι: ${p_a}^{(1)}=ap_{a-1}\,$, ${p_a}^{(2)}=a(a-1)p_{a-2}$ και, γενικά,

$${p_a}^{(m)}=a(a-1)\cdots(a-m+1)p_{a-m}\qquad(m\in\mathbf{N}).$$

Παρατηρήστε ότι ο συντελεστής της p_{a-m} είναι $\neq0$ και, επομένως, καμιά παράγωγος συνάρτηση δεν είναι σταθερή 0.

(3) Αν $a>0$, οι παράγωγοι συναρτήσεις της $\exp_a x$ είναι ${\exp_a}^{(1)}x=\log a\,\exp_a x$, ${\exp_a}^{(2)}x=(\log a)^2\exp_a x$ και, γενικά,

$${\exp_a}^{(m)}x=(\log a)^m\exp_a x\qquad(m\in\mathbf{N}).$$

Ειδικότερα: $\exp^{(m)}x=\exp x$ για κάθε $m\in\mathbf{N}$.

(4) Οι παράγωγοι συναρτήσεις της $\sin x$ είναι: $\sin^{(1)}x=\cos x$, $\sin^{(2)}x=-\sin x$, $\sin^{(3)}x=-\cos x$, $\sin^{(4)}x=\sin x$. Από το σημείο αυτό και πέρα οι διαδοχικές παράγωγοι συναρτήσεις επαναλαμβάνουν τον «κύκλο»: $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$. Μπορούμε, επίσης, να γράφουμε

$$\sin^{(2k)}x=(-1)^k\sin x,\quad \sin^{(2k-1)}x=(-1)^{k-1}\cos x\qquad(k\in\mathbf{N}).$$

Ομοίως,

$$\cos^{(2k)}x=(-1)^k\cos x,\quad \cos^{(2k-1)}x=(-1)^k\sin x\qquad(k\in\mathbf{N}).$$

Θα δούμε τώρα μερικές εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου.

A. Τοπικά ακρότατα.

Η πρώτη εφαρμογή είναι ένα απλό κριτήριο τοπικού ακροτάτου.

Πρόταση 5.10 *Έστω ότι η $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής και έχει παράγωγο στο (a,b), $a < \xi < b$ και έστω ότι υπάρχει η $f''(\xi)$.*
(1) Αν $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) > 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.
(2) Αν $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) < 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.

Απόδειξη: (1) Επειδή $f''(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$, ισχύει $\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} > 0$ κοντά στον ξ. Επομένως, $f'(x) < f'(\xi) = 0$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x < \xi$ και $f'(x) > f'(\xi) = 0$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x > \xi$. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν c, d ώστε $a \leq c < \xi < d \leq b$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (c,\xi)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\xi, d)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(c,\xi]$ και στο $[\xi,d)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(c,\xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi,d)$. Άρα ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.
(2) Ομοίως. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Είναι ${p_2}'(0) = 0$, ${p_2}''(0) = 2$. Άρα ο 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της p_2.

(2) Είναι ${p_4}'(0) = 0$, ${p_4}''(0) = 0$. Όμως, ο 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της p_4. Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 5.10.

B. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις.

Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **κυρτή στο** I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ ισχύει

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad (t \in [0,1]).$$

Ομοίως, η f χαρακτηρίζεται **κοίλη στο** I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ ισχύει

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad (t \in [0,1]).$$

Παραδείγματα: (1) Η $\mu x + \nu$ είναι κυρτή και κοίλη στο $\mathbf{R}$. Πράγματι, ισχύει $\mu((1-t)x_1 + tx_2) + \nu = (1-t)(\mu x_1 + \nu) + t(\mu x_2 + \nu)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ και $t \in [0,1]$.

(2) Η x^2 είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$. Διότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ και κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει $((1-t)x_1 + tx_2)^2 = (1-t)^2x_1^2 + 2t(1-t)x_1x_2 + t^2x_2^2 \leq (1-t)^2x_1^2 + t(1-t)(x_1^2 + x_2^2) + t^2x_2^2 = (1-t)x_1^2 + tx_2^2$.

(3) Η $|x|$ είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$. Διότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ και κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει $|(1-t)x_1 + tx_2| \leq |(1-t)x_1| + |tx_2| = (1-t)|x_1| + t|x_2|$.

Θα δούμε ότι η ανισότητα $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ γράφεται με έναν διαφορετικό (αλλά ισοδύναμο) τρόπο.

Έστω $f((1-t)x_1+tx_2) \leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Για κάθε $x \in [x_1,x_2]$ ορίζουμε $t=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, οπότε $t \in [0,1]$ και $(1-t)x_1+tx_2=x$. Άρα $f(x)=f((1-t)x_1+tx_2) \leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$. Αντιστρόφως, έστω $f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$ για κάθε $x \in [x_1,x_2]$. Για κάθε $t \in [0,1]$ ορίζουμε $x=(1-t)x_1+tx_2$, οπότε $x \in [x_1,x_2]$. Άρα $f((1-t)x_1+tx_2)=f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)=(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$.

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι η $f: I \to \mathbf{R}$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν και μόνο αν για κάθε $x_1,x_2 \in I$:

$$f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) \qquad (x \in [x_1,x_2]).$$

Ομοίως, η f είναι κοίλη στο διάστημα I αν και μόνο αν για κάθε $x_1,x_2 \in I$:

$$f(x) \geq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) \qquad (x \in [x_1,x_2]).$$

Πρόταση 5.11 *Έστω διάστημα I και $f: I \to \mathbf{R}$ κυρτή ή κοίλη στο I. Τότε η f είναι συνεχής στο εσωτερικό του I.*

Απόδειξη: Έστω ξ στο εσωτερικό του I, οπότε υπάρχουν $a,b \in I$ ώστε $a<\xi<b$. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I.

Έστω $x \in (a,\xi)$. Τότε $f(x) \leq \frac{\xi-x}{\xi-a}f(a)+\frac{x-a}{\xi-a}f(\xi)$ και $f(\xi) \leq \frac{b-\xi}{b-x}f(x)+\frac{\xi-x}{b-x}f(b)$. Συνεπάγεται $\frac{b-x}{b-\xi}f(\xi)+\frac{x-\xi}{b-\xi}f(b) \leq f(x) \leq \frac{\xi-x}{\xi-a}f(a)+\frac{x-a}{\xi-a}f(\xi)$. Με παρεμβολή, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi-}f(x)=f(\xi)$.

Έστω $x \in (\xi,b)$. Τότε $f(x) \leq \frac{b-x}{b-\xi}f(\xi)+\frac{x-\xi}{b-\xi}f(b)$ και $f(\xi) \leq \frac{x-\xi}{x-a}f(a)+\frac{\xi-a}{x-a}f(x)$. Συνεπάγεται $\frac{\xi-x}{\xi-a}f(a)+\frac{x-a}{\xi-a}f(\xi) \leq f(x) \leq \frac{b-x}{b-\xi}f(\xi)+\frac{x-\xi}{b-\xi}f(b)$. Με παρεμβολή, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi+}f(x)=f(\xi)$.

Άρα $\lim_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$ και η f είναι συνεχής στον ξ.

Η απόδειξη είναι ίδια αν η f είναι κοίλη στο I. $\natural$

Πρόταση 5.12 *Έστω διάστημα I και $f: I \to \mathbf{R}$*
(1) Αν η f είναι κυρτή στο I, τότε (i) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή αριστερό άκρο του I υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και $f'_+(\xi) \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x>\xi$ και (ii) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή δεξιό άκρο του I υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'_-(\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x<\xi$. Επίσης, $-\infty<f'_-(\xi) \leq f'_+(\xi)<+\infty$ για κάθε ξ στο εσωτερικό του I.
(2) Αν η f είναι κοίλη στο I, τότε (i) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή αριστερό άκρο του I υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και $f'_+(\xi) \geq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x>\xi$ και (ii) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή δεξιό άκρο του I υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq f'_-(\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x<\xi$. Επίσης, $-\infty<f'_+(\xi) \leq f'_-(\xi)<+\infty$ για κάθε ξ στο εσωτερικό του I.

Απόδειξη: (1) Έστω f κυρτή στο I.

Έστω ξ εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο του I. Έστω $x_1,x_2 \in I$, $\xi<x_1<x_2$. Τότε $f(x_1) \leq \frac{x_2-x_1}{x_2-\xi}f(\xi)+\frac{x_1-\xi}{x_2-\xi}f(x_2)$, οπότε $\frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi} \leq \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}$.

Άρα η $h : \{x \in I : x > \xi\} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αύξουσα. Επομένως, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} h(x) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'_+(\xi)$ και είναι $< +\infty$. Επίσης, $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} h(x) \le h(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$.

Έστω ξ εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 < \xi$. Τότε $f(x_2) \le \frac{\xi-x_2}{\xi-x_1} f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{\xi-x_1} f(\xi)$, οπότε $\frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi} \le \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}$. Άρα η $g : \{x \in I : x < \xi\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αύξουσα. Επομένως, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} g(x) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'_-(\xi)$ και είναι $> -\infty$. Επίσης, $f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} g(x) \ge g(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x < \xi$.

Τέλος, έστω ξ στο εσωτερικό του I. Έστω $a, b \in I$, $a < \xi < b$. Από την $f(\xi) \le \frac{b-\xi}{b-a} f(a) + \frac{\xi-a}{b-a} f(b)$ συνεπάγεται $\frac{f(a)-f(\xi)}{a-\xi} \le \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}$. Άρα $f'_-(\xi) = \lim_{a\to\xi-} \frac{f(a)-f(\xi)}{a-\xi} \le \lim_{b\to\xi+} \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi} = f'_+(\xi)$.
(2) Ομοίως. ♮

Ιδού ένα πόρισμα της Πρότασης 5.12.

Πρόταση 5.13 *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbf{R}$ και ξ στο εσωτερικό του I.*
(1) Αν η f είναι κυρτή στο I και $f'_-(\xi) \le \mu \le f'_+(\xi)$, τότε $f(x) \ge \mu(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$.
(2) Αν η f είναι κοίλη στο I και $f'_+(\xi) \le \mu \le f'_-(\xi)$, τότε $f(x) \le \mu(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη: (1) Σύμφωνα με την Πρόταση 5.12, ισχύει $\mu \le f'_+(\xi) \le \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$ και $\mu \ge f'_-(\xi) \ge \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x < \xi$. Άρα $f(x) - f(\xi) \ge \mu(x-\xi)$ για κάθε $x \in I$.
(2) Ομοίως. ♮

Σε σχέση με την Πρόταση 5.13, παρατηρήστε ότι, στην περίπτωση που υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε είναι οπωσδήποτε $\mu = f'(\xi)$ και ισχύει $f(x) \ge f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$, αν η f είναι κυρτή στο I, και $f(x) \le f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$, αν η f είναι κοίλη στο I.

Στη συνέχεια θα δούμε δυο βασικά κριτήρια με τα οποία μπορούμε να αποφασίσουμε αν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα.

Πρόταση 5.14 *Έστω διάστημα I και ότι η $f : I \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*
(1) Η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I.
(2) Η f είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν η f' είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του I.

Απόδειξη: (1) Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Έστω x_1, x_2 στο εσωτερικό του I, $x_1 < x_2$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.12, $f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2)$. Άρα $f'(x_1) \le f'(x_2)$, οπότε η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I.

Αντιστρόφως, έστω ότι η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Ορίζουμε $h : [x_1, x_2] \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) - \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) - \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$. Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $h'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ για κάθε $x \in$

(x_1, x_2). Άρα η h' είναι αύξουσα στο (x_1, x_2). Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ή, ισοδύναμα, $h'(\xi) = 0$. Άρα $h'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (x_1, \xi)$ και $h'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\xi, x_2)$, οπότε η h είναι φθίνουσα στο $[x_1, \xi]$ και αύξουσα στο $[\xi, x_2]$. Επειδή $h(x_1) = h(x_2) = 0$, ισχύει $h(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Άρα $f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Άρα η f είναι κυρτή στο I.
(2) Ομοίως. $\natural$

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x. \end{cases}$ Είναι $f'(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 \leq x. \end{cases}$ Η f' είναι αύξουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$. Παρατηρήστε, εν όψει της Πρότασης 5.15, ότι δεν υπάρχει η $f''(0)$.

Βάσει της σχέσης ανάμεσα στη μονοτονία συνάρτησης και στο πρόσημο της παραγώγου της, έχουμε την εξής παραλλαγή της Πρότασης 5.14.

Πρόταση 5.15 *Έστω διάστημα I και ότι η $f : I \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει δεύτερη παράγωγο στο εσωτερικό του I.*
(1) Η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν $f''(x) \geq 0$ στο εσωτερικό του I.
(2) Η f είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν $f''(x) \leq 0$ στο εσωτερικό του I.

Παραδείγματα: (1) Έστω η $f(x) = x(x-1)(x-2)$. Είναι $f'(x) = 3x^2-6x+2$, $f''(x) = 6x - 6$ για κάθε x. Ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$. Επίσης, $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$.

(2) Είναι ${p_n}''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ για κάθε x. Άρα, αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι άρτιος, η p_n είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$. Αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι περιττός, η p_n είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$.

(3) Επειδή ${p_a}''(x) = a(a-1)x^{a-2}$ για κάθε $x > 0$, η p_a είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, αν $a \leq 0$ ή $a \geq 1$, και κοίλη στο $(0, +\infty)$, αν $0 \leq a \leq 1$.

(4) Έστω $a > 0$. Η $\exp_a$ είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$ διότι ${\exp_a}'' x = (\log a)^2 \exp_a x \geq 0$ για κάθε x.

(5) Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Η $\log_a$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$, αν $a > 1$, και κυρτή στο $(0, +\infty)$, αν $0 < a < 1$. Διότι ${\log_a}'' x = -\frac{1}{x^2 \log a}$ για κάθε $x > 0$.

Γ. Σημεία καμπής.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $(a, b) \subseteq A$, $a < \xi < b$. Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο καμπής** της f αν $f'(\xi) \in \mathbf{R}$ και είτε (i) $f(x) \geq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x < \xi$ και $f(x) \leq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x > \xi$ είτε (ii) $f(x) \leq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x < \xi$ και $f(x) \geq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x > \xi$. Επίσης, ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο καμπής** της f αν $f'(\xi) = \pm\infty$.

Πρόταση 5.16 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $(a, b) \subseteq A$, $a < \xi < b$ και $f'(\xi) \in \mathbf{R}$. Αν υπάρχουν c, d ώστε $a \leq c < \xi < d \leq b$ και η f είναι κυρτή στο $(c, \xi]$ και κοίλη* *στο $[\xi, d)$ ή, αντιθέτως, κοίλη στο $(c, \xi]$ και κυρτή στο $[\xi, d)$, τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της f.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι κυρτή στο $(c, \xi]$ και κοίλη στο $[\xi, d)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.12, $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (c, \xi)$. Ομοίως, $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (\xi, d)$. Άρα $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in (c, \xi)$ και $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in (\xi, d)$. $\natural$

Υπάρχουν διάφορα κριτήρια κυρτότητας ή κοιλότητας σε διαστήματα για να διακρίνουμε αν κάποιος αριθμός είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης.

Πρόταση 5.17 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $(a, b) \subseteq A$, $a < \xi < b$ και $f'(\xi) \in \mathbf{R}$. Αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x < \xi$ και $f''(x) \leq 0$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x > \xi$ ή, αντιθέτως, $f''(x) \leq 0$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x < \xi$ και $f''(x) \geq 0$ για κάθε x κοντά στον ξ, $x > \xi$, τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της f.*

Παράδειγμα: Είναι ${p_3}'(0) = 0 \in \mathbf{R}$. Επίσης, ${p_3}''(x) = 6x \leq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και ${p_3}''(x) = 6x \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Άρα ο 0 είναι σημείο καμπής της p_3.

Δ. Ανισότητες.

Θα δούμε τώρα κάποιες εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου σε αποδείξεις ανισοτήτων. Οι εφαρμογές αυτές είναι, ουσιαστικά, απλές εφαρμογές της έννοιας της κυρτότητας (ή κοιλότητας) σε αποδείξεις ανισοτήτων.

Παραδείγματα: (1) Ισχύει $e^{(1-t)x_1+tx_2} \leq (1-t)e^{x_1} + te^{x_2}$ για κάθε x_1, x_2 και κάθε $t \in [0, 1]$. Αυτό είναι απλή εφαρμογή της κυρτότητας της $\exp$ στο $\mathbf{R}$. Ειδικότερα, με $t = \frac{1}{2}$, $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$.

(2) Ισχύει $((1-t)x_1 + tx_2)\log((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)x_1 \log x_1 + tx_2 \log x_2$ για κάθε $x_1, x_2 > 0$ και κάθε $t \in [0, 1]$. Πράγματι, η $f(x) = x \log x$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, διότι $f''(x) = \frac{1}{x} \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

(3) Θα αποδείξουμε ότι $x^{\frac{3}{4}} \leq \frac{3}{4}(x-1) + 1$ για κάθε $x \geq 0$. Πράγματι, η $p_{\frac{3}{4}}$ είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.13, είναι $x^{\frac{3}{4}} = p_{\frac{3}{4}}(x) \leq {p_{\frac{3}{4}}}'(1)(x-1) + p_{\frac{3}{4}}(1) = \frac{3}{4}(x-1) + 1$ για κάθε $x \geq 0$.

Ασκήσεις.

1. Έστω $k \in \mathbf{N}$ και $f(x) = \begin{cases} x^k, & x \geq 0, \\ -x^k, & x \leq 0. \end{cases}$ Για κάθε $n \in \mathbf{N}$, βρείτε την $f^{(n)}$.

2. (1) Έστω $p(x) = a_0 + a_1(x-\xi) + \cdots + a_n(x-\xi)^n$. Αποδείξτε ότι $p^{(k)}(\xi) = k!a_k$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$, $0 \leq k \leq n$ και $p^{(k)}(\xi) = 0$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$, $k \geq n+1$. (2) Έστω αριθμοί $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x)$ βαθμού $\leq n$ ώστε $p^{(k)}(\xi) = y_k$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$, $0 \leq k \leq n$. Πόσες τέτοιες πολυωνυμικές συναρτήσεις υπάρχουν;

3. (1) Έστω $g : (a, \xi] \to \mathbf{R}$ n φορές παραγωγίσιμη στο $(a, \xi]$ και $h : [\xi, b) \to \mathbf{R}$ n φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi, b)$ και έστω $g^{(k)}(\xi) = h^{(k)}(\xi)$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$, $0 \le k \le n$. Αποδείξτε ότι η $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} g(x), & a < x \le \xi, \\ h(x), & \xi \le x < b, \end{cases}$ είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f^{(k)}(\xi) = g^{(k)}(\xi) = h^{(k)}(\xi)$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$, $0 \le k \le n$. (2) Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ n φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Βρείτε $g : (-\infty, a] \to \mathbf{R}$ και $h : [b, +\infty) \to \mathbf{R}$ ώστε η $k(x) = \begin{cases} g(x), & x \le a, \\ f(x), & a \le x \le b, \\ h(x), & b \le x, \end{cases}$ να είναι n φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. (*Υπόδ.:* Οι παράγωγοι των f, g στον ξ πρέπει να συμφωνούν. Βρείτε την g ως κατάλληλο πολυώνυμο χρησιμοποιώντας την άσκηση 2. Εργαστείτε ομοίως για την h.)

4. Έστω $n \in \mathbf{N}$, διάστημα I, $f : I \to \mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι $f^{(n)}(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ αν και μόνο αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\le n - 1$.

5. Έστω η $f(x) = \frac{\log x}{x}$. Αποδείξτε ότι $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \big(\log x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \big)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

6. Έστω $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ και $f(x) f''(x) \ge 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν στο (a, b) περιέχονται δυο λύσεις της εξίσωσης $f(x) f'(x) = 0$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα στις δυο αυτές λύσεις.

7. Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[-1, 1]$, τρείς φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και $f(-1) = f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f^{(3)}(\xi) = 3$. (*Υπόδ.:* Βρείτε πολυώνυμο p τρίτου βαθμού ώστε $p(-1) = p(0) = 0$, $p(1) = 1$ και $p'(0) = 0$. Θεωρήστε την $g = f - p$.)

8. (1) Έστω $k \in \mathbf{N}$, $k \ge 2$. Αποδείξτε ότι, αν ένα πολυώνυμο $p(x)$ διαιρείται από το $(x - \xi)^k$, τότε το πολυώνυμο $p'(x)$ διαιρείται από το $(x - \xi)^{k-1}$. (2) Έστω $n \in \mathbf{N}$ και η $f(x) = (x^2 - 1)^n$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x) = 0$ έχει ακριβώς n λύσεις και ότι όλες ανήκουν στο $(-1, 1)$.

9. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $u_0 = \sup\{|f(x)| : 0 < x < +\infty\}$, $u_1 = \sup\{|f'(x)| : 0 < x < +\infty\}$, $u_2 = \sup\{|f''(x)| : 0 < x < +\infty\}$. Αποδείξτε ότι $u_1^2 \le 4 u_0 u_2$. (*Υπόδ.:* Εφαρμόζοντας δύο φορές το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy, αποδείξτε ότι για κάθε $x, h > 0$ υπάρχει $\xi \in (0, h)$ ώστε $\frac{f(x+h) - f(x) - h f'(x)}{h^2} = \frac{1}{2} f''(x + \xi)$. Άρα $|f'(x)| h \le |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{1}{2} |f''(x + \xi)| h^2 \le 2u_0 + \frac{1}{2} u_2 h^2$, οπότε $u_1 h \le 2u_0 + \frac{1}{2} u_2 h^2$ για κάθε $h > 0$.)

10. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και $u_0 = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}\}$, $u_1 = \sup\{|f'(x)| : x \in \mathbf{R}\}$, $u_2 = \sup\{|f''(x)| : x \in \mathbf{R}\}$. Αποδείξτε ότι $u_1^2 \le 2 u_0 u_2$. (*Υπόδ.:* Προσαρμόστε την υπόδειξη της άσκησης 9.)

11. **Ο τύπος του Leibniz**: $(fg)^{(n)}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(\xi) g^{(n-k)}(\xi)$. Αποδείξτε τον.

12. Έστω $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. (i) Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $f^{(n)}(x) = x^{-2n}p_n(x)e^{-\frac{1}{x}}$ για κάθε $x > 0$, όπου $p_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Για παράδειγμα: $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 - 2x$, $p_3(x) = 1 - 6x + 6x^2$ κλπ. (ii) Αποδείξτε ότι $p_{n+1}(x) = x^2 {p_n}'(x) + (1 - 2nx)p_n(x)$ για κάθε $x > 0$. (*Υπόδ.:* Παραγωγίστε την $f^{(n)}(x) = x^{-2n}p_n(x)e^{-\frac{1}{x}}$.) (iii) Αποδείξτε ότι $p_{n+2}(x) = (1 - 2(n+1)x)p_{n+1}(x) - n(n+1)x^2 p_n(x)$ για κάθε $x > 0$. (*Υπόδ.:* Αποδείξτε ότι $x^2 f'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$ και παραγωγίστε n φορές με τον τύπο του Leibniz της άσκησης 11.) (iv) Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^{n-1} στο $p_n(x)$ είναι ο $(-1)^{n-1}n!$. (v) Αποδείξτε ότι $x^2 {p_n}''(x) - (2nx - 2x - 1){p_n}'(x) + n(n-1)p_n(x) = 0$ για κάθε $x > 0$.

13. Έστω η $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$. (i) Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ για κάθε x, όπου $p_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n. Για παράδειγμα: $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 1 + x^2$, $p_3(x) = 3x + x^3$ κλπ. (ii) Αποδείξτε ότι $p_{n+1}(x) = {p_n}'(x) + xp_n(x)$ για κάθε x. (iii) Αποδείξτε ότι $p_{n+1}(x) = xp_n(x) + np_{n-1}(x)$ για κάθε x. (*Υπόδ.:* Αποδείξτε ότι $f'(x) = xf(x)$ για κάθε x και παραγωγίστε n φορές με τον τύπο του Leibniz της άσκησης 11.) (iv) Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^n στο $p_n(x)$ είναι ο 1. (v) Αποδείξτε ότι ${p_n}''(x) + x{p_n}'(x) - np_n(x) = 0$ για κάθε x.

14. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι μονότονες, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες, τα σημεία τοπικού ακροτάτου και τα σημεία καμπής των $\frac{x^3}{(x+1)^2}$, $x^2(x-1)^2$, $x + \frac{1}{x}$, $\frac{x}{x^2+1}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$, e^{-x^2}, $e^{\frac{1}{x}}$, $e^{-\frac{1}{x^2}}$, $\frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$, $\sin x + \cos x$, $e^{-x}\sin x$, $\frac{1}{\log x}$.

15. Έστω η $f(x) = \begin{cases} x^2\left(\frac{|x|}{x} + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι ο 0 είναι σημείο καμπής της f. Μπορούν να εφαρμοστούν οι Προτάσεις 5.16, 5.17;

16. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν η $-f$ είναι κοίλη στο ίδιο διάστημα. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή και κοίλη σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν έχει τύπο $f(x) = ax + b$.

17. Έστω f κυρτή στο διάστημα I και $x_1, x_0, x_2 \in I$, $x_1 < x_0 < x_2$. Αν $f(x_0) = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$, αποδείξτε ότι $f(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$ για κάθε x, $x_1 < x < x_2$.

18. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν για κάθε $\xi \in I$ η συνάρτηση $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ είναι αύξουσα (συνάρτηση του x) στο $I \setminus \{\xi\}$.

19. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν $\frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ για κάθε $a, a', b, b' \in I$, $a' \leq a$, $b' \leq b$ και, φυσικά, $a \neq b$ και $a' \neq b'$.

20. Έστω $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο (a,b), $a<\xi<b$. Αν $f'(x)\geq f'(\xi)$ για κάθε $x\in(a,b)$ ή $f'(x)\leq f'(\xi)$ για κάθε $x\in(a,b)$, αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο καμπής της f.

21. Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbf{R}$. Έστω ότι για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει μ ώστε $f(x)\geq\mu(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x\in I$. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I. (*Υπόδ.:* Πάρτε $x_1,\xi,x_2\in I$, $x_1<\xi<x_2$. Συνδυάστε τις $f(x_1)\geq\mu(x_1-\xi)+f(\xi)$ και $f(x_2)\geq\mu(x_2-\xi)+f(\xi)$.)

22. Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbf{R}$ κυρτή στο I. Αποδείξτε ότι, αν κάποιο εσωτερικό σημείο του I είναι σημείο μεγίστου της f, τότε η f είναι σταθερή στο I.

23. Έστω $a,b\in\overline{\mathbf{R}}$ με $a<b$ και $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ κυρτή στο (a,b). Αποδείξτε ότι υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις. Είτε (i) η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b) είτε (ii) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a,b) είτε (iii) υπάρχει $c\in(a,b)$ ώστε η f είναι σταθερή στο $(a,c]$ και γνησίως αύξουσα στο $[c,b)$ είτε (iv) υπάρχει $c\in(a,b)$ ώστε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a,c]$ και σταθερή στο $[c,b)$ είτε (v) υπάρχουν $c,d\in(a,b)$ με $c\leq d$ ώστε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a,c]$, σταθερή στο $[c,d]$ και γνησίως αύξουσα στο $[d,b)$.

24. Έστω $a,b\in\overline{\mathbf{R}}$ με $a<b$ και $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ κυρτή στο (a,b). (i) Αποδείξτε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to b-}f(x)$, $\lim_{x\to a+}f(x)$. (ii) Αν, επιπλέον, $b\in\mathbf{R}$ και η f είναι ορισμένη στο b, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $(a,b]$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to b-}f(x)\leq f(b)$. (iii) Αν, επιπλέον, $a\in\mathbf{R}$ και η f είναι ορισμένη στο a, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $[a,b)$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to a+}f(x)\leq f(a)$.

25. (1) Έστω διάστημα I και $f,g:I\to\mathbf{R}$ κυρτές στο I. Αποδείξτε ότι οι $f+g:I\to\mathbf{R}$, $\max\{f,g\}:I\to\mathbf{R}$ είναι κυρτές στο I. (2) Έστω διαστήματα I, J και $f:I\to J$ κυρτή στο I και $g:J\to\mathbf{R}$ κυρτή στο J. Αν η g είναι αυξουσα στο J, αποδείξτε ότι η $g\circ f:I\to\mathbf{R}$ είναι κυρτή στο I. (3) Έστω διάστημα I και $\mathcal{F}$ ένα σύνολο, κάθε στοιχείο του οποίου είναι συνάρτηση $f:I\to\mathbf{R}$ κυρτή στο I. Για κάθε $x\in I$ ορίζουμε $F(x)=\sup\{f(x):f\in\mathcal{F}\}$. Αν υποθέσουμε ότι $F(x)\in\mathbf{R}$ για κάθε $x\in I$, αποδείξτε ότι η $F:I\to\mathbf{R}$ είναι κυρτή στο I.

26. Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbf{R}$ συνεχής στο I. Αποδείξτε ότι, αν για κάθε $a,b\in I$ υπάρχει $t\in(0,1)$ ώστε $f((1-t)a+tb)\leq(1-t)f(a)+tf(b)$, τότε η f είναι κυρτή στο I. (*Υπόδ.:* Υποθέστε ότι η f δεν είναι κυρτή στο I.)

27. Αν η f είναι κυρτή και άνω φραγμένη στο $\mathbf{R}$, αποδείξτε ότι είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$. (*Υπόδ.:* Έστω $f(x)\leq u$ για κάθε x. Έστω $x_1<x_2$. Αν $x>x_2$ συνδυάστε μια ανισότητα σχετική με την τριάδα x_1,x_2,x με την $f(x)\leq u$, πάρτε όριο καθώς $x\to+\infty$ και αποδείξτε ότι $f(x_2)\leq f(x_1)$. Παρομοίως, εργαστείτε με $x<x_1$ και αποδείξτε ότι $f(x_2)\geq f(x_1)$.)

28. Έστω $a\geq1$ ή $a\leq0$. Αποδείξτε ότι (i) $\big((1-t)x_1+tx_2\big)^a\leq(1-t){x_1}^a+t{x_2}^a$ για κάθε $x_1,x_2>0$ και $t\in[0,1]$, (ii) $x^a\geq a\xi^{a-1}(x-\xi)+\xi^a$ για κάθε $x,\xi>0$. Αποδείξτε ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται αν $0\leq a\leq1$.

29. Έστω $a>0$. Αποδείξτε ότι (i) $a^{(1-t)x_1+tx_2} \leq (1-t)a^{x_1}+ta^{x_2}$ για κάθε x_1,x_2 και $t\in[0,1]$, (ii) $a^x \geq a^\xi \log a\,(x-\xi)+a^\xi$ για κάθε x,ξ.

30. Αποδείξτε ότι (i) $\log\big((1-t)x_1+tx_2\big) \geq (1-t)\log x_1+t\log x_2$ για κάθε $x_1,x_2>0$ και $t\in[0,1]$, (ii) $\log x \leq \frac{1}{\xi}(x-\xi)+\log\xi$ για κάθε $x,\xi>0$.

31. Αποδείξτε την ανισότητα του Young στην άσκηση 19 της ενότητας 5.6, δηλαδή την $a^{1-t}b^t \leq (1-t)a+tb$ $(a,b>0, 0<t<1)$ με δυο τρόπους: χρησιμοποιώντας (i) το ότι η log είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ και (ii) το ότι η p_t είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ όταν $0<t<1$.

32. (1) Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbf{R}$ κυρτή στο I. Έστω $x_1,\dots,x_n\in I$ και $\mu_1,\dots,\mu_n>0$, $\mu_1+\cdots+\mu_n=1$. Αποδείξτε ότι

$$f\big(\mu_1x_1+\cdots+\mu_nx_n\big)\leq \mu_1f(x_1)+\cdots+\mu_nf(x_n).$$

(*Υπόδ.:* Εφαρμόστε την αρχή της επαγωγής ως προς τον n. Για το επαγωγικό βήμα απο τον n στον $n+1$ πάρτε $t=\mu_{n+1}$, ${x_1}'=\frac{\mu_1}{1-\mu_{n+1}}x_1+\cdots+\frac{\mu_n}{1-\mu_{n+1}}x_n$ και ${x_2}'=x_{n+1}$.) (2) Αποδείξτε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση 19 της ενότητας 5.6 χρησιμοποιώντας το ότι η p_t είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ όταν $0<t<1$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε $x_1=\frac{b_1}{a_1}$, $\dots$, $x_n=\frac{b_n}{a_n}$ και $\mu_1=\frac{a_1}{A}$, $\dots$, $\mu_n=\frac{a_n}{A}$, όπου $A=a_1+\cdots+a_n$.) (3) Αποδείξτε την ${a_1}^{\mu_1}\cdots{a_n}^{\mu_n}\leq(\mu_1{a_1}^x+\cdots+\mu_n{a_n}^x)^{\frac{1}{x}}$ στην άσκηση 19 της ενότητας 5.6 χρησιμοποιώντας το ότι η log είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε $x_1={a_1}^x$, $\dots$, $x_n={a_n}^x$.)

33. Αν $n\in\mathbf{N}$, $a_1,\dots,a_n>0$, αποδείξτε ότι $\Big(\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}\Big)^{\sum_{k=1}^n a_k}\leq\prod_{k=1}^n a_k^{a_k}$.

5.8 Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε εφαρμογές των παραγώγων στον υπολογισμό ορίων που καταλήγουν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Οι εφαρμογές αυτές εκφράζονται μέσω των δυο Κανόνων του l' Hopitâl.

Α. Όρια συναρτήσεων.

Ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Πρόταση 5.18 ***Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl.*** *Έστω $f,g:(\xi,b)\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμες στο (ξ,b) και $g(x),g'(x)\neq0$ για κάθε $x\in(\xi,b)$. Έστω, επίσης, $\lim_{x\to\xi+}f(x)=\lim_{x\to\xi+}g(x)=0$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια είναι ίσα:*

$$\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\xi+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν (με τις προφανείς προσαρμογές) και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x\to\xi-$, $x\to\xi$, $x\to+\infty$ και $x\to-\infty$.

Απόδειξη: Οι f, g δε θεωρούνται κατ' αρχάς ορισμένες στον ξ, αλλά τώρα τις ορίζουμε και στον ξ : $f(\xi) = g(\xi) = 0$. Επειδή $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0$, οι f, g είναι, τώρα, συνεχείς στο $[\xi, b)$.

Έστω $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \eta\right| < \epsilon$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, $\xi < x < \xi + \delta_0$. Από το Θεώρημα 5.4 συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in (\xi, b)$ υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$. Τώρα, για κάθε $x \in (\xi, b)$, $\xi < x < \xi + \delta_0$ συνεπάγεται $\zeta \in (\xi, b)$, $\xi < \zeta < \xi + \delta_0$, οπότε $\left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta\right| < \epsilon$ και, επομένως, $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \epsilon$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \epsilon$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, $\xi < x < \xi + \delta_0$. Άρα $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$. Επίσης, η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις $x \to \xi-$ και $x \to \xi$.

Τώρα ανάγουμε την περίπτωση $x \to +\infty$ στην περίπτωση $x \to 0+$.

Έστω $a > 0$, $f, g : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμες στο $(a, +\infty)$, $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει. Θα αποδείξουμε ότι και το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και ότι τα δυο όρια είναι ίσα. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής από x σε $t = \frac{1}{x}$, ορίζουμε $F, G : (0, \frac{1}{a}) \to \mathbf{R}$, $F(t) = f(\frac{1}{t}) = f(x)$, $G(t) = g(\frac{1}{t}) = g(x)$. Τότε $G(t) = g(x) \neq 0$, $G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t}) = -x^2 g'(x) \neq 0$ για κάθε $t \in (0, \frac{1}{a})$. Επίσης, το $\lim_{t\to 0+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 f'(x)}{-x^2 g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει. Άρα και το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{F(t)}{G(t)}$ υπάρχει και είναι ίσο με το προηγούμενο. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ομοίως, η περίπτωση $x \to -\infty$ ανάγεται στην περίπτωση $x \to 0-$. $\natural$

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$. Ισχύει $\sin x \neq 0$, $\sin' x = \cos x \neq 0$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Επίσης, $\lim_{x\to 0}(e^x - 1) = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$. Υπολογίζουμε το όριο του λόγου των παραγώγων: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$. Επομένως, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1$.

Ο Δεύτερος Κανόνας του l' Hopitâl που ακολουθεί αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή, καλύτερα, σε μια γενίκευσή της.

Πρόταση 5.19 ***Δεύτερος Κανόνας του l' Hopitâl.*** *Έστω $f, g : (\xi, b) \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμες στο (ξ, b) και $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. Έστω, επίσης, $\lim_{x\to\xi+} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια είναι ίσα:*

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν (με τις προφανείς προσαρμογές) και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to \xi-$, $x \to \xi$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει ${\delta_0}' > 0$ ώστε

$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\eta\right|<\frac{\epsilon}{6}$ για κάθε $x\in(\xi,b)$, $\xi<x<\xi+\delta_0{}'$. Επιλέγουμε $x_0\in(\xi,b)$, $\xi<x_0<\xi+\delta_0{}'$. Επειδή $\lim_{x\to\xi+}|g(x)|=+\infty$, υπάρχει $\delta_0{}''>0$ ώστε $|g(x)|>\max\left\{|g(x_0)|,\frac{3}{\epsilon}|f(x_0)|,\frac{3|\eta|}{\epsilon}|g(x_0)|\right\}$ για κάθε $x\in(\xi,b)$, $\xi<x<\xi+\delta_0{}''$. Τώρα ορίζουμε $\delta_0=\min\{x_0-\xi,\delta_0{}''\}$. Κάθε $x\in(\xi,b)$, $\xi<x<\xi+\delta_0$ ικανοποιεί τις $\xi<x<x_0<\xi+\delta_0{}'$ και $\xi<x<\xi+\delta_0{}''$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.4, για κάθε τέτοιον x υπάρχει $\zeta\in(x,x_0)$ ώστε $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$. Άρα $\zeta\in(\xi,b)$, $\xi<\zeta<\xi+\delta_0{}'$, οπότε $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-\eta\right|=\left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}-\eta\right|<\frac{\epsilon}{6}$. Συνεπάγεται $\left|f(x)-f(x_0)-\eta\big(g(x)-g(x_0)\big)\right|<\frac{\epsilon}{6}|g(x)-g(x_0)|$, οπότε $|f(x)-\eta g(x)|<\frac{\epsilon}{6}\big(|g(x)|+|g(x_0)|\big)+|f(x_0)|+|\eta||g(x_0)|$ και, επομένως, $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\eta\right|<\frac{\epsilon}{6}\big(1+\frac{|g(x_0)|}{|g(x)|}\big)+\frac{|f(x_0)|}{|g(x)|}+|\eta|\frac{|g(x_0)|}{|g(x)|}<\frac{\epsilon}{6}(1+1)+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\eta\right|<\epsilon$ για κάθε $x\in(\xi,b)$, $\xi<x<\xi+\delta_0$. Άρα $\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)}{g(x)}=\eta$.

Οι περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$ καθώς και οι περιπτώσεις $x\to\xi-$ και $x\to\xi$ αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο. Οι περιπτώσεις $x\to\pm\infty$ ανάγονται στις $x\to 0\pm$ όπως στην απόδειξη της Πρότασης 5.18. $\natural$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι *στις υποθέσεις του Δεύτερου Κανόνα του l' Hopitâl δεν αναφέρεται αν υπάρχει το όριο* $\lim_{x\to\xi+}f(x)$ *ούτε το ποια ακριβώς είναι η τιμή του (αν αυτό υπάρχει). Επομένως, οι απροσδιόριστες μορφές* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ *είναι ειδικές περιπτώσεις του Δεύτερου Κανόνα του l' Hopitâl, όπως τον έχουμε* διατυπώσει.

Παραδείγματα: (1) Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=0\qquad(b>0,a>1).$$

Έστω, κατ' αρχάς, $a>1$, $b=1$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0$, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{p_1(x)}{\exp_a x}=0$. Είναι $\lim_{x\to+\infty}\exp_a x=+\infty$ και $\exp_a x\neq 0$, $\exp_a{}'x=\log a\,\exp_a x\neq 0$ για κάθε x. Το όριο του λόγου των παραγώγων είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\log a\,\exp_a x}=0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{p_1(x)}{\exp_a x}=0$.

Τέλος, έστω $a>1$, $b>0$. Επειδή $a^{\frac{1}{b}}>1$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(a^{\frac{1}{b}}\right)^x}=0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\left(a^{\frac{1}{b}}\right)^x}\right)^b=0^b=0$.

(2) Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^b}{x^a}=0\qquad(b>0,a>0).$$

Έστω, κατ' αρχάς, $a>0$, $b=1$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^a}=0$, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{p_a(x)}=0$. Είναι $\lim_{x\to+\infty}p_a(x)=+\infty$ και $p_a(x)\neq 0$, $p_a{}'(x)=ap_{a-1}(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$. Επίσης, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log' x}{p_a{}'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{p_a(x)}=0$.

Τώρα, έστω $a > 0$, $b > 0$. Επειδή $\frac{a}{b} > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{a}{b}}} = 0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^b}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log x}{x^{\frac{a}{b}}}\right)^b = 0^b = 0$.

(3) Το $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x}$ αποτελεί περίπτωση απροσδιόριστης μορφής $\frac{\pm\infty}{+\infty}$. Πράγματι, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Επίσης, επειδή $x - \cos x \geq x - 1$ για κάθε x, είναι $\lim_{x\to+\infty}(x - \cos x) = +\infty$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το αρχικό όριο υπολογίζεται πολύ εύκολα: επειδή $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\cos x}{x}\right) = 1 - 0 = 1$.

Όμως ο Δεύτερος Κανόνας δε βοηθά! Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sin x}{1}$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \sin x$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει, επίσης, ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του Κανόνα του l' Hopitâl. Πράγματι, στο παράδειγμα αυτό υπάρχει το όριο του λόγου των συναρτήσεων αλλά δεν υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων τους.

Υπάρχουν, όμως, και άλλες απροσδιόριστες μορφές πέραν των $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Σε κάθε περίπτωση μετασχηματίζουμε την απροσδιόριστη μορφή που αντιμετωπίζουμε σε μια από τις βασικές αυτές απροσδιόριστες μορφές και κατόπιν εφαρμόζουμε τον κατάλληλο Κανόνα του l' Hopitâl. Θα περιγράψουμε, τελείως σχηματικά, πώς περίπου χειριζόμαστε τις διάφορες περιπτώσεις.

(1) Έστω $\lim f(x) = 0$ και $\lim g(x) = \pm\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim f(x)g(x)$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $0(\pm\infty)$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να μετατρέψουμε σε $\lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
(2) Έστω $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim g(x) = -\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim(f(x) + g(x))$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) + (-\infty)$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim\left(\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}\right)f(x)g(x)$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Έτσι αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.
(3) Έστω $\lim f(x) = 0$, όπου $f(x) > 0$, και $\lim g(x) = 0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή 0^0. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim e^{g(x)\log f(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$.
(4) Έστω $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim g(x) = 0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim e^{g(x)\log f(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$.
(5) Τέλος, έστω $\lim f(x) = 1$ και $\lim g(x) = \pm\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $1^{\pm\infty}$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim e^{g(x)\log f(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty)0$.

Παραδείγματα: (1) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to0+} x\log x$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Μετασχηματίζουμε σε $\lim_{x\to0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$, όπου $\lim_{x\to0+} \frac{1}{x} = +\infty$. Είναι $p_{-1}(x) \neq 0$ και ${p_{-1}}'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επίσης, $\lim_{x\to0+} \frac{\log' x}{{p_{-1}}'(x)} = -\lim_{x\to0+} x = 0$. Άρα $\lim_{x\to0+} x\log x = \lim_{x\to0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0+} \frac{\log x}{p_{-1}(x)} = 0$.

(2) Το $\lim_{x\to 0+} x^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή 0^0. Γράφουμε $x^x = e^{x\log x}$, οπότε το όριο μετασχηματίζεται στο προηγούμενο όριο. Άρα $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = e^0 = 1$ διότι η exp είναι συνεχής στον 0.

(3) Το $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή $1^{+\infty}$. Είναι $\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)^x = e^{x\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)}$ και αναγόμαστε στο $\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$. Γράφουμε $x\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}$ και έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Θεωρούμε την $f(x) = \log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)$. Είναι $p_{-1}(x)\neq 0$ και ${p_{-1}}'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Τώρα, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{{p_{-1}}'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x^2-1)}{(1+x^2)(1+x+x^2)} = 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{p_{-1}(x)} = 1$, οπότε $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)} = e^1 = e$ διότι η exp είναι συνεχής στον 1.

Β. Όρια ακολουθιών.

Πριν αφήσουμε αυτήν την ενότητα θα ήταν χρήσιμο να αναφερθεί η εφαρμογή των Κανόνων του l' Hopitâl στον υπολογισμό ορίων ακολουθιών.

Πρώτη εφαρμογή. Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) ώστε $b_n\neq 0$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ και έστω $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Στόχος είναι ο υπολογισμός του $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$, αν αυτό υπάρχει.

Για να εφαρμόσουμε τον Πρώτο Κανόνα του l' Hopitâl, *πρέπει να βρούμε συναρτήσεις* $f,g:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$ *ώστε* $f(n)=a_n$ *και* $g(n)=b_n$ *για κάθε* $n\in\mathbf{N}$. Οι f,g πρέπει να είναι παραγωγίσιμες στο $[1,+\infty)$, πρέπει να ισχύει $g(x),g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί τις f,g και αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο. Τώρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2 στην $\frac{f}{g}$ και στην ακολουθία (n), συμπεραίνουμε ότι και το $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ υπάρχει και έχει την ίδια τιμή με τα προηγούμενα δυο όρια.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\lim_{n\to+\infty}\arctan\frac{1}{n}\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})$.

Επειδή $\lim_{n\to+\infty}\arctan\frac{1}{n} = 0$ και $\lim_{n\to+\infty}\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}) = +\infty$, το όριο εμπίπτει στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $0(+\infty)$.

Γράφουμε $\arctan\frac{1}{n}\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}) = \arctan\frac{1}{n}\cot\frac{1}{n} = \frac{\arctan\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}}$ για να μεταθέσουμε το όριο στην κατηγορία $\frac{0}{0}$. Ορίζουμε $f,g:(\frac{2}{\pi},+\infty)$, $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$, $g(x)=\tan\frac{1}{x}$. Οι f,g έχουν όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες, οπότε υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(\cos\frac{1}{x})^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}\lim_{x\to+\infty}(\cos\frac{1}{x})^2 = 1$. Θεωρώντας την ακολουθία (n) με όριο $+\infty$, βρίσκουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\tan\frac{1}{x}} = 1$.

Δεύτερη εφαρμογή. Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) ώστε $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και έστω $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ ή $-\infty$. Στόχος, όπως και πριν, είναι ο υπολογισμός του $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$, αν αυτό υπάρχει.

Για να εφαρμόσουμε τον Δεύτερο Κανόνα του l' Hopitâl, *πρέπει να βρούμε συναρτήσεις* $f, g : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ *ώστε* $f(n) = a_n$ *και* $g(n) = b_n$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$. Οι f, g πρέπει να είναι παραγωγίσιμες στο $[1, +\infty)$, πρέπει να ισχύει $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$. Αν, τώρα, υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο, οπότε υπάρχει και το $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ και έχει την ίδια τιμή με τα προηγούμενα δυο όρια.

Παραδείγματα: (1) Δυο σημαντικά όρια ακολουθιών είναι τα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \quad (b > 0, a > 1), \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^b}{n^a} = 0 \quad (b > 0, a > 0).$$

Για το πρώτο όριο ορίζουμε $f, g : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^b$, $g(x) = a^x$, οι οποίες ικανοποιούν τις απαραίτητες συνθήκες, και αναγόμαστε στον υπολογισμό του $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x}$. Το όριο αυτό έχει ήδη υπολογιστεί με τον Δεύτερο Κανόνα του l' Hopitâl. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το δεύτερο όριο.

(2) Θα (ξανα)αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Γράφουμε $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}}$ για να μετατρέψουμε την απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$ σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και εφαρμόζουμε μια ειδική περίπτωση του προηγούμενου ορίου: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$. Καταλήγουμε στο $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1$.

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιώντας όρια που μάθαμε σ' αυτήν την ενότητα, υπολογίστε τα $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{4}}}{x^{13}}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[7]{x}}{(\log x)^5}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}-(\log x)^4}{x^{100}-e^{\frac{x}{4}}}$, $\lim_{x\to+\infty}(e^x - x^3)$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5}$, $\lim_{x\to 0+} \big(\frac{1}{x^5} - \frac{2}{x^2} + (\log x)^7\big)$.

2. Χρησιμοποιώντας τους Κανόνες του l' Hopitâl, βρείτε τα $\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2-x}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^{2x}-1}$, $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arctan x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{b^x-1}$ $(a, b > 0, b \neq 1)$, $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin x)-(\sin x)^2}{x^6}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x^b-1}$, $\lim_{x\to 0} \big(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\big)$, $\lim_{x\to 0+} \sin x \log x$, $\lim_{x\to 1+} \log x \log(x-1)$, $\lim_{x\to 0} \big(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\big)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log(\log x))}{\log(\log x)}$, $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\cot x)$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan(2x)}$, $\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1}$, $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\log x}$, $\lim_{x\to 0} \big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\big)$.

3. Μπορείτε να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x}$ με διαδοχικές εφαρμογές του

Δεύτερου Κανόνα του l' Hopitâl? Μήπως το όριο αυτό υπολογίζεται πολύ εύκολα, χωρίς αναφορά στους Κανόνες του l' Hopitâl?

4. Βρείτε a, b ώστε $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^4}+ax^{-2}+b\right)=0$.

5. Έστω η $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\log|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αλλά όχι Hölder συνεχής στον 0 (δείτε την άσκηση 6 της ενότητας 4.1).

6. Βρείτε τα όρια: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\frac{1}{1!}x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\frac{1}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2}{x^3}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\frac{1}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3}{x^4}$. Παρατηρήστε ότι το πρώτο όριο είναι εξ ορισμού μια γνωστή παράγωγος (οπότε δε χρειάζεται ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl για την απόδειξή του). Γενικεύστε αυτά τα όρια.

7. Για ποιον λόγο δε μπορεί να εφαρμοστεί ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl για να αποδειχθεί το $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; Βρείτε τα: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{1}{1!}x}{x^3}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2!}x^2}{x^4}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^3}{x^5}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4}{x^6}$. Γενικεύστε.

8. Βρείτε τα όρια: $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^4}$. Παρατηρήστε ότι το πρώτο όριο είναι εξ ορισμού μια γνωστή παράγωγος (οπότε δε χρειάζεται ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl για την απόδειξή του). Γενικεύστε.

9. (1) Έστω $\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b_k(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}=\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b'_k(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}\in\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι $b_k=b'_k$ για κάθε $k=0,1,\ldots,n$. (2) Έστω $a<\xi<b$, $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)-\frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}}{(x-\xi)^n}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Παρατηρήστε ότι οι ασκήσεις 6, 7, 8 είναι ειδικές περιπτώσεις. (3) Με τις υποθέσεις του (2), έστω ότι $f^{(n)}(\xi)\in\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι το $p_n(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ για το οποίο ισχύει $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^n}=0$.

10. (1) Έστω ότι η f είναι $2m-1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b), $a<\xi<b$ και ότι υπάρχει η $f^{(2m)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi)=\ldots=f^{(2m-1)}(\xi)=0$, αποδείξτε ότι (i) αν $f^{(2m)}(\xi)>0$, ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f, (ii) αν $f^{(2m)}(\xi)<0$, ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. (*Υπόδ.:* Δείτε την άσκηση 9.) (2) Έστω ότι η f είναι $2m$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b), $a<\xi<b$ και ότι υπάρχει η $f^{(2m+1)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi)=\ldots=f^{(2m)}(\xi)=0$ και $f^{(2m+1)}(\xi)\neq 0$, αποδείξτε ότι ο ξ δεν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου ούτε τοπικού μεγίστου της f.

11. Έστω $f : (a,b) \to \mathbf{R}$, $a < \xi < b$. (1) Αν υπάρχει η $f'(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h} = f'(\xi)$. (2) Αν υπάρχει η $f''(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2} = f''(\xi)$.

12. (1) Έστω f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \eta \in \overline{\mathbf{R}}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \eta$. (2) Έστω f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και έστω $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = \eta$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. (*Υπόδ.:* Γράψτε $f(x) = \frac{f(x)e^x}{e^x}$.)

13. (1) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} x^{-m}e^{-\frac{1}{x}} = 0$ για κάθε $m \in \mathbf{N}$. (2) Έστω η $h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η h είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και, ειδικότερα, ότι $h^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. (*Υπόδ.:* Με την αρχή της επαγωγής αποδείξτε ότι η h είναι n φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και, ειδικότερα, ότι $h^{(n)}(0) = 0$. Δείτε την άσκηση 12 της ενότητας 5.7.) (3) Έστω η $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-x^2}}, & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. (*Υπόδ.:* Χρησιμοποιήστε το (2) και τον κανόνα της αλυσίδας.)

14. Χρησιμοποιώντας γνωστά όρια ακολουθιών, βρείτε τα $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^{13}}{n^2}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(\log n)^{95}}$, $\lim_{n\to+\infty} ne^{-n}$, $\lim_{n\to+\infty} n^3e^{-n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{n}{5}}}{n^{100}}$.

15. Χρησιμοποιώντας το $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ αποδείξτε τα $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^3+3n^2+n+2} = 1$.

16. Βρείτε τα: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\log n)}{\log n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\log(\log n))}{\log(\log n)}$, $\lim_{n\to+\infty}(n - \cot\frac{1}{n})$.

5.9 Τάξη μεγέθους, ασυμπτωτική ισότητα.

A. Τάξη μεγέθους.

Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $f(x), g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν $\lim_{x\to\xi} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$, τότε λέμε ότι η f έχει **μικρότερη τάξη μεγέθους** από την g κοντά στο ξ καθώς και ότι η g έχει **μεγαλύτερη τάξη μεγέθους** από την f κοντά στο ξ. Παρατηρήστε ότι, λόγω της υπόθεσης για μη μηδενισμό των f, g, η ισότητα $\lim_{x\to\xi} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$ είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x\to\xi} \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = +\infty$. Τέλος, αν υπάρχουν l, u ώστε $0 < l \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq u < +\infty$ κοντά στο ξ, τότε λέμε ότι οι f, g έχουν **ίδια τάξη μεγέθους** κοντά στο ξ.

Αν υπάρχει το $\rho = \lim_{x\to\xi} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ και $\rho \in \mathbf{R}$, $\rho > 0$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε l ώστε $0 < l < \rho$ (για παράδειγμα, τον $l = \frac{\rho}{2}$) και $u > \rho$ (για παράδειγμα, τον $u = 2\rho$) οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.5, ισχύει $l < \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < u$ κοντά στο ξ και, επομένως, η f έχει ίδια τάξη μεγέθους με την g κοντά στο ξ.

Παραδείγματα: (1) Η x^b $(b>0)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την a^x $(a>1)$ κοντά στο $+\infty$, διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=0$.

(2) Η $(\log x)^c$ $(c>0)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την x^b $(b>0)$ κοντά στο $+\infty$, διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^c}{x^b}=0$.

(3) Αν $a_n, b_n \neq 0$, οι $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, $b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$, αφού $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}\right|=\left|\frac{a_n}{b_n}\right|>0$.

(4) Έστω $a_n, b_m \neq 0$ και $n<m$. Η $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την $q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ κοντά στο $+\infty$. Πράγματι, $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=0$.

(5) Η $a^{-\frac{1}{x}}$ $(a>1)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την x^b $(b>0)$ κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to0+}\frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x^b}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^b}{a^t}=0$.

(6) Οι $1-\cos x$, x^2 έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}>0$.

(7) Οι $\sin x$, x έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1>0$.

(8) Η $f(x)=(\log\frac{1}{x})^c$ $(c>0)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την x^{-b} $(b>0)$ κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to0+}\frac{(\log\frac{1}{x})^c}{x^{-b}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\log t)^c}{t^b}=0$.

(9) Το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2+\sin x)$ δεν υπάρχει. Όμως, οι $2x+x\sin x$, x έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. Πράγματι, ισχύει $1\leq\frac{2x+x\sin x}{x}\leq 3$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Θα περιγράψουμε, τώρα, ειδικά για την περίπτωση $\lim_{x\to+\infty}$ μερικούς ευρέως χρησιμοποιούμενους όρους: την *πολυωνυμική*, την *εκθετική* και τη *λογαριθμική τάξη μεγέθους*.

Είδαμε στο παράδειγμα (3) ότι όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. Αυτό το κωδικοποιούμε λέγοντας ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n έχει **πολυωνυμική τάξη μεγέθους** ή, ειδικώτερα, **πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού** n κοντά στο $+\infty$. Σύμφωνα με το παράδειγμα (4), μπορούμε να «ιεραρχήσουμε» τις πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους κοντά στο $+\infty$ *ανάλογα με τον βαθμό τους*: μεγαλύτερος βαθμός αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τάξη μεγέθους. Φυσικά, από τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n η πιο απλή είναι η x^n . Πρέπει, τώρα, να πούμε ότι ο όρος «πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού n» χαρακτηρίζει όχι μόνο τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n αλλά και *κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με την* x^n κοντά στο $+\infty$.

Παράδειγμα: Κάθε ρητή συνάρτηση $r(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ $(a_n, b_m\neq0)$, όπου $n>m$, έχει πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού $n-m$ κοντά στο $+\infty$. Διότι $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}}{x^{n-m}}\right|=\left|\frac{a_n}{b_m}\right|>0$.

Ο όρος «πολυωνυμική τάξη μεγέθους» χρησιμοποιείται για τις συναρτήσεις x^b

ακόμη και όταν ο εκθέτης $b > 0$ δεν είναι κατ᾽ ανάγκη φυσικός καθώς και για κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις x^b $(b > 0)$ κοντά στο $+\infty$. Πιο συγκεκριμένα, λέμε ότι η f έχει **πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού** $b > 0$ κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την x^b $(b > 0)$ κοντά στο $+\infty$. Προφανώς, οι πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους «ιεραρχούνται» ανάλογα με τον βαθμό τους, αφού $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{b_1}}{x^{b_2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{b_2-b_1}} = 0$ αν $0 < b_1 < b_2$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι κάθε συνάρτηση με πολυωνυμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Πράγματι, αν η f έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια x^b $(b > 0)$, τότε υπάρχουν $u, l > 0$ ώστε $l \leq \left|\frac{f(x)}{x^b}\right| \leq u$ και, επομένως, $|f(x)| \geq lx^b$ κοντά στο $+\infty$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} lx^b = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.

Κατόπιν, αν $a > 1$, λέμε ότι η a^x έχει **εκθετική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$. Το ίδιο λέμε και για οποιαδήποτε συνάρτηση η οποία έχει την ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις a^x $(a > 1)$ κοντά στο $+\infty$. Οι εκθετικές τάξεις μεγέθους «ιεραρχούνται» ανάλογα με τη βάση a. Πράγματι, $\lim_{x\to+\infty} \frac{{a_1}^x}{{a_2}^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x = 0$ αν $1 < a_1 < a_2$.

Τέλος, αν $c > 0$, λέμε ότι η $(\log x)^c$ έχει **λογαριθμική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$. Το ίδιο ισχύει για κάθε συνάρτηση η οποία έχει την ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις $(\log x)^c$ $(c > 0)$ κοντά στο $+\infty$. Οι λογαριθμικές τάξεις μεγέθους «ιεραρχούνται» ανάλογα με τον εκθέτη c, αφού είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^{c_1}}{(\log x)^{c_2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\log x)^{c_2-c_1}} = 0$ αν $0 < c_1 < c_2$.

Όπως και με τις συναρτήσεις πολυωνυμικής τάξης μεγέθους, παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση με εκθετική ή λογαριθμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Η απόδειξη είναι παρόμοια.

Στα παραδείγματα (1), (2) είδαμε ότι, *κοντά στο* $+\infty$*, κάθε λογαριθμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε πολυωνυμική τάξη μεγέθους και κάθε πολυωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε εκθετική τάξη μεγέθους.*

B. Ασυμπτωτική ισότητα. Μικρό όμικρον και μεγάλο όμικρον.

Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, τότε γράφουμε

$$f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big) \quad \text{κοντά στο } \xi$$

και διαβάζουμε «*η* f *είναι **μικρό όμικρον** της* g» κοντά στο ξ. Αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε $|f(x)| \leq M|g(x)|$ κοντά στο ξ, τότε γράφουμε

$$f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big) \quad \text{κοντά στο } \xi$$

και διαβάζουμε «*η* f *είναι **μεγάλο όμικρον** της* g» κοντά στο ξ.

Παραδείγματα: (1) Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την g κοντά στο ξ, τότε $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ. Το αντίστροφο ισχύει, φυσικά, αν $f(x) \neq 0$ κοντά στο ξ.

Για παράδειγμα, είναι $(\log x)^c = \mathrm{o}\big(x^b\big)$ και $x^b = \mathrm{o}\big(a^x\big)$ κοντά στο $+\infty$ για κάθε $a > 1$ και $b, c > 0$. Επίσης, είναι $x^{b_1} = \mathrm{o}\big(x^{b_2}\big)$ κοντά στο $+\infty$ αλλά και $x^{b_2} = \mathrm{o}\big(x^{b_1}\big)$ κοντά στον 0 αν $0 < b_1 < b_2$.

(2) Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από ή την ίδια τάξη μεγέθους με την g κοντά στο ξ, τότε $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ.

Για παράδειγμα, είναι $\sin x = \mathrm{O}(x)$ και $1 - \cos x = \mathrm{O}(x^2)$ κοντά στον 0.

Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbf{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, τότε γράφουμε

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{κοντά στο } \xi$$

και λέμε ότι η f είναι **ασυμπτωτικά ίση** με την g κοντά στο ξ. Παρατηρήστε ότι από το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ συνεπάγεται ότι $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ κοντά στο ξ και, επομένως, $f(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Δηλαδή, αν είναι $f(x) \sim g(x)$ κοντά στο ξ, τότε είναι $f(x), g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ.

Παραδείγματα: (1) Είναι $\sin x \sim x$ και $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ κοντά στον 0.

(2) Είναι $e^x - 1 \sim x$ κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

(3) Είναι $\log(1+x) \sim x$ κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

(4) Είναι $\tan x \sim \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$ κοντά στον $\frac{\pi}{2}$, διότι $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}} = \lim_{t\to 0} t\tan(t+\frac{\pi}{2}) = \lim_{t\to 0} t\cot t = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t}\cos t = 1$.

Η σχέση $f(x) - g(x) = o\big(cg(x)\big)$, όπου $c \neq 0$, είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική ισότητα $f(x) \sim g(x)$. Πράγματι: $f(x) - g(x) = \mathrm{o}\big(cg(x)\big)$ κοντά στο ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-g(x)}{cg(x)} = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \big(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\big) = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ αν και μόνο αν $f(x) \sim g(x)$ κοντά στο ξ.

Παραδείγματα: Βάσει των προηγούμενων παραδειγμάτων:

(1) $\sin x - x = \mathrm{o}(x)$ και $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \mathrm{o}(x^2)$ κοντά στον 0.

(2) $e^x - 1 - x = \mathrm{o}(x)$ κοντά στον 0.

(3) $\log(1+x) - x = \mathrm{o}(x)$ κοντά στον 0.

(4) $\tan x - \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} = \mathrm{o}\big(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\big)$ κοντά στον $\frac{\pi}{2}$.

Αν όλες οι $g_1, \dots, g_n$ είναι μικρό όμικρον της ίδιας g κοντά στο ξ, τότε και η $g_1 + \cdots + g_n$ είναι μικρό όμικρον της g κοντά στο ξ. Αυτό είναι σχεδόν προφανές: $\lim_{x\to\xi} \frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{g_1(x)}{g(x)} + \cdots + \lim_{x\to\xi} \frac{g_n(x)}{g(x)} = 0 + \cdots + 0 = 0$.

Αν στην $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ είναι όλες οι $g_1, \dots, g_n$ μικρό όμικρον της g κοντά στο ξ, τότε η g χαρακτηρίζεται **κύριος όρος** του αθροίσματος κοντά στο ξ και, τότε, είναι $f(x) \sim g(x)$ κοντά στο ξ. Πράγματι, $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \big(1+$

$\frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)}\big) = 1$. Είναι *χρήσιμο* να μπορούμε να διακρίνουμε τον κύριο όρο σε ένα άθροισμα συναρτήσεων. Για παράδειγμα, αν στην $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} g(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και τα δυο όρια είναι ίσα. Διότι, όπως μόλις είδαμε, είναι $f(x) \sim g(x)$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)}\, g(x) = 1 \cdot \lim_{x\to\xi} g(x)$. Ένα ακόμη παράδειγμα: αν στις $g+g_1+\cdots+g_n$ και $h+h_1+\cdots+h_m$ οι g, h είναι οι κύριοι όροι, αντιστοίχως, κοντά στο ξ, τότε $\frac{g(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{h(x)+h_1(x)+\cdots+h_m(x)} \sim \frac{g(x)}{h(x)}$ κοντά στο ξ και, επομένως, αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)}{h(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{h(x)+h_1(x)+\cdots+h_m(x)}$ και τα δυο όρια είναι ίσα.

Παραδείγματα: (1) Βάσει των προηγουμένων μπορούμε να δούμε με «νέο μάτι» τα όρια πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων. Επειδή $x^k = o(x^n)$ κοντά στο $+\infty$ για κάθε $k < n$, στο πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ $(a_n \neq 0)$ ο όρος a_nx^n είναι κύριος όρος κοντά στο $+\infty$, οπότε $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \sim a_nx^n$ κοντά στο $+\infty$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n) = \lim_{x\to+\infty} a_nx^n$. Ομοίως, $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m} \sim \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$ κοντά στο $+\infty$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

(2) Και στα δυο αθροίσματα $xe^{2x} - x^2 + 3e^x - x^2e^{\frac{x}{2}}$ και $2e^{2x} + \log x - x^2e^x$ ο πρώτος τους όρος είναι ο κύριος όρος κοντά στο $+\infty$. Άρα $\frac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x} \sim \frac{xe^{2x}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2}$ κοντά στο $+\infty$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$.

Ασκήσεις.

1. (1) Έστω $a > 1$. «Ιεραρχήστε» τις $\exp_a$, $\exp_a \circ \exp_a$, $\exp_a \circ \exp_a \circ \exp_a$ κατά τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. Γενικεύστε. (2) «Ιεραρχήστε» τις $\log$, $\log\circ\log$, $\log\circ\log\circ\log$ κατά τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. Γενικεύστε.

2. (1) Αποδείξτε ότι οι x, $\log(e^x + x\log x)$, $e^{(1+\frac{1}{x})\log x}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. (2) Αποδείξτε ότι οι x, $\frac{x^2+x\log x}{\sin x+x^2}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στον 0.

3. Έστω οι $\frac{x^3e^x-x^5e^{\frac{x}{2}}}{xe^x+\sin x}$, $e^{\frac{x}{5}} + x^3e^{\frac{x}{6}} - x$, $e^{3\log(2+\log x)}$. Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους τους κοντά στο $+\infty$ σε πολυωνυμικές, εκθετικές και λογαριθμικές και «ιεραρχήστε» τις.

4. Λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις x^b $(b < 0)$. Ομοίως, λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη εκθετική** ή **αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις a^x $(0 < a < 1)$ ή τις $(\log x)^c$ $(c < 0)$, αντιστοίχως, κοντά στο $+\infty$. (1) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση με αντίστροφη πολυωνυμική ή αντίστροφη εκθετική ή αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ έχει όριο 0 στο $+\infty$. (2) Αποδείξτε ότι κοντά στο $+\infty$ κάθε αντίστροφη εκθετική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη

από κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους και ότι κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους. (3) «Ιεραρχήστε» τις αντίστροφες πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους μεταξύ τους και κάντε το ίδιο για τις αντίστροφες εκθετικές και τις αντίστροφες λογαριθμικές τάξεις μεγέθους. (4) Αποδείξτε ότι κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ $(a_n, b_m \neq 0)$, όπου $n < m$, έχει αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. (5) Έστω οι $e^{-x} + 2e^{-x^2}$, $\frac{1}{\log(x+\log x)}$, $\log\big(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\big)$. Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους τους κοντά στο $+\infty$ σε αντίστροφες πολυωνυμικές, αντίστροφες εκθετικές και αντίστροφες λογαριθμικές.

5. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{1-x} - 1 = \mathrm{o}(1)$, $\frac{1}{1-x} - (1+x) = \mathrm{o}(x)$, $\frac{1}{1-x} - (1+x+x^2) = \mathrm{o}(x^2)$ κοντά στον 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες. Γενικεύστε.

6. Αποδείξτε ότι $e^x - 1 = \mathrm{o}(1)$, $e^x - \big(1 + \frac{x}{1!}\big) = \mathrm{o}(x)$, $e^x - \big(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\big) = \mathrm{o}(x^2)$ κοντά στον 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες. Γενικεύστε.

7. Αποδείξτε ότι $\sin x - \big(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}\big) = \mathrm{o}(x^3)$, $\cos x - \big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\big) = \mathrm{o}(x^4)$, $\sin x - \big(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\big) = \mathrm{o}(x^5)$, $\cos x - \big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\big) = \mathrm{o}(x^6)$ κοντά στον 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες. Γενικεύστε.

8. Αποδείξτε ότι $\log(1+x) - x = \mathrm{o}(x)$, $\log(1+x) - \big(x - \frac{x^2}{2}\big) = \mathrm{o}(x^2)$, $\log(1+x) - \big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\big) = \mathrm{o}(x^3)$ κοντά στον 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες. Γενικεύστε.

9. Αποδείξτε ότι $\arctan x - x = \mathrm{o}(x)$, $\arctan x - \big(x - \frac{x^3}{3}\big) = \mathrm{o}(x^3)$, $\arctan x - \big(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\big) = \mathrm{o}(x^5)$ κοντά στον 0 και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες. Γενικεύστε.

10. (1) Έστω $f(x) - (a + bx + cx^2 + dx^3) = \mathrm{o}(x^3)$ κοντά στον 0. Αποδείξτε διαδοχικά ότι $f(x) - (a + bx + cx^2) = \mathrm{o}(x^2)$, $f(x) - (a + bx) = \mathrm{o}(x)$ και $f(x) - a = \mathrm{o}(1)$ κοντά στον 0. (2) Βρείτε a, b, c, d ώστε $\frac{x}{e^x-1} - (a + bx + cx^2 + dx^3) = \mathrm{o}(x^3)$ κοντά στον 0.

11. Διατυπώστε την άσκηση 9 της ενότητας 5.8 ως εξής. Έστω ότι η f είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) και $a < \xi < b$. Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$ και είναι αριθμός, αποδείξτε ότι, κοντά στον ξ,
$$f(x) - \Big(f(\xi) + \frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\Big) = \mathrm{o}\big((x-\xi)^n\big).$$
Τα αποτελέσματα των ασκήσεων 5 - 9 είναι ειδικές περιπτώσεις.

12. (1) Ποιοι είναι οι κύριοι όροι των αθροισμάτων $e^{2x}\log x - x^5e^x$, $x\log x - \frac{x^2}{\log x} + x\sqrt{x}\log(\log x)$, $x^2\log x - x^2 + 3x\sin x$ κοντά στο $+\infty$; (2) Ποιοι είναι οι κύριοι όροι των αθροισμάτων $\frac{2}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}$, $1 + 2x - x\sqrt{x}$, $\frac{1}{(\sin x)^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$ κοντά στον 0;

13. (1) Αν $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ, αποδείξτε ότι $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά: $\mathrm{o}\big(g(x)\big) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ. Προσέξτε: *δεν* ισχύει $\mathrm{O}\big(g(x)\big) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$. (2) Είδαμε ότι, αν $f_1(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ και $f_2(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ, τότε $f_1(x) + f_2(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά: $\mathrm{o}\big(g(x)\big)+ \mathrm{o}\big(g(x)\big) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ. Αποδείξτε και τα ανάλογα: $\mathrm{O}\big(g(x)\big)+ \mathrm{O}\big(g(x)\big) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$, $\mathrm{o}\big(g_1(x)\big)\mathrm{O}\big(g_2(x)\big) = \mathrm{o}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $\mathrm{O}\big(g_1(x)\big)\mathrm{O}\big(g_2(x)\big) = \mathrm{O}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$ κοντά στο ξ.

5.10 Ο τύπος του Taylor, I.

Πρόταση 5.20 *Έστω $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$, $f, g : [\xi, c] \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο $[\xi, c]$, n φορές παραγωγίσιμες στο $[\xi, c)$ ώστε οι $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ να είναι συνεχείς στο $[\xi, c)$ και παραγωγίσιμες στο (ξ, c). Τότε υπάρχει $\zeta \in (\xi, c)$ ώστε*

$$\Big(f(c) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k\Big)g^{(n+1)}(\zeta) = \Big(g(c) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k\Big)f^{(n+1)}(\zeta).$$

Η ισότητα αυτή ισχύει και όταν $c < \xi$, αρκεί όλες οι προηγούμενες υποθέσεις να ισχύουν στο διάστημα $[c, \xi]$.

Απόδειξη: Έστω $\xi < c$. Ορίζουμε αριθμούς $a_f = f(c) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k$, $a_g = g(c) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k$ και τη συνάρτηση $h : [\xi, c] \to \mathbf{R}$, $h(x) = a_g\big(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\big) - a_f\big(g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\big)$. Η h είναι συνεχής στο $[\xi, c]$, n φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi, c)$ και η $h^{(n)}$ είναι συνεχής στο $[\xi, c)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, c). Επίσης, $h^{(k)}(\xi) = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ και $h(c) = 0$.

Επειδή $h(\xi) = h(c) = 0$, συνεπάγεται από το Θεώρημα του Rolle ότι υπάρχει $\zeta_1 \in (\xi, c)$ ώστε $h^{(1)}(\zeta_1) = 0$. Επειδή $h^{(1)}(\xi) = h^{(1)}(\zeta_1) = 0$, υπάρχει $\zeta_2 \in (\xi, \zeta_1)$ και, επομένως, $\zeta_2 \in (\xi, c)$ ώστε $h^{(2)}(\zeta_2) = 0$. Επειδή $h^{(2)}(\xi) = h^{(2)}(\zeta_2) = 0$, υπάρχει $\zeta_3 \in (\xi, \zeta_2)$ και, επομένως, $\zeta_3 \in (\xi, c)$ ώστε $h^{(3)}(\zeta_3) = 0$. Συνεχίζοντας επαγωγικά με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο ότι υπάρχει $\zeta_{n+1} \in (\xi, c)$ ώστε $h^{(n+1)}(\zeta_{n+1}) = 0$. Ονομάζουμε $\zeta = \zeta_{n+1}$, οπότε έχουμε καταλήξει στο ότι υπάρχει $\zeta \in (\xi, c)$ ώστε $0 = h^{(n+1)}(\zeta) = a_g f^{(n+1)}(\zeta) - a_f g^{(n+1)}(\zeta)$. Άρα $a_f g^{(n+1)}(\zeta) = a_g f^{(n+1)}(\zeta)$.

Στην περίπτωση $c < \xi$ η απόδειξη είναι ίδια (με τις προφανείς αλλαγές). ♮

Παρατηρήστε ότι, στην περίπτωση $n = 0$, η Πρόταση 5.20 ταυτίζεται με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού του Cauchy.

Θεώρημα 5.5 ***Ο τύπος του Taylor.*** *Έστω $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$, $f : [\xi, c] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[\xi, c]$, n φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi, c)$ ώστε η $f^{(n)}$ να είναι συνεχής στο $[\xi, c)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, c). Τότε υπάρχει $\zeta \in (\xi, c)$ ώστε*

$$(\mathbf{Lagrange}) \qquad f(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(c-\xi)^{n+1}.$$

Επίσης, υπάρχει (διαφορετικό, ίσως) $\zeta \in (\xi, c)$ ώστε

$$(\mathbf{Cauchy}) \qquad f(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(c-\zeta)^n(c-\xi).$$

Οι ίδιες ισότητες ισχύουν και όταν $c < \xi$, αρκεί όλες οι προηγούμενες υποθέσεις να ισχύουν στο διάστημα $[c, \xi]$.

Απόδειξη: Για την πρώτη ισότητα εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.20 στο $[\xi, c]$ με την $g(x) = (x-\xi)^{n+1}$. Για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε την $g(x) = x - \xi$, αν $n = 0$, και την $g(x) = \begin{cases} (c-x)\log(c-x) - (c-x), & \xi \leq x < c, \\ 0, & x = c, \end{cases}$ αν $n \geq 1$. ♮

Αν μια συνάρτηση f είναι (τουλάχιστον) n φορές παραγωγίσιμη στον ξ, το

$$p_{n,\xi}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

ονομάζεται **πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στον ξ**.

Οι δυο ισότητες στο Θεώρημα 5.5 γράφονται $f(c) = p_{n,\xi}(c) + R_{n,\xi}(c, \zeta)$, όπου

$$R_{n,\xi}(c,\zeta) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(c-\xi)^{n+1} \qquad \text{ή} \qquad R_{n,\xi}(c,\zeta) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(c-\zeta)^n(c-\xi).$$

Η πρώτη ισότητα ονομάζεται **τύπος του Taylor για την f στον ξ με υπόλοιπο Lagrange** και η δεύτερη ισότητα ονομάζεται **τύπος του Taylor για την f στον ξ με υπόλοιπο Cauchy**. Το $R_{n,\xi}(c, \zeta)$ ονομάζεται **υπόλοιπο Lagrange** ή, αντιστοίχως, **Cauchy τάξης n**.

Το υπόλοιπο τάξης n εκφράζει το «σφάλμα» που γίνεται όταν αντικαθίσταται η τιμή $f(c)$ από την τιμή $p_{n,\xi}(c)$ του πολυωνύμου Taylor τάξης n στον ξ που της αντιστοιχεί. Κάθε εφαρμογή του τύπου του Taylor αποσκοπεί στο να αποδείξει ότι το $R_{n,\xi}(c, \zeta)$ είναι μικρό και, επομένως, ότι η $f(c)$ προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την $p_{n,\xi}(c)$.

Παραδείγματα: (1) Έστω πολυωνυμική συνάρτηση p βαθμού $\leq n$. Η p είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και, επομένως, μπορεί να εφαρμοσθεί το Θεώρημα 5.5 για κάθε ξ, c. Επειδή $p^{(n+1)}(\zeta) = 0$ για κάθε ζ, είναι $R_{n,\xi}(c, \zeta) = 0$ και, επομένως,

$$p(c) = p_{n,\xi}(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k$$

για κάθε ξ, c. Δηλαδή η προσέγγιση ενός πολυωνύμου p βαθμού $\leq n$ από οποιοδήποτε πολυώνυμο Taylor του p τάξης $\geq n$ είναι τέλεια.

(2) Θα υπολογίσουμε τον αριθμό $\sqrt{4 + 10^{-5}}$ με σφάλμα $< 10^{-17}$.

Παρατηρούμε ότι ο $c = 4 + 10^{-5}$ είναι πολύ κοντά στον $\xi = 4$ και ότι ο αριθμός $\sqrt{4}$ υπολογίζεται εύκολα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[4, 4 + 10^{-5}]$ με παραγώγους $f^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - k + 1)x^{\frac{1}{2} - k}$. Στον $\xi = 4$

υπολογίζουμε ακριβώς: $f^{(k)}(4) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)4^{\frac{1}{2}-k}$ και, επομένως, $f'(4) = \frac{1}{4}$ και $f^{(k)}(4) = (-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^{3k-1}}$ για κάθε $k \geq 2$. Κατόπιν, υπολογίζουμε ένα άνω φράγμα για την $|f^{(n+1)}(x)|$ στο διάστημα $(4, 4+10^{-5})$. Γράφουμε, λοιπόν, $|f^{(n+1)}(x)| = |\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n)x^{\frac{1}{2}-n-1}| \leq \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}\frac{1}{4^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{3n+2}}$. Επομένως, για το υπόλοιπο Lagrange ισχύει $|R_{n,4}(4+10^{-5},\zeta)| \leq \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{3n+2}(n+1)!}10^{-5(n+1)}$.

Αν επιλέξουμε $n=2$, υπολογίζουμε $|R_{2,4}(4+10^{-5},\zeta)| < 10^{-17}$ και, επομένως, $\left|\sqrt{4+10^{-5}} - 2 - \frac{1}{4}10^{-5} - \frac{1}{2!}(-1)^{2-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2\cdot 2-3)}{2^{3\cdot 2-1}}(10^{-5})^2\right| < 10^{-17}$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $2 + \frac{1}{4}10^{-5} + \frac{1}{2!}(-1)^{2-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2\cdot 2-3)}{2^{3\cdot 2-1}}(10^{-5})^2 = \frac{1280001599999}{640000000000} \approx 2$ είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{4+10^{-5}}$ με σφάλμα $< 10^{-17}$.

Ασκήσεις.

1. Έστω ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στον ξ. Αποδείξτε ότι το $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ για το οποίο ισχύει $p^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi)$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$.

2. Εφαρμόστε τον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange στην $f(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[\xi, c] = [4, 4+10^{-5}]$. Ποιον $n \in \mathbf{N}$ πρέπει να χρησιμοποιήσετε ώστε να προσεγγίσετε τον $\sqrt{4+10^{-5}}$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

3. Προσαρμόστε την προηγούμενη άσκηση στην προσέγγιση των $\sin(1^o)$ και $\sin(31^o)$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου. (*Υπόδ.:* $1^o = 0 + \frac{\pi}{180}$, $31^o = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$.)

4. Στον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange $\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(c-\xi)^{n+1}$ ο ζ εξαρτάται, φυσικά, από τον c. Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει η $f^{(n+2)}(x)$ στο $[\xi, c)$ και είναι συνεχής στον ξ, τότε $\lim_{c\to\xi+}\frac{\zeta-\xi}{c-\xi} = \frac{1}{n+2}$.

Κεφάλαιο 6

Ολοκληρώματα Riemann.

6.1 Διαμερίσεις και αθροίσματα Darboux.

Έστω $a < b$ και το αντίστοιχο διάστημα $[a, b]$. Ονομάζουμε **διαμέριση** του $[a, b]$ οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του $[a, b]$ το οποίο περιέχει (τουλάχιστον) τους a, b. Κάθε διαμέριση του $[a, b]$ τη συμβολίζουμε, συνήθως,

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} = \{x_k : k \in \mathbf{Z}, 0 \leq k \leq n\},$$

όπου $n \in \mathbf{N}$ και $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Η Δ ονομάζεται **διαμέριση** $n + 1$ **σημείων** του $[a, b]$ και τα $x_0, \dots, x_n$ ονομάζονται **διαιρετικά σημεία** της Δ. Το x_k ονομάζεται k-οστό διαιρετικό σημείο της Δ. Η Δ χωρίζει το $[a, b]$ στα n υποδιαστήματα $[x_0, x_1]$, ... , $[x_{n-1}, x_n]$, τα οποία ονομάζονται (καταχρηστικά, ίσως) **υποδιαστήματα της** Δ. Το $[x_{k-1}, x_k]$ ονομάζεται k-οστό υποδιάστημα της Δ.

Παραδείγματα: (1) Η απλούστερη διαμέριση του $[a, b]$ είναι η διαμέριση δύο σημείων $\{a = x_0, x_1 = b\}$. Αυτή καθορίζει *ένα* υποδιάστημα, το $[x_0, x_1] = [a, b]$.

(2) Υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις τριών σημείων του $[a, b]$. Πράγματι, κάθε $x_1 \in (a, b)$ ορίζει διαμέριση $\{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$ τριών σημείων. Προφανώς, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις τεσσάρων σημείων, πέντε σημείων κλπ.

(3) Η απλούστερη, «οπτικά», διαμέριση $n + 1$ σημείων του $[a, b]$ είναι εκείνη της οποίας όλα τα υποδιαστήματα έχουν το ίδιο μήκος. Επειδή το πλήθος των υποδιαστημάτων είναι n και το συνολικό τους μήκος $b-a$, το μήκος καθενός από αυτά είναι $\frac{b-a}{n}$. Επομένως, τα διαιρετικά σημεία είναι τα $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}$ και ούτω καθ' εξής. Το k-οστό διαιρετικό σημείο είναι το $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. Πράγματι, το μήκος του $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $x_k - x_{k-1} = (a + k\frac{b-a}{n}) - (a + (k-1)\frac{b-a}{n}) = \frac{b-a}{n}$ και το n-οστό διαιρετικό σημείο είναι το $x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$.

(4) Τονίζουμε ότι (αν $n \geq 2$) υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις $n + 1$ σημείων του $[a, b]$ και όχι μόνο η διαμέριση σε ισομήκη υποδιαστήματα. Για παράδειγμα, η $\{0, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{13}{15}, \frac{23}{24}, 1\}$ είναι μια διαμέριση 6 σημείων του $[0, 1]$ και η $\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\}$

είναι η διαμέριση 6 σημείων σε ισομήκη υποδιαστήματα του $[0,1]$.

Έστω Δ', Δ'' δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Η Δ' ονομάζεται **λεπτότερη** από την Δ'' αν $\Delta''\subseteq\Delta'$ ή, με άλλα λόγια, αν κάθε διαιρετικό σημείο της Δ'' είναι διαιρετικό σημείο και της Δ'.

Παραδείγματα: (1) Η διαμέριση $\Delta'=\{0,\frac{1}{8},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{3}{4},\frac{7}{8},1\}$ είναι λεπτότερη από την διαμέριση $\Delta''=\{0,\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{3}{4},1\}$ του $[0,1]$.

(2) Από τις διαμερίσεις $\Delta'=\{0,\frac{1}{8},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{7}{8},1\}$, $\Delta''=\{0,\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{3}{4},1\}$ του $[0,1]$ καμιά δεν είναι λεπτότερη από την άλλη.

Έστω Δ', Δ'' δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε η $\Delta=\Delta'\cup\Delta''$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ και ονομάζεται **κοινή εκλέπτυνση** των Δ', Δ''. Προφανώς, είναι $\Delta'\subseteq\Delta$ και $\Delta''\subseteq\Delta$, δηλαδή η Δ είναι λεπτότερη από την Δ' και από την Δ''.

Παράδειγμα: Στο προηγούμενο παράδειγμα (1) η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η Δ', ενώ στο παράδειγμα (2) η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η $\Delta=\{0,\frac{1}{8},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{3}{4},\frac{7}{8},1\}$.

Λήμμα 6.1 *Έστω Δ', Δ'' διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε κάθε διαμέριση του $[a,b]$ οι οποία είναι λεπτότερη από την Δ' και την Δ'' είναι λεπτότερη και από την κοινή εκλέπτυνση $\Delta'\cup\Delta''$.*

Απόδειξη: Έστω διαμέριση Δ''' του $[a,b]$ λεπτότερη από την Δ' και την Δ''. Δηλαδή, $\Delta'\subseteq\Delta'''$ και $\Delta''\subseteq\Delta'''$. Τότε $\Delta'\cup\Delta''\subseteq\Delta'''$, οπότε η Δ''' είναι λεπτότερη από την $\Delta'\cup\Delta''$. $\natural$

Το Λήμμα 6.1 λέει ότι *η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι, από όλες τις διαμερίσεις που είναι λεπτότερες απο την Δ' και την Δ'', εκείνη που έχει τα λιγότερα διαιρετικά σημεία.*

Έστω *φραγμένη* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ και διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\dots,x_n=b\}$ του $[a,b]$. Για κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1},x_k]$ της Δ συμβολίζουμε

$$u_k=\sup\{f(x):x_{k-1}\le x\le x_k\},\qquad l_k=\inf\{f(x):x_{k-1}\le x\le x_k\}.$$

Ονομάζουμε **άνω άθροισμα Darboux της f ως προς τη Δ στο** $[a,b]$ το

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x_k-x_{k-1})=u_1(x_1-x_0)+\cdots+u_n(x_n-x_{n-1})$$

και **κάτω άθροισμα Darboux της f ως προς τη Δ στο** $[a,b]$ το

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=\sum_{k=1}^{n}l_k(x_k-x_{k-1})=l_1(x_1-x_0)+\cdots+l_n(x_n-x_{n-1}).$$

Ιδού δυο γενικά παραδείγματα.

Παραδείγματα: (1) Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *αύξουσα* στο $[a,b]$ και διαμέριση $\Delta=$

$\{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Τότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ η f έχει μέγιστη τιμή $f(x_k)$ και ελάχιστη τιμή $f(x_{k-1})$. Άρα $u_k = f(x_k)$, $l_k = f(x_{k-1})$ και, επομένως, $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$ και $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$. Αν η f είναι *φθίνουσα*, το μόνο που αλλάζει είναι ότι $u_k = f(x_{k-1})$, $l_k = f(x_k)$ και, επομένως, $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$ και $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$.

(2) Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *συνεχής* στο $[a, b]$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Τότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν ζ_k και η_k ώστε: $f(\zeta_k) \leq f(x) \leq f(\eta_k)$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Άρα $u_k = f(\eta_k)$, $l_k = f(\zeta_k)$, οπότε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(x_k - x_{k-1})$ και $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$.

Θα κάνουμε, τώρα, *μια παρατήρηση η οποία θα χρησιμοποιηθεί πολλές φορές παρακάτω.* Έστω φραγμένη $f : [c, d] \to \mathbf{R}$. Το σύνολο τιμών $\{f(x) : c \leq x \leq d\}$ είναι φραγμένο και, αν $u = \sup\{f(x) : c \leq x \leq d\}$, $l = \inf\{f(x) : c \leq x \leq d\}$, τότε $l \leq u$. Έστω $[c', d'] \subseteq [c, d]$. Είναι $\{f(x) : c' \leq x \leq d'\} \subseteq \{f(x) : c \leq x \leq d\}$ και, επομένως, αν $u' = \sup\{f(x) : c' \leq x \leq d'\}$, $l' = \inf\{f(x) : c' \leq x \leq d'\}$, συνεπάγεται $l \leq l' \leq u' \leq u$. Με λόγια: *όταν το διάστημα μικραίνει, το supremum της συνάρτησης μένει ίδιο ή μικραίνει και το infimum μένει ίδιο ή μεγαλώνει.*

Λήμμα 6.2 *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ και διαμέριση Δ του $[a, b]$. Αν $u = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, $l = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, τότε*

$$l(b - a) \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq u(b - a).$$

Απόδειξη: Έστω $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$.

Είναι $[x_{k-1}, x_k] \subseteq [a, b]$, οπότε $l \leq l_k \leq u_k \leq u$ και, επομένως, $l(x_k - x_{k-1}) \leq l_k(x_k - x_{k-1}) \leq u_k(x_k - x_{k-1}) \leq u(x_k - x_{k-1})$. Συνεπάγεται $\sum_{k=1}^{n} l(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} u(x_k - x_{k-1})$. Τα δύο αθροίσματα στη μέση είναι τα $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$, $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$, αντιστοίχως. Το αριστερό άθροισμα είναι $= l \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = l(b - a)$ και το δεξιό άθροισμα είναι $= u \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = u(b - a)$. $\natural$

Το Λήμμα 6.3 είναι πολύ βασικό για την ανάπτυξη της θεωρίας.

Λήμμα 6.3 *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ και διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$. Αν η Δ'' είναι λεπτότερη από την Δ', τότε*

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta''), \qquad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta').$$

Απόδειξη: Κατ' αρχάς θεωρούμε την ειδική περίπτωση που η Δ'' έχει *ένα μόνο* διαιρετικό σημείο επιπλέον αυτών που έχει η Δ'. Συγκεκριμένα, έστω $\Delta' = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, έστω ότι η Δ'' έχει επιπλέον το διαιρετικό σημείο ξ και έστω ότι το ξ είναι ανάμεσα στα x_{k_0-1}, x_{k_0} της Δ'.

Αν $k \neq k_0$, τότε το $[x_{k-1}, x_k]$ είναι υποδιάστημα της Δ' και της Δ''. Το υποδιάστημα αυτό συνεισφέρει τον όρο $u_k(x_k - x_{k-1})$ στο $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$ και στο $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$. Αν $k = k_0$, τότε το $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ είναι υποδιάστημα της Δ' και συνεισφέρει τον όρο $u_{k_0}(x_{k_0} - x_{k_0-1})$ στο $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$. Όμως, αντί του $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$

η Δ'' έχει τα δυο υποδιαστήματα $[x_{k_0-1}, \xi]$, $[\xi, x_{k_0}]$. Αν συμβολίσουμε $u_* = \sup\{f(x) : x_{k_0-1} \leq x \leq \xi\}$, $u_{**} = \sup\{f(x) : \xi \leq x \leq x_{k_0}\}$, τότε τα δυο αυτά υποδιαστήματα συνεισφέρουν τους όρους $u_*(\xi - x_{k_0-1})$, $u_{**}(x_{k_0} - \xi)$, αντιστοίχως, στο $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$. Όταν αφαιρέσουμε το $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$ από το $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$ και διαγράψουμε τους κοινούς όρους θα απομείνει το $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') = u_{k_0}(x_{k_0} - x_{k_0-1}) - u_*(\xi - x_{k_0-1}) - u_{**}(x_{k_0} - \xi) = u_{k_0}(x_{k_0} - \xi) + u_{k_0}(\xi - x_{k_0-1}) - u_*(\xi - x_{k_0-1}) - u_{**}(x_{k_0} - \xi) = (u_{k_0} - u_{**})(x_{k_0} - \xi) + (u_{k_0} - u_*)(\xi - x_{k_0-1})$. Επειδή $[x_{k_0-1}, \xi] \subseteq [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$, είναι $u_* \leq u_{k_0}$ και, επειδή $[\xi, x_{k_0}] \subseteq [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$, είναι $u_{**} \leq u_{k_0}$. Άρα $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') \geq 0$.

Αν $k \neq k_0$, το $[x_{k-1}, x_k]$ συνεισφέρει τον όρο $l_k(x_k - x_{k-1})$ στο $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$ και στο $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$. Αν $k = k_0$, το $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ συνεισφέρει τον όρο $l_{k_0}(x_{k_0} - x_{k_0-1})$ στο $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$. Αν συμβολίσουμε $l_* = \inf\{f(x) : x_{k_0-1} \leq x \leq \xi\}$, $l_{**} = \inf\{f(x) : \xi \leq x \leq x_{k_0}\}$, τότε τα υποδιαστήματα $[x_{k_0-1}, \xi]$, $[\xi, x_{k_0}]$ συνεισφέρουν τους όρους $l_*(\xi - x_{k_0-1})$, $l_{**}(x_{k_0} - \xi)$, αντιστοίχως, στο $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$. Αφαιρώντας το $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$ από το $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$ και διαγράφοντας τους κοινούς όρους θα απομείνει το $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') = l_{k_0}(x_{k_0} - x_{k_0-1}) - l_*(\xi - x_{k_0-1}) - l_{**}(x_{k_0} - \xi) = l_{k_0}(x_{k_0} - \xi) + l_{k_0}(\xi - x_{k_0-1}) - l_*(\xi - x_{k_0-1}) - l_{**}(x_{k_0} - \xi) = (l_{k_0} - l_{**})(x_{k_0} - \xi) + (l_{k_0} - l_*)(\xi - x_{k_0-1})$. Επειδή $[x_{k_0-1}, \xi] \subseteq [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$, είναι $l_* \geq l_{k_0}$ και, επειδή $[\xi, x_{k_0}] \subseteq [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$, είναι $l_{**} \geq l_{k_0}$. Άρα $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') \leq 0$.

Τέλος, θεωρούμε τη γενική περίπτωση που η Δ'' έχει m διαιρετικά σημεία επιπλέον αυτών που έχει η Δ'. Έστω $\xi_1, \ldots, \xi_m$ τα επιπλέον διαιρετικά σημεία της Δ''. Ακολουθούμε τα εξής βήματα. Στο πρώτο βήμα επισυνάπτουμε το ξ_1 στην Δ', παίρνοντας έτσι μια νέα διαμέριση. Στο δεύτερο βήμα επισυνάπτουμε το ξ_2 στη νέα διαμέριση, παίρνοντας μια πιο νέα διαμέριση. Και ούτω καθ' εξής. Στο m-οστό βήμα επισυνάπτουμε το ξ_m στην προτελευταία διαμέριση, καταλήγοντας στην Δ''. Σύμφωνα με ό,τι έχουμε ήδη αποδείξει, σε κάθε βήμα το άνω άθροισμα Darboux μένει ίδιο ή μικραίνει και το κάτω άθροισμα Darboux μένει ίδιο ή μεγαλώνει. Άρα $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$ και $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') \geq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$. ♮

Λήμμα 6.4 *Έστω φραγμένη* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *και διαμερίσεις* Δ', Δ'' *του* $[a, b]$. *Τότε*

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'').$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$. Η Δ είναι λεπτότερη από την Δ', οπότε $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$. Επίσης, η Δ είναι λεπτότερη από την Δ'', οπότε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$. Τέλος, είναι $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$. Άρα $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$. ♮

Ασκήσεις.

1. Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. (1) Αν υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$. (*Υπόδ.:* Αποδείξτε ότι $u_k = l_k$ για κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ της Δ, ότι η f είναι σταθερή σε κάθε τέτοιο υποδιάστημα και, τέλος, ότι είναι σταθερή στο $[a, b]$.) (2) Αν υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') =$

$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a,b]$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε την $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$.)

6.2 Ολοκλήρωμα. Ο ορισμός του Darboux.

Ορισμός 6.1 *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Ονομάζουμε* ***κάτω ολοκλήρωμα της*** *f* ***στό*** *$[a,b]$ το*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

και ***άνω ολοκλήρωμα της*** *f* ***στό*** *$[a,b]$ το*

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}.$$

.

Πρόταση 6.1 *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $u = \sup\{f(x) : a \le x \le b\}$ και $l = \inf\{f(x) : a \le x \le b\}$. Τότε*

$$l(b-a) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le u(b-a).$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le u(b-a)$ για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$. Επειδή $\overline{\int_a^b} f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ για κάθε Δ, συνεπάγεται $\overline{\int_a^b} f \le u(b-a)$. Ομοίως, $l(b-a) \le \underline{\int_a^b} f$.

Έστω διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$. Επειδή $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$, το $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')$ είναι κάτω φράγμα του $\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) : \Delta$ διαμέριση του $[a,b]\}$. Άρα $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \le \overline{\int_a^b} f$. Επομένως, το $\overline{\int_a^b} f$ είναι άνω φράγμα του $\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) :$ Δ διαμέριση του $[a,b]\}$. Άρα $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$. $\natural$

Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Η f χαρακτηρίζεται **ολοκληρώσιμη** ή, πιο σωστά, **Riemann ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$ αν $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε την κοινή τιμή των $\underline{\int_a^b} f$, $\overline{\int_a^b} f$ ονομάζουμε **ολοκλήρωμα** ή, πιο σωστά, **Riemann ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ και τη συμβολίζουμε $\int_a^b f$. Δηλαδή,

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Ο ορισμός αυτός του ολοκληρώματος Riemann είναι ο ορισμός τον οποίο έδωσε ο Darboux. Στην ενότητα 6.5 θα γνωρίσουμε και τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann που έδωσε ο Riemann.

Παραδείγματα: (1) Έστω σταθερή συνάρτηση $c : [a,b] \to \mathbf{R}$. Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$. Προφανώς, $\{c : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = \{c\}$ και, επομένως, $l_k = u_k = c$. Άρα $\underline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$ και $\overline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$. Αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα $\{\underline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) : \Delta$ διαμέριση του $[a,b]\}$ και $\{\overline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) : \Delta$ διαμέριση του $[a,b]\}$ περιέχουν ένα μόνο στοιχείο, το $c(b-a)$. Άρα $\underline{\int_a^b} c = c(b-a)$ και $\overline{\int_a^b} c = c(b-a)$ και, επομένως, η c είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b c = c(b-a).$$

(2) Έστω η $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \cap \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in [a,b] \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$ Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$. Σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός και τουλάχιστον ένας άρρητος. Άρα $\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = \{0, 1\}$. Άρα $l_k = 0$, $u_k = 1$ και, επομένως, $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n 0(x_k - x_{k-1}) = 0$ και $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n 1(x_k - x_{k-1}) = b - a$. Άρα $\{\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) : \Delta$ διαμέριση του $[a,b]\} = \{0\}$, οπότε $\underline{\int_a^b} f = 0$. Ομοίως, $\{\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) : \Delta$ διαμέριση του $[a,b]\} = \{b - a\}$ και, επομένως, $\overline{\int_a^b} f = b - a > 0$. Συμπεραίνουμε ότι $\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f$ και ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ και για κάθε δυο διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$ ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$$

και, στην περίπτωση που η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$,

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'').$$

Αυτές τις ιδιότητες θα τις χρησιμοποιούμε συχνά από εδώ και πέρα.

Πρόταση 6.2 ***Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας***. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'') < \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2}$ και $\underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta')$. Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, οπότε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\epsilon}{2}$ και $\underline{\int_a^b} f - \frac{\epsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, συνεπάγεται $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}$ και $\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$. Αφαιρώντας, βρίσκουμε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$. Επειδή $\overline{\int}_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \underline{\int}_a^b f$, συνεπάγεται $\overline{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f < \epsilon$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $\overline{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f \le 0$, οπότε $\overline{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b f$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. ♮

Παράδειγμα: Έστω $\xi \in [a,b]$ και η $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,b], x \neq \xi, \\ 1, & x = \xi. \end{cases}$

Έστω ϵ. Θα επιλέξουμε συγκεκριμένη διαμέριση Δ του $[a,b]$ ως εξής.

Αν $\xi = a$, θεωρούμε $x_1 \in (a,b)$, $x_1 - a < \epsilon$ και την $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$. Τότε $u_1 = 1$, $l_1 = 0$ και $u_2 = 0$, $l_2 = 0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) = x_1 - x_0 < \epsilon$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) = 0$.

Αν $\xi = b$, θεωρούμε $x_1 \in (a,b)$, $b - x_1 < \epsilon$ και την $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$. Τότε $u_1 = 0$, $l_1 = 0$ και $u_2 = 1$, $l_2 = 0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) = x_2 - x_1 < \epsilon$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) = 0$.

Αν $a < \xi < b$, θεωρούμε $x_1 \in (a,\xi)$, $x_2 \in (\xi,b)$, $x_2 - x_1 < \epsilon$ και την $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3 = b\}$. Τότε $u_1 = 0$, $l_1 = 0$, $u_2 = 1$, $l_2 = 0$ και $u_3 = 0$, $l_3 = 0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) + u_3(x_3 - x_2) = x_2 - x_1 < \epsilon$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) + l_3(x_3 - x_2) = 0$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$, οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Επιπλέον, για την ίδια Δ, ισχύει $0 = \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $0 \le \int_a^b f < \epsilon$ και, επομένως, $\int_a^b f = 0$.

Πρόταση 6.3 *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $\lim_{n\to+\infty}\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)\big) = 0$. Στην περίπτωση αυτή, $\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty}\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) = \lim_{n\to+\infty}\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Από την Πρόταση 6.2, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ ώστε $0 \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) < \frac{1}{n}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)\big) = 0$.

Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $\lim_{n\to+\infty}\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)\big) = 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) < \epsilon$. Από την Πρόταση 6.2 συνεπάγεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Από $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \le \int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)$ συνεπάγεται $0 \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)$ και, επίσης, $0 \le \int_a^b f - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) = \lim_{n\to+\infty}\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) = \int_a^b f$. ♮

Είναι πολύ συνηθισμένο να συμβολίζουμε τα $\int_a^b f$, $\underline{\int}_a^b f$, $\overline{\int}_a^b f$ έτσι ώστε να φαίνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης f. Δηλαδή, γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Φυσικά, τα ολοκληρώματα αυτά παραμένουν αμετάβλητα αν, για παράδειγμα, τα συμβολίσουμε $\int_a^b f(t)\,dt$, $\underline{\int_a^b} f(t)\,dt$, $\overline{\int_a^b} f(t)\,dt$, αντιστοίχως.

Παράδειγμα: Έστω η $p_1 : [a,b] \to \mathbf{R}$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα. Δηλαδή, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ $(k = 0, \dots, n)$.

Επειδή η p_1 είναι αύξουσα, $u_k = p_1(x_k) = x_k$ και $l_k = p_1(x_{k-1}) = x_{k-1}$. Άρα $\underline{\Sigma}(p_1; a, b; \Delta_n) = \sum_{k=1}^n x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_{k-1}\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n x_{k-1} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \big(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\big) = \frac{b-a}{n}\big(na+\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\big) = \frac{b-a}{n}\big(na+\frac{b-a}{n}\frac{n(n-1)}{2}\big)$. Επομένως, $\lim_{n\to+\infty}\underline{\Sigma}(p_1; a, b; \Delta_n) = \frac{b^2-a^2}{2}$. Με τον ίδιο τρόπο, $\overline{\Sigma}(p_1; a, b; \Delta_n) = \sum_{k=1}^n x_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_k\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n x_k = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \big(a + k\frac{b-a}{n}\big) = \frac{b-a}{n}\big(na+\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n k\big) = \frac{b-a}{n}\big(na+\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2}\big)$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}\overline{\Sigma}(p_1; a, b; \Delta_n) = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Άρα $\lim_{n\to+\infty}\big(\overline{\Sigma}(p_1; a, b; \Delta_n) - \underline{\Sigma}(p_1; a, b; \Delta_n)\big) = 0$, οπότε η p_1 είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b p_1 = \frac{b^2-a^2}{2}$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι οι $p_2, p_3 : [a,b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$, $\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4-a^4}{4}$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ σε n ισομήκη διαστήματα. Θα χρειαστείτε τις ισότητες $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Για το $\int_a^b x^2\,dx$ δείτε πρώτα τις περιπτώσεις $0 \le a < b$, $a < b \le 0$.)

2. Έστω $[a,b] \subseteq (0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι η $p_\rho : [a,b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι (i) $\int_a^b x^\rho\,dx = \frac{b^{\rho+1}-a^{\rho+1}}{\rho+1}$ αν $\rho \neq -1$ και (ii) $\int_a^b x^{-1}\,dx = \log\frac{b}{a}$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ με τα διαιρετικά σημεία $x_k = a{\mu_n}^k$ $(k = 0, \dots, n)$, όπου $\mu_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.)

3. Αποδείξτε ότι η $\exp_\rho : [a,b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b \rho^x\,dx = \frac{\rho^b-\rho^a}{\log\rho}$ αν $\rho \neq 1$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ σε n ισομήκη διαστήματα.)

4. Αποδείξτε ότι οι $\cos, \sin : [a,b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a$, $\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ σε n ισομήκη διαστήματα. Θα

χρειαστείτε τους τύπους $\sum_{k=1}^n \cos(kq) = \frac{\sin\frac{nq}{2}\cos(\frac{(n+1)q}{2})}{\sin\frac{q}{2}}$, $\sum_{k=1}^n \sin(kq) = \frac{\sin\frac{nq}{2}\sin(\frac{(n+1)q}{2})}{\sin\frac{q}{2}}$.)

5. Γράψτε με τη μορφή ολοκληρώματος καθένα από τα $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}$ και $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2-(k-1)^2}}{n^2}$.

6. Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ και ακολουθίες διαμερίσεων $(\Delta_n{}')$, $(\Delta_n{}'')$ του $[a,b]$ ώστε $\lim_{n\to+\infty}\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n{}')-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n{}'')\big)=0$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty}\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n{}') = \lim_{n\to+\infty}\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n{}'')$.

7. Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ώστε $f(r)=0$ για κάθε $r\in[a,b]\cap\mathbf{Q}$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f = 0$. (*Υπόδ.:* Έστω διαμέριση $\Delta=\{a=x_0<\cdots<x_n=b\}$ του $[a,b]$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbf{Q}$ στο $\mathbf{R}$, είναι $l_k\le 0\le u_k$. Άρα $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\le 0\le\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$.)

8. Έστω $f,g,h:[a,b]\to\mathbf{R}$ ώστε $f(x)\le g(x)\le h(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αν οι f,h είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και $\int_a^b f=\int_a^b h$, αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g=\int_a^b f=\int_a^b h$. (*Υπόδ.:* Αποδείξτε ότι υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)<\epsilon$.)

9. Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,b]$ για κάθε c, $a<c<b$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = \lim_{c\to a+}\int_c^b f$. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε c, $a<c<b$. (*Υπόδ.:* Έστω $|f(x)|\le M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Πάρτε $c\in(a,b)$ ώστε $c-a<\frac{\epsilon}{4M+1}$. Τότε υπάρχει διαμέριση Δ' του $[c,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta')-\underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta')<\frac{\epsilon}{2}$. Θεωρήστε τη διαμέριση $\Delta=\{a\}\cup\Delta'$ του $[a,b]$.)

6.3 Βασικά παραδείγματα.

Θεώρημα 6.1 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη: Έστω $\epsilon>0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.5, υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε $|f(x')-f(x'')|<\frac{\epsilon}{b-a}$ για κάθε $x',x''\in[a,b]$, $|x'-x''|<\delta_0$.

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\ldots,x_n=b\}$ του $[a,b]$, της οποίας όλα τα υποδιαστήματα έχουν μήκος $<\delta_0$, δηλαδή, ώστε $x_k-x_{k-1}<\delta_0$ για κάθε $k=1,\ldots,n$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_{k-1},x_k]$, υπάρχουν $\zeta_k,\eta_k\in[x_{k-1},x_k]$ ώστε $f(\zeta_k)\le f(x)\le f(\eta_k)$ για κάθε $x\in[x_{k-1},x_k]$ και, επομένως, $u_k=f(\eta_k)$, $l_k=f(\zeta_k)$. Επίσης, επειδή $|\eta_k-\zeta_k|<\delta_0$, είναι $u_k-l_k=f(\eta_k)-f(\zeta_k)<\frac{\epsilon}{b-a}$ και, επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=\sum_{k=1}^n u_k(x_k-x_{k-1})-\sum_{k=1}^n l_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^n(u_k-l_k)(x_k-x_{k-1})<\sum_{k=1}^n\frac{\epsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1})=\epsilon$.

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό, φραγμένο διάστημα και κάθε ρητή συνάρτηση $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό, φραγμένο διάστημα το οποίο δεν περιέχει καμιά ρίζα του $q(x)$.

(2) Η p_ρ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό, φραγμένο διάστημα το οποίο περιέχεται στο πεδίο ορισμού της.

(3) Η ρ^x $(\rho > 0)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό, φραγμένο διάστημα.

(4) Η $\log_\rho x$ $(\rho > 0, \rho \neq 1)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό, φραγμένο διάστημα το οποίο περιέχεται στο $(0,+\infty)$.

(5) Οι $\cos x, \sin x$ είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό, φραγμένο διάστημα.

Θεώρημα 6.2 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ μονότονη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι αύξουσα στο $[a,b]$. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε όλα τα υποδιαστήματά της να έχουν μήκος $< \delta_0 = \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)+1}$. Δηλαδή, $x_k - x_{k-1} < \delta_0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Επειδή η f είναι αύξουσα, είναι $u_k = f(x_k)$, $l_k = f(x_{k-1})$. Άρα $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n (u_k - l_k)\delta_0 = \delta_0 \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta_0(f(x_n) - f(x_0)) = \delta_0(f(b) - f(a)) < \epsilon$.

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Η απόδειξη στην περίπτωση που η f είναι φθίνουσα είναι παρόμοια. $\natural$

Παράδειγμα: Η $[x]$ είναι αύξουσα και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό, φραγμένο διάστημα.

Ασκήσεις.

1. Περιγράψτε τα διαστήματα στα οποία είναι ολοκληρώσιμες οι $x^3 - x$, $\frac{1}{x^3-x}$, $\exp\frac{1}{x^3-x}$, $\log\frac{1}{x^3-x}$, $\sqrt{x^3-x}$.

2. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a,b]$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[f(a), f(b)]$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[f(a), f(b)]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} = bf(b) - af(a)$. (*Υπόδ.:* Έστω διαμέριση $\Delta' = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ και η αντίστοιχη διαμέριση $\Delta'' = \{f(a) = y_0, \ldots, y_n = f(b)\}$ του $[f(a), f(b)]$. Δηλαδή, $y_k = f(x_k)$. Παρατηρήστε ότι $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') + \underline{\Sigma}(f^{-1}; f(a), f(b); \Delta'') = bf(b) - af(a)$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') + \overline{\Sigma}(f^{-1}; f(a), f(b); \Delta'') = bf(b) - af(a)$ και χρησιμοποιήστε την Πρόταση 6.3.)

3. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$. (1) Αποδείξτε ότι $ab \leq \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}$ για κάθε $a, b > 0$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $f(a) = b$. (*Υπόδ.:* Δείτε την άσκηση 2.) (2) Χρησιμοποιήστε την $p_{\frac{t}{t-1}}$ $(0 < t < 1)$ για να αποδείξετε την ανισότητα του Young στην άσκηση 19 της ενότητας 5.6.

4. Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. (i) Αποδείξτε ότι υπάρχει $[a_1, b_1] \subseteq (a, b)$ ώστε $0 < b_1 - a_1 < 1$ και $\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1$. (*Υπόδ.:* Εφαρμόστε την Πρόταση 6.3 με $\epsilon = b - a$. Αν χρειάζεται, πάρτε λεπτότερη διαμέριση ώστε όλα τα υποδιαστήματά της να έχουν μήκος < 1.) (ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει $[a_n, b_n] \subseteq (a, b)$ ώστε $0 < b_n - a_n < \frac{1}{n}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq (a_n, b_n)$ και $\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}$. (iii) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένας ξ ο οποίος ανήκει σε κάθε $[a_n, b_n]$ και ότι η f είναι συνεχής στον ξ. (iv) Αποδείξτε ότι σε κάθε ανοικτό υποδιάστημα του $[a, b]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο η f είναι συνεχής. Δηλαδή, το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι πυκνό στο $[a, b]$.

6.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος.

Πρόταση 6.4 *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε η $f + g : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Απόδειξη: Οι f, g είναι φραγμένες, οπότε υπάρχουν M', M'' ώστε $|f(x)| \leq M'$ και $|g(x)| \leq M''$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M' + M''$ για κάθε $x \in [a, b]$ και, επομένως, η $f + g$ είναι φραγμένη.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') < \frac{\epsilon}{2}$ και $\overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') < \frac{\epsilon}{2}$. Θεωρούμε την $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, οπότε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \frac{\epsilon}{2}$ και $\overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \frac{\epsilon}{2}$. Ορίζουμε $u_k{}' = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k{}' = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $u_k{}'' = \sup\{g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k{}'' = \inf\{g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, οπότε $\sum_{k=1}^n (u_k{}' - l_k{}')(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \frac{\epsilon}{2}$, $\sum_{k=1}^n (u_k{}'' - l_k{}'')(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \frac{\epsilon}{2}$.

Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k{}' \leq f(x) \leq u_k{}'$ και $l_k{}'' \leq g(x) \leq u_k{}''$, οπότε $l_k{}' + l_k{}'' \leq f(x) + g(x) \leq u_k{}' + u_k{}''$. Ορίζουμε $u_k = \sup\{f(x) + g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k = \inf\{f(x) + g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, οπότε $l_k{}' + l_k{}'' \leq l_k \leq u_k \leq u_k{}' + u_k{}''$.

Επομένως, $\overline{\Sigma}(f + g; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n u_k{}'(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n u_k{}''(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta)$ και $\underline{\Sigma}(f + g; a, b; \Delta) =$

$\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) \geq \sum_{k=1}^n l_k{}'(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n l_k{}''(x_k - x_{k-1}) = \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)$. Συνεπάγεται, λοιπόν, $\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) \leq \big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big) + \big(\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)\big) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) < \epsilon$ και, επομένως, η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Από τις $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \leq \underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) \leq \int_a^b (f+g) \leq \overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)$, $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$, $\underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \leq \int_a^b g \leq \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)$, συνεπάγεται $\big|\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g\big| \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. $\natural$

Πρόταση 6.5 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η $\lambda f : [a,b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Απόδειξη: Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει M ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα $|\lambda f(x)| \leq |\lambda| M$ για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε η λf είναι φραγμένη.

Αν $\lambda = 0$, η $0f$ είναι η σταθερή συνάρτηση 0, η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει $\int_a^b 0f = \int_a^b 0 = 0 = 0\int_a^b f$.

Έστω $\lambda \neq 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$. Ορίζουμε $u_k{}' = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k{}' = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $u_k = \sup\{\lambda f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k = \inf\{\lambda f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$.

Έστω $\lambda > 0$. Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $f(x) \leq u_k{}'$, οπότε $\lambda f(x) \leq \lambda u_k{}'$ και, επομένως, $u_k \leq \lambda u_k{}'$. Επίσης, για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $\lambda f(x) \leq u_k$, οπότε $f(x) \leq \frac{1}{\lambda} u_k$ και, επομένως, $u_k{}' \leq \frac{1}{\lambda} u_k$. Συμπεραίνουμε ότι $u_k = \lambda u_k{}'$ και, με ακριβώς ίδιο τρόπο, ότι $l_k = \lambda l_k{}'$.

Τώρα, $\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n u_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ και $\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n l_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big) < \lambda \frac{\epsilon}{\lambda} = \epsilon$.

Έστω $\lambda < 0$. Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $f(x) \leq u_k{}'$, οπότε $\lambda u_k{}' \leq \lambda f(x)$ και, επομένως, $\lambda u_k{}' \leq l_k$. Επίσης, για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k \leq \lambda f(x)$, οπότε $f(x) \leq \frac{1}{\lambda} l_k$ και, επομένως, $u_k{}' \leq \frac{1}{\lambda} l_k$. Συμπεραίνουμε ότι $l_k = \lambda u_k{}'$ και, παρομοίως, $u_k = \lambda l_k{}'$.

Τώρα, $\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n l_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ και $\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n u_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = -\lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big) < -\lambda \frac{\epsilon}{-\lambda} = \epsilon$.

Σε κάθε περίπτωση, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) < \epsilon$, οπότε η λf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Αν $\lambda > 0$, από τις $\lambda \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b \lambda f \leq \overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \lambda \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ και τις $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ συνεπάγεται $\big|\int_a^b \lambda f -$

$\lambda \int_a^b f\big| \leq \lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big) < \epsilon$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

Η απόδειξη της $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$ είναι παρόμοια και στην περίπτωση $\lambda < 0$. ♮

Οι ισότητες που αποδείχθηκαν στις Προτάσεις 6.4, 6.5 συνδυάζονται στην

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Παράδειγμα: Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, η οποία μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $[a,b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = 0$.

Συγκεκριμένα, έστω $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b] \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ και $c_j = f(\xi_j) \neq 0$ για κάθε $j = 1, \dots, m$. Για κάθε $j = 1, \dots, m$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_j(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,b], x \neq \xi_j \, , \\ 1, & x = \xi_j \, . \end{cases}$ Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι $f = \sum_{j=1}^m c_j f_j$ και, επειδή κάθε f_j είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f_j = 0$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b f_j = \sum_{j=1}^m c_j 0 = 0$.

Πρόταση 6.6 *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ των οποίων οι τιμές είναι ίσες σε κάθε σημείο του $[a,b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g = \int_a^b f$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την $h = g - f : [a,b] \to \mathbf{R}$ η οποία μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $[a,b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Σύμφωνα με το τελευταίο παράδειγμα, η h είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b h = 0$. Επειδή $g = f + h$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, η g είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g = \int_a^b (f+h) = \int_a^b f + \int_a^b h = \int_a^b f$. ♮

Η Πρόταση 6.6 διατυπώνεται και ως εξής: *αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα και δημιουργήσουμε μια νέα συνάρτηση αλλάζοντας τις τιμές της αρχικής σε πεπερασμένου πλήθους σημεία του διαστήματος, τότε η νέα συνάρτηση είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα και το ολοκλήρωμά της είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης.*

Πρόταση 6.7 *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Τότε η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη: Οι f, g είναι φραγμένες, οπότε υπάρχουν M', M'' ώστε $|f(x)| \leq M'$ και $|g(x)| \leq M''$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M'M''$ για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε η fg είναι φραγμένη στο $[a,b]$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') < \frac{\epsilon}{M'+M''+1}$ και $\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta'') < \frac{\epsilon}{M'+M''+1}$. Θεωρούμε την $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$, οπότε είναι $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \frac{\epsilon}{M'+M''+1}$ και $\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) < \frac{\epsilon}{M'+M''+1}$. Ορίζουμε $u_k{}' = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k{}' = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$,

$u_k'' = \sup\{g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k'' = \inf\{g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $u_k = \sup\{f(x)g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k = \inf\{f(x)g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$.

Για κάθε $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k' - u_k' \leq f(x) - f(y) \leq u_k' - l_k'$ και, επομένως, $|f(x) - f(y)| \leq u_k' - l_k'$. Παρομοίως, για κάθε $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $|g(x) - g(y)| \leq u_k'' - l_k''$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x) - f(y)||g(x)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \leq M''(u_k' - l_k') + M'(u_k'' - l_k'')$, οπότε $f(x)g(x) \leq f(y)g(y) + M''(u_k' - l_k') + M'(u_k'' - l_k'')$. Συνεπάγεται $u_k \leq f(y)g(y) + M''(u_k' - l_k') + M'(u_k'' - l_k'')$ ή, ισοδύναμα, $u_k - M''(u_k' - l_k') - M'(u_k'' - l_k'') \leq f(y)g(y)$. Άρα $u_k - M''(u_k' - l_k') - M'(u_k'' - l_k'') \leq l_k$ ή, ισοδύναμα, $u_k - l_k \leq M''(u_k' - l_k') + M'(u_k'' - l_k'')$.

Επομένως, $\overline{\Sigma}(fg; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(fg; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \leq M'' \sum_{k=1}^n (u_k' - l_k')(x_k - x_{k-1}) + M' \sum_{k=1}^n (u_k'' - l_k'')(x_k - x_{k-1}) \leq M'' \frac{\epsilon}{M' + M'' + 1} + M' \frac{\epsilon}{M' + M'' + 1} < \epsilon$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(fg; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(fg; a, b; \Delta) < \epsilon$, οπότε η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. ♮

Πρέπει να τονίσουμε ότι, σε αντίθεση με την περίπτωση του αθροίσματος συναρτήσεων, *δεν υπάρχει τύπος ο οποίος να συνδέει το ολοκλήρωμα του γινομένου συναρτήσεων με τα ολοκληρώματα των δυο συναρτήσεων ξεχωριστά*. Για παράδειγμα, *δεν ισχύει* $\int_a^b fg = \int_a^b f \int_a^b g$.

Παράδειγμα: Είναι $\int_a^b 1 \cdot 1 = \int_a^b 1 = b - a$ και $\int_a^b 1 \int_a^b 1 = (b - a)(b - a) = (b - a)^2$. Η ισότητα $b - a = (b - a)^2$ δεν ισχύει γενικά!

Πρόταση 6.8 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν υπάρχει $m > 0$ ώστε $|f(x)| \geq m$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε η $\frac{1}{f} : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη: Ισχύει $\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{m}$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε η $\frac{1}{f}$ είναι φραγμένη.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < m^2 \epsilon$. Ορίζουμε $u_k' = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k' = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $u_k = \sup\left\{\frac{1}{f(x)} : x_{k-1} \leq x \leq x_k\right\}$, $l_k = \inf\left\{\frac{1}{f(x)} : x_{k-1} \leq x \leq x_k\right\}$.

Για κάθε $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k' - u_k' \leq f(x) - f(y) \leq u_k' - l_k'$ και, επομένως, $|f(x) - f(y)| \leq u_k' - l_k'$. Τότε για κάθε $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)||f(y)|} \leq \frac{u_k' - l_k'}{m^2}$, οπότε $\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{f(y)} + \frac{u_k' - l_k'}{m^2}$. Άρα $u_k \leq \frac{1}{f(y)} + \frac{u_k' - l_k'}{m^2}$ ή, ισοδύναμα, $u_k - \frac{u_k' - l_k'}{m^2} \leq \frac{1}{f(y)}$. Άρα $u_k - \frac{u_k' - l_k'}{m^2} \leq l_k$ ή, ισοδύναμα, $u_k - l_k \leq \frac{u_k' - l_k'}{m^2}$.

Συνεπάγεται $\overline{\Sigma}\left(\frac{1}{f}; a, b; \Delta\right) - \underline{\Sigma}\left(\frac{1}{f}; a, b; \Delta\right) = \sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^n (u_k' - l_k')(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{m^2}\left(\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)\right) < \epsilon$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}\left(\frac{1}{f}; a, b; \Delta\right) - \underline{\Sigma}\left(\frac{1}{f}; a, b; \Delta\right) < \epsilon$, οπότε η $\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. ♮

Όπως και με το γινόμενο συναρτήσεων, *δεν υπάρχει γενικός τύπος που να συνδέει το ολοκλήρωμα του αντιστρόφου μιας συνάρτησης με το ολοκλήρωμα της* *συνάρτησης. Για παράδειγμα, δεν ισχύει* $\int_a^b \frac{1}{f} = \frac{1}{\int_a^b f}$.

Παράδειγμα: Είναι $\int_a^b \frac{1}{1} = \int_a^b 1 = b-a$ και $\frac{1}{\int_a^b 1} = \frac{1}{b-a}$. Η ισότητα $b-a = \frac{1}{b-a}$ δεν ισχύει γενικά!

Πρόταση 6.9 *Έστω $a < c < b$ και $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Απόδειξη: Η f είναι φραγμένη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$, οπότε υπάρχουν M', M'' ώστε $|f(x)| \leq M'$ για κάθε $x \in [a,c]$ και $|f(x)| \leq M''$ για κάθε $x \in [c,b]$. Ορίζουμε $M = \max\{M', M''\}$, οπότε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$ και, επομένως, η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις $\Delta' = \{a = x_0, \dots, x_n = c\}$ του $[a,c]$ και $\Delta'' = \{c = y_0, \dots, y_m = b\}$ του $[c,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta') - \underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta') < \frac{\epsilon}{2}$ και $\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'') < \frac{\epsilon}{2}$.

Ορίζουμε τη διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_{n-1}, x_n = c = y_0, \dots, y_m = b\}$ του $[a,b]$ και παρατηρούμε ότι $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta') + \overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta') + \underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')$.

Συνεπάγεται $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \big(\overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta') - \underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')\big) + \big(\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')\big) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$, οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Από τις $\underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta') \leq \int_a^c f \leq \overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')$ και $\underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'') \leq \int_c^b f \leq \overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')$ συνεπάγεται η $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta') + \underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'') \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta') + \overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'') = \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$. Από αυτήν και από την $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ προκύπτει $\big| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b \big| \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$. Επομένως, $\big| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \big| < \epsilon$ και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. $\natural$

Πρόταση 6.10 *Έστω $a \leq c < d \leq b$ και $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$.*

Απόδειξη: Επειδή η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, είναι φραγμένη και στο $[c,d]$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση Δ' του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') < \epsilon$. Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta'' = \Delta' \cup \{c,d\}$, η οποία είναι λεπτότερη από την Δ' και, επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') < \epsilon$. Αν από τα διαιρετικά σημεία της Δ'' κρατήσουμε μόνο εκείνα τα οποία ανήκουν στο διάστημα $[c,d]$ (τα c, d είναι δυο τέτοια), τότε δημιουργείται διαμέριση Δ του $[c,d]$. Επίσης, το άνω άθροισμα Darboux $\overline{\Sigma}(f;c,d;\Delta)$ είναι ένα μέρος του άνω αθροίσματος Darboux $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$ και, ομοίως, το κάτω άθροισμα Darboux $\underline{\Sigma}(f;c,d;\Delta)$ είναι το αντίστοιχο μέρος του κάτω αθροίσματος Darboux $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') < \epsilon$.

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[c,d]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) < \epsilon$ και, επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$. $\natural$

Παράδειγμα: Η $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ χαρακτηρίζεται **κατά τμήματα σταθερή** στο $[a,b]$ αν υπάρχουν $\xi_0\,, \dots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και υπάρχουν $c_1\,, \dots, c_m$ ώστε $f(x) = c_k$ για κάθε $x \in (\xi_{k-1}, \xi_k)$ και κάθε $k = 1, \dots, m$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0, \xi_1), \dots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$. Οι τιμές της f στα σημεία $\xi_0\,, \dots, \xi_m$ δεν έχουν καμιά σημασία. Στο διάστημα $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ η f διαφέρει από τη σταθερή συνάρτηση c_k σε δυο *το πολύ* σημεία: στα άκρα $\xi_{k-1}\,,\ \xi_k$. Επειδή η σταθερή συνάρτηση c_k είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και $\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} c_k = c_k(\xi_k - \xi_{k-1})$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και $\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f = c_k(\xi_k - \xi_{k-1})$. Επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = \sum_{k=1}^m \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f = \sum_{k=1}^m c_k(\xi_k - \xi_{k-1})$.

Θα γνωρίσουμε, τώρα, δυο σχετικά μεγάλες κατηγορίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Και οι δυο κατηγορίες περιέχουν τις κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις.

Η $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ χαρακτηρίζεται **κατά τμήματα συνεχής** στο $[a,b]$ αν υπάρχουν $\xi_0\,, \dots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$, η f να είναι συνεχής σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0, \xi_1), \dots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$ και να υπάρχει το όριο $\lim_{x \to \xi_k +} f(x) \in \mathbf{R}$ για κάθε $k = 0, \dots, m-1$ καθώς και το όριο $\lim_{x \to \xi_k -} f(x) \in \mathbf{R}$ για κάθε $k = 1, \dots, m$.

Πρόταση 6.11 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ κατά τμήματα συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα της προηγούμενης παραγράφου.

Για κάθε $k = 1, \dots, m$, έστω $g_k(x) = \begin{cases} f(x), & \xi_{k-1} < x < \xi_k, \\ \lim_{x \to \xi_k -} f(x), & x = \xi_k\,, \\ \lim_{x \to \xi_{k-1} +} f(x), & x = \xi_{k-1}\,. \end{cases}$

Η g_k είναι συνεχής στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και η f διαφέρει από αυτήν σε δυο *το πολύ* σημεία του $[\xi_{k-1}, \xi_k]$: στα άκρα $\xi_{k-1}\,,\ \xi_k$. Επειδή η g_k είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. $\natural$

Η $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ χαρακτηρίζεται **κατά τμήματα μονότονη** στο $[a,b]$ αν υπάρχουν $\xi_0\,, \dots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και η f να είναι μονότονη σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0, \xi_1), \dots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$.

Πρόταση 6.12 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ κατά τμήματα μονότονη και φραγμένη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα της προηγούμενης παραγράφου.

Επειδή η f είναι φραγμένη, τα όρια $\lim_{x \to \xi_k -} f(x)$, $\lim_{x \to \xi_{k-1} +} f(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τώρα, ορίζουμε τις συναρτήσεις g_k $(k = 1, \dots, m)$ ακριβώς όπως στην απόδειξη της Πρότασης 6.11. Κάθε g_k είναι μονότονη στο αντίστοιχο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Η f διαφέρει από την g_k σε δυο *το πολύ* σημεία του $[\xi_{k-1}, \xi_k]$: στα άκρα ξ_{k-1}, ξ_k. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. ♮

Σχεδόν όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται σε συγκεκριμένες εφαρμογές είναι είτε κατά τμήματα συνεχείς είτε κατά τμήματα μονότονες και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα στο οποίο είναι φραγμένες.

Πρόταση 6.13 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*
(1) Αν $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f \leq u(b - a)$.
(2) Αν $f(x) \geq l$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f \geq l(b - a)$.
(3) Αν $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\left| \int_a^b f \right| \leq M(b - a)$.

Απόδειξη: (1) Είναι $\sup\{f(x) : a \leq x \leq b\} \leq u$. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.1, είναι $\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f \leq \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}(b - a) \leq u(b - a)$.
(2) Ομοίως.
(3) Από τα (1), (2), επειδή $-M \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$, συνεπάγεται $-M(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$, οπότε $\left| \int_a^b f \right| \leq M(b - a)$. ♮

Παράδειγμα: Η μέγιστη τιμή της $f : [1, 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ είναι η $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Επομένως, $\int_1^4 \frac{x}{x^2+2}\, dx \leq \frac{\sqrt{2}}{4}(4 - 1) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Πρόταση 6.14 *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Απόδειξη: Για την $h = g - f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ισχύει $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα $\int_a^b h \geq 0(b - a) = 0$, οπότε $\int_a^b g = \int_a^b (f + h) = \int_a^b f + \int_a^b h \geq \int_a^b f$. ♮

Παράδειγμα: Έστω η $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log(1 + x)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, είναι και ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Είναι εύκολο, με τις μεθόδους του προηγούμενου κεφαλαίου, να αποδειχθεί ότι $x \log 2 \leq \log(1 + x) \leq x$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Άρα $\int_0^1 x \log 2\, dx \leq \int_0^1 \log(1 + x)\, dx \leq \int_0^1 x dx$. Άρα $\frac{\log 2}{2} \leq \int_0^1 \log(1 + x)\, dx \leq \frac{1}{2}$.

Πρόταση 6.15 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Απόδειξη: Επειδή η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, υπάρχει M ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι και η $|f|$ είναι φραγμένη στο $[a, b]$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$. Ορίζουμε $u_k{}' = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k{}' = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $u_k = \sup\{|f(x)| : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k = \inf\{|f(x)| : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$.

Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $f(x) - f(y) \leq {u_k}' - {l_k}'$, οπότε $|f(x)| \leq |f(y)| + {u_k}' - {l_k}'$. Άρα $u_k \leq |f(y)| + {u_k}' - {l_k}'$ ή, ισοδύναμα, $u_k - {u_k}' + {l_k}' \leq |f(y)|$. Άρα $u_k - {u_k}' + {l_k}' \leq l_k$ ή, ισοδύναμα, $u_k - l_k \leq {u_k}' - {l_k}'$.

Συνεπάγεται $\overline{\Sigma}(|f|; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(|f|; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n}({u_k}' - {l_k}')(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(|f|; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(|f|; a, b; \Delta) < \epsilon$. Άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Τώρα, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε $-\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Άρα $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. $\natural$

Παράδειγμα: Έστω $x > 0$. Επειδή $|\sin t| \leq 1$ για κάθε t, είναι $\left|\int_0^x \sin t\, dt\right| \leq \int_0^x |\sin t|\, dt \leq \int_0^x 1\, dt = x$. Επίσης, επειδή $|\sin t| \leq |t|$ για κάθε t, συνεπάγεται $\left|\int_0^x \sin t\, dt\right| \leq \int_0^x |\sin t|\, dt \leq \int_0^x |t|\, dt = \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2}$. Άρα $\left|\int_0^x \sin t\, dt\right| \leq \min\left\{x, \frac{x^2}{2}\right\} = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$

Θεώρημα 6.3 ***Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού.*** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a, b]$, $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την $h : [a, b] \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x)\int_a^b g - \int_a^b fg$. Προφανώς, η h είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Υπάρχουν $\zeta, \eta \in [a, b]$ ώστε $f(\zeta) \leq f(x) \leq f(\eta)$ και, επομένως, $f(\zeta)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(\eta)g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Συνεπάγεται $f(\zeta)\int_a^b g = \int_a^b f(\zeta)g \leq \int_a^b fg \leq \int_a^b f(\eta)g = f(\eta)\int_a^b g$. Άρα $h(\zeta) \leq 0 \leq h(\eta)$.

Άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $h(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$. $\natural$

Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Ο αριθμός $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ ονομάζεται **μέση τιμή της f στο** $[a, b]$ και συμβολίζεται

$$E(f; a, b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,.$$

Από την Πρόταση 6.13 (και από την Πρόταση 6.1) συνεπάγεται ότι η μέση τιμή μιας f ολοκληρώσιμης στο $[a, b]$ είναι αριθμός στο διάστημα $[l, u]$, όπου $u = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, $l = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}$. Επίσης, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.3 με τη σταθερή συνάρτηση $g = 1$, συμπεραίνουμε ότι η μέση τιμή μιας f συνεχούς στο $[a, b]$ είναι κάποια από τις τιμές της.

Αν η μέση τιμή της f στο $[a, b]$ είναι ο αριθμός ρ, τότε $\int_a^b f(x)\, dx = \rho(b - a) = \int_a^b \rho\, dx$ και βλέπουμε ότι *η μέση τιμή της f στο $[a, b]$ είναι εκείνη η τιμή που πρέπει να έχει μια σταθερή συνάρτηση στο $[a, b]$ ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της f.*

Παράδειγμα: Η μέση τιμή της $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$ στο $[-1,1]$ είναι $\frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} f = 0$, αλλά καμιά τιμή της συνάρτησης στο $[-1,1]$ δεν είναι 0.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι, αν η f δεν είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε μπορεί η μέση τιμή της στο $[a,b]$ να μην είναι ίση με καμιά τιμή της.

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιώντας και τα αποτελέσματα των ασκήσεων 1 - 4 της ενότητας 6.2, υπολογίστε τα $\int_{-1}^{2}(2-3x+4x^2)\,dx$, $\int_{-2}^{4}(3x-2^x)\,dx$, $\int_{\pi}^{2\pi}(3\cos x-2\sin x)\,dx$, $\int_{0}^{\pi}(3x-2\sin x)\,dx$, $\int_{1}^{3}(\frac{2}{x}-x^2+x^{\sqrt{2}}+3e^x)\,dx$.

2. Υπολογίστε το $\int_{-2}^{\frac{7}{2}}[x]\,dx$.

3. Αν $f(x) = \begin{cases} 1+3x, & 1 < x < 2, \\ 0, & x = 1, \\ -2, & x = 2, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 3x, & -1 \leq x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x \leq 2, \\ x+2, & 2 < x \leq 5, \end{cases}$ βρείτε τα $\int_{1}^{2} f$, $\int_{-1}^{5} g$.

4. Βρείτε τη μέση τιμή της x στα $[-1,1]$, $[0,1]$ και της $\sin$ στα $[0,\pi]$, $[0,\frac{\pi}{2}]$, $[0,2\pi]$. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 4 της ενότητας 6.2.

5. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \int_{c}^{d} f \leq \int_{a}^{b} f$ για κάθε $[c,d] \subseteq [a,b]$. Γενικότερα, αν τα $[c_1,d_1]$, $\ldots$, $[c_n,d_n]$ είναι ξένα ανά δύο (εκτός κοινών άκρων) και περιέχονται στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $\int_{c_1}^{d_1} f + \cdots + \int_{c_n}^{d_n} f \leq \int_{a}^{b} f$.

6. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ αποδείξτε, χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, ότι $\int_{0}^{\pi}(\sin x)^{n+1}\,dx \leq \int_{0}^{\pi}(\sin x)^{n}\,dx$ και $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{n+1}\,dx \leq \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{n}\,dx$.

7. Χωρίς να βρείτε τα ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι (i) $xe^{-2x} \leq \int_{x}^{2x} e^{-t}\,dt \leq xe^{-x}$ για κάθε $x > 0$, (ii) $3e^{-2} \leq \int_{\frac{1}{2}}^{2} xe^{-x}\,dx \leq \frac{3}{2}e^{-1}$.

8. (i) Αποδείξτε ότι $0 \leq \frac{x}{1-x+x^2} \leq \frac{4x}{3}$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $0 \leq \frac{x}{1-x+x^2} \leq \frac{4}{3x}$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$. (ii) Χωρίς να βρείτε το ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι $0 \leq \int_{0}^{x} \frac{t}{1-t+t^2}\,dt \leq \frac{2x^2}{3}$ για κάθε $x \in [0,1]$. (iii) Χωρίς να βρείτε το ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι $0 \leq \int_{0}^{x} \frac{t}{1-t+t^2}\,dt \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\log x$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$.

9. Χωρίς υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, βρείτε τα: $\lim_{x\to+\infty} \int_{x}^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt$, $\lim_{x\to0+} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt$, $\lim_{x\to0+} \frac{1}{2x} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt$.

10. Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$. Αν $\int_{a}^{b} f = \int_{a}^{b} g$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

11. Έστω $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[0,1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ ώστε $\int_0^1 f(x)x^2\,dx = \frac{f(\xi)}{3}$.

12. Αποδείξτε ότι (i) $\int_k^{k+1}\big(x-[x]-\frac{1}{2}\big)\,dx = 0$, $\int_k^{k+\frac{1}{2}}(x-[x]-\frac{1}{2})\,dx = -\frac{1}{8}$ και $\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\big(x-[x]-\frac{1}{2}\big)\,dx = \frac{1}{8}$ για κάθε $k \in \mathbf{Z}$, (ii) $-\frac{1}{8} \leq \int_a^b\big(x-[x]-\frac{1}{2}\big)\,dx \leq \frac{1}{8}$ για κάθε $a, b,\ a < b$.

13. (i) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n}$ και, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 2 της ενότητας 6.2, $\frac{1}{n+1} \leq \log(n+1) - \log n \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. (ii) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ $(n \in \mathbf{N})$ είναι φθίνουσα με κάτω φράγμα τον 0 και, επομένως, ότι συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Το όριο της ακολουθίας αυτής ονομάζεται **σταθερά του Euler** και συμβολίζεται

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\Big).$$

14. Έστω $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ ώστε $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ για κάθε $x, y \in [0,1]$. (i) Αποδείξτε ότι $\big|\int_c^d f - f(d)(d-c)\big| \leq M\frac{(d-c)^2}{2}$ για κάθε $[c,d] \subseteq [a,b]$. (ii) Αποδείξτε ότι $\big|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\big| \leq \frac{M}{2n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. (*Υπόδ.:* Εφαρμόστε το (i) στα $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ $(k = 1, \ldots, n)$.) (iii) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f$.

15. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε: $\lim_{x\to\xi+}\int_\xi^x f = 0$ για κάθε $\xi \in [a,b)$ και $\lim_{x\to\xi-}\int_x^\xi f = 0$ για κάθε $\xi \in (a,b]$. (*Υπόδ.:* Υπάρχει M ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε $\big|\int_\xi^x f\big| \leq M(x-\xi)$, αν $a \leq \xi < x \leq b$, και $\big|\int_x^\xi f\big| \leq M(\xi - x)$, αν $a \leq x < \xi \leq b$.)

16. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και η $g : [a+c, b+c] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x-c)$ $(x \in [a+c, b+c])$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a+c, b+c]$ και $\int_{a+c}^{b+c} g = \int_a^b f$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε διαμέριση $\Delta' = \{a = x_0{}', \ldots, x_n{}' = b\}$ του $[a,b]$ και τη διαμέριση Δ του $[a+c, b+c]$ η οποία προκύπτει από τη Δ' παίρνοντας $x_k = x_k{}' + c$. Για τα $u_k{}', l_k{}'$ της f στο $[x_{k-1}{}', x_k{}']$ και τα u_k, l_k της g στο $[x_{k-1}, x_k]$ αποδείξτε ότι $u_k = u_k{}'$ και $l_k = l_k{}'$. Αποδείξτε ανάλογες ισότητες ανάμεσα στα άνω και κάτω αθροίσματα Darboux των f, g. Χρησιμοποιήστε το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας. Για την ισότητα των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήστε τις $\underline{\Sigma}(g; a+c, b+c; \Delta) \leq \int_{a+c}^{b+c} g \leq \overline{\Sigma}(g; a+c, b+c; \Delta)$ και τις ανάλογες ανισότητες για την f.)

17. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau > 0$, δηλαδή $f(x+\tau) = f(x)$ για κάθε x. Έστω ότι υπάρχει κ ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\kappa, \kappa+\tau]$. (1) Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε $a, b,\ a < b$. (*Υπόδ.:* Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 16 στα $[\kappa + n\tau, \kappa + (n+1)\tau]$ $(n \in \mathbf{Z})$ και στις ενώσεις διαδοχικών τέτοιων

διαστημάτων.) (2) Αποδείξτε ότι $\int_a^b f = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f$ και $\int_a^{a+\tau} f = \int_b^{b+\tau} f$ για κάθε a, b, $a < b$.

18. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, $c > 0$ και η $g : [ac, bc] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(\frac{x}{c})$ $(x \in [ac, bc])$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[ac, bc]$ και $\int_{ac}^{bc} g = c\int_a^b f$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε διαμέριση $\Delta' = \{a = x_0{}', \ldots, x_n{}' = b\}$ του $[a,b]$ και τη διαμέριση Δ του $[ac, bc]$ η οποία προκύπτει από τη Δ' παίρνοντας $x_k = x_k{}'c$. Για τα $u_k{}', l_k{}'$ της f στο $[x_{k-1}{}', x_k{}']$ και τα u_k, l_k της g στο $[x_{k-1}, x_k]$ αποδείξτε ότι $u_k = u_k{}'$ και $l_k = l_k{}'$. Αποδείξτε ανάλογες ισότητες ανάμεσα στα άνω και κάτω αθροίσματα Darboux των f, g. Χρησιμοποιήστε το Κριτήριο Ολοκληρωσιμότητας. Για την ισότητα των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήστε τις $\underline{\Sigma}(g; ac, bc; \Delta) \leq \int_{ac}^{bc} g \leq \overline{\Sigma}(g; ac, bc; \Delta)$ και τις ανάλογες ανισότητες για την f.) Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα αν $c < 0$.

19. Έστω $f : [-b, b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[0, b]$. (1) Αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-b, b]$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-b, b]$ και $\int_{-b}^b f = 2\int_0^b f$. (2) Αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [-b, b]$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-b, b]$ και $\int_{-b}^b f = 0$. (*Υπόδ.:* Άσκηση 18.)

20. (1) Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν $\int_a^b f = 0$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε $f = 0$ στο $[a,b]$. (*Υπόδ.:* Έστω ότι η f είναι συνεχής στον $\xi \in [a,b]$ και $f(\xi) > 0$. Υπάρχει $[c,d] \subseteq [a,b]$ ώστε $d - c > 0$, $\xi \in [c,d]$ και $f(x) \geq \frac{f(\xi)}{2} > 0$ για κάθε $x \in [c,d]$. Τότε $\int_a^b f \geq \int_c^d f \geq \frac{f(\xi)}{2}(d-c) > 0$.) (2) Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $l \leq f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a,b]$. Γνωρίζουμε ότι, τότε, $l \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq u$. Αποδείξτε ότι (i) αν $\frac{1}{b-a}\int_a^b f = u$, τότε $f(x) = u$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f, (ii) αν $\frac{1}{b-a}\int_a^b f = l$, τότε $f(x) = l$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε τα δυο συμπεράσματα γίνονται, αντιστοίχως, $f = u$ στο $[a,b]$ και $f = l$ στο $[a,b]$.

21. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b fg = 0$ για κάθε $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχή στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. (*Υπόδ.:* Θεωρήστε $g = f$ και χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 20.)

22. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b fg = 0$ για κάθε $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχή στο $[a,b]$ με $g(a) = g(b) = 0$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε $f = 0$ στο $[a,b]$. (*Υπόδ.:* Έστω ότι η f είναι συνεχής στον $\xi \in [a,b]$ και $f(\xi) > 0$. Υπάρχει $[c,d] \subseteq [a,b]$ ώστε $d - c > 0$, $\xi \in [c,d]$ και $f(x) \geq \frac{f(\xi)}{2}$ για κάθε $x \in [c,d]$. Θεωρήστε κατάλληλη *τριγωνική συνάρτηση* g η οποία είναι > 0 στο (c,d) και μηδενίζεται στα $[a,c]$ και $[d,b]$ και αποδείξτε ότι $\int_a^b fg > 0$.)

23. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f > 0$. (*Υπόδ.:* Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 20 και της άσκησης 4 της ενότητας 6.3.)

24. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. (1) Αποδείξτε ότι είναι $\frac{1}{2}\int_a^b \big(\int_a^b (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy\big)\,dx = (b-a)\int_a^b fg - \int_a^b f\int_a^b g$. (2) Αν οι f, g είναι είτε και οι δυο αύξουσες είτε και οι δυο φθίνουσες στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f\int_a^b g \leq (b-a)\int_a^b fg$. (3) Αν η μια από τις f, g είναι αύξουσα και η άλλη φθίνουσα στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f\int_a^b g \geq (b-a)\int_a^b fg$.

25. **Ανισότητα του Schwartz**. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Αποδείξτε την πολύ σημαντική ανισότητα:

$$\Big(\int_a^b fg\Big)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \,.$$

(*Υπόδ.: Πρώτος τρόπος:* Αποδείξτε ότι $\big(\int_a^b f^2\big)t^2 + \big(2\int_a^b fg\big)t + \big(\int_a^b g^2\big) = \int_a^b (tf+g)^2 \geq 0$ για κάθε t. *Δεύτερος τρόπος:* $\int_a^b f^2\int_a^b g^2 - \big(\int_a^b fg\big)^2 = \frac{1}{2}\int_a^b \big(\int_a^b (f(x)g(y)-g(x)f(y))^2 dy\big)dx$.)

26. (1) **Ανισότητα του Jensen**. Έστω διάστημα I, $g : I \to \mathbf{R}$ κυρτή στο I και $f : [a,b] \to I$ συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $g\big(E(f;a,b)\big) \leq E(g\circ f;a,b)$ ή, ισοδύναμα,

$$g\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f.$$

Αν η g είναι κοίλη στο I, τότε ισχύει η αντίστροφη της ανισότητας αυτής. (*Υπόδ.:* Έστω $\eta = E(f;a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Τότε $\eta \in I$. Αν ο η είναι στο εσωτερικό του I, τότε (Πρόταση 5.13) υπάρχει μ ώστε $g(y) \geq \mu(y-\eta)+g(\eta)$ για κάθε $y \in I$. Αντικαταστήστε το y με το $f(x)$ και ολοκληρώστε στο $[a,b]$. Αν ο η είναι άκρο του I, τότε (άσκηση 20) η f είναι σταθερή η στο $[a,b]$.)
(2) Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι: (i) αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι άρτιος, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\big)^n \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^n$, (ii) αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $\rho \geq 1$, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\big)^\rho \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^\rho$, (iii) αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $0 < \rho \leq 1$, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\big)^\rho \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^\rho$, (iv) αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $\rho < 0$, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\big)^\rho \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^\rho$, (v) $\frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \log\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b \exp\circ f\big)$, (vi) αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε $\frac{1}{b-a}\int_a^b f \geq \exp\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b \log\circ f\big)$.

27. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν $u = \max\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n} = u$. (*Υπόδ.:* Αν $u = 0$, το αποτέλεσμα είναι προφανές. Έστω $f(\xi) = u > 0$ και

$0 < \epsilon \le 2u$. Υπάρχει $[c,d] \subseteq [a,b]$ ώστε $d-c > 0$, $\xi \in [c,d]$ και $u - \frac{\epsilon}{2} < f(x)$ για κάθε $x \in [c,d]$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $1 - \frac{\epsilon}{2u} < \sqrt[n]{d-c}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Συνεπάγεται $u - \epsilon < (u - \frac{\epsilon}{2})(1 - \frac{\epsilon}{2u}) \le \sqrt[n]{\int_c^d f^n} \le \sqrt[n]{\int_a^b f^n} \le u$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$.)

28. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και $|f(x)| \le \kappa \int_a^x |f|$ για κάθε $x \in (a,b]$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b]$. (*Υπόδ.:* Υπάρχει M ώστε $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $|f(x)| \le M \frac{\kappa^n (x-a)^n}{n!}$ για κάθε $x \in (a,b]$ και $n \in \mathbf{N}$. Τέλος, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{\kappa^n (x-a)^n}{n!} = 0$.)

29. Έστω $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και συνεχής στον 0. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)$. (*Υπόδ.:* Υπάρχει M ώστε $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - f(0)| \le \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x \in [0,\delta_0]$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $(1 - \frac{\epsilon}{4M})^n \le \delta_0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$ ισχύει $|\int_0^1 f(x^n)dx - f(0)| \le \int_0^1 |f(x^n) - f(0)|dx = \int_0^{1-\frac{\epsilon}{4M}} |f(x^n) - f(0)|dx + \int_{1-\frac{\epsilon}{4M}}^1 |f(x^n) - f(0)|dx \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$.)

30. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ φραγμένες στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\underline{\int}_a^b f + \underline{\int}_a^b g \le \underline{\int}_a^b (f+g) \le \overline{\int}_a^b (f+g) \le \overline{\int}_a^b f + \overline{\int}_a^b g$. (*Υπόδ.:* Θυμηθείτε τις $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \le \underline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta)$ και $\overline{\Sigma}(f+g;a,b;\Delta) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) + \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)$ που εμφανίζονται στην απόδειξη της Πρότασης 6.4.)

31. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ φραγμένη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι: (i) αν $\lambda > 0$, $\overline{\int}_a^b \lambda f = \lambda \overline{\int}_a^b f$, $\underline{\int}_a^b \lambda f = \lambda \underline{\int}_a^b f$, (ii) αν $\lambda < 0$, $\overline{\int}_a^b \lambda f = \lambda \underline{\int}_a^b f$, $\underline{\int}_a^b \lambda f = \lambda \overline{\int}_a^b f$. (*Υπόδ.:* Προσαρμόστε την υπόδειξη της άσκησης 30.)

32. Έστω $a < c < b$ και $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ φραγμένη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\overline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^c f + \overline{\int}_c^b f$ και $\underline{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$.

33. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ φραγμένες στο $[a,b]$ και $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\overline{\int}_a^b f \le \overline{\int}_a^b g$ και $\underline{\int}_a^b f \le \underline{\int}_a^b g$.

34. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ και $\xi_0, \dots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και η f να είναι συνεχής σε κάθε υποδιάστημα (ξ_{k-1}, ξ_k) $(k = 1, \dots, m)$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Προσέξτε: μπορεί να μην υπάρχουν τα πλευρικά όρια στους ξ_k $(k = 0, \dots, m)$. (*Υπόδ.:* Άσκηση 9 της ενότητας 6.2.)

35. Έστω η $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} (-1)^{[\frac{1}{x}]-1}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. (*Υπόδ.:* Άσκηση 9 της ενότητας 6.2.) Υπολογίστε το $\int_0^1 f$.

36. Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. (1) Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχουν κατά τμήματα σταθερές $g,h:[a,b]\to\mathbf{R}$ ώστε $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ και $\int_a^b h-\int_a^b g<\epsilon$. (*Υπόδ.:* Πρόταση 6.2. Γράψτε τα άνω και κάτω αθροίσματα Darboux ως ολοκληρώματα κατάλληλων κατά τμήματα σταθερών συναρτήσεων.) (2) Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχουν $g,h:[a,b]\to\mathbf{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ ώστε $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ και $\int_a^b h-\int_a^b g<\epsilon$.

37. (1) Έστω, για κάθε $n\in\mathbf{N}$, πεπερασμένο $A_n\subseteq[a,b]$ ώστε $A_m\cap A_n=\emptyset$ για κάθε $m,n\in\mathbf{N}$, $m\neq n$. Ορίζουμε $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}\,, & x\in A_n\ (n\in\mathbf{N}),\\ 0, & x\in[a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\,.\end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f=0$. (*Υπόδ.:* Έστω $n_0\in\mathbf{N}$, $\frac{1}{n_0+1}<\frac{\epsilon}{2}$. Θεωρήστε $A=A_1\cup\cdots\cup A_{n_0}$ και έστω N το πλήθος των στοιχείων του A. Πάρτε N μικρά διαστήματα ξένα ανά δύο ώστε το καθένα να έχει μήκος $<\frac{\epsilon}{2N}$ και να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο του A στο εσωτερικό του, εκτός αν κάποιο στοιχείο του A είναι ο a ή ο b οπότε το αντίστοιχο μικρό διάστημα θα έχει αυτό το στοιχείο ως άκρο. Τα άκρα αυτών των διαστημάτων μαζί με τους a, b ορίζουν διαμέριση Δ του $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=0$ και $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)<\epsilon$.) (2) Θεωρήστε $A_n=\{\frac{2k-1}{2^n}:k\in\mathbf{N},1\leq k\leq 2^{n-1}\}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $c,d\in[0,1]$, $c<d$ υπάρχει $x\in\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$ ώστε $c<x<d$. (3) Θεωρήστε την $f:[0,1]\to[0,1]$ που ορίζεται στο (1) με βάση τα συγκεκριμένα A_n του μέρους (2). Επίσης, θεωρήστε την $g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $g(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leq 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ Τότε οι f,g είναι ολοκληρώσιμες, αλλά αποδείξτε ότι η $g\circ f:[0,1]\to\mathbf{R}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

6.5 Ολοκλήρωμα. Ο ορισμός του Riemann.

Έστω διάστημα $[a,b]$, όπου $a<b$, και διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\ldots,x_n=b\}$ του $[a,b]$. Θεωρούμε οποιοδήποτε σύνολο $\Xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ ώστε $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ για κάθε $k=1,\ldots,n$. Το Ξ ονομάζεται **επιλογή ενδιάμεσων σημείων για τη διαμέριση Δ**.

Είναι προφανές ότι υπάρχουν άπειρες επιλογές ενδιάμεσων σημείων σε σχέση με την ίδια διαμέριση Δ του $[a,b]$.

Τώρα, έστω *φραγμένη* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\ldots,x_n=b\}$ του $[a,b]$ και, κατόπιν, οποιαδήποτε επιλογή $\Xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για τη διαμέριση Δ. Το άθροισμα

$$\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

ονομάζεται **άθροισμα Riemann της f ως προς τη διαμέριση Δ και την επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ**.

Λήμμα 6.5 *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ και διαμέριση Δ του $[a, b]$. Τότε:*
(1) $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ για κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ.
(2) $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \inf\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) : \Xi$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την $\Delta\}$.
(3) $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sup\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) : \Xi$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την $\Delta\}$.

Απόδειξη: (1) Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ. Ορίζουμε $l_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $u_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$. Τότε $l_k \leq f(\xi_k) \leq u_k$, οπότε $\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1})$. Δηλαδή, $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$.
(2) Από το (1) συνεπάγεται ότι το $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) : \Xi$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την $\Delta\}$. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $l_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, υπάρχει $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ώστε $f(\xi_k) < l_k + \frac{\epsilon}{b-a}$. Θεωρούμε την επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ που ορίζεται από αυτά τα ξ_k $(k = 1, \dots, n)$ και υπολογίζουμε $\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n (l_k + \frac{\epsilon}{b-a})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \epsilon$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει στοιχείο του $\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) : \Xi$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την $\Delta\}$ το οποίο είναι $< \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \epsilon$. Άρα το $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου αυτού.
(3) Από το (1) συνεπάγεται ότι το $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) : \Xi$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την $\Delta\}$. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $u_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, υπάρχει $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ώστε $u_k - \frac{\epsilon}{b-a} < f(\xi_k)$. Θεωρούμε την επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ που ορίζεται από αυτά τα ξ_k $(k = 1, \dots, n)$ και υπολογίζουμε $\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) > \sum_{k=1}^n (u_k - \frac{\epsilon}{b-a})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \epsilon$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει στοιχείο του $\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) : \Xi$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την $\Delta\}$ το οποίο είναι $> \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \epsilon$. Άρα το $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου αυτού. $\natural$

Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Ονομάζουμε **πλάτος της** Δ το μεγαλύτερο από τα μήκη των υποδιαστημάτων της Δ, δηλαδή το

$$w(\Delta) = \max\{x_k - x_{k-1} : k \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq n\}.$$

Προσοχή: *Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.4 είναι, ίσως, η δυσκολότερη όλου του βιβλίου!*

Θεώρημα 6.4 *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbf{R}$.*
(1) Έστω ότι υπάρχει αριθμός $\mathcal{I}$ με την εξής ιδιότητα. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει $\left|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \mathcal{I}\right| < \epsilon$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b f = \mathcal{I}$.
(2) Αντιστρόφως, έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει $\left|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b f\right| < \epsilon$.

Απόδειξη: (1) Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει $\left|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \mathcal{I}\right| < \frac{\epsilon}{4}$. Θεωρούμε διαμέριση Δ με $w(\Delta) < \delta_0$ οπότε για κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει $\mathcal{I} - \frac{\epsilon}{4} < \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) < \mathcal{I} + \frac{\epsilon}{4}$. Άρα οι $\mathcal{I} - \frac{\epsilon}{4}$, $\mathcal{I} + \frac{\epsilon}{4}$ είναι κάτω φράγμα και άνω φράγμα, αντιστοίχως, του $\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) : \Xi$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την $\Delta\}$. Από το Λήμμα 6.5 συνεπάγεται $\mathcal{I} - \frac{\epsilon}{4} \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \mathcal{I} + \frac{\epsilon}{4}$. Άρα $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Από την $\mathcal{I} - \frac{\epsilon}{4} \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \mathcal{I} + \frac{\epsilon}{4}$ συνεπάγεται $\left|\int_a^b f - \mathcal{I}\right| \leq \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $\int_a^b f = \mathcal{I}$.
(2) Η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, οπότε υπάρχει M ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση Δ_0 του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) < \frac{\epsilon}{2}$. Έστω $n_0 \geq 2$ το πλήθος των διαιρετικών σημείων της Δ_0. Ορίζουμε $\delta_0 = \frac{\epsilon}{4n_0(M+1)}$.

Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$. Ορίζουμε $l_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $u_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$. Χωρίζουμε τους δείκτες $k = 1, \ldots, n$ σε δυο κατηγορίες. Το σύνολο A έχει ως στοιχεία του εκείνους ακριβώς τους k για τους οποίους το $[x_{k-1}, x_k]$ περιέχει ένα τουλάχιστον διαιρετικό σημείο της Δ_0 ως *εσωτερικό* του σημείο. Το σύνολο B έχει ως στοιχεία του ακριβώς τους υπόλοιπους k, δηλαδή εκείνους τους k για τους οποίους το $[x_{k-1}, x_k]$ δεν περιέχει κανένα διαιρετικό σημείο της Δ_0 ως εσωτερικό του σημείο. Μπορούμε, λοιπόν, να γράψουμε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k \in A}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in B}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Είναι προφανές ότι το πλήθος των στοιχείων του A είναι $\leq n_0$. Επίσης, είναι προφανές ότι για κάθε $k \in A$ ισχύει $-M \leq l_k \leq u_k \leq M$ και, επομένως, $u_k - l_k \leq 2M$. Άρα για κάθε $k \in A$ ισχύει $(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \leq 2Mw(\Delta) \leq 2M\delta_0 < \frac{\epsilon}{2n_0}$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k \in A}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k \in A}\frac{\epsilon}{2n_0} \leq n_0\frac{\epsilon}{2n_0} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Θεωρούμε την $\Delta' = \Delta \cup \Delta_0$ και παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in B$, το υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ της Δ είναι υποδιάστημα *και της* Δ'. Άρα

$$\begin{aligned}\sum_{k \in B}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) &\leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \\ &\leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) < \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$. Έστω και οποιαδήποτε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ. Τότε $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$. Συνδυάζοντας με τις $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ και τις $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$, συμπεραίνουμε ότι $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) - \int_a^b f\right| < \epsilon$ για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ. $\natural$

Ιδού ο ορισμός του ολοκληρώματος Riemann που έδωσε ο Riemann.

Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. *Η f χαρακτηρίζεται* ***ολοκληρώσιμη*** *ή, πιό σωστά,* ***Riemann ολοκληρώσιμη*** *στο $[a,b]$ αν υπάρχει αριθμός $\mathcal{I}$ με την εξής ιδιότητα. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) - \mathcal{I}\right| < \epsilon$.* Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε ο αριθμός $\mathcal{I}$ ονομάζεται **ολοκλήρωμα** ή, πιο σωστά, **Riemann ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται

$$\int_a^b f = \mathcal{I}.$$

Το περιεχόμενο του Θεωρήματος 6.4 είναι ακριβώς ότι ο ορισμός του ολοκληρώματος που έδωσε ο Darboux και ο ορισμός που έδωσε ο Riemann είναι ισοδύναμοι. Δηλαδή, *αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον έναν ορισμό, τότε είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα και με τον άλλον ορισμό και οι τιμές των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων της ταυτίζονται.*

Πρόταση 6.16 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία διαμερίσεων (Δ_k) του $[a,b]$ ώστε $\lim_{k\to+\infty} w(\Delta_k) = 0$. Για κάθε $k \in \mathbf{N}$ θεωρούμε μια οποιαδήποτε επιλογή Ξ_k ενδιάμεσων σημείων για την Δ_k. Τότε*

$$\lim_{k\to+\infty} \Sigma(f;a,b;\Delta_k,\Xi_k) = \int_a^b f.$$

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta_0$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) - \int_a^b f\right| < \epsilon$. Τελικά ισχύει $w(\Delta_k) < \delta_0$ και, επομένως, τελικά ισχύει $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta_k,\Xi_k) - \int_a^b f\right| < \epsilon$. Άρα $\lim_{k\to+\infty} \Sigma(f;a,b;\Delta_k,\Xi_k) = \int_a^b f$. $\natural$

Μια όχι τόσο αυστηρή αλλά πολύ συνηθισμένη και παραστατική διατύπωση της Πρότασης 6.16 είναι η εξής. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τα αθροίσματα Riemann της f συγκλίνουν στο ολοκλήρωμά της όταν το πλάτος των αντίστοιχων διαμερίσεων τείνει στο* 0. Υπάρχει και το ανάλογο σύμβολο:

$$\lim_{w(\Delta)\to 0} \Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) = \int_a^b f.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.16, *αν γνωρίζουμε* ότι μια συγκεκριμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *είναι* ολοκληρώσιμη, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμά της παίρνοντας οποιαδήποτε ακολουθία διαμερίσεων (Δ_k) του $[a,b]$

ώστε $\lim_{k\to+\infty} w(\Delta_k) = 0$ και οποιαδήποτε επιλογή Ξ_k ενδιάμεσων σημείων για την Δ_k. Υπολογίζουμε τα $\Sigma(f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)$ και, τέλος, υπολογίζουμε το $\lim_{k\to+\infty}\Sigma(f,\Delta_k,\Xi_k) = \int_a^b f$. Η μοναδική μας φροντίδα είναι να βρούμε κατάλληλες Δ_k και αντίστοιχες Ξ_k ώστε να υπολογίζονται εύκολα τα $\Sigma(f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)$.

Πάντως, η αξία της Πρότασης 6.16 είναι περισσότερο θεωρητική παρά πρακτική. Στο Κεφάλαιο 7 θα γνωρίσουμε την κατ΄ εξοχήν μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων, η οποία βασίζεται στο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

Ασκήσεις.

1. Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (Δ_k) διαμερίσεων του $[a,b]$ ώστε $\lim_{k\to+\infty} w(\Delta_k)=0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{k\to+\infty}\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_k) = \lim_{k\to+\infty}\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_k) = \int_a^b f$.

2. Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. Για κάθε $\delta>0$ ορίζουμε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\delta) = \sup\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) : \Delta$ διαμέριση του $[a,b], w(\Delta)<\delta\}$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\delta) = \inf\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) : \Delta$ διαμέριση του $[a,b], w(\Delta)<\delta\}$. Αποδείξτε ότι (i) $\overline{\int_a^b} f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\delta_1) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\delta_2)$, αν $0<\delta_1<\delta_2$, (ii) $\underline{\Sigma}(f;a,b;\delta_2) \le \underline{\Sigma}(f;a,b;\delta_1) \le \underline{\int_a^b} f$, αν $0<\delta_1<\delta_2$, (iii) $\lim_{\delta\to0+}\overline{\Sigma}(f;a,b;\delta) = \overline{\int_a^b} f$ και $\lim_{\delta\to0+}\underline{\Sigma}(f;a,b;\delta) = \underline{\int_a^b} f$, (iv) η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν $\lim_{\delta\to0+}\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\delta)\big) = 0$.

Κεφάλαιο 7

Σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος.

7.1 Αντιπαράγωγοι, αόριστα ολοκληρώματα.

Α. Αντιπαράγωγοι.

Έστω διάστημα I (οποιουδήποτε τύπου) και $f : I \to \mathbf{R}$. Αν για την $F : I \to \mathbf{R}$ ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε x στο I, τότε η F ονομάζεται **αντιπαράγωγος** ή **παράγουσα** ή **πρωτεύουσα συνάρτηση** ή **αρχική συνάρτηση** της f στο διάστημα I.

Παράδειγμα: (1) Η x είναι αντιπαράγωγος της σταθερής 1 στο $\mathbf{R}$.

(2) Για κάθε $\rho \neq -1$ η $\frac{1}{\rho+1}x^{\rho+1}$ είναι αντιπαράγωγος της x^ρ (i) στο $\mathbf{R}$, αν ο $\rho > 0$ είναι ρητός με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του, (ii) στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, αν ο $\rho \leq 0$ είναι ρητός με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του, (iii) στο $[0, +\infty)$, αν ο $\rho > 0$ είναι άρρητος ή ρητός με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του, και (iv) στο $(0, +\infty)$, αν ο $\rho < 0$ είναι άρρητος ή ρητός με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του.

(3) Η $\log|x|$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

(4) Αν $\rho > 0$, $\rho \neq 1$, τότε η $\frac{1}{\log \rho}\rho^x$ είναι αντιπαράγωγος της ρ^x στο $\mathbf{R}$.

(5) Η $\sin x$ είναι αντιπαράγωγος της $\cos x$ και η $-\cos x$ της $\sin x$ στο $\mathbf{R}$.

(6) Η $\tan x$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{(\cos x)^2}$ σε κάθε $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$. Η $-\cot x$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{(\sin x)^2}$ σε κάθε $(k\pi, \pi + k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$.

(7) Η $\arcsin x$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ στο $(-1, 1)$.

(8) Η $\arctan x$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{1+x^2}$ στο $\mathbf{R}$.

(9) Η $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ δεν έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbf{R}$.

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ώστε $F'(x) = f(x)$ για κάθε x. Επειδή $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και η F είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_1 ώστε $F(x) = c_1$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$. Ομοίως, επειδή $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η F είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_2 ώστε $F(x) = c_2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Άρα $c_1 = F(0) = c_2$ και, συμβολίζοντας $c = c_1 = c_2$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = c$ για κάθε x. Επομένως, $F'(x) = 0$ για κάθε x και καταλήγουμε σε αντίφαση, αφού $F'(0) = f(0) = 1$.

Πρόταση 7.1 *Έστω διάστημα I και $f, F_1, F_2 : I \to \mathbf{R}$. Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μια από τις F_1, F_2 είναι αντιπαράγωγος της f στο I, τότε και η άλλη είναι αντιπαράγωγος της f στο I. Αντιστρόφως, αν οι F_1, F_2 είναι αντιπαράγωγοι της f στο I, τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη: Έστω $F_2(x) - F_1(x) = c$ και ${F_1}'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Τότε ${F_2}'(x) = {F_1}'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Αντιστρόφως, έστω ${F_1}'(x) = f(x)$ και ${F_2}'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Ορίζουμε την $h = F_2 - F_1$ και τότε $h'(x) = {F_1}'(x) - {F_2}'(x) = f(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Άρα η h είναι σταθερή συνάρτηση στο I. ♮

Το αποτέλεσμα της Πρότασης 7.1 μπορεί να διατυπωθεί και με τον εξής τρόπο. *Έστω F αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I. Τότε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $F + c$ ($c \in \mathbf{R}$) και μόνο από αυτές.* Με άλλα λόγια, αν υπάρχει τουλάχιστον μια αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I, τότε η f έχει *άπειρες* αντιπαραγώγους στο διάστημα I και αυτές είναι ακριβώς οι εξής: *μια οποιαδήποτε από τις αντιπαραγώγους συν αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.*

Παράδειγμα: Οι αντιπαράγωγοι της x στο $\mathbf{R}$ είναι οι συναρτήσεις $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Γενικότερα, για κάθε συνάρτηση στα αρχικά μας παραδείγματα μπορούμε να βρούμε τις αντιπαραγώγους της, αν επισυνάψουμε το σύμβολο c στην αναφερόμενη αντιπαράγωγο. Για παράδειγμα, οι αντιπαράγωγοι της $\cos x$ στο $\mathbf{R}$ είναι οι συναρτήσεις $\sin x + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Πρέπει να προσεχθεί το εξής. Αν μια συνάρτηση g έχει παράγωγο σταθερή 0 στην ένωση *δυο μη διαδοχικών* διαστημάτων, τότε *δε συνεπάγεται* ότι η g είναι σταθερή στην ένωση των δυο αυτών διαστημάτων.

Παράδειγμα: Η $g(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } 0 < x < 1, \\ 2\,, & \text{αν } 1 < x < 3, \end{cases}$ έχει παράγωγο 0 στην ένωση $(0, 1) \cup (1, 3)$, διότι είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 3)$. Όμως, η g δεν είναι σταθερή στην ένωση $(0, 1) \cup (1, 3)$.

Μετά από την τελευταία παρατήρηση καταλαβαίνουμε γιατί στην Πρόταση 7.1 (και στις αναδιατυπώσεις της) αναφέρεται διάστημα και όχι ένωση περισσοτέρων του ενός διαστημάτων.

Παράδειγμα: Οι συναρτήσεις $\log|x|+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, είναι οι αντιπαράγωγοι της $\frac{1}{x}$ στο $(-\infty,0)$ καθώς και στο $(0,+\infty)$ αλλά όχι στην ένωση $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Οι αντιπαράγωγοι της $\frac{1}{x}$ στην $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι οι συναρτήσεις $F(x)=\begin{cases}\log|x|+c_1\,, & x<0,\\ \log|x|+c_2\,, & x>0,\end{cases}$ όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές συναρτήσεις, όχι απαραιτήτως ίσες.

B. Αόριστα ολοκληρώματα.

Έστω $a<b$ και $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οπότε ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_a^b f$. Είναι πολύ χρήσιμη η εξής επέκταση του συμβόλου του ολοκληρώματος:

$$\int_b^a f=-\int_a^b f.$$

Επιτρέπεται, λοιπόν, να γράφουμε το μεγαλύτερο άκρο του διαστήματος στην κάτω μεριά και το μικρότερο άκρο στην πάνω μεριά του συμβόλου του ολοκληρώματος. Επίσης, αν απλώς ορίζεται η f στον a, τότε την θεωρούμε, αυτομάτως, ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,a]=\{a\}$ και ορίζουμε:

$$\int_a^a f=0.$$

Επομένως, έχουμε ορίσει το σύμβολο $\int_a^b f$ για οποιουσδήποτε a, b με την προϋπόθεση ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, αν $a<b$, ή στο $[b,a]$, αν $b<a$, ή, απλώς, ορισμένη στο a, αν $a=b$.

Η γνωστή ιδιότητα

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f,$$

η οποία ισχύει όταν $a<c<b$, επεκτείνεται για όλες τις περιπτώσεις σχετικής διάταξης των a,b,c, αρκεί η f να είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα από τον μικρότερο μέχρι τον μεγαλύτερο από τους τρεις αυτούς αριθμούς. Αυτό είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί, διακρίνοντας περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αν $b<c<a$, η ισότητα γράφεται $-\int_b^a f=-\int_c^a f-\int_b^c f$ ή, ισοδύναμα, $\int_b^a f=\int_b^c f+\int_c^a f$ και αυτή είναι η ήδη γνωστή μας ισότητα. Επίσης, αν $a=b<c$, η ισότητα γράφεται $0=\int_a^c f-\int_a^c f$ η οποία είναι, προφανώς, σωστή. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η απόδειξη είναι παρόμοια.

Μια ακόμη γνωστή ιδιότητα που επεκτείνεται είναι η εξής. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, αν $a<b$, ή στο $[b,a]$, αν $b<a$, και αν $|f(x)|\leq M$ για κάθε x στο ίδιο διάστημα, τότε

$$\Big|\int_a^b f\Big|\leq M|b-a|.$$

Πράγματι, αν $a < b$, (οπότε $|b-a| = b-a$), τότε το αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστό. Αν $b < a$, τότε $\big|\int_a^b f\big| = \big| -\int_b^a f\big| = \big|\int_b^a f\big| \leq M(a-b) = M|b-a|$. Τέλος, αν $a = b$, τότε η ανισότητα $\big|\int_a^b f\big| \leq M|b-a|$ ισχύει ως ισότητα $0 = 0$.

Τώρα, έστω διάστημα I (οποιουδήποτε τύπου) και $f : I \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $a \in I$, κατόπιν θεωρούμε έναν μεταβλητό $x \in I$ και για κάθε τέτοιον x γράφουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^x f$. Αυτό είναι ένας αριθμός η τιμή του οποίου εξαρτάται από την τιμή του x. Τέλος, παίρνουμε και έναν αυθαίρετο αριθμό c, οπότε ορίζεται η συνάρτηση $F : I \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$F(x) = \int_a^x f + c \qquad (x \in I).$$

Κάθε τέτοια συνάρτηση ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f στο διάστημα I και ο a ονομάζεται **αρχικό σημείο** του αόριστου ολοκληρώματος.

Πρόταση 7.2 *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι συνάρτηση συνεχής στο I.*

Απόδειξη: Έστω $a \in I$, αριθμός c και η $F(x) = \int_a^x f + c$ $(x \in I)$.

Έστω $\xi \in I$ όχι δεξιό άκρο του I. Θεωρούμε $b \in I$, $b > \xi$. Η f ως ολοκληρώσιμη στο $[\xi, b]$ είναι φραγμένη στο $[\xi, b]$, οπότε υπάρχει M ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [\xi, b]$. Τότε, για κάθε $x \in [\xi, b]$ ισχύει $|F(x) - F(\xi)| = \big|\big(\int_a^x f + c\big) - \big(\int_a^\xi f + c\big)\big| = \big|\int_\xi^x f\big| \leq M(x-\xi)$. Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $[\xi, x] \subseteq [\xi, b]$, οπότε $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [\xi, x]$. Συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi+}(F(x) - F(\xi)) = 0$, οπότε $\lim_{x\to\xi+} F(x) = F(\xi)$.

Έστω $\xi \in I$ όχι αριστερό άκρο του I. Τα υπόλοιπα είναι παραλλαγή της προηγούμενης παραγράφου. Θεωρούμε $b \in I$, $b < \xi$. Η f ως ολοκληρώσιμη στο $[b, \xi]$ είναι φραγμένη στο $[b, \xi]$, οπότε υπάρχει M ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [b, \xi]$. Για κάθε $x \in [b, \xi]$ ισχύει $|F(x) - F(\xi)| = \big|\big(\int_a^x f + c\big) - \big(\int_a^\xi f + c\big)\big| = \big|\int_x^\xi f\big| \leq M(\xi - x)$. Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $[x, \xi] \subseteq [b, \xi]$, οπότε $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [x, \xi]$. Συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi-}(F(x) - F(\xi)) = 0$, οπότε $\lim_{x\to\xi-} F(x) = F(\xi)$.

Άρα η F είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in I$. ♮

Αν θέλουμε να αντικαταστήσουμε το αρχικό σημείο $a \in I$ με ένα άλλο $a' \in I$ σε ένα αόριστο ολοκλήρωμα, κάνουμε το εξής απλό: $F(x) = \int_a^x f + c = \int_{a'}^x f + \int_a^{a'} f + c = \int_{a'}^x f + c'$, όπου $c' = \int_a^{a'} f + c$. Δηλαδή, η αντικατάσταση ενός αρχικού σημείου a με ένα άλλο a' ισοδυναμεί με την αντικατάσταση ενός αριθμού c με έναν άλλον c'. Γι αυτό όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα επιλέγουμε κατάλληλο αρχικό σημείο a τέτοιο ώστε είτε να είναι βολικότερες οι πράξεις για τον υπολογισμό του $\int_a^x f$ είτε να είναι πιο απλός ο τύπος που θα προκύψει.

Παράδειγμα: Για να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της x στο $\mathbf{R}$, παίρνουμε

$a=0$ και έχουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_0^x t\,dt=\frac{x^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{x^2}{2}$. Ένα οποιοδήποτε άλλο αόριστο ολοκλήρωμα της x είναι το $\frac{x^2}{2}+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Αν, για παράδειγμα, επιλέξουμε κάποιον άλλο a ως αρχικό σημείο, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_a^x t\,dt+3$ είναι το $\int_a^x t\,dt+3=\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{2}+3$ και ο σταθερός αριθμός είναι ο $c=-\frac{a^2}{2}+3$.

Προσέξτε την ομοιότητα ανάμεσα στις Προτάσεις 7.1, 7.3.

Πρόταση 7.3 *Έστω διάστημα I και $f,F_1,F_2:I\to\mathbf{R}$. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αν η F_2-F_1 είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μια από τις F_1, F_2 είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I, τότε και η άλλη είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I. Αντιστρόφως, αν οι F_1, F_2 είναι αόριστα ολοκληρώματα της f στο I, τότε η F_2-F_1 είναι σταθερή συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη: Έστω $F_2(x)-F_1(x)=c$ για κάθε $x\in I$ και έστω $F_1(x)=\int_{a_1}^x f+c_1$ για κάθε $x\in I$, όπου $a_1\in I$. Συνεπάγεται $F_2(x)=F_1(x)+c=\int_{a_1}^x f+(c_1+c)=\int_{a_2}^x f+c_2$ για κάθε $x\in I$, όπου $a_2=a_1$, $c_2=c_1+c$.

Αντιστρόφως, έστω $F_1(x)=\int_{a_1}^x f+c_1$ και $F_2(x)=\int_{a_2}^x f+c_2$ για κάθε $x\in I$, όπου $a_1,a_2\in I$. Συνεπάγεται $F_2(x)-F_1(x)=\int_{a_2}^x f+c_2-\int_{a_1}^x f-c_1=\int_{a_2}^{a_1} f+c_2-c_1$ για κάθε $x\in I$, οπότε η F_2-F_1 είναι σταθερή στο I. $\natural$

Το τελευταίο αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής. *Έστω F ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I. Τότε το σύνολο όλων των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $F+c$ ($c\in\mathbf{R}$) και μόνο από αυτές.* Με άλλα λόγια, αν υπάρχει τουλάχιστον ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I, τότε η f έχει *άπειρα* αόριστα ολοκληρώματα στο διάστημα I και αυτά είναι ακριβώς οι εξής συναρτήσεις: *ένα οποιοδήποτε από τα αόριστα ολοκληρώματα συν αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.* Αν επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε $a\in I$, τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, *τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $\int_a^x f+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I.* Κατά παράδοση, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\int^x f$ και $\int f(x)\,dx$ για να συμβολίσουμε *όλα μαζί τα αόριστα ολοκληρώματα* της f στο I. Δηλαδή, γράφουμε

$$\int^x f=\int_a^x f+c \quad ή \quad \int f(x)\,dx=\int_a^x f+c \qquad (x\in I)$$

και διαβάζουμε: *το $\int^x f$ (ή $\int f(x)\,dx$) είναι κάθε συνάρτηση $\int_a^x f+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.* Ελπίζουμε να μη δημιουργηθεί σύγχυση! Προσοχή: (i) Πάντοτε γράφουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x: είτε στο σύμβολο $\int^x f$ είτε στο σύμβολο $\int f(x)\,dx$. (ii) Πολλές φορές, στο σύμβολο $\int^x f$, εκτός από την ανεξάρτητη μεταβλητή x, γράφουμε και τη «μεταβλητή ολοκλήρωσης» ως εξής: $\int^x f(t)\,dt$. Δηλαδή, $\int^x f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+c$.

Παράδειγμα: Γράφουμε $\int^x t\,dt=\int_0^x t\,dt+c=\frac{x^2}{2}+c$ ή, ισοδύναμα, $\int x\,dx=\int_0^x t\,dt+c=\frac{x^2}{2}+c$. Διαβάζουμε: το $\int^x t\,dt$ (ή $\int x\,dx$) είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της x στο $\mathbf{R}$, δηλαδή οι συναρτήσεις $\frac{x^2}{2}+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παρατηρήστε ότι σε δυο από τα παραδείγματά μας είδαμε ότι το σύνολο των αντιπαραγώγων της x στο $\mathbf{R}$ είναι ίδιο με το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της. Στην επόμενη ενότητα αυτό θα γενικευθεί.

Πριν προχωρήσουμε ας δούμε δυο απλές ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων. Η πρώτη είναι:

$$\int^x (f+g) = \int^x f + \int^x g \quad \text{ή} \quad \int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Η ισότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια της αντίστοιχης ισότητας ανάμεσα σε ολοκληρώματα με συγκεκριμένα άκρα. Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα $F(x) = \int_a^x f$, $G(x) = \int_a^x g$. Άρα $\int^x f = F(x)+c_1$ και $\int^x g = G(x)+c_2$, όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές συναρτήσεις. Τώρα, $\int^x f + \int^x g = F(x)+c_1+G(x)+c_2 = F(x)+G(x)+(c_1+c_2) = \int_a^x (f+g)+(c_1+c_2)$. Το $\int_a^x (f+g)$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $f+g$ και, επειδή η c_1+c_2 είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, συνεπάγεται ότι $\int^x (f+g) = \int_a^x (f+g)+(c_1+c_2)$. Άρα $\int^x f + \int^x g = \int^x (f+g)$.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι:

$$\int^x \lambda f = \lambda \int^x f \quad \text{ή} \quad \int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx \qquad (\lambda \neq 0).$$

Θεωρούμε, όπως πριν, το ίδιο αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f$, οπότε $\int^x f = F(x)+c$, όπου ο c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Τώρα $\lambda \int^x f = \lambda F(x) + \lambda c = \int_a^x \lambda f + \lambda c$. Το $\int_a^x \lambda f$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της λf και η λc είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση (ακριβώς επειδή $\lambda \neq 0$). Άρα $\int^x \lambda f = \int_a^x \lambda f + \lambda c$ και, επομένως, $\lambda \int^x f = \int^x \lambda f$.

Όπως φάνηκε στις τελευταίες αποδείξεις, όταν προσθέτουμε δυο γενικά αόριστα ολοκληρώματα μπορούμε να αντικαθιστούμε το άθροισμα των δυο αυθαίρετων σταθερών συναρτήσεων που εμφανίζονται με *μια* αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Ομοίως, όταν πολλαπλασιάζουμε ένα γενικό αόριστο ολοκλήρωμα με ένα αριθμό $\neq 0$ μπορούμε να αντικαθιστούμε το γινόμενο της αυθαίρετης σταθερής συνάρτησης και του πολλαπλασιαστή αριθμού με *μια* αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παραδείγματα: (1) Γράφουμε $\int (x+x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+c$. Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (x+x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2}+c_1+\frac{x^3}{3}+c_2$.

(2) Γράφουμε $\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2}+c$. Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2}+7c$.

(3) Γράφουμε $\int (x+g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2}+\int g(x)\,dx$. Αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (x+g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2}+c+\int g(x)\,dx$ διότι η

αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση c μπορεί να «απορροφηθεί» στο $\int g(x)\,dx$ το οποίο περιέχει αφ' εαυτού μια αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

(4) Προσέξτε! Γράφουμε $\int x\,dx - \int x\,dx = c$ και όχι $= 0$. Διότι $\int x\,dx - \int x\,dx = \int (x-x)\,dx = \int 0\,dx = c$ ή, με άλλο τρόπο, $\int x\,dx - \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1 - \frac{x^2}{2} - c_2 = c_1 - c_2 = c$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε όλες τις αντιπαραγώγους της $2x + \sin x$ στο $\mathbf{R}$. Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $2x + \sin x$ στο $\mathbf{R}$ ώστε η τιμή της στον 1 να είναι -2. Πόσες τέτοιες αντιπαράγωγοι υπάρχουν;

2. (1) Βρείτε συνάρτηση $F(x)$ ώστε $F'(x^2) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $F(1) = 1$. (2) Βρείτε συνάρτηση $F(x)$ ώστε $F'(\log x) = 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και $F'(\log x) = x$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και $F(1) = 1$.

3. Αν υπήρχε ρητή συνάρτηση $r(x)$ και διάστημα (a, b) ώστε $r'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (a, b)$, θα ήταν $r(x) = \ldots$ στο (a, b). Τί συμπεραίνετε;

4. Βρείτε όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $1 - x$ στο $\mathbf{R}$. Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - x$ στο $\mathbf{R}$ ώστε η τιμή του στον 2 να είναι -1. Πόσα τέτοια αόριστα ολοκληρώματα υπάρχουν;

5. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $a \in I$ και αριθμός κ. Πόσα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I υπάρχουν τα οποία έχουν τιμή κ στον a;

6. Υποθέστε ότι $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + x^2 - 3$. Με τί είναι ίση η παράσταση $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$;

7. Θεωρήστε την $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. (i) Αποδείξτε ότι η f είναι περιοδική στο $\mathbf{R}$ με περίοδο 1. (ii) Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_0^x f$ είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ με περίοδο 1 και υπολογίστε το στο $[0, 1]$. Εκφράστε τον τύπο της F στο $\mathbf{R}$ χρησιμοποιώντας το $[x]$. (iii) Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $G(x) = \int_0^x (F + \frac{1}{12})$ είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ με περίοδο 1 και υπολογίστε το στο $[0, 1]$.

8. Έστω ότι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα μιας συνάρτησης είναι περιοδική ή άρτια ή περιττή συνάρτηση. Ισχύει τότε ότι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα είναι περιοδικές ή άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, αντιστοίχως;

7.2 Το Θεμελιώδες Θεώρημα.

Θεώρημα 7.1 ***Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.*** *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $a \in I$ και το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f$*

$(x \in I)$. Αν η f είναι συνεχής στον $\xi \in I$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στον ξ και

$$F'(\xi) = f(\xi).$$

Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο I, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο I και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in I$, $|x - \xi| < \delta_0$. Έστω, λοιπόν, οποιοσδήποτε $x \in I$, $0 < |x - \xi| < \delta_0$. Για κάθε $t \in [\xi, x]$ ή $t \in [x, \xi]$ ισχύει $|t - \xi| < \delta_0$, οπότε $|f(t) - f(\xi)| < \epsilon$. Άρα $\big|\int_\xi^x (f - f(\xi))\big| \leq \epsilon|x - \xi|$. Τότε

$$\Big|\frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} - f(\xi)\Big| = \Big|\frac{\int_a^x f - \int_a^\xi f}{x - \xi} - f(\xi)\Big| = \Big|\frac{\int_\xi^x f - f(\xi)(x - \xi)}{x - \xi}\Big|$$
$$= \Big|\frac{\int_\xi^x f - \int_\xi^x f(\xi)}{x - \xi}\Big| = \frac{\big|\int_\xi^x (f - f(\xi))\big|}{|x - \xi|} \leq \frac{\epsilon|x - \xi|}{|x - \xi|} = \epsilon.$$

Άρα $\lim_{x \to \xi} \frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} = f(\xi)$, οπότε $F'(\xi) = f(\xi)$. $\natural$

Παρατηρήστε, σε σχέση με το τελευταίο μέρος του Θεωρήματος 7.1, ότι, αν η f είναι συνεχής στο I, τότε είναι, αυτομάτως, ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.

Οι επόμενες τρεις προτάσεις είναι απλά πορίσματα του Θεωρήματος 7.1.

Πρόταση 7.4 *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I. Τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I και αντιστρόφως. Με άλλα λόγια, το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I είναι ίδιο με το σύνολο των αντιπαραγώγων της στο I.*

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1, το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f$ $(x \in I)$ της f στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I. Όμως, τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. Επίσης, οι αντιπαράγωγοι της f στο I είναι οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. $\natural$

Η Πρόταση 7.5 έχει σπουδαία πρακτική αξία.

Πρόταση 7.5 *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I και $F : I \to \mathbf{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο I. Τότε*
(1) *τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. Δηλαδή*

$$\int^x f = F(x) + c \quad \text{ή} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad (x \in I).$$

(2) *το ολοκλήρωμα της f σε οποιοδήποτε $[a, b] \subseteq I$ είναι ίσο με τη διαφορά των τιμών της F στα άκρα του $[a, b]$. Δηλαδή*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \qquad (a, b \in I).$$

Απόδειξη: (1) Οι αντιπαράγωγοι της f στο I είναι οι $F+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I, και, σύμφωνα με την Πρόταση 7.4, το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I είναι ίδιο με το σύνολο των αντιπαραγώγων της στο I.
(2) Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1, το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_a^x f \ \ (x \in I)$ είναι αντιπαράγωγος της f στο I. Άρα η $\int_a^x f - F(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I. Άρα $\int_a^x f - F(x) = \int_a^a f - F(a) = -F(a)$ για κάθε $x \in I$ και, επομένως, $\int_a^b f - F(b) = -F(a)$. $\natural$

Πρόταση 7.6 *Έστω διάστημα I και $F : I \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο I ώστε η $F' : I \to \mathbf{R}$ να είναι συνεχής στο I. Τότε, $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$ για κάθε $a, b \in I$.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το (2) της Πρότασης 7.5 στην $f = F'$, παρατηρώντας ότι η F είναι, προφανώς, αντιπαράγωγος της f στο I. $\natural$

Στα επόμενα παραδείγματα εκμεταλλευόμαστε το ότι ήδη γνωρίζουμε μια αντιπαράγωγο των συναρτήσεων που εμφανίζονται σ' αυτά και την Πρόταση 7.5.

Παραδείγματα: (1) Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbf{R}$, η δεύτερη για κάθε a, b:

$$\int 1\, dx = x + c \qquad \text{και} \qquad \int_a^b 1\, dx = b - a.$$

(2) Για κάθε $\rho \neq -1$,

$$\int x^\rho\, dx = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1} + c \qquad \text{και} \qquad \int_a^b x^\rho\, dx = \frac{b^{\rho+1} - a^{\rho+1}}{\rho+1}\,.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει (i) στο $\mathbf{R}$, αν ο $\rho > 0$ είναι ρητός με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του, (ii) στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, αν ο $\rho \leq 0$ είναι ρητός με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του, (iii) στο $[0, +\infty)$, αν ο $\rho > 0$ είναι άρρητος ή ρητός με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του και (iv) στο $(0, +\infty)$, αν ο $\rho < 0$ είναι άρρητος ή ρητός με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του. Η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε a, b τα οποία ανήκουν σε ένα (και το ίδιο) από τα προηγούμενα διαστήματα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση (ii), η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε $a, b < 0$ και για κάθε $a, b > 0$, *αλλά όχι όταν* $a < 0 < b$.

(3) Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ και η δεύτερη για κάθε $a, b < 0$ και κάθε $a, b > 0$:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c \qquad \text{και} \qquad \int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \log|b| - \log|a| = \log\frac{b}{a}\,.$$

(4) Αν $\rho > 0$, $\rho \neq 1$, η πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbf{R}$ και η δεύτερη για κάθε a, b:

$$\int \rho^x\, dx = \frac{\rho^x}{\log\rho} + c \qquad \text{και} \qquad \int_a^b \rho^x\, dx = \frac{\rho^b - \rho^a}{\log\rho}\,.$$

(5) Οι πρώτες δυο ισότητες ισχύουν στο $\mathbf{R}$ και οι τελευταίες δυο για κάθε a, b:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c, \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + c,$$

$$\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a, \quad \int_a^b \sin x\, dx = \cos a - \cos b.$$

(6) Η πρώτη ισότητα ισχύει σε κάθε $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$ και η δεύτερη σε κάθε $(k\pi, \pi + k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$. Οι τελευταίες δυο ισότητες ισχύουν για κάθε a, b τα οποία ανήκουν σε ένα (και το ίδιο) από τα προηγούμενα αντίστοιχα διαστήματα.

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \tan x + c, \quad \int \frac{1}{(\sin x)^2}\, dx = -\cot x + c,$$

$$\int_a^b \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \tan b - \tan a, \quad \int_a^b \frac{1}{(\sin x)^2}\, dx = \cot a - \cot b.$$

(7) Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(-1, 1)$ και η δεύτερη για κάθε $a, b \in (-1, 1)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x + c, \qquad \text{και} \qquad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin b - \arcsin a.$$

(8) Οι πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbf{R}$ και η δεύτερη για κάθε a, b:

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \arctan x + c \qquad \text{και} \qquad \int_a^b \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \arctan b - \arctan a.$$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε: $\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$, $\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c$.
2. Αποδείξτε ότι: (i) $\int \frac{1}{x \log x}\, dx = \log(\log x) + c$ στο διάστημα $(1, +\infty)$ και (ii) $\int \frac{1}{x \log x \log(\log x)}\, dx = \log(\log(\log x)) + c$ στο διάστημα $(e, +\infty)$.
3. Αποδείξτε ότι $\int x^n e^{-x}\, dx = n! e^{-x} \big(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!}\big) + c$, $\int x^n e^x\, dx = (-1)^{n-1} n! e^x \big(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}\big) + c$.
4. Βρείτε $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχή στο $\mathbf{R}$ και αριθμό a ώστε $\int_a^x f = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε x. Πόσες λύσεις υπάρχουν;
5. Υπάρχει $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $\mathbf{R}$ ώστε $\int_0^x f = e^x$ για κάθε x; Ίδια ερώτηση για την $\int_0^x f = e^x - 1$.
6. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αν οι $g, h : A \to I$ είναι συνεχείς στον $\xi \in A$, αποδείξτε ότι η $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f$ $(x \in A)$ είναι συνεχής στον ξ.

7. (1) Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $g, h : A \to I$ παραγωγίσιμες στον $\xi \in A$ και έστω ότι η f είναι συνεχής στους $g(\xi), h(\xi)$. Αποδείξτε ότι η $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f \ \ (x \in A)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $F'(\xi) = g'(\xi)f(g(\xi)) - h'(\xi)f(h(\xi))$. (2) Βρείτε τα πεδία ορισμού και τις παραγώγους των $\int_1^{x^2-x} \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt$, $\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$, $\int_{2-x}^{2+x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$, $\int_{\sin x}^{x+\cos x} te^t\,dt$. (3) Βρείτε $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχή στο $[0,+\infty)$ ώστε $\int_0^{x^2} f = 1 - 2^{x^2}$ για κάθε $x \geq 0$.

8. (1) Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x e^{t-x}(2t+1)\,dt$. (2) Βρείτε $a > 0$ και b ώστε $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = 1$.

9. Υπολογίστε τα όρια της άσκησης 5 της ενότητας 6.2 καθώς και το όριο $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^\rho}{n^{\rho+1}}$.

10. (1) Για κάθε $k \in \mathbf{Z}$ αποδείξτε: (i) $\int_0^{2\pi} \sin(kx)\,dx = 0$, (ii) $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx = 0$, αν $k \neq 0$. (2) Για κάθε $n, m \in \mathbf{Z}$ αποδείξτε: (i) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0$, (ii) $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0$, αν $n \neq m$, (iii) $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0$, αν $n \neq m$, (iv) $\int_0^{2\pi} (\sin(nx))^2\,dx = \int_0^{2\pi} (\cos(nx))^2\,dx = \pi$, αν $n \neq 0$. (3) Αποδείξτε ότι, αν $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$, $g(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k\cos(kx) + d_k\sin(kx))$, τότε $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg = a_0c_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_kc_k+b_kd_k}{2}$.

11. Αν $a \neq \pm b$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \sin(at)\sin(bt)\,dt = 0$.

12. Η ακολουθία των **πολυωνύμων του Bernoulli** ορίζεται επαγωγικά από τις σχέσεις: $P_0 = 1$, ${P_n}' = nP_{n-1}$, $\int_0^1 P_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. (i) Βρείτε τα πολυώνυμα P_n για $n = 1, 2, 3, 4$. (ii) Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι το P_n είναι πολυώνυμο βαθμού n με μεγιστοβάθμιο όρο x^n. (iii) Αποδείξτε ότι $P_n(0) = P_n(1)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. (iv) Αποδείξτε ότι $P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1}$ για κάθε x και $n \in \mathbf{N}$. (v) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^m k^n = \int_0^{m+1} P_n = \frac{P_{n+1}(m+1)-P_{n+1}(0)}{n+1}$ και επαληθεύστε τους γνωστούς τύπους για $n = 1$, $n = 2$. (vi) Αποδείξτε ότι $P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)$ για κάθε x και $n \in \mathbf{N}$. (vii) Αποδείξτε ότι $P_{2n+1}(0) = 0$, $P_{2n-1}(\frac{1}{2}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

13. (1) Δώστε δεύτερη λύση της άσκησης 20 της ενότητας 6.4. (*Υπόδ.:* Αποδείξτε ότι η $F(x) = \int_a^x f \ \ (x \in [a,b])$ είναι αύξουσα και, κατόπιν, σταθερή στο $[a,b]$.) (2) Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b f^2 = 0$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. (3) Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_{x'}^{x''} f \geq 0$ για κάθε $x', x'' \in [a,b]$, $x' < x''$, αποδείξτε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

14. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $(f(x))^2 = 2\int_0^x f$ για κάθε $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι: (i) $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, (ii) η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, (iii) $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

15. Έστω $f : [0,a] \to \mathbf{R}$ ώστε η $f' : [0,a] \to \mathbf{R}$ να είναι συνεχής στο $[0,a]$ και $f(0) = 0$. (i) Θεωρήστε την $g(x) = \begin{cases} \frac{(f(x))^2}{x}, & 0 < x \leq a, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ και αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[0,a]$. (ii) Να συγκρίνετε τις παραγώγους των $g(x)$ και $\int_0^x (f')^2$. (iii) Αποδείξτε ότι $(f(x))^2 \leq x\int_0^x (f')^2$ για κάθε $x \in [0,a]$. (iv) Αν $(f(a))^2 = a\int_0^a (f')^2$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι σταθερή στο $(0,a]$. (v) Αν $(f(a))^2 = a\int_0^a (f')^2$ και $f'(0) = 2$, αποδείξτε ότι $f(x) = 2x$ για κάθε $x \in [0,a]$.

16. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $\int_a^\xi f = \int_\xi^b f$. (*Υπόδ.:* Εξετάστε την $F(x) = \int_a^x f - \int_x^b f$.)

17. Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbf{R}$ συνεχής στο I και $a \in I$. (1) Αν η $\int_a^x f$ είναι σταθερή στο I, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο I. (2) Αν $\int_a^x f = \int_x^b f$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο I.

18. Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ορίζουμε $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt$ $(x \in [a,b])$. (1) Αποδείξτε ότι ${f_1}'(x) = f(x)$ και ${f_{n+1}}'(x) = f_n(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, $n \in \mathbf{N}$. (2) Αποδείξτε ότι ${f_n}^{(n)}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, $n \in \mathbf{N}$. (3) Αποδείξτε ότι $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ για κάθε $x \in [a,b]$, $n \in \mathbf{N}$. (4) **Fekete**. Αποδείξτε ότι το πλήθος των εναλλαγών προσήμου της f στο $[a,b]$ δεν είναι μικρότερο από το πλήθος των εναλλαγών προσήμου στην $(n+1)$-άδα $\big(f(b), f_1(b), \ldots, f_n(b)\big)$. (*Υπόδ.:* Αρχή της επαγωγής.) (5) **Fejer**. Αποδείξτε ότι το πλήθος των εναλλαγών προσήμου της f στο $[a,b]$ δεν είναι μικρότερο από το πλήθος των εναλλαγών προσήμου στην $(n+1)$-άδα $\Big(f(a), \int_a^b f(t)dt, \ldots, \int_a^b (t-a)^{n-1} f(t)dt\Big)$.

19. **Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης**. Έστω διάστημα I, $a \in I$, αριθμός λ και $p, g : I \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο I. Θεωρήστε και την $\mu : I \to \mathbf{R}$, $\mu(x) = \int_a^x p(t)\,dt$. (1) Αποδείξτε ότι η $f : I \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x) = \lambda e^{-\mu(x)} + e^{-\mu(x)} \int_a^x e^{\mu(t)} g(t)\,dt \qquad (x \in I)$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(*) \qquad f'(x) + p(x)f(x) = g(x) \qquad (x \in I)$$

και ότι $f(a) = \lambda$. (2) Αντιστρόφως, αποδείξτε ότι αν η $f : I \to \mathbf{R}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $(*)$ και αν $f(a) = \lambda$, τότε ο τύπος της είναι $f(x) = \lambda e^{-\mu(x)} + e^{-\mu(x)} \int_a^x e^{\mu(t)} g(t)\,dt$ $(x \in I)$. (*Υπόδ.:* Πολλαπλασιάστε την $f' + pf = g$ με την e^{μ}.)

7.3 Τεχνικές υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

Α. Μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής.

Πρόταση 7.7 *Έστω διαστήματα I, J. Έστω $\phi : I \to J$ ώστε η $\phi' : I \to \mathbf{R}$ να είναι συνεχής στο I και έστω $f : J \to \mathbf{R}$ συνεχής στο J. Τότε*

$$\int^{x} (f \circ \phi)\phi' = \int^{\phi(x)} f \quad (x \in I), \qquad \int_a^b (f \circ \phi)\phi' = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f \quad (a, b \in I).$$

Απόδειξη: Έστω $F : J \to \mathbf{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο J. Τότε είναι $\int^y f = F(y) + c$ $(y \in J)$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Άρα $\int^{\phi(x)} f = F(\phi(x)) + c = (F \circ \phi)(x) + c$ $(x \in I)$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Τώρα, ισχύει $(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x) = (f \circ \phi)(x)\phi'(x)$ για κάθε $x \in I$, οπότε η $F \circ \phi : I \to \mathbf{R}$ είναι αντιπαράγωγος της $(f \circ \phi)\phi'$ στο I. Άρα $\int^x (f \circ \phi)\phi' = (F \circ \phi)(x) + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Επομένως, $\int^x (f \circ \phi)\phi' = \int^{\phi(x)} f$ $(x \in I)$.

Για την απόδειξη της δεύτερης ισότητας θεωρούμε τις $G(x) = \int_a^x (f \circ \phi)\phi'$ $(x \in I)$ και $F(y) = \int_{\phi(a)}^y f$ $(y \in J)$. Ισχύει $G'(x) = (f \circ \phi)(x)\phi'(x)$ για κάθε $x \in I$ και $F'(y) = f(y)$ για κάθε $y \in J$. Τότε ισχύει $(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x) = (f \circ \phi)(x)\phi'(x) = G'(x)$ για κάθε $x \in I$. Άρα η συνάρτηση $F \circ \phi - G$ είναι σταθερή στο I, οπότε $F(\phi(x)) - G(x) = F(\phi(a)) - G(a) = 0$ για κάθε $x \in I$. Άρα $F(\phi(b)) - G(b) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_a^b (f \circ \phi)\phi'$. ♮

Οι δυο ισότητες της Πρότασης 7.7 γράφονται και

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=\phi(x)}, \quad \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\,dy.$$

Παρατηρούμε, τώρα, το εξής. Το $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$ συμβολίζει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $f(\phi(x))\phi'(x)$, τα οποία είναι, φυσικά, συναρτήσεις του $x \in I$. Το $\int f(y)\,dy$ συμβολίζει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $f(y)$, τα οποία είναι συναρτήσεις του $y \in J$. *Μόνο όταν γίνει αντικατάσταση του y με το $\phi(x)$ προκύπτει η πρώτη από τις δυο παραπάνω ισότητες.*

Και στις δυο ισότητες, συνήθως λέμε ότι *η δεξιά μεριά τους προκύπτει από την αριστερή με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \phi(x)$ και με αντκατάσταση του $\phi'(x)\,dx$ από το dy.* Αυτή η αντικατάσταση «αιτιολογείται» από το σύμβολο της παραγώγου της $y = \phi(x)$, δηλαδή το $\frac{dy}{dx} = \phi'(x)$. Όπως έχουμε ξανατονίσει, η αριστερή μεριά *δεν* είναι λόγος αριθμών, αλλά αν ήταν, τότε θα προέκυπτε η «ισότητα» $dy = \phi'(x)\,dx$.

Παραδείγματα: (1) Αν $n \in \mathbf{N}$, θα υπολογίσουμε το $\int (\sin x)^n \cos x\,dx$.

Με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \sin x$, βρίσκουμε $\int (\sin x)^n \cos x\,dx = \int y^n\,dy\big|_{y=\sin x} = \big(\frac{y^{n+1}}{n+1} + c\big)\big|_{y=\sin x} = \frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1} + c$.

(2) Για να βρούμε το $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y =$

x^2+1, οπότε $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy\big|_{y=x^2+1} = (\log|y|+c)\big|_{y=x^2+1} = \log(x^2+1)+c$.

(3) Για τον υπολογισμό του $\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx$ χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y=\log x$ και έχουμε $\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{y}\,dy = \log\big|\frac{\log b}{\log a}\big|$.

Πρέπει να προσέξουμε ώστε οι a,b να είναι τέτοιοι ώστε το σύνολο τιμών της $\log x$ που αντιστοιχεί στο διάστημα με άκρα a,b να περιέχεται στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της $\frac{1}{y}$, δηλαδή είτε στο $(-\infty,0)$ είτε στο $(0,+\infty)$. Αυτό το σύνολο τιμών της $\log x$ είναι το διάστημα με άκρα $\log a, \log b$. Άρα πρέπει να είναι είτε $\log a, \log b > 0$ ή, ισοδύναμα, $a,b>1$, είτε $\log a, \log b < 0$ ή, ισοδύναμα, $0<a,b<1$. Ειδικώτερα, οι $\log a, \log b$ έχουν το ίδιο πρόσημο, οπότε $\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx = \log\frac{\log b}{\log a}$.

Β. Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες.

Πρόταση 7.8 *Έστω διάστημα I και $f,g: I\to\mathbf{R}$ ώστε οι $f',g': I\to\mathbf{R}$ να είναι συνεχείς στο I. Τότε*

$$\int^x fg' = f(x)g(x) - \int^x f'g \quad (x\in I),$$

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g \quad (a,b\in I).$$

Απόδειξη: Έστω $F: I\to\mathbf{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της $f'g$ στο I. Τότε είναι $\int^x f'g = F(x) - c$ $(x\in I)$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Θεωρούμε την $G = fg - F: I\to\mathbf{R}$. Τότε $G' = f'g + fg' - F' = fg'$ στο I, οπότε η G είναι αντιπαράγωγος της fg' στο I. Άρα $\int^x fg' = G(x)+c = f(x)g(x) - F(x) + c = f(x)g(x) - \int^x f'g$ $(x\in I)$.

Για τη δεύτερη ισότητα, θεωρούμε τις $F,G: I\to\mathbf{R}$, $F(x) = \int_a^x f'g$ και $G(x) = \int_a^x fg'$. Τότε $F'(x)+G'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) = (fg)'(x)$ για κάθε $x\in I$. Άρα η συνάρτηση $F+G-fg$ είναι σταθερή στο I, οπότε είναι $F(x)+G(x)-f(x)g(x) = F(a)+G(a)-f(a)g(a) = -f(a)g(a)$ για κάθε $x\in I$. Άρα $F(b)+G(b) = f(b)g(b)-f(a)g(a)$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) $\int \log x\,dx = \int 1\log x\,dx = x\log x - \int x\log' x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c$ στο $(0,+\infty)$.

(2) $\int_0^2 xe^x\,dx = 2e^2 - 0e^0 - \int_0^2 1e^x\,dx = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2+1$.

(3) $\int_0^\pi x\sin x\,dx = -\pi\cos\pi + 0\cos 0 + \int_0^\pi 1\cos x\,dx = \pi + (\sin\pi - \sin 0) = \pi$.

(4) Αν $a\neq 0$, με μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες βρίσκουμε $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$. Προκύπτει ολοκλήρωμα παρόμοιο με το αρχικό, οπότε εφαρμόζουμε πάλι ολοκλήρωση κατά μέρη και βρίσκουμε $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$. Άρα $\big(1+\frac{b^2}{a^2}\big)\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a^2}e^{ax}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big) + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση και, επομένως, $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = e^{ax}\big(\frac{a}{a^2+b^2}\sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2}\cos(bx)\big) + c$.

Εύκολα βλέπουμε ότι ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση $a = 0$, $b \neq 0$, αφού τότε γράφεται $\int \sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}\cos(bx) + c$. Καταλήγουμε στον χρήσιμο τύπο:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = e^{ax}\Big(\frac{a}{a^2+b^2}\sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2}\cos(bx)\Big) + c \quad (a^2+b^2 \neq 0).$$

Ομοίως, αποδεικνύεται και ο τύπος:

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = e^{ax}\Big(\frac{a}{a^2+b^2}\cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2}\sin(bx)\Big) + c \quad (a^2+b^2 \neq 0).$$

Γ. Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

Θα περιγράψουμε μια γενική μέθοδο υπολογισμού του

$$\int r(x)\,dx = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\,dx,$$

όπου $r(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ είναι οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση.

Πρώτο βήμα. Αναγόμαστε στην περίπτωση που ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή. Αν $m < n$ εξ αρχής, παραλείπουμε το πρώτο βήμα. Αν $m \geq n$, διαιρούμε τα πολυώνυμα και βρίσκουμε πολυώνυμα $p(x)$, $q(x)$ ώστε ο βαθμός του $q(x)$ να είναι $< n$ και να ισχύει $a_m x^m + \cdots + a_0 = p(x)(b_n x^n + \cdots + b_0) + q(x)$ για κάθε x. Τότε $r(x) = p(x) + \frac{q(x)}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$. Το $\int p(x)\,dx$ υπολογίζεται εύκολα, οπότε από τώρα και στο εξής μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m < n$.

Δεύτερο βήμα. Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων. Αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή και είναι, εν γένει, πολύ δύσκολο ή και αδύνατο αλλά σε μερικές περιπτώσεις είναι εφικτό. Το γενικό συμπέρασμα είναι το εξής. *Κάθε πολυώνυμο* $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ *μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων* $b_n x^n + \cdots + b_0 = b_n(x-\alpha)^\kappa \cdots (x-\gamma)^\lambda \big((x-\mu)^2+\nu^2\big)^\rho \cdots \big((x-\epsilon)^2+\delta^2\big)^\tau = b_n(x-\alpha)^\kappa \cdots (x-\gamma)^\lambda (x-\mu-i\nu)^\rho (x-\mu+i\nu)^\rho \cdots (x-\epsilon-i\delta)^\tau (x-\epsilon+i\delta)^\tau$, *όπου οι εκθέτες* $\kappa, \dots, \lambda, \rho, \dots, \tau$ *είναι φυσικοί αριθμοί με* $\kappa + \cdots + \lambda + 2\rho + \cdots + 2\tau = n$ *και οι αριθμοί* $\nu, \dots, \delta$ *είναι όλοι* > 0. Στην ανάλυση αυτή η ύπαρξη των πρωτοβάθμιων όρων $x-\alpha, \dots, x-\gamma$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι $\alpha, \dots, \gamma$ είναι όλες οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\kappa, \dots, \lambda$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Επίσης, η ύπαρξη των δευτεροβάθμιων όρων $(x-\mu)^2+\nu^2, \dots, (x-\epsilon)^2+\delta^2$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι μιγαδικοί αριθμοί $\mu \pm i\nu, \dots, \epsilon \pm i\delta$ είναι όλες οι μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\rho, \dots, \tau$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών.

Επισημαίνουμε ότι οι πραγματικές ρίζες $\alpha, \dots, \gamma$ καθορίζουν τα διαστήματα στα οποία ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμά μας: είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα με άκρα τα $\alpha, \dots, \gamma$ καθώς και τα $\pm\infty$.

Τρίτο βήμα. Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση σε **απλούς λόγους**: $r(x) =$

$\left(\frac{A_1}{x-\alpha}+\cdots+\frac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa}\right)+\cdots+\left(\frac{\Gamma_1}{x-\gamma}+\cdots+\frac{\Gamma_\lambda}{(x-\gamma)^\lambda}\right)+\left(\frac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2}+\cdots+\frac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}\right)+\cdots+\left(\frac{E_1(x-\epsilon)+\Delta_1}{(x-\epsilon)^2+\delta^2}+\cdots+\frac{E_\tau(x-\epsilon)+\Delta_\tau}{((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau}\right)$.

Η «λογική» είναι απλή. Κάθε παράγων $x-\alpha,\dots,x-\gamma$ του παρονομαστή καθορίζει μια ομάδα λόγων με αριθμούς ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως $\kappa,\dots,\lambda$, αντιστοίχως, ως παρονομαστές. Επίσης, κάθε παράγων $(x-\mu)^2+\nu^2,\dots,(x-\epsilon)^2+\delta^2$ καθορίζει μια ομάδα λόγων με πρωτοβάθμιους όρους ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως $\rho,\dots,\tau$ αντιστοίχως ως παρονομαστές. Οι αριθμοί $A_1,A_2,\dots,E_\tau,\Delta_\tau$ είναι άγνωστοι και πρέπει να υπολογιστούν. Αυτό επιτυγχάνεται με απαλοιφή των παρονομαστών, αν πολλαπλασιάσουμε με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους, δηλαδή το $b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$. Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των δυο πολυωνύμων που προκύπτουν, βρίσκουμε ένα σύστημα n εξισώσεων με τους n αγνώστους $A_1,A_2,\dots,E_\tau,\Delta_\tau$ και το λύνουμε.

Τέταρτο βήμα. Το πρόβλημα, λοιπόν, ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων των εξής τριών τύπων: $\int\frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx$, $\int\frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$, $\int\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$, όπου $k\in\mathbf{N}$. Εξετάζουμε καθέναν από τους τρεις τύπους ξεχωριστά.
(i) Για το $\int\frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx$, είτε στο διάστημα $(-\infty,\alpha)$ είτε στο $(\alpha,+\infty)$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y=x-\alpha$ και τότε $\int\frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx=\int\frac{1}{y^k}\,dy\big|_{y=x-\alpha}$. Αν $k\geq 2$, τότε $\int\frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx=\left(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{y^{k-1}}+c\right)\big|_{y=x-\alpha}=-\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}+c$. Αν $k=1$, τότε $\int\frac{1}{x-\alpha}\,dx=(\log|y|+c)\big|_{y=x-\alpha}=\log|x-\alpha|+c$. Δηλαδή,

$$\int\frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx=\begin{cases}-\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}+c, & k\geq 2,\\ \log|x-\alpha|+c, & k=1.\end{cases}$$

(ii) Για το $\int\frac{x-\mu}{\left((x-\mu)^2+\nu^2\right)^k}\,dx$ με την αλλαγή μεταβλητής $y=(x-\mu)^2+\nu^2$ έχουμε $\int\frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{y^k}\,dy\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2}$. Αν $k\geq 2$, τότε $\int\frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{y^{k-1}}+c\right)\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2}=-\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}}+c$. Αν $k=1$, τότε $\int\frac{x-\mu}{(x-\mu)^2+\nu^2}\,dx=\frac{1}{2}(\log|y|+c)\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2}=\frac{1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2)+c$. Άρα

$$\int\frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx=\begin{cases}-\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}}+c, & k\geq 2,\\ \frac{1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2)+c, & k=1.\end{cases}$$

(iii) Τέλος, για το $\int\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$ με την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{x-\mu}{\nu}$ έχουμε $\int\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx=\frac{1}{\nu^{2k-1}}\int\frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy\big|_{y=\frac{x-\mu}{\nu}}$. Έτσι αναγόμαστε στο

$$I_k=\int\frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy\quad(k\in\mathbf{N}).$$

Αυτό είναι πιο περίπλοκο από τα προηγούμενα και υπολογίζεται με *αναδρομικό τύπο.* Κατ' αρχάς, αν $k=1$, τότε $I_1=\int\frac{1}{y^2+1}\,dy=\arctan y+c$. Αν $k>1$, τότε $I_k=\int\frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy=\int\frac{y^2+1}{(y^2+1)^k}\,dy-\int\frac{y^2}{(y^2+1)^k}\,dy=\int\frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy-\int y\frac{y}{(y^2+1)^k}\,dy=I_{k-1}+\frac{1}{2(k-1)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}}-\frac{1}{2(k-1)}\int\frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy=\frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}}+$

$\frac{2k-3}{2k-2}\, I_{k-1}$. Καταλήγουμε στον αναδρομικό τύπο $I_k = \frac{1}{2k-2} \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}\, I_{k-1}$, ο οποίος ανάγει τον υπολογισμό του I_k στον υπολογισμό του I_{k-1} και, επαγωγικά, στο I_1: $I_k = \frac{1}{2k-2} \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)} \frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \frac{(2k-3)(2k-5)}{(2k-2)(2k-4)}\, I_{k-2}$ μέχρι

$$
\begin{aligned}
I_k = {} & \frac{1}{2k-2} \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)} \frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \cdots \\
& \cdots + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2} \frac{y}{y^2+1} + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 1}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2} \arctan y + c.
\end{aligned}
$$

Επιστρέφοντας στο $\int r(x)\,dx$, καταλήγουμε στο ότι κάθε ομάδα όρων $\Big(\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa}\Big)$ θα συνεισφέρει μια ομάδα $\Big(A_1 \log|x-\alpha| - \frac{A_2}{x-\alpha} - \cdots - \frac{A_\kappa}{(k-1)(x-\alpha)^{\kappa-1}}\Big)$ στο ολοκλήρωμα, κάθε ομάδα $\Big(\frac{M_1(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \frac{M_2(x-\mu)}{\big((x-\mu)^2+\nu^2\big)^2} + \cdots + \frac{M_\rho(x-\mu)}{\big((x-\mu)^2+\nu^2\big)^\rho}\Big)$ θα συνεισφέρει μια ομάδα $\Big(\frac{M_1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2) - \frac{M_2}{2((x-\mu)^2+\nu^2)} - \cdots - \frac{M_\rho}{2(\rho-1)((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}}\Big)$ και, τέλος, κάθε ομάδα $\Big(\frac{N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \frac{N_2}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2} + \cdots + \frac{N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}\Big)$ θα συνεισφέρει μια ομάδα $\Big(N_1{}' \arctan\frac{x-\mu}{\nu} + \frac{N_2{}'(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \frac{N_\rho{}'(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}}\Big)$, όπου οι συντελεστές $N_1{}', \ldots, N_\rho{}'$ είναι διαφορετικοί από τους $N_1, \ldots, N_\rho$.

Παραδείγματα: (1) $\int \frac{2}{x-3}\,dx = 2\log|x-3| + c$ στο $(-\infty, 3)$ και στο $(3, +\infty)$.

(2) $\int \frac{-5}{(x+2)^3}\,dx = \frac{5}{2}\frac{1}{(x+2)^2} + c$ στο $(-\infty, -2)$ και στο $(-2, +\infty)$.

(3) $\int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy\big|_{y=\frac{x+1}{3}} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3} + c$ στο $(-\infty, +\infty)$.

(4) $\int \frac{x-2}{(x-2)^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy\big|_{y=(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}\log((x-2)^2+4) + c$ στο $(-\infty, +\infty)$.

(5) $\int \frac{x-2}{((x-2)^2+4)^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^4}\,dy\big|_{y=(x-2)^2+4} = -\frac{1}{6}\frac{1}{((x-2)^2+4)^3} + c$ στο $(-\infty, +\infty)$.

(6) Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx$.

Κατ' αρχάς διαιρούμε το x^3-2x^2+2 με το x^2-3x+2 και βρίσκουμε ότι $x^3-2x^2+2 = (x^2-3x+2)(x+1)+x$ ή, ισοδύναμα, $\frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2} = x+1+\frac{x}{x^2-3x+2}$. Άρα $\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$.

Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ αναλύουμε τον λόγο $\frac{x}{x^2-3x+2}$ σε απλούς λόγους. Οι ρίζες του x^2-3x+2 είναι οι 1 και 2, οπότε είναι $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$. Άρα ο λόγος $\frac{x}{x^2-3x+2}$ γράφεται $\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$, όπου οι αριθμοί A, B πρέπει να προσδιοριστούν. Πολλαπλασιάζουμε τα δυο μέλη της τελευταίας ισότητας με το $(x-1)(x-2)$ και προκύπτει $x = A(x-2) + B(x-1)$ ή, ισοδύναμα, $x = (A+B)x + (-2A-B)$. Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιόβαθμων μονωνύμων των δυο μελών της τελευταίας ισότητας και βρίσκουμε $A+B = 1$ και $-2A-B = 0$. Το σύστημα αυτό έχει λύση $A = -1$, $B = 2$. Άρα $\frac{x}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$. Επομένως, $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = -\int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx = -\log|x-1| + 2\log|x-2| + c$ και, τέλος, $\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x - \log|x-1| +$

$2\log|x-2|+c$ στα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,2)$ και $(2,+\infty)$.

(7) Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$.

Παραγοντοποιούμε το x^3+x^2-x-1 ως εξής: $x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x^2-1)(x+1)=(x-1)(x+1)^2$. Δηλαδή, το x^3+x^2-x-1 έχει απλή ρίζα τον 1 και διπλή ρίζα τον -1. Άρα ο λόγος $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}$ γράφεται $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$. Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία ισότητα με το $(x-1)(x+1)^2$ και προκύπτει $2x^2+1=A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)$ ή, ισοδύναμα, $2x^2+1=(A+B)x^2+(2A+C)x+(A-B-C)$. Εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε $A+B=2$, $2A+C=0$ και $A-B-C=1$. Το σύστημα αυτό έχει λύση $A=\frac{3}{4}$, $B=\frac{5}{4}$, $C=-\frac{3}{2}$. Άρα $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}=\frac{3}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{5}{4}\frac{1}{x+1}-\frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2}$ και $\int\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx=\frac{3}{4}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{5}{4}\int\frac{1}{x+1}\,dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx=\frac{3}{4}\log|x-1|+\frac{5}{4}\log|x+1|+\frac{3}{2}\frac{1}{x+1}+c$ στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$.

(8) Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx$.

Παραγοντοποιούμε: $x^4-x^2-2x+2=x^2(x^2-1)-2(x-1)=x^2(x-1)(x+1)-2(x-1)=(x-1)(x^3+x^2-2)=(x-1)(x^3-x^2+2x^2-2)=(x-1)(x^2(x-1)+2(x-1)(x+1))=(x-1)^2(x^2+2x+2)$. Δηλαδή, το x^4-x^2-2x+2 έχει διπλή ρίζα τον 1 και καμία άλλη ρίζα, διότι το $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ δεν έχει (πραγματικές) ρίζες. Άρα ο λόγος $\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}$ γράφεται $\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C(x+1)+D}{(x+1)^2+1}$. Πολλαπλασιάζουμε με το $(x-1)^2((x+1)^2+1)$ και προκύπτει $x=(A+C)x^3+(A+B-C+D)x^2+(2B-C-2D)x+(-2A+2B+C+D)$. Εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε $A+C=0$, $A+B-C+D=0$, $2B-C-2D=1$ και $-2A+2B+C+D=0$. Το σύστημα έχει λύση $A=\frac{1}{25}$, $B=\frac{1}{5}$, $C=-\frac{1}{25}$, $D=-\frac{7}{25}$. Άρα $\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}=\frac{1}{25}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{5}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{25}\frac{x+1}{(x+1)^2+1}-\frac{7}{25}\frac{1}{(x+1)^2+1}$, οπότε $\int\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx=\frac{1}{25}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx-\frac{1}{25}\int\frac{x+1}{(x+1)^2+1}\,dx-\frac{7}{25}\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx=\frac{1}{25}\log|x-1|-\frac{1}{5}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{50}\log((x+1)^2+1)-\frac{7}{25}\arctan(x+1)+c$ στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

(9) Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx$.

Διαιρώντας: $\frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=x^2+7x+5+\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$. Άρα $\int\frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+5x+\int\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx$.

Παραγοντοποιούμε: $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1=x^4(x-1)+2x^2(x-1)+(x-1)=(x^4+2x^2+1)(x-1)=(x^2+1)^2(x-1)$. Άρα το $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1$ έχει απλή ρίζα τον 1 και καμία άλλη ρίζα και ο λόγος $\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$ γράφεται $\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}+\frac{\Delta x+E}{(x^2+1)^2}$. Πολλαπλασιάζουμε με το $(x^2+1)^2(x-1)$ και βρίσκουμε $-7x^4+3x^3+4x^2+x+5=(A+B)x^4+(-B+\Gamma)x^3+(2A+B-\Gamma+\Delta)x^2+(-B+\Gamma-\Delta+E)x+(A-\Gamma-E)$ οπότε $A+B=-7$, $-B+\Gamma=3$, $2A+B-\Gamma+\Delta=4$, $-B+\Gamma-\Delta+E=1$ και $A-\Gamma-E=5$. Το σύστημα έχει λύση $A=\frac{3}{2}$, $B=-\frac{17}{2}$, $\Gamma=-\frac{11}{2}$, $\Delta=4$ και $E=2$ και, επομένως, $\int\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{17x+11}{x^2+1}\,dx+2\int\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{3}{2}\log|x-1|-\frac{17}{4}\log(x^2+1)-\frac{11}{2}\arctan x-\frac{2}{x^2+1}+2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής: $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int x\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + c.$

Συγκεντρώνοντας τους υπολογισμούς: $\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 +5x + \frac{x-2}{x^2+1} + \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{17}{4}\log(x^2+1) - \frac{9}{2}\arctan x + c.$

Δ. Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θα δούμε μια μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int r(\cos x, \sin x)\,dx,$$

όπου η $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δυο μεταβλητών s, t. Δηλαδή, η $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ είναι ίση με $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, όπου οι $f_1(x)$, $f_2(x)$ είναι αθροίσματα γινομένων $a\,(\cos x)^k(\sin x)^l$, όπου $a \in \mathbf{R}$ και $k, l \in \mathbf{Z}$, $k, l \geq 0$.

Παράδειγμα: Στο $\int \big(2\sin x\cos x - \frac{\sin x+(\cos x)^3-(\sin x)^2\cos x}{\sin x+(\cos x)^2}\big)\,dx$ είναι $f(x) = 2\sin x\cos x - \frac{\sin x+(\cos x)^3-(\sin x)^2\cos x}{\sin x+(\cos x)^2} = \frac{2(\cos x)^3\sin x+3\cos x(\sin x)^2-(\cos x)^3-\sin x}{(\cos x)^2+\sin x}$, $f_1(x) = 2(\cos x)^3\sin x + 3\cos x(\sin x)^2 - (\cos x)^3 - \sin x$, $f_2(x) = (\cos x)^2 + \sin x$ και η αντίστοιχη ρητή συνάρτηση είναι η $r(s,t) = \frac{2s^3t+3st^2-s^3-t}{s^2+t}$.

Παρατηρούμε ότι οι $f_1(x)$, $f_2(x)$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{R}$, ότι η $f(x)$ δεν ορίζεται στα σημεία στα οποία η $f_2(x)$ είναι 0 και ότι, αν εξαιρέσουμε αυτά τα σημεία, δηλαδή αν περιοριστούμε στο πεδίο ορισμού της $f(x)$, τότε η $f(x)$ είναι συνεχής. Παρατηρούμε, επίσης, ότι η $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις σχετικά με τη συνάρτηση αυτή.

Περίπτωση 1. Έστω ότι η $f(x)$ δεν ορίζεται στον $-\pi$, δηλαδή ότι ο παρονομαστής της είναι 0 στον $-\pi$. Επειδή η συνάρτηση έχει περίοδο 2π, δεν ορίζεται ούτε στον π. Τώρα, είτε η συνάρτηση ορίζεται στο διάστημα $(-\pi,\pi)$, οπότε είναι συνεχής στο $(-\pi,\pi)$, είτε δεν ορίζεται σε διάφορα σημεία του $(-\pi,\pi)$, οπότε είναι συνεχής σε διάφορα υποδιαστήματα του $(-\pi,\pi)$. Ένας καλός τρόπος να μελετήσουμε την $f(x)$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ είναι να θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$. Προσέξτε: αυτή η αλλαγή μεταβλητής δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μεγαλύτερο διάστημα αφού η $u = \tan\frac{x}{2}$ δεν ορίζεται στους $\pm\pi$. Η $u = \tan\frac{x}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\pi,\pi)$. Είναι $\lim_{x\to-\pi+}\tan\frac{x}{2} = -\infty$ και $\lim_{x\to\pi-}\tan\frac{x}{2} = +\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της $u = \tan\frac{x}{2}$ είναι το $\mathbf{R}$. Η αντίστροφη αλλαγή μεταβλητής είναι η $x = 2\arctan u$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ με σύνολο τιμών το $(-\pi,\pi)$. Άρα, καθώς η μεταβλητή x αυξάνεται και διατρέχει το διάστημα $(-\pi,\pi)$, η u αυξάνεται και διατρέχει το $\mathbf{R}$ και αντιστρόφως. Τώρα, είναι $\cos x = \frac{1-(\tan\frac{x}{2})^2}{1+(\tan\frac{x}{2})^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ και $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+(\tan\frac{x}{2})^2} = \frac{2u}{1+u^2}$, οπότε η $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ στο $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στην $g(u) = r\big(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\big)$ στο $\mathbf{R}$. *Το σημαντικό είναι ότι η νέα αυτή συνάρτηση είναι ρητή συνάρτηση του* u.

Παράδειγμα: Στην $f(x) = \frac{2(\cos x)^3 \sin x + 3\cos x(\sin x)^2 - (\cos x)^3 - \sin x}{(\cos x)^2 + \sin x}$ στο $(-\pi, \pi)$ αντιστοιχεί η συνάρτηση $g(u) = \frac{2\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^3 \frac{2u}{1+u^2} + 3\frac{1-u^2}{1+u^2}\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 - \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^3 - \frac{2u}{1+u^2}}{\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2 + \frac{2u}{1+u^2}} = \frac{-1+2u+14u^2-18u^3+6u^5-14u^6+2u^7+u^8}{1+2u+6u^3-2u^4+6u^5+2u^7+u^8}$ στο $\mathbf{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(x) = g(u) = g(\tan\frac{x}{2})$ και $g(u) = f(x) = f(2\arctan u)$ και, επομένως, ότι οι $f(x)$ και $g(u)$ προκύπτουν η μια από την άλλη μέσω σύνθεσης με συνεχή συνάρτηση. Άρα, αν η $f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιον $x \in (-\pi, \pi)$, τότε η $g(u)$ είναι συνεχής στον αντίστοιχο $u \in \mathbf{R}$ και αντιστρόφως. Επίσης, αν η $f(x)$ δεν ορίζεται σε κάποιον $x \in (-\pi, \pi)$, τότε η $g(u)$ δεν ορίζεται στον αντίστοιχο $u \in \mathbf{R}$ και αντιστρόφως.

Βάσει των παραπάνω, για να βρούμε τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $f(x)$ στο $(-\pi, \pi)$ αρκεί να βρούμε τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $g(u)$ στο $\mathbf{R}$, δηλαδή να βρούμε τις ρίζες ενός *πολυωνύμου*. Αν η $g(u)$ ορίζεται και, επομένως, είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, τότε η $f(x)$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $(-\pi, \pi)$. Αν η $g(u)$ δεν ορίζεται στους $u_1, \ldots, u_n$, όπου $-\infty < u_1 < \cdots < u_n < +\infty$, οπότε είναι συνεχής στα διαδοχικά $(-\infty, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_{n-1}, u_n), (u_n, +\infty)$, τότε η $f(x)$ δεν ορίζεται στους αντίστοιχους $x_1, \ldots, x_n$, όπου $-\pi < x_1 < \cdots < x_n < \pi$ και είναι συνεχής στα διαδοχικά $(-\pi, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, \pi)$. Δεν ξεχνάμε ότι οι x_i και u_i αλληλοκαθορίζονται μέσω των σχέσεων $u_i = \tan\frac{x_i}{2}$ και $x_i = 2\arctan u_i$.

Επομένως, αν περιορίσουμε τον υπολογισμό του $\int r(\sin x, \cos x)\,dx$ *κατ΄ αρχάς* στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, τότε είναι

$$\begin{aligned}\int r(\sin x, \cos x)\,dx &= \int f(x)\,dx = \int g(u)\frac{2}{1+u^2}\,du\Big|_{u=\tan\frac{x}{2}} \\ &= \int r\Big(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\Big)\frac{2}{1+u^2}\,du\Big|_{u=\tan\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Άρα το αρχικό ολοκλήρωμα της $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ στα υποδιαστήματα του $(-\pi, \pi)$ στα οποία αυτή ορίζεται και είναι συνεχής ανάγεται στο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $\mathbf{R}$.

Έστω, λοιπόν, ότι υπολογίζουμε το $\int g(u)\frac{2}{1+u^2}\,du = G(u) + c$, όπου η $G(u)$ είναι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση του u στα κατάλληλα υποδιαστήματα του $\mathbf{R}$. Τότε, βάσει των παραπάνω,

$$\int r(\cos x, \sin x)\,dx = \int f(x)\,dx = G\Big(\tan\frac{x}{2}\Big) + c = F(x) + c$$

στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $(-\pi, \pi)$.

Πρέπει, τώρα, να παρατηρήσουμε ότι το τελευταίο συμπέρασμα ισχύει όχι μόνο στο $(-\pi, \pi)$ αλλά και σε κάθε διάστημα $(-\pi + k2\pi, \pi + k2\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$. Αυτό συμβαίνει επειδή, όπως η $f(x)$ έχει περίοδο 2π, έτσι και η $F(x) = G\big(\tan\frac{x}{2}\big)$ έχει περίοδο 2π. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι ισχύει $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ σε κάποιο υποδιάστημα (a, b) του $(-\pi, \pi)$ στο οποίο η $f(x)$ είναι συνεχής. Αυτό, φυσικά, ισοδυναμεί με το ότι $F'(x) = f(x)$ στο ίδιο υποδιάστημα. Θεωρούμε το αντίστοιχο υποδιάστημα $(a+k2\pi, b+k2\pi)$ του $(-\pi+k2\pi, \pi+k2\pi)$, οπότε για κάθε $x \in (a+k2\pi, b+k2\pi)$ ισχύει $x-k2\pi \in (a,b)$ και, επομένως, $F'(x) = F'(x-k2\pi) = f(x-k2\pi) = f(x)$. Άρα $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ και στο $(a+k2\pi, b+k2\pi)$.

Έχει, επομένως, τελειώσει ο υπολογισμός του $\int r(\cos x, \sin x)\,dx$ σε κάθε υποδιάστημα του $\mathbf{R}$ στο οποίο η $y = f(x) = r(\cos x, \sin x)$ ορίζεται και είναι συνεχής.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

Το παράδειγμα αυτό εμπίπτει στην Περίπτωση 1 διότι η $\frac{1}{\sin x}$ δεν ορίζεται στον $-\pi$. Θα εργαστούμε κατ΄ αρχάς στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$ η $\frac{1}{\sin x}$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στην $\frac{1+u^2}{2u}$ στο $\mathbf{R}$. Η $\frac{1+u^2}{2u}$ δεν ορίζεται μόνο στον $0 \in \mathbf{R}$ και η $\frac{1}{\sin x}$ δεν ορίζεται μόνο στον $0 \in (-\pi,\pi)$. Τώρα έχουμε $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}\,du\big|_{u=\tan\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{u}\,du\big|_{u=\tan\frac{x}{2}} = \log\big|\tan\frac{x}{2}\big| + c$ στο διάστημα $(-\pi, 0)$ καθώς και στο $(0,\pi)$.

Επειδή οι $\frac{1}{\sin x}$ και $\log\big|\tan\frac{x}{2}\big|$ έχουν και οι δυο περίοδο 2π, συνεπάγεται $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \log\big|\tan\frac{x}{2}\big| + c$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα $(-\pi+k2\pi, k2\pi)$ και $(k2\pi, \pi+k2\pi)$ του $(-\pi+k2\pi, \pi+k2\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Απλουστεύοντας την απάντηση, γράφουμε: $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \log\big|\tan\frac{x}{2}\big| + c$ σε κάθε διάστημα $(k\pi, \pi+k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Έστω, τώρα, γενικότερα, ότι η $r(\cos x, \sin x)$ δεν ορίζεται σε κάποιον x_0, ο οποίος μπορεί να είναι $\neq -\pi$.

Τώρα, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $z = x - x_0 - \pi$ οπότε $\cos x = \cos(z + x_0 + \pi) = -\cos(z+x_0) = -\cos x_0 \cos z + \sin x_0 \sin z = p\cos z + q \sin z$, όπου $p = -\cos x_0$ και $q = \sin x_0$, και, παρομοίως, $\sin x = \sin(z + x_0 + \pi) = -\sin(z + x_0) = -\sin x_0 \cos z - \cos x_0 \sin z = -q\cos z + p \sin z$. Τότε $r(\cos x, \sin x) = r(p\cos z + q\sin z, -q\cos z + p\sin z)$, οπότε το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\int r(\cos x, \sin x)\,dx = \int r(p\cos z + q\sin z, -q\cos z + p\sin z)\,dz\Big|_{z=x-x_0-\pi}.$$

Όταν η μεταβλητή x διατρέχει το διάστημα $(x_0, x_0+2\pi)$ η νέα μεταβλητή z διατρέχει το $(-\pi,\pi)$ και, επειδή η $r(\cos x, \sin x)$ δεν ορίζεται στον x_0, η $r(p\cos z + q\sin z, -q\cos z + p\sin z)$ δεν ορίζεται στον $-\pi$. Αναγόμαστε, λοιπόν, στην ειδική περίπτωση που ήδη μελετήσαμε.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό μας είναι ήδη γνωστό και είναι ευκαιρία να ελέγξουμε τη μέθοδο που αναπτύξαμε.

Η $y = \frac{1}{(\cos x)^2}$ δεν ορίζεται στον $-\frac{\pi}{2}$ (αλλά ορίζεται στον $-\pi$). Με την αλλαγή μεταβλητής $z = x - (-\frac{\pi}{2}) - \pi = x - \frac{\pi}{2}$ η $\frac{1}{(\cos x)^2}$ μετατρέπεται στην $\frac{1}{(\cos(z+\frac{\pi}{2}))^2} = \frac{1}{(\sin z)^2}$ και, επίσης, $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(\sin z)^2}\,dz\big|_{z=x-\frac{\pi}{2}}$.

Τώρα, η $\frac{1}{(\sin z)^2}$ δεν ορίζεται στον $-\pi$ και θα εργαστούμε κατ΄ αρχάς στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{z}{2}$ η $\frac{1}{(\sin z)^2}$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στην $\frac{(1+u^2)^2}{4u^2}$ στο $\mathbf{R}$. Η $\frac{(1+u^2)^2}{4u^2}$ δεν ορίζεται στον $0 \in \mathbf{R}$ και η $\frac{1}{(\sin z)^2}$

δεν ορίζεται στον $0 \in (-\pi,\pi)$. Τώρα, $\int \frac{1}{(\sin z)^2}\,dz = \int \frac{(1+u^2)^2}{4u^2}\frac{2}{1+u^2}\,du\big|_{u=\tan\frac{z}{2}} = \int \frac{1+u^2}{2u^2}\,du\big|_{u=\tan\frac{z}{2}} = \big(-\frac{1}{2u}+\frac{u}{2}\big)\big|_{u=\tan\frac{z}{2}} + c = -\frac{1}{2}\cot\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\tan\frac{z}{2} + c = -\cot z + c$ στα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$.

Όταν ο z διατρέχει τα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$, ο $x = z + \frac{\pi}{2}$ διατρέχει τα αντίστοιχα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ και $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. Άρα σ' αυτά τα διαστήματα είναι $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(\sin z)^2}\,dz\big|_{z=x-\frac{\pi}{2}} = -\cot(x-\frac{\pi}{2}) + c = \tan x + c$.

Επειδή οι $\frac{1}{(\cos x)^2}$ και $\tan x$ έχουν και οι δυο περίοδο 2π, είναι $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{\pi}{2}+k2\pi)$ και $(\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{3\pi}{2}+k2\pi)$ του $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{3\pi}{2}+k2\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Απλουστεύουμε λέγοντας ότι $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c$ σε κάθε διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Περίπτωση 2. Έστω ότι η $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ ορίζεται στο $\mathbf{R}$, δηλαδή ότι ο παρονομαστής της δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο. Συνεπάγεται, φυσικά, ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$. Αυτό σημαίνει ότι το $\int f(x)\,dx = \int r(\cos x,\sin x)\,dx$ ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$, δηλαδή ότι $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, όπου η $F(x)$ είναι κάποια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Θα δούμε, τώρα, πώς υπολογίζεται η $F(x)$.

Όπως στην Περίπτωση 1, θα εργαστούμε, *προσωρινά*, στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ χρησιμοποιώντας την ίδια αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$ και την αντίστροφή της $x = 2\arctan u$. Όπως πριν, η $f(x) = r(\cos x,\sin x)$ στο $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στη *ρητή συνάρτηση* $g(u) = r\big(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\big)$ στο $\mathbf{R}$. Τώρα, όμως, θα μελετήσουμε πιο προσεκτικά κάποιες ιδιότητες της $g(u)$. Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής στον π, συνεπάγεται ότι το $\lim_{u\to+\infty} g(u) = \lim_{x\to\pi-} f(x) = f(\pi)$ είναι αριθμός και, επομένως, ο βαθμός του πολυωνύμου στον αριθμητή της $g(u)$ δεν είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του πολυωνύμου στον παρονομαστή της. Άρα για τη ρητή συνάρτηση $g_1(u) = g(u)\frac{2}{1+u^2} = \frac{a_0+a_1u+\cdots+a_nu^n}{b_0+b_1u+\cdots+b_mu^m}$ (με $a_n, b_m \neq 0$) είναι $m \geq n+2$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $\lim_{u\to+\infty} ug_1(u) = 0$. Επειδή η $g(u)$ ορίζεται στο $\mathbf{R}$, το πολυώνυμο $b_0 + b_1u + \cdots + b_mu^m$ δεν έχει *καμιά πραγματική ρίζα*. Άρα η ανάλυση της $g_1(u)$ σε απλούς λόγους είναι της μορφής $g_1(u) = \Big(\frac{M_1(u-\mu)+N_1}{(u-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \frac{M_\rho(u-\mu)+N_\rho}{((u-\mu)^2+\nu^2)^\rho}\Big) + \cdots + \Big(\frac{E_1(u-\epsilon)+\Delta_1}{(u-\epsilon)^2+\delta^2} + \cdots + \frac{E_\tau(u-\epsilon)+\Delta_\tau}{((u-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau}\Big)$ όπου, ειδικώτερα, είναι $\nu,\ldots,\delta > 0$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα με τον u και υπολογίζοντας το $\lim_{u\to+\infty}$ των δυο πλευρών, βρίσκουμε εύκολα ότι $M_1 + \cdots + E_1 = 0$. Μελετώντας προσεκτικά τα αποτελέσματά μας για τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων παρατηρούμε ότι το $\int g_1(u)\,du$ είναι ίσο με ένα άθροισμα της μορφής $\int g_1(u)\,du = G(u) + c = \big(\frac{M_1}{2}\log((u-\mu)^2+\nu^2) + \cdots + \frac{E_1}{2}\log((u-\epsilon)^2+\delta^2)\big) + \big(N_1{}'\arctan\frac{u-\mu}{\nu} + \cdots + \Delta_1{}'\arctan\frac{u-\epsilon}{\delta}\big) + h(u) + c$, όπου η $h(u)$ είναι μια ρητή συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ στην οποία ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή. Τώρα, χρησιμοποιώντας τη σχέση $M_1 + \cdots + E_1 = 0$ και ορίζοντας $\kappa = (N_1{}' + \cdots + \Delta_1{}')\pi$, βρίσκουμε εύκολα ότι $\lim_{x\to\pi-} G\big(\tan\frac{x}{2}\big) = \lim_{u\to+\infty} G(u) = \frac{\kappa}{2}$, $\lim_{x\to-\pi+} G\big(\tan\frac{x}{2}\big) = \lim_{u\to-\infty} G(u) = -\frac{\kappa}{2}$.

Μέχρι τώρα έχουμε υπολογίσει το $\int f(x)\,dx$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$:

$$\int f(x)\,dx = \int g_1(u)\,du\Big|_{u=\tan\frac{x}{2}} = G\Big(\tan\frac{x}{2}\Big) + c.$$

Οι $f(x)$ και $G(\tan\frac{x}{2})$ έχουν περίοδο 2π, οπότε η σχέση $\int f(x)\,dx = G(\tan\frac{x}{2}) + c$ ισχύει σε κάθε διάστημα $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$. Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση

$$\Phi(x) = \begin{cases} G(\tan\frac{x}{2}) + \kappa[\frac{x+\pi}{2\pi}], & x\neq \pi+k2\pi\,(k\in\mathbf{Z}),\\ \frac{\kappa}{2\pi}x, & x=\pi+k2\pi\,(k\in\mathbf{Z}).\end{cases}$$

Σε κάθε $I_k=(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ είναι $\Phi(x)=G(\tan\frac{x}{2})+k\kappa$, οπότε η $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη και, μάλιστα, είναι $\Phi'(x)=f(x)$ στο διάστημα αυτό. Ας δούμε αν η $\Phi(x)$ είναι συνεχής στα σημεία $\pi+k2\pi$ που χωρίζουν τα γειτονικά διαστήματα I_k και I_{k+1}. Λόγω περιοδικότητας της $G(\tan\frac{x}{2})$ είναι $\lim_{x\to(\pi+k2\pi)+}\Phi(x) = \lim_{x\to(\pi+k2\pi)+}\big(G(\tan\frac{x}{2})+(k+1)\kappa\big) = \lim_{x\to-\pi+}G(\tan\frac{x}{2})+(k+1)\kappa = -\frac{1}{2}\kappa+(k+1)\kappa = (k+\frac{1}{2})\kappa = \Phi(\pi+k2\pi)$. Ομοίως, είναι $\lim_{x\to(\pi+k2\pi)-}\Phi(x) = \lim_{x\to(\pi+k2\pi)-}\big(G(\tan\frac{x}{2})+k\kappa\big) = \lim_{x\to\pi-}G(\tan\frac{x}{2})+k\kappa = \frac{1}{2}\kappa+k\kappa = (k+\frac{1}{2})\kappa = \Phi(\pi+k2\pi)$. Άρα η $\Phi(x)$ είναι συνεχής σε κάθε $\pi+k2\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η $\Phi(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, παραγωγίσιμη σε κάθε $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ και ισχύει $\Phi'(x)=f(x)$ σε κάθε τέτοιο διάστημα. Αν η $F(x)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο $\mathbf{R}$ (αυτό που ζητάμε να υπολογίσουμε) τότε η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη και $F'(x)=f(x)$ στο $\mathbf{R}$. Συνεπάγεται ότι η $\Phi(x)-F(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, παραγωγίσιμη σε κάθε $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ και ισχύει $(\Phi-F)'(x)=0$ σε κάθε τέτοιο διάστημα. Άρα η $\Phi(x)-F(x)$ είναι σταθερή σε κάθε *κλειστό* διάστημα $[-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$. Επομένως, η $\Phi(x)-F(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$. Δηλαδή, υπάρχει c_0 ώστε $\Phi(x)=F(x)+c_0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Επομένως, και η $\Phi(x)$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο $\mathbf{R}$ και μπορούμε να θεωρήσουμε ως $F(x)$ την ίδια την $\Phi(x)$. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι

$$\int r(\cos x,\sin x)\,dx = \Phi(x)+c \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx$.

Η $\frac{1}{2+\sin x}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$. Κατ΄ αρχάς εργαζόμαστε στο $(-\pi,\pi)$ με την αλλαγή $u=\tan\frac{x}{2}$, οπότε $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx = \int\frac{1}{u^2+u+1}\,du\Big|_{u=\tan\frac{x}{2}}$. Τώρα, είναι $\int\frac{1}{u^2+u+1}\,du = \int\frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,du = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+c$ στο $\mathbf{R}$. Άρα $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)+c$ στο $(-\pi,\pi)$.

Οι $y=\frac{1}{2+\sin x}$ και $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)$ έχουν περίοδο 2π και, επομένως, η σχέση $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)+c$ ισχύει σε κάθε διάστημα $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$. Τώρα, είναι $\lim_{x\to\pi-}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ και $\lim_{x\to-\pi+}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Τέλος, ορίζουμε την $\Phi(x) = \begin{cases}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}[\frac{x+\pi}{2\pi}], & x\neq\pi+k2\pi\,(k\in\mathbf{Z}),\\ \frac{1}{\sqrt{3}}x, & x=\pi+k2\pi\,(k\in\mathbf{Z}).\end{cases}$

Η $\Phi(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ και $\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \Phi(x) + c$ στο $\mathbf{R}$.

Ε. Ολοκληρώματα μερικών αλγεβρικών συναρτήσεων.

Τώρα θα υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int r\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)\,dx, \qquad \int r\big(x, \sqrt{x^2-1}\big)\,dx, \qquad \int r\big(x, \sqrt{x^2+1}\big)\,dx.$$

Και στα τρία αυτά ολοκληρώματα η συνάρτηση $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δυο μεταβλητών s, t.

(i) Το πρώτο ολοκλήρωμα ορίζεται κατ΄ αρχάς στο $[-1,1]$ και είναι φυσιολογικό να χρησιμοποιηθεί η αλλαγή μεταβλητής $x = \sin t$ με τον t στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Τότε $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ και προκύπτει το $\int r(\sin t, \cos t)\cos t\,dt$, στο οποίο, όπως είδαμε στην υποενότητα Δ, θα γίνει νέα αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{t}{2}$. Μετά από λίγες πράξεις παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές x και u συνδέονται με τη σχέση $u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. Είναι, λοιπόν, προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε κατ΄ ευθείαν την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$ και το σύνολο τιμών της είναι, επίσης, το $[-1,1]$. Εύκολα υπολογίζουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης $x = \frac{2u}{1+u^2}$. Επίσης, $\sqrt{1-x^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ και, επομένως,

$$\int r\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)\,dx = \int r\Big(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\Big)\frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\,dy\Big|_{u=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}}.$$

Αναγόμαστε έτσι σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο διάστημα $[-1,1]$ και συνεχίζουμε όπως ορίζει η υποενότητα Γ.

Φυσικά, για να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής του $r(x, \sqrt{1-x^2})$ ενδέχεται να πρέπει να περιορισθεί ο x σε κάποια υποδιαστήματα του $[-1,1]$. Αυτό, όμως, εξαρτάται από το συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θα βρούμε το $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx$ στα υποδιαστήματα $[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ και $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ του $[-1,1]$.

Ο περιορισμός στα υποδιαστήματα αυτά του $[-1,1]$ χρειάζεται, επειδή πρέπει να είναι $x + \sqrt{1-x^2} \neq 0$ ή ισοδύναμα $x \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Επομένως, ο $u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ περιορίζεται είτε στο διάστημα $[-1, 1-\sqrt{2})$ είτε στο $(1-\sqrt{2}, 1]$, αντιστοίχως, και έχουμε: $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int \frac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)}\,du\big|_{u=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}}$. Κατόπιν, υπολογίζουμε το $2\int \frac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)}\,du$ ως ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης και βρίσκουμε ότι είναι ίσο με $\frac{1}{2}\log\frac{|1+2u-u^2|}{1+u^2} + \arctan u + c$. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο αποτέλεσμα $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\log|x+\sqrt{1-x^2}| + \arctan\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + c$.

(ii) Το δεύτερο ολοκλήρωμα ορίζεται είτε στο $[1,+\infty)$ είτε στο $(-\infty,-1]$. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση του $[1,+\infty)$ και μια φυσιολογική αλλαγή μεταβλητής είναι η $x = \frac{1}{\sin t}$ με τον t στο $(0, \frac{\pi}{2}]$. Τότε $\sqrt{x^2-1} = \frac{\cos t}{\sin t}$ και το αόριστο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $-\int r(\frac{1}{\sin t},\frac{\cos t}{\sin t})\frac{\cos t}{(\sin t)^2}\,dt$, οπότε, βάσει της υποενότητας Δ, θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{t}{2}$. Εύκολα βλέπουμε ότι οι μεταβλητές x και u συνδέονται με τη σχέση $u=x+\sqrt{x^2-1}$, οπότε χρησιμοποιούμε κατ΄ ευθείαν αυτή την αλλαγή μεταβλητής χωρίς να μεσολαβήσει ο t. Θεωρούμε, λοιπόν, την αλλαγή μεταβλητής $u=x+\sqrt{x^2-1}$. Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Βρίσκουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=+\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[1,+\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $x=\frac{u^2+1}{2u}$ και, επίσης, $\sqrt{x^2-1}=\frac{u^2-1}{2u}$. Άρα

$$\int r\big(x,\sqrt{x^2-1}\big)\,dx=\int r\Big(\frac{u^2+1}{2u},\frac{u^2-1}{2u}\Big)\frac{u^2-1}{2u^2}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}$$

και έχουμε πάλι αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $[1,+\infty)$.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το αρχικό αόριστο ολοκλήρωμα στο $(-\infty,-1]$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u=x-\sqrt{x^2-1}$ και καταλήγουμε σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $(-\infty,-1]$. Οι λεπτομέρειες είναι παρόμοιες με τις παραπάνω.

Φυσικά, εκτός από τον περιορισμό στα $(-\infty,-1]$ ή $[1,+\infty)$, ενδέχεται να πρέπει να περιοριστούμε σε μικρότερα διαστήματα ώστε να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής του $r(x,\sqrt{x^2-1})$.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx$ στο $[1,+\infty)$.

Δε χρειάζεται ο περιορισμός σε μικρότερα διαστήματα, διότι $x+\sqrt{x^2-1}\neq 0$ στο $[1,+\infty)$. Άρα $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx=\int(\frac{1}{2u}-\frac{1}{2u^3})\,du\big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}$. Τώρα, είναι $\int(\frac{1}{2u}-\frac{1}{2u^3})\,du=\frac{1}{2}\log|u|+\frac{1}{4u^2}+c$, οπότε $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx=\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|+\frac{1}{4(x+\sqrt{x^2-1})^2}+c$.

(iii) Το τρίτο ολοκλήρωμα ορίζεται στο $\mathbf{R}$ και μια φυσιολογική αλλαγή μεταβλητής είναι η $x=-\cot t$ με τον t στο $(0,\pi)$. Τότε $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sin t}$ και το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $\int r(-\frac{\cos t}{\sin t},\frac{1}{\sin t})\frac{1}{(\sin t)^2}\,dt$, οπότε, βάσει της υποενότητας Δ, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{t}{2}$. Όμως, τότε $u=x+\sqrt{x^2+1}$, οπότε θεωρούμε κατ΄ ευθείαν αυτή την αλλαγή μεταβλητής. Η $u=x+\sqrt{x^2+1}$ είναι γνησίως αύξουσα. Υπολογίζουμε εύκολα τα όρια $\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=0$ και $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=+\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της $u=x+\sqrt{x^2+1}$ είναι το $(0,+\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $x=\frac{u^2-1}{2u}$. Επίσης, $\sqrt{x^2+1}=\frac{u^2+1}{2u}$. Άρα

$$\int r\big(x,\sqrt{x^2+1}\big)\,dx=\int r\Big(\frac{u^2-1}{2u},\frac{u^2+1}{2u}\Big)\frac{u^2+1}{2u^2}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}$$

και καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $(0,+\infty)$.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ είτε στο $(-\infty,0)$ είτε στο $(0,+\infty)$.

Ο περιορισμός του x στα δυο αυτά υποδιαστήματα είναι αυτονόητος, οπότε και ο $u = x + \sqrt{x^2+1}$ περιορίζεται, αντιστοίχως, είτε στο $(0,1)$ είτε στο $(1,+\infty)$. Καταλήγουμε στην ισότητα $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = 2\int \frac{1}{u^2-1}\,du\big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}$ και υπολογίζουμε το $2\int \frac{1}{u^2-1}\,du$ είτε στο $(0,1)$ είτε στο $(1,+\infty)$ και βρίσκουμε ότι είναι ίσο με $\log|u-1| - \log(u+1) + c$. Επομένως, $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \log\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}} + c$.

Βάσει των παραπάνω τριών τύπων ολοκληρωμάτων, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε ολοκληρώματα του τύπου

$$\int r\big(x, \sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}\big)\,dx,$$

όπου κ, λ, μ είναι αριθμοί με $\kappa \neq 0$ και η $r(s,t)$ είναι μια ρητή συνάρτηση των s, t.

Πράγματι, αφού γράψουμε $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = \kappa\big((x+\frac{\lambda}{2\kappa})^2 + \frac{4\kappa\mu-\lambda^2}{4\kappa^2}\big)$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $\kappa > 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 > 0$. Θεωρώντας την απλή αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{2\kappa}{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}(x+\frac{\lambda}{2\kappa})$, βλέπουμε αμέσως ότι το αόριστο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $\frac{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}{2\kappa}\int r\big(-\frac{\lambda}{2\kappa}+\frac{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}{2\kappa}\,u, \frac{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}{2\sqrt{\kappa}}\sqrt{u^2+1}\big)\,du = \int R(u, \sqrt{u^2+1})\,du$, όπου $R(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s, t.

Περίπτωση 2: $\kappa > 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 < 0$. Τώρα χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{2\kappa}{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}(x+\frac{\lambda}{2\kappa})$ και μετατρέπουμε το αόριστο ολοκλήρωμα στο $\frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa}\int r\big(-\frac{\lambda}{2\kappa}+\frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa}\,u, \frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\sqrt{\kappa}}\sqrt{u^2-1}\big)\,du = \int R(u, \sqrt{u^2-1})\,du$, όπου $R(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s, t.

Περίπτωση 3: $\kappa < 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 < 0$. Τώρα χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{-2\kappa}{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}(x+\frac{\lambda}{2\kappa})$ και μετατρέπουμε το αόριστο ολοκλήρωμα στο $-\frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa}\int r\big(-\frac{\lambda}{2\kappa}-\frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa}\,u, \frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\sqrt{-\kappa}}\sqrt{1-u^2}\big)\,du = \int R(u, \sqrt{1-u^2})\,du$, όπου $R(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s, t.

Η περίπτωση $\kappa < 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 > 0$ αποκλείεται διότι τότε δεν ορίζεται σε κανένα σημείο η $\sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}$. Οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, όπου ένας τουλάχιστον από τους κ και $4\kappa\mu - \lambda^2$ είναι 0, καταλήγει σε απλό ολοκλήρωμα.

Τα ολοκληρώματα $\int r(x, \sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu})\,dx$ με $\kappa \neq 0$ είναι ειδική περίπτωση των ολοκληρωμάτων $\int r(x, a(x))\,dx$, όπου η $a(x)$ είναι οποιαδήποτε «αλγεβρική συνάρτηση» του x. Τα ολοκληρώματα αυτά ονομάζονται **ολοκληρώματα του Abel** ή **αβελιανά ολοκληρώματα**. Μια ακόμη ειδική περίπτωση αβελιανών ολοκληρωμάτων είναι αυτά για τα οποία $a(x) = \sqrt{\rho x^4 + \sigma x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + \mu}$, όπου ένας τουλάχιστον από τους ρ, σ είναι $\neq 0$, και ονομάζονται **ελλειπτικά ολοκληρώματα**, διότι έχουν άμεση σχέση με υπολογισμό μηκών ελλειπτικών τόξων.

Αναφέραμε προηγουμένως τον όρο «αλγεβρική συνάρτηση». Αν και δε θα ασχοληθούμε με τις αλγεβρικές συναρτήσεις καθεαυτές, αξίζει να εξηγήσουμε, συνοπτικά, ποιές είναι αυτές. Οι ρητές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις $\sqrt[n]{x}$ είναι τα απλούστερα παραδείγματα αλγεβρικών συναρτήσεων. Άλλα τέτοια παραδείγματα είναι, γενικά, συναρτήσεις που προκύπτουν από ρητές συναρτήσεις με συνδυασμό των τεσσάρων αλγεβρικών πράξεων και την εξαγωγή ριζών οποιασδήποτε τάξης. Για παράδειγμα, η $\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{\frac{x^2+1+\sqrt{x}}{x-1}}$. Ο γενικός ορισμός των αλγεβρικών συναρτήσεων είναι ο εξής. Θεωρούμε οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής

$$p_0(x)+p_1(x)y+\cdots+p_n(x)y^n=0$$

με άγνωστο y, όπου κάθε $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ είναι πολυώνυμο, $n\geq 1$ και το $p_n(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Έστω, επίσης, μια συνάρτηση $g(x)$ με πεδίο ορισμού οποιαδήποτε ένωση διαστημάτων, η οποία είναι *συνεχής* στο πεδίο ορισμού της και *επαληθεύει* την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή ισχύει

$$p_0(x)+p_1(x)g(x)+\cdots+p_n(x)g(x)^n=0$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $g(x)$. Τότε η $g(x)$ χαρακτηρίζεται **αλγεβρική συνάρτηση**.

Παραδείγματα: (1) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x)$ είναι αλγεβρική συνάρτηση στο $\mathbf{R}$. Πράγματι, η $p(x)$ επαληθεύει την εξίσωση $-p(x)+1y=0$, της οποίας οι συντελεστές $-p(x)$, 1 είναι πολυώνυμα.

(2) Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{p(x)}{q(x)}$, όπου τα $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, είναι αλγεβρική συνάρτηση. Η $\frac{p(x)}{q(x)}$ επαληθεύει την εξίσωση $-p(x)+q(x)y=0$, της οποίας οι συντελεστές $-p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα.

(3) Κάθε συνάρτηση $\sqrt[n]{\frac{p(x)}{q(x)}}$, όπου $n\in\mathbf{N}$ και τα $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, είναι αλγεβρική συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και επαληθεύει την εξίσωση $-p(x)+q(x)y^n=0$, της οποίας οι συντελεστές $-p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα. Ειδικότερα, οι συναρτήσεις $a(x)=\sqrt{\rho x^4+\sigma x^3+\kappa x^2+\lambda x+\mu}$ που είδαμε προηγουμένως είναι αλγεβρικές συναρτήσεις.

Οι συναρτήσεις που δεν είναι αλγεβρικές χαρακτηρίζονται **υπερβατικές συναρτήσεις**. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε με αλλαγές μεταβλητής τα: $\int x^3\cos(x^4)\,dx$, $\int(\cos x)^2\sin x\,dx$, $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx$, $\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$, $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$, $\int\tan x\,dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, $\int\frac{1}{x^2-x+2}\,dx$, $\int\frac{1}{x(x^4+1)}\,dx$, $\int(\sin x)^3\,dx$, $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$, $\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$.

2. Βρείτε με ολοκληρώσεις κατά μέρη και αλλαγές μεταβλητής τα: $\int x^3 e^{-x^2} dx$, $\int e^{\sqrt{x}} dx$, $\int (x^2+3x)\sin x dx$, $\int x^2(\log x)^4 dx$, $\int \arcsin x dx$, $\int \arctan \sqrt{x} dx$, $\int (\cos x)^2 dx$, $\int (\sin x)^3 \sin(5x) dx$, $\int \frac{x}{(\cos x)^2} dx$, $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$, $\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x} dx$.

3. Βρείτε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων: $\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\, dx$, $\int \frac{x+2}{x^2-4x+4}\, dx$, $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\, dx$, $\int \frac{3x^2+2}{x^3-1}\, dx$, $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\, dx$, $\int \frac{1}{x^4-1}\, dx$, $\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-x+1)}\, dx$, $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\, dx$, $\int \frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1}\, dx$, $\int \frac{1}{x^4+1}\, dx$, $\int \frac{1}{(x-1)^2(x+2)^3(x^2+1)^2}\, dx$.

4. Βρείτε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των $\sin x$, $\cos x$: $\int \frac{1}{(\sin x)^4}\, dx$, $\int \frac{1}{1+2\sin x}\, dx$, $\int \frac{1}{2+\cos x}\, dx$, $\int \frac{(\sin x)^2}{1+(\sin x)^2}\, dx$, $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\, dx$.

5. Βρείτε τα: $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$, $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}\, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}\, dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\, dx$.

6. Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $\mathbf{R}$, $f_1(x) = \int_0^x f$ και $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Αποδείξτε ότι $f_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f(t)(x-t)^n\, dt$ και $f_n{}^{(n)} = f$.

7. Έστω $J_n(x) = \int (\cos x)^n\, dx$, $I_n(x) = \int (\sin x)^n\, dx$ $(n \in \mathbf{N})$. Αποδείξτε ότι $J_{n+2}(x) = \frac{\sin x(\cos x)^{n+1}}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}J_n(x)$, $I_{n+2}(x) = -\frac{\cos x(\sin x)^{n+1}}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}I_n(x)$. Βρείτε τους τύπους των $J_n(x)$, $I_n(x)$.

8. Ορίζουμε $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\, dx$ $(n \in \mathbf{Z}, n \geq 0)$. (i) Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης και αποδείξτε ότι $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$. (ii) Είναι προφανές ότι $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Αποδείξτε ότι $I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2}$, $I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}$. (iii) Αποδείξτε ότι $\frac{\pi}{2} = \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2 I_{2n}}{(3\cdot 5\cdots(2n-1))^2(2n+1)I_{2n+1}}$, $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. (iv) Παρατηρήστε τις σχέσεις $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n}I_{2n+1}$, από τις οποίες συνεπάγεται $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$. (v) Αποδείξτε τον περίφημο **τύπο του Wallis**:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}\Big(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)}\Big)^2$$

καθώς και τον τύπο

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}\,.$$

9. Αποδείξτε ότι: (i) αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι περιττός, $\int x^n e^{-x^2}\, dx = p_{n-1}(x)e^{-x^2} + c$, όπου $p_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$, (ii) αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι άρτιος, $\int x^n e^{-x^2}\, dx = p_{n-1}(x)e^{-x^2} + \int e^{-x^2}\, dx$, όπου $p_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$.

10. Αφού βρείτε κατάλληλους αναδρομικούς τύπους, αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \qquad (m, n \in \mathbf{Z}, m, n \geq 0).$$

11. Αφού βρείτε κατάλληλους αναδρομικούς τύπους, αποδείξτε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^m (\sin x)^n \, dx = \begin{cases} \kappa_{m,n} \frac{\pi}{2} \,, & m, n \text{ άρτιοι}, \\ \kappa_{m,n} \,, & m \text{ περιττός ή } n \text{ περιττός}, \end{cases}$$

όπου $\kappa_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\cdots(1 \text{ ή } 2)\cdot(n-1)(n-3)\cdots(1 \text{ ή } 2)}{(m+n)(m+n-2)\cdots(1 \text{ ή } 2)}$.

12. Αν η $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, \pi]$, αποδείξτε ότι $\int_0^{\pi} \big(f(x) + \frac{1}{n^2} f''(x)\big) \sin(nx) \, dx = \frac{f(0)+(-1)^{n-1} f(\pi)}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

13. (1) **Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού**. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι μονότονη και έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$ και ότι η $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $\int_a^b fg = f(a) \int_a^{\xi} g + f(b) \int_{\xi}^b g$. (*Υπόδ.:* Έστω $G(x) = \int_a^x g$. Τότε $\int_a^b fg = \int_a^b fG'$.) (2) Έστω ότι η $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}$ έχει μονότονη παράγωγο και συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a, b]$ και ότι υπάρχει $m > 0$ ώστε $\phi'(x) \geq m$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\big| \int_a^b \sin(\phi(x)) \, dx \big| \leq \frac{4}{m}$. (3) Αποδείξτε ότι $\big| \int_a^b \sin(x^2) \, dx \big| \leq \frac{2}{a}$ για κάθε a, b, $0 < a < b$.

14. Έστω $a < b$ και η $f_n(x) = (x - a)^n (b - x)^n$ $(n \in \mathbf{N})$. Ορίζουμε τα πολυώνυμα $p_0(x) = 1$ και $p_n(x) = \frac{1}{n!(b-a)^n} {f_n}^{(n)}(x)$ $(n \in \mathbf{N})$. (i) Αποδείξτε ότι το $p_n(x)$ έχει βαθμό n. (ii) Αποδείξτε ότι $\int_a^b p_n p = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού $< n$. (iii) Αποδείξτε ότι $\int_a^b p_n p_m = 0$, αν $m \neq n$, και $\int_a^b {p_n}^2 = \frac{b-a}{2n+1}$. (iv) Χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, την αρχή της επαγωγής, αποδείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού n υπάρχουν $c_0, \ldots, c_n$ ώστε $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k p_k(x)$ για κάθε x. (v) Αποδείξτε ότι οι $c_0, \ldots, c_n$ του (iv) δίνονται από τον τύπο $c_k = \frac{2k+1}{b-a} \int_a^b p p_k$. (vi) Έστω $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ με την ιδιότητα: $\int_a^b qp = 0$ για κάθε πολυώνυμο $q(x)$ βαθμού $< n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει c ώστε $p(x) = c p_n(x)$ για κάθε x.

15. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$ με συνεχή παράγωγο στο I. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι $\int_a^b \frac{f'}{f} = \log \frac{f(b)}{f(a)}$ για κάθε $a, b \in I$.

16. **Αρχή της Αβεβαιότητας του Heisenberg**. Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$ και $\int_a^b f^2 = 1$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b x f(x) f'(x) \, dx = -\frac{1}{2}$ και

$$\int_a^b x^2 (f(x))^2 \, dx \int_a^b (f'(x))^2 \, dx > \frac{1}{4} \,.$$

(*Υπόδ.:* Εφαρμόστε την άσκηση 25 της ενότητας 6.4.)

17. **Τύπος άθροισης του Euler**. Έστω $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \leq n$ και $f : [m, n] \to \mathbf{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[m, n]$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)\,dx + \int_m^n f'(x)\Big(x - [x] - \frac{1}{2}\Big)\,dx + \frac{f(m)+f(n)}{2}\,.$$

18. Έστω $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \leq n$ και αριθμοί $a_m\,, \ldots, a_n\,.$ Ορίζουμε τη συνάρτηση $A : [m, n] \to \mathbf{R}$, $A(x) = \sum_{k=m}^{[x]} a_k\,.$ Έστω $f : [m, n] \to \mathbf{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[m, n]$. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=m}^{[x]} a_k f(k) = A(x)f(x) - \int_m^x Af'$ για κάθε $x \in [m, n]$.

19. (1) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\rho} = \frac{1}{n^{\rho-1}} + \rho \int_1^n \frac{[x]}{x^{\rho+1}}\,dx$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $\rho \neq 1$. (*Υπόδ.:* Χρησιμοποιήστε οποιαδήποτε από τις ασκήσεις 17, 18.) (2) Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \log n - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}\,dx$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. (3) Αποδείξτε ότι το $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\rho}$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός, αν $\rho > 1$, είτε $+\infty$, αν $\rho \leq 1$. (4) Αποδείξτε ότι το $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\big)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Το όριο αυτό το ξαναείδαμε στην άσκηση 13 της ενότητας 6.4.

20. (Συνέχεια της άσκησης 17.) (1) Έστω $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \leq n$ και $f : [m, n] \to \mathbf{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[m, n]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x) = \int_m^x (t - [t] - \frac{1}{2})\,dt$ $(x \in [m, n])$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)\,dx - \int_m^n f''(x)\phi(x)\,dx + \frac{f(m)+f(n)}{2}\,.$$

(2) Έστω $\psi(x) = \int_1^x (t - [t] - \frac{1}{2})\,dt$ $(x \in [1, +\infty))$. Αποδείξτε ότι $\log(n!) = (n + \frac{1}{2})\log n - n + 1 + \int_1^n \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. (3) Αποδείξτε ότι το σημαντικό όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

υπάρχει και είναι αριθμός.

7.4 Ο τύπος του Taylor, II.

Το Θεώρημα 7.2 περιγράφει μια τρίτη παραλλαγή του τύπου του Taylor. Οι δύο άλλες παραλλαγές, δηλαδή ο τύπος του Taylor με υπόλοιπο Lagrange και υπόλοιπο Cauchy, περιγράφτηκαν στο Θεώρημα 5.5. Τώρα θα δούμε τον τύπο του Taylor με ολοκληρωτικό υπόλοιπο.

Θεώρημα 7.2 ***Ο τύπος του Taylor.*** *Έστω $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$, $f : [\xi, c] \to \mathbf{R}$ $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi, c]$ ώστε η $f^{(n+1)}$ να είναι συνεχής στο $[\xi, c]$. Τότε*

$$f(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k + \frac{1}{n!}\int_\xi^c f^{(n+1)}(x)(c-x)^n\,dx.$$

Η ίδια ισότητα ισχύει και όταν $c < \xi$, αρκεί όλες οι προηγούμενες υποθέσεις να ισχύουν στο διάστημα $[c,\xi]$.

Απόδειξη: Ορίζουμε την $g : [\xi, c] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(c-x)^k$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $g'(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)(c-x)^n$ για κάθε $x \in [\xi, c]$, οπότε η g' είναι συνεχής στο $[\xi, c]$. Συνεπάγεται $\frac{1}{n!}\int_{\xi}^{c} f^{(n+1)}(x)(c-x)^n\,dx = \int_{\xi}^{c} g' = g(c) - g(\xi) = f(c) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)(c-\xi)^k$. Άρα $f(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k + \frac{1}{n!}\int_{\xi}^{c} f^{(n+1)}(x)(c-x)^n\,dx$. $\natural$

Η ισότητα στο Θεώρημα 7.2 ονομάζεται **τύπος του Taylor για την f στον ξ με ολοκληρωτικό υπόλοιπο** και γράφεται $f(c) = p_{n,\xi}(c) + R_{n,\xi}(c)$, όπου $p_{n,\xi}$ είναι το γνωστό πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στον ξ και το

$$R_{n,\xi}(c) = \frac{1}{n!}\int_{\xi}^{c} f^{(n+1)}(x)(c-x)^n\,dx$$

ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο τάξης** n.

Παράδειγμα: Αν p είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n$, τότε είναι $p^{(n+1)}(x) = 0$ για κάθε x, οπότε καταλήγουμε στον γνωστό τύπο:

$$p(c) = p_{n,\xi}(c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(\xi)}{k!}(c-\xi)^k$$

για κάθε ξ, c.

Ασκήσεις.

1. Αναφερόμενοι στα Θεωρήματα 5.5, 7.2, αποδείξτε ότι, αν η $f^{(n+1)}$ είναι συνεχής στο $[\xi, c]$, το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 7.2 συνεπάγεται τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 5.5. Με τις ίδιες υποθέσεις, αποδείξτε τύπους Taylor με υπόλοιπα της μορφής

$$R_{n,\xi}(c) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!(n-k+1)}(c-\zeta)^k(c-a)^{n-k+1}$$

   για οποιονδήποτε $k = 0, \ldots, n$. Κατόπιν, προσπαθήστε να αποδείξετε αυτούς τους τύπους με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5.5.

7.5 Ειδικώτερα θέματα.

A. Ολοκλήρωμα παραγώγου.

Η Πρόταση 7.9 αποτελεί ισχυροποίηση της Πρότασης 7.6. Το συμπέρασμα είναι το ίδιο, αλλά οι υποθέσεις είναι ασθενέστερες: δεν απαιτείται να είναι η παράγωγος συνεχής στο διάστημα αλλά μόνο να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του διαστήματος. Η υπόθεση αυτή είναι η ελάχιστη δυνατή, αφού το αποτέλεσμα αναφέρεται στα ολοκληρώματα της παραγώγου.

Πρόταση 7.9 *Έστω διάστημα I και $F : I \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο I ώστε η $F' : I \to \mathbf{R}$ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Τότε $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$ για κάθε $a, b \in I$.*

Απόδειξη: Έστω $a, b \in I$, $a < b$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) < \epsilon$. Ορίζουμε $u_k = \sup\{F'(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k = \inf\{F'(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$.

Υπάρχει $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ ώστε $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Άρα $l_k(x_k - x_{k-1}) \leq F(x_k) - F(x_{k-1}) \leq u_k(x_k - x_{k-1})$. Συνεπάγεται $\underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \leq \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta)$ και, επομένως, $\underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta)$. Από αυτήν τη σχέση και από την $\underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) \leq \int_a^b F' \leq \overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta)$ συνεπάγεται $\left|F(b) - F(a) - \int_a^b F'\right| \leq \overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) < \epsilon$. Άρα $\left|F(b) - F(a) - \int_a^b F'\right| < \epsilon$ και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε ϵ, συνεπάγεται $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$.

Η περίπτωση $b < a$ ανάγεται στην προηγούμενη και η $a = b$ είναι προφανής. $\natural$

Β. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις.

Θυμόμαστε ότι, αν η f είναι κυρτή σε διάστημα I, τότε για κάθε εσωτερικό σημείο x του I ορίζονται οι $f'_-(x), f'_+(x)$, αυτές είναι αριθμοί και ισχύει $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. Αν η f είναι κοίλη στο I, ισχύουν τα ίδια με $\geq$ αντί $\leq$.

Πρόταση 7.10 *Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$ κυρτή ή κοίλη στο I. Για κάθε $x \in I$ ορίζουμε $g(x)$ να είναι οποιοσδήποτε αριθμός ανάμεσα στους $f'_+(x)$ και $f'_-(x)$. Τότε η συνάρτηση $g : I \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και $\int_a^b g = f(b) - f(a)$ για κάθε $a, b \in I$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Αν $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 5.12, είναι $g(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2) \leq g(x_2)$ και, επομένως, η g είναι αύξουσα στο I. Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.

Έστω $[a, b] \subseteq I$ και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \epsilon$. Ορίζουμε $u_k = \sup\{g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k = \inf\{g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$. Επειδή η g είναι αύξουσα, είναι $u_k = g(x_k)$ και $l_k = g(x_{k-1})$. Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι $l_k = g(x_{k-1}) \leq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \leq g(x_k) = u_k$. Άρα $\underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta)$. Επομένως, $\underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) \leq \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \leq \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta)$ ή, ισοδύναμα, $\underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) \leq f(b) - f(a) \leq \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta)$. Από αυτήν τη σχέση και από την $\underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) \leq \int_a^b g \leq \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta)$ συνεπάγεται $\left|f(b) - f(a) - \int_a^b g\right| < \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \epsilon$ και, επομένως, $\left|f(b) - f(a) - \int_a^b g\right| < \epsilon$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $\int_a^b g = f(b) - f(a)$.

Η περίπτωση $b < a$ ανάγεται στην προηγούμενη και η $a = b$ είναι προφανής.

Η απόδειξη είναι παρόμοια αν η f είναι κοίλη. $\natural$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.10, μπορούμε να επιλέξουμε $g(x) = f'_-(x)$ για κάθε $x \in I$ ή $g(x) = f'_+(x)$ για κάθε $x \in I$ και, τότε, καταλήγουμε στους αντίστοιχους τύπους $\int_a^b f'_- = f(b) - f(a)$ και $\int_a^b f'_+ = f(b) - f(a)$.

Παρατηρήστε ότι, αν στην Πρόταση 7.10 υποθέσουμε, *επιπλέον*, ότι η f έχει παράγωγο στο I, τότε είναι $g(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in I$. Από την Πρόταση 5.14 συνεπάγεται ότι η f' είναι μονότονη στο I, οπότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Τότε η ισότητα $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 7.9.

Το Θεώρημα 7.3 δίνει έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό των κυρτών και των κοίλων συναρτήσεων.

Θεώρημα 7.3 *Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbf{R}$. Τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη στο I αν και μόνο αν είναι αόριστο ολοκλήρωμα κάποιας, αντιστοίχως, αύξουσας ή φθίνουσας συνάρτησης στο I.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Τότε η συνάρτηση $g : I \to \mathbf{R}$ που ορίσθηκε στην Πρόταση 7.10 είναι αύξουσα στο I και, όπως αποδείχθηκε, ισχύει $f(x) - f(a) = \int_a^x g$ για κάθε $a, x \in I$. Άρα, αν επιλέξουμε έναν $a \in I$, ισχύει $f(x) = \int_a^x g + f(a)$ για κάθε $x \in I$.

Αντιστρόφως, έστω $g : I \to \mathbf{R}$ κάποια αύξουσα συνάρτηση στο I (οπότε η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I). Έστω $f(x) = \int_a^x g + c$ $(x \in I)$, όπου $a \in I$. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x \in [x_1, x_2]$. Επειδή η g είναι αύξουσα, $f(x) - f(x_1) = (\int_a^x g + c) - (\int_a^{x_1} g + c) = \int_{x_1}^x g \leq g(x)(x - x_1)$ και, ομοίως, $f(x_2) - f(x) = \int_x^{x_2} g \geq g(x)(x_2 - x)$. Συνεπάγεται $\frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) \geq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\big(f(x) - g(x)(x - x_1)\big) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\big(f(x) + g(x)(x_2 - x)\big) = f(x)$ και, επομένως, η f είναι κυρτή στο I.

Η περίπτωση κοίλης συνάρτησης είναι παρόμοια. $\natural$

Γ. Ολοκληρωσιμότητα σύνθετης συνάρτησης.

Πρόταση 7.11 *Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $g : [c, d] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[c, d]$. Τότε η $g \circ f : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[c, d]$, οπότε υπάρχει ${\delta_0}' > 0$ ώστε $|g(y') - g(y'')| < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ για κάθε $y', y'' \in [c, d]$, $|y' - y''| < {\delta_0}'$. Επίσης, η g είναι φραγμένη στο $[c, d]$, οπότε υπάρχει M ώστε $|g(y)| \leq M$ για κάθε $y \in [c, d]$.

Έστω $\delta_0 = \min\{{\delta_0}', \frac{\epsilon}{8M}\}$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < {\delta_0}^2$. Ορίζουμε ${u_k}' = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, ${l_k}' = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $u_k = \sup\{(g \circ f)(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k = \inf\{(g \circ f)(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$.

Χωρίζουμε τους $k = 1, \ldots, n$ σε δυο κατηγορίες. Το A έχει ως στοιχεία του τους $k = 1, \ldots, n$ με την ιδιότητα ${u_k}' - {l_k}' < \delta_0$ και το B έχει ως στοιχεία του τους υπόλοιπους $k = 1, \ldots, n$, δηλαδή αυτούς με την ιδιότητα ${u_k}' - {l_k}' \geq \delta_0$.

(i) Αν $k \in A$, τότε για κάθε $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k{}' - u_k{}' \le f(x') - f(x'') \le u_k{}' - l_k{}'$, οπότε $|f(x') - f(x'')| \le u_k{}' - l_k{}' < \delta_0 \le \delta_0{}'$ και, επομένως, $|g(f(x')) - g(f(x''))| < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$. Συνεπάγεται $g(f(x')) < g(f(x'')) + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ για κάθε $x' \in [x_{k-1}, x_k]$, οπότε $u_k \le g(f(x'')) + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ ή, ισοδύναμα, $u_k - \frac{\epsilon}{4(b-a)} \le g(f(x''))$ για κάθε $x'' \in [x_{k-1}, x_k]$. Άρα $u_k - \frac{\epsilon}{4(b-a)} \le l_k$ ή, ισοδύναμα, $u_k - l_k \le \frac{\epsilon}{4(b-a)}$.

(ii) Αν $k \in B$, τότε για κάθε $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $|g(f(x')) - g(f(x''))| \le |g(f(x'))| + |g(f(x''))| \le 2M$, οπότε, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, συνεπάγεται $u_k - l_k \le 2M$. Επίσης, είναι $\delta_0{}^2 > \sum_{k\in B}(u_k{}' - l_k{}')(x_k - x_{k-1}) \ge \delta_0 \sum_{k\in B}(x_k - x_{k-1})$, οπότε $\sum_{k\in B}(x_k - x_{k-1}) < \delta_0$.

Απο όλα τα προηγούμενα, $\overline{\Sigma}((g\circ f); a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}((g\circ f); a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k\in A}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k\in B}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \le \frac{\epsilon}{4(b-a)} \sum_{k\in A}(x_k - x_{k-1}) + 2M \sum_{k\in B}(x_k - x_{k-1}) \le \frac{\epsilon}{4(b-a)}(b-a) + 2M\delta_0 \le \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$.

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}((g \circ f); a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}((g \circ f); a, b; \Delta) < \epsilon$ και, επομένως, η $g \circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. $\natural$

Παράδειγμα: Αν η $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η $\sin \circ f : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Πράγματι, η f είναι φραγμένη, οπότε υπάρχουν c, d ώστε $f(x) \in [c, d]$ για κάθε $x \in [a, b]$. Η $\sin$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε είναι συνεχής και στο $[c, d]$. Άρα η $\sin \circ f : [a, b] \to \mathbf{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι οι $\cos \circ f$, $\exp \circ f$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$.

Δ. Η ανισότητα του Jensen.

Το Θεώρημα 7.4 είναι σημαντικό και είναι πηγή πολλών ανισοτήτων της Ανάλυσης. Μια απλούστερη μορφή του υπάρχει στην άσκηση 26 της ενότητας 6.4.

Θεώρημα 7.4 ***Ανισότητα του Jensen.*** *Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, $g : [c, d] \to \mathbf{R}$ κυρτή και συνεχής στο $[c, d]$. Τότε*

$$g\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b g \circ f.$$

Αν η g είναι κοίλη στο $[c, d]$, τότε ισχύει η αντίστροφη της ανισότητας αυτής.

Απόδειξη: Έστω $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ οποιαδήποτε διαμέριση του $[a, b]$ και $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την Δ. Ορίζουμε $\mu_l = \frac{x_l - x_{l-1}}{b-a}$ $(l \in \mathbf{N}, 1 \le l \le n)$, οπότε είναι $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$ και $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$. Εφαρμόζουμε την άσκηση 32 της ενότητας 5.7 και βρίσκουμε ότι $g\big(\frac{x_1 - x_0}{b-a} f(\xi_1) + \dots + \frac{x_n - x_{n-1}}{b-a} f(\xi_n)\big) \le \frac{x_1 - x_0}{b-a} g(f(\xi_1)) + \dots + \frac{x_n - x_{n-1}}{b-a} g(f(\xi_n))$ ή, ισοδύναμα, $g\big(\frac{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi)}{b-a}\big) \le \frac{\Sigma(g\circ f; a, b; \Delta, \Xi)}{b-a}$.

Επειδή $c \le f(x) \le d$ για κάθε $x \in [a, b]$, συνεπάγεται $c \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le d$. Άρα η g είναι συνεχής στον αριθμό $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Επίσης, σύμφωνα με την Πρόταση 7.11, η $g \circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Θεωρούμε ακολουθία διαμερίσεων (Δ_k) του $[a,b]$ ώστε $\lim_{k\to+\infty} w(\Delta_k)=0$. Για κάθε $k\in\mathbf{N}$ θεωρούμε επιλογή Ξ_k ενδιάμεσων σημείων για την Δ_k. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.16, συνεπάγεται ότι $\lim_{k\to+\infty}\Sigma(f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)=\int_a^b f$ και $\lim_{k\to+\infty}\Sigma(g\circ f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)=\int_a^b g\circ f$. Άρα $\lim_{k\to+\infty}\frac{\Sigma(f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ και $\lim_{k\to+\infty}\frac{\Sigma(g\circ f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f$.

Από την πρώτη παράγραφο συνεπάγεται $g\big(\frac{\Sigma(f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)}{b-a}\big)\leq\frac{\Sigma(g\circ f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)}{b-a}$ για κάθε $k\in\mathbf{N}$. Συνδυάζοντας, τώρα, όλα τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε ότι $g\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\big)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f$. ♮

Παραδείγματα: (1) Έστω $f:[a,b]\to[c,d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Η $g(x)=e^x$ είναι κυρτή και συνεχής στο $[c,d]$, οπότε

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}\,dx.$$

(2) Έστω $f:[a,b]\to[c,d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $[c,d]\subseteq(0,+\infty)$. Η $g(x)=\log x$ είναι κοίλη και συνεχής στο $[c,d]$, οπότε

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\,dx\leq\log\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\Big).$$

Ε. Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες.

Πρόταση 7.12 *Έστω $v,w:[a,b]\to\mathbf{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και $f(x)=\int_a^x v$, $g(x)=\int_a^x w$ $(x\in[a,b])$. Τότε $\int_a^b(vg+fw)=f(b)g(b)$.*

Απόδειξη: (i) Έστω κατ' αρχάς $v(x),w(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Για κάθε $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$ είναι $f(x_2)=\int_a^{x_2}v=\int_a^{x_1}v+\int_{x_1}^{x_2}v\geq\int_a^{x_1}v=f(x_1)$. Άρα η f είναι αύξουσα στο $[a,b]$ και, ομοίως, και η g είναι αύξουσα στο $[a,b]$. Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\dots,x_n=b\}$ του $[a,b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, δηλαδή $x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$ για κάθε $k=1,\dots,n$.

Από το Θεώρημα 6.3 συνεπάγεται ότι υπάρχει $\zeta_k\in[x_{k-1},x_k]$ ώστε $\int_{x_{k-1}}^{x_k}vg=g(\zeta_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}v=g(\zeta_k)(f(x_k)-f(x_{k-1}))$. Επομένως, $g(x_{k-1})(f(x_k)-f(x_{k-1}))\leq\int_{x_{k-1}}^{x_k}vg\leq g(x_k)(f(x_k)-f(x_{k-1}))$. Παρομοίως, $f(x_{k-1})(g(x_k)-g(x_{k-1}))\leq\int_{x_{k-1}}^{x_k}fw\leq f(x_k)(g(x_k)-g(x_{k-1}))$. Τώρα, προσθέτουμε τις δυο σχέσεις και, κατόπιν, προσθέτουμε για $k=1,\dots,n$ και βρίσκουμε ότι $\sum_{k=1}^n\big(g(x_{k-1})(f(x_k)-f(x_{k-1}))+f(x_{k-1})(g(x_k)-g(x_{k-1}))\big)\leq\int_a^b(vg+fw)\leq\sum_{k=1}^n\big(g(x_k)(f(x_k)-f(x_{k-1}))+f(x_k)(g(x_k)-g(x_{k-1}))\big)$. Με λίγες πράξεις βλέπουμε εύκολα ότι συνεπάγεται $f(b)g(b)-\sum_{k=1}^n(f(x_k)-f(x_{k-1}))(g(x_k)-g(x_{k-1}))\leq\int_a^b(vg+fw)\leq f(b)g(b)+\sum_{k=1}^n(f(x_k)-f(x_{k-1}))(g(x_k)-g(x_{k-1}))$ και, επομένως, $|\int_a^b(vg+fw)-f(b)g(b)|\leq\sum_{k=1}^n(f(x_k)-f(x_{k-1}))(g(x_k)-g(x_{k-1}))$.

Οι v,w είναι φραγμένες στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει u ώστε $0\leq v(x),w(x)\leq u$ για κάθε $x\in[a,b]$. Τότε $0\leq f(x_k)-f(x_{k-1})=\int_{x_{k-1}}^{x_k}v\leq u(x_k-x_{k-1})=\frac{u(b-a)}{n}$ και, ομοίως, $0\leq g(x_k)-g(x_{k-1})\leq\frac{u(b-a)}{n}$. Άρα $|\int_a^b(vg+fw)-f(b)g(b)|\leq$

$\frac{u^2(b-a)^2}{n}$. Αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\int_a^b (vg + fw) = f(b)g(b)$.
(ii) Αν εφαρμόσουμε την τελευταία ισότητα με w τη σταθερή συνάρτηση 1 (οπότε $g(x) = x-a$), βρίσκουμε ότι $\int_a^b v(x)(x-a)\,dx + \int_a^b f = f(b)(b-a)$. Αυτό, φυσικά, ισχύει αν $v(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Είναι, όμως, εύκολο να απαλείψουμε αυτόν τον περιορισμό. Πράγματι, έστω ότι η v είναι, απλώς, ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε, ως φραγμένη στο $[a,b]$, υπάρχει l ώστε $v(x) \geq l$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ορίζουμε την $v_* = v - l$ και την αντίστοιχη $f_*(x) = \int_a^x v_* = \int_a^x v - l(x-a) = f(x) - l(x-a)$ $(x \in [a,b])$. Τότε $v_*(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε $\int_a^b v_*(x)(x-a)\,dx + \int_a^b f_* = f_*(b)(b-a)$ και, μετά από λίγες πράξεις, $\int_a^b v(x)(x-a)\,dx + \int_a^b f = f(b)(b-a)$.
(iii) Τέλος, θα αποδείξουμε την $\int_a^b (vg + fw) = f(b)g(b)$ στη γενική περίπτωση. Οι v, w είναι φραγμένες στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει l ώστε $v(x), w(x) \geq l$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ορίζουμε τις $v_* = v - l$, $w_* = w - l$ και τις αντίστοιχες $f_*(x) = \int_a^x v_* = f(x) - l(x-a)$ και $g_*(x) = \int_a^x w_* = g(x) - l(x-a)$. Επειδή $v_*(x), w_*(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, από την περίπτωση (i) συνεπάγεται $\int_a^b (v_* g_* + f_* w_*) = f_*(b)g_*(b)$. Μετά από λίγες πράξεις και αφού χρησιμοποιήσουμε την ισότητα στο (ii) για τις v, f αλλά και για τις w, g, καταλήγουμε στην $\int_a^b (vg + fw) = f(b)g(b)$. ♮

Ένα πόρισμα της Πρότασης 7.12 είναι μια γενίκευση της Πρότασης 7.8.

Πρόταση 7.13 *Έστω διάστημα I, $v, w : I \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και $f, g : I \to \mathbf{R}$ δυο αόριστα ολοκληρώματα των v, w, αντιστοίχως, στο I. Τότε*

$$\int_a^b (vg + fw) = f(b)g(b) - f(a)g(a) \qquad (a, b \in I).$$

Απόδειξη: Έστω $a, b \in I$, $a < b$. Τότε υπάρχουν c, d ώστε $f(x) = \int_a^x v + c$, $g(x) = \int_a^x w + d$ $(x \in I)$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 7.12 στις $f - c$, $g - d$ και βρίσκουμε $\int_a^b \big(v(g-d) + (f-c)w\big) = (f(b)-c)(g(b)-d)$. Με λίγες πράξεις καταλήγουμε στην $\int_a^b (vg + fw) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Η περίπτωση $a > b$ ανάγεται, προφανώς, στην $a < b$ και η $a = b$ είναι απλή. ♮

Αν το I είναι διάστημα και θεωρήσουμε $f, g : I \to \mathbf{R}$ ώστε οι $f', g' : I \to \mathbf{R}$ να είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, τότε από την Πρόταση 7.9 συνεπάγεται $f(x) = \int_a^x f' + f(a)$, $g(x) = \int_a^x g' + g(a)$ για κάθε $x, a \in I$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 7.13 και βρίσκουμε μια γενίκευση της Πρότασης 7.8 (στην οποία υπάρχει η επιπλέον υπόθεση ότι οι f', g' είναι συνεχείς στο I).

$$\int_a^b (f'g + fg') = f(b)g(b) - f(a)g(a) \qquad (a, b \in I).$$

ΣΤ. Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Το τελευταίο αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε είναι λιγότερο δημοφιλές, αλλά μερικές φορές χρήσιμο στην Ανάλυση. Αυτό είναι το Δεύτερο Θεώρημα Μέσης

Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Μια απλούστερη μορφή του με ισχυρότερες υποθέσεις περιέχεται στην άσκηση 13 της ενότητας 7.3.

Λήμμα 7.1 *Έστω $\rho_1, \dots, \rho_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$. Ορίζουμε $\tau_k = \rho_1 + \cdots + \rho_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Τότε,*

$$\alpha_1 \min\{\tau_k : 1 \leq k \leq n\} \leq \alpha_1\rho_1 + \cdots + \alpha_n\rho_n \leq \alpha_1 \max\{\tau_k : 1 \leq k \leq n\}.$$

Απόδειξη: Είναι $\alpha_1\rho_1 + \cdots + \alpha_n\rho_n = \alpha_1\tau_1 + \alpha_2(\tau_2 - \tau_1) + \cdots + \alpha_n(\tau_n - \tau_{n-1}) = (\alpha_1 - \alpha_2)\tau_1 + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)\tau_{n-1} + \alpha_n\tau_n$. Αν $l = \min\{\tau_k : 1 \leq k \leq n\}$ και $u = \max\{\tau_k : 1 \leq k \leq n\}$, συνεπάγεται $\alpha_1\rho_1 + \cdots + \alpha_n\rho_n \leq (\alpha_1 - \alpha_2)u + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)u + \alpha_n u = \alpha_1 u$ και $\alpha_1\rho_1 + \cdots + \alpha_n\rho_n \geq (\alpha_1 - \alpha_2)l + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)l + \alpha_n l = \alpha_1 l$. $\natural$

Θεώρημα 7.5 *Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού*. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ μονότονη στο $[a,b]$ και $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^\xi g + f(b)\int_\xi^b g.$$

Απόδειξη: Έστω, κατ΄ αρχάς, ότι η f είναι φθίνουσα, $f(a) > f(b) = 0$, $\int_a^b fg \geq 0$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \epsilon$. Ορίζουμε $u_k = \sup\{g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k = \inf\{g(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$. Τότε $\int_a^b fg = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} fg \leq \sum_{k=1}^n u_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$. Ορίζουμε $\rho_k = u_k(x_k - x_{k-1})$, $\alpha_k = \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} f}{x_k - x_{k-1}} \geq 0$, οπότε $\int_a^b fg \leq \sum_{k=1}^n \rho_k\alpha_k$. Επειδή η f είναι φθίνουσα, συνεπάγεται $\alpha_k \geq \frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)}{x_k - x_{k-1}} = f(x_k) = \frac{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \geq \alpha_{k+1}$. Από το Λήμμα 7.1, $\int_a^b fg \leq \sum_{k=1}^n \rho_k\alpha_k \leq \alpha_1 \sum_{k=1}^{k_0} u_k(x_k - x_{k-1})$ για κάποιον k_0.

Τώρα, είναι $\sum_{k=1}^{k_0}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \epsilon$. Επομένως, $\int_a^b fg \leq \alpha_1\big(\sum_{k=1}^{k_0} l_k(x_k - x_{k-1}) + \epsilon\big) \leq \alpha_1\big(\sum_{k=1}^{k_0}\int_{x_{k-1}}^{x_k} g + \epsilon\big) = \alpha_1\big(\int_a^{x_{k_0}} g + \epsilon\big)$.

Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $G(x) = \int_a^x g$ $(x \in [a,b])$. Η G είναι συνεχής στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει $\zeta \in [a,b]$ ώστε $G(x) \leq G(\zeta)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα $\int_a^b fg \leq \alpha_1(G(\zeta) + \epsilon)$. Επειδή $\alpha_1 = \frac{\int_a^{x_1} f}{x_1 - a} \leq \frac{\int_a^{x_1} f(a)}{x_1 - a} = f(a)$ και επειδή $G(\zeta) \geq G(a) = 0$, συνεπάγεται $\int_a^b fg \leq f(a)(G(\zeta) + \epsilon)$. Άρα $\frac{1}{f(a)}\int_a^b fg \leq G(\zeta) + \epsilon$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $0 \leq \frac{1}{f(a)}\int_a^b fg \leq G(\zeta)$. Όμως, $G(a) = 0$, οπότε $G(a) \leq \frac{1}{f(a)}\int_a^b fg \leq G(\zeta)$. Άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $G(\xi) = \frac{1}{f(a)}\int_a^b fg$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^b fg = f(a)\int_a^\xi g = f(a)\int_a^\xi g + f(b)\int_\xi^b g$.

Τώρα, έστω ότι η f είναι φθίνουσα, $f(a) > f(b) = 0$, $\int_a^b fg < 0$. Ορίζουμε την $g_* = -g$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b fg_* = -\int_a^b fg > 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $\int_a^b fg_* = f(a)\int_a^\xi g_* + f(b)\int_\xi^b g_*$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^b fg = f(a)\int_a^\xi g + f(b)\int_\xi^b g$.

Κατόπιν, έστω ότι η f είναι φθίνουσα και $f(a) = f(b) = 0$. Τότε η f είναι σταθερή 0 στο $[a,b]$ και η ισότητα $\int_a^b fg = f(a)\int_a^\xi g + f(b)\int_\xi^b g$ ισχύει, προφανώς, για κάθε $\xi \in [a,b]$.

Η απόδειξη είναι, επομένως, πλήρης όταν η f είναι φθίνουσα και $f(b) = 0$.

Στην περίπτωση που η f είναι φθίνουσα και $f(b) \neq 0$ ορίζουμε την $f_* = f - f(b)$. Η f_* είναι φθίνουσα στο $[a,b]$ και $f_*(b) = f(b) - f(b) = 0$. Επομένως, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $\int_a^b f_*g = f_*(a)\int_a^\xi g + f_*(b)\int_\xi^b g$ και με λίγες πράξεις καταλήγουμε στην $\int_a^b fg = f(a)\int_a^\xi g + f(b)\int_\xi^b g$.

Τέλος, στην περίπτωση που η f είναι αύξουσα ορίζουμε $f_* = -f$, η οποία είναι φθίνουσα στο $[a,b]$. Επομένως, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $\int_a^b f_*g = f_*(a)\int_a^\xi g + f_*(b)\int_\xi^b g$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^b fg = f(a)\int_a^\xi g + f(b)\int_\xi^b g$. $\natural$

Κεφάλαιο 8

Σειρές.

8.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.

Θεωρούμε μια ακολουθία (x_n) και σχηματίζουμε τα διαδοχικά αθροίσματα

$$s_1 = x_1\,,\ s_2 = x_1 + x_2\,,\ s_3 = x_1 + x_2 + x_3\,,\ \dots\ , s_n = x_1 + \cdots + x_n\,,\ \dots\,.$$

Ο s_n ονομάζεται **n-οστό μερικό άθροισμα** της ακολουθίας (x_n) ή, πιο απλά, των x_n $(n \in \mathbf{N})$ και η (s_n) ονομάζεται **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** των x_n. Τώρα, το σύμβολο

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots\,.$$

ονομάζεται **σειρά των** x_n και η τιμή του, αν αυτή υπάρχει, ονομάζεται **άθροισμα** της σειράς των x_n και καθορίζεται ως εξής. Αν δεν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} s_n$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **αποκλίνει** και ότι *δεν έχει άθροισμα*. Αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} s_n$ ως στοιχείο του $\overline{\mathbf{R}}$, τότε αυτό το όριο ορίζεται να είναι το *άθροισμα* της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n \qquad \text{ή} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = \lim_{n\to+\infty} s_n\,.$$

Ειδικώτερα, αν το $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ είναι αριθμός, λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει στον** s και, αν $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ ή $-\infty$, λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει στο** $+\infty$ **ή** $-\infty$, αντιστοίχως. Επισημαίνουμε ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$, τότε η σειρά *έχει άθροισμα* και αυτό είναι αριθμός ή $\pm\infty$, αντιστοίχως. Αν η σειρά αποκλίνει, αλλά όχι στα $\pm\infty$, τότε η σειρά *δεν έχει άθροισμα*. Προσέξτε: *το σύμβολο $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ της σειράς των x_n έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ΄ ενός είναι ένα σκέτο σύμβολο, ανεξάρτητα από το αν η σειρά έχει άθροισμα ή όχι. Αφ΄ ετέρου, στην περίπτωση που η σειρά έχει άθροισμα, συμβολίζει το άθροισμα της σειράς.*

Ο x_n ονομάζεται **n-οστός όρος** ή **προσθετέος** της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Το σύμβολο του δείκτη δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο: με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$, $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ συμβολίζουμε την ίδια σειρά.

Παραδείγματα: (1) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ ή $1+1+1+\cdots+1+\cdots$. Τα μερικά αθροίσματά της είναι οι $s_1 = 1$, $s_2 = 1+1 = 2$, $s_3 = 1+1+1 = 3$ και, γενικότερα, $s_n = 1+\cdots+1 = n$ $(n \in \mathbf{N})$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ και το άθροισμά της είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

(2) Η απλούστερη σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ ή $0+0+0+\cdots+0+\cdots$. Η σειρά αυτή ονομάζεται **μηδενική σειρά**. Τα μερικά αθροίσματά της είναι οι $s_1 = 0$, $s_2 = 0+0 = 0$, $s_3 = 0+0+0 = 0$ και, γενικότερα, $s_n = 0+\cdots+0 = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$, η μηδενική σειρά συγκλίνει στον 0 και το άθροισμά της είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

(3) **Η γεωμετρική σειρά με λόγο** a είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}$ ή $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+\cdots$. Η σειρά αυτή έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1+a$, $s_3 = 1+a+a^2$ και, γενικότερα, $s_n = 1+a+\cdots+a^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Παρατηρήστε ότι ο πρώτος προσθετέος της γεωμετρικής σειράς είναι ο a^0 και ότι τον θεωρήσαμε ίσο με 1. Αυτό είναι προφανώς σωστό αν $a \neq 0$, αλλά όχι αν $a = 0$, διότι δεν ορίζεται το σύμβολο 0^0. Υπάρχει, όμως, μια *παραδοσιακή σύμβαση να θεωρείται ότι $a^0 = 1$ για κάθε a (ακόμη και για $a = 0$) στην περίπτωση που εμφανίζεται το σύμβολο a^0 ως όρος στο σύμβολο $\sum$, το οποίο χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε πεπερασμένο άθροισμα ή σειρά*. Για παράδειγμα, ένα πολυώνυμο $a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$ μπορούμε να το συμβολίσουμε $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, υπονοώντας ότι $x^0 = 1$ για κάθε x (ακόμη και για $x = 0$).

Γνωρίζουμε ήδη πότε υπάρχει το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς, δηλαδή το όριο $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}(1+a+\cdots+a^{n-1})$, και, αν υπάρχει, την τιμή του:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} \begin{cases} = +\infty, & a \geq 1, \\ = \frac{1}{1-a}\,, & -1 < a < 1, \\ \text{δεν υπάρχει,} & a \leq -1. \end{cases}$$

Ειδική περίπτωση είναι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ ή $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$. Η σειρά αυτή δεν έχει άθροισμα.

(4) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ ή $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$. Η σειρά αυτή έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1+\frac{1}{2^p}$, $s_3 = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}$ και, γενικότερα, $s_n = 1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$ $(n \in \mathbf{N})$. Η ειδική περίπτωση $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ονομάζεται **αρμονική σειρά**. Θα δούμε λίγο αργότερα αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ έχει άθροισμα ή όχι.

(5) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = \frac{1}{1!}$, $s_2 = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}$, $s_3 = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$

και, γενικότερα, $s_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ $(n \in \mathbf{N})$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\big) = e$, οπότε η σειρά συγκλίνει στον αριθμό $e - 1$ και

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Πρόταση 8.1 *Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.*

Απόδειξη: Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \mathbf{R}$, τότε $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$. Επειδή $x_n = s_n - s_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} x_n = s - s = 0$. $\natural$

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ αποκλίνει διότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Λίγο παρακάτω θα δούμε ένα παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ (συγκεκριμένα: την αρμονική σειρά) για την οποία ισχύει $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ ενώ η σειρά δε συγκλίνει. Δηλαδή, *δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 8.1.*

Πρόταση 8.2 *Έστω ότι οι (x_n), (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$ αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$, αντιστοίχως, συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$.*

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν $k_0, m_0 \in \mathbf{N}$ ώστε να ισχύει $x_{k_0+l} = y_{m_0+l}$ για κάθε $l \in \mathbf{N}$. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$, $t_n = y_1 + \cdots + y_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Για κάθε $l \in \mathbf{N}$ ισχύει $s_{k_0+l} - s_{k_0} = x_{k_0+1} + \cdots + x_{k_0+l} = y_{m_0+1} + \cdots + y_{m_0+l} = t_{m_0+l} - t_{m_0}$. Αυτό σημαίνει ότι οι ακολουθίες $(s_n - s_{k_0})$, $(t_n - t_{m_0})$ ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα.

Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbf{R}}$. Τότε $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ οπότε $\lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{k_0}) = s - s_{k_0}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}(t_n - t_{m_0}) = s - s_{k_0}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} t_n = s - s_{k_0} + t_{m_0}$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = s - s_{k_0} + t_{m_0}$. $\natural$

Παράδειγμα: Έστω $m \in \mathbf{Z}$. Με τα σύμβολα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{m+n-1} + \cdots$$

δηλώνουμε τη σειρά με μερικά αθροίσματα: $t_1 = x_m$, $t_2 = x_m + x_{m+1}$ και, γενικότερα, $t_n = x_m + \cdots + x_{m+n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Είναι φανερό ότι η Πρόταση 8.2 εφαρμόζεται στις $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, οπότε η $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$ αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, αντιστοίχως, συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$. Μάλιστα, μπορούμε να βρούμε και τη σχέση ανάμεσα στα αθροίσματα των δυο σειρών. Στην περίπτωση $m \geq 2$, αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ $(n \in \mathbf{N})$, τότε ισχύει $t_n = x_m + \cdots + x_{m+n-1} = x_1 + \cdots + x_{m+n-1} - (x_1 + \cdots + x_{m-1}) = s_{m+n-1} - (x_1 + \cdots + x_{m-1})$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbf{R}}$, τότε $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} s_{m+n-1} - (x_1 + \cdots + x_{m-1}) = s - (x_1 + \cdots + x_{m-1})$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = x_1 + \cdots + x_{m-1} + \sum_{n=m}^{+\infty} x_n \qquad (m \geq 2).$$

Στην περίπτωση $m \leq 0$, είναι $s_n = x_1 + \cdots + x_n = x_m + \cdots + x_n - (x_m + \cdots + x_0) = t_{n-m+1} - (x_m + \cdots + x_0)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbf{R}}$, τότε $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} t_{n-m+1} = \lim_{n\to+\infty} s_n + (x_m + \cdots + x_0) = s + (x_m + \cdots + x_0)$. Άρα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad (m \leq 0).$$

Συνδυάζοντας τους δυο αυτούς τύπους, εύκολα βλέπουμε ότι, αν $m, k \in \mathbf{Z}$, $m < k$, τότε

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_{k-1} + \sum_{n=k}^{+\infty} x_n \qquad (m < k).$$

Στον χειρισμό των σειρών εμφανίζεται μερικές φορές μια απλή *αλλαγή μεταβλητής*. Για παράδειγμα, έστω η σειρά $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$. Εισάγουμε τη νέα μεταβλητή $k = n - m + 1$ και βλέπουμε ότι, όταν ο n διατρέχει τους $m, m+1, m+2, \ldots$, τότε ο k διατρέχει τους $1, 2, 3, \ldots$. Άρα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+m-1} .$$

Πράγματι, και οι δυο σειρές είναι η $x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots$.

Πρόταση 8.3 *Άθροισμα σειρών*. *Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα και το $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n .$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τα n-οστά μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$, $t_n = y_1 + \cdots + y_n$. Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ είναι το $u_n = (x_1 + y_1) + \cdots + (x_n + y_n) = (x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n) = s_n + t_n$. Επομένως, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} s_n + \lim_{n\to+\infty} t_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ έχει άθροισμα ίσο με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. $\natural$

Πρόταση 8.4 *Γινόμενο σειράς και αριθμού*. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα και το $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n .$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το n-οστό μερικό άθροισμα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n$ είναι το $w_n = \lambda x_1 + \cdots + \lambda x_n = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) = \lambda s_n$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} s_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και, επομένως, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n$ έχει άθροισμα ίσο με $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. ♮

Μπορούμε να συνδυάσουμε τα δυο τελευταία αποτελέσματα ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} y_n .$$

Πρόταση 8.5 ***Σύγκριση σειρών, I***. *Έστω $x_n \leq y_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.*
(1) Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n .$$

Αν, επιπλέον, υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $x_{n_0} < y_{n_0}$ και οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ να συγκλίνουν, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ και το κοινό άθροισμα είναι αριθμός, τότε $x_n = y_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.
(2) Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$.
(3) Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = -\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = -\infty$.

Απόδειξη: (1) Θεωρούμε τα n-οστά μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$, $t_n = y_1 + \cdots + y_n$. Επειδή $s_n = x_1 + \cdots + x_n \leq y_1 + \cdots + y_n = t_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n \leq \lim_{n\to+\infty} t_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Τέλος, έστω $x_{n_0} < y_{n_0}$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $t_n - s_n = (y_n - x_n) + \cdots + (y_1 - x_1) \geq y_{n_0} - x_{n_0}$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n - \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(t_n - s_n) \geq y_{n_0} - x_{n_0} > 0$.
(2) Όπως πριν, είναι $s_n \leq t_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα, αν $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.
(3) Όπως στο (2). ♮

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα μερικά αθροίσματα των $\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{2})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} n^2$ και βρείτε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n}{n+1})^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n \log(1 + \frac{1}{n})$.

3. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2}{3})^{n+2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{4}{3})^{n-3}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-4}$, $\sum_{n=3}^{+\infty}(-\frac{2}{3})^n$, $\sum_{n=4}^{+\infty}(-3)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{6^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^{\frac{n}{2}}}{2^n}$ και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

4. (1) Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$ χαρακτηρίζεται **τηλεσκοπική σειρά**. Βρείτε συνοπτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα s_n της σειράς αυτής και, βάσει αυτού, αποδείξτε ότι αυτή έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ και ότι το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ είναι αριθμός. Αποδείξτε την εξής σχέση ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty} b_n$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n\,.$$

(2) Υπολογίστε τα αθροίσματα (αν υπάρχουν) των τηλεσκοπικών σειρών: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

8.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους.

Θεώρημα 8.1 *Αν $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα και αυτό είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Δηλαδή, $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq +\infty$.*

Ειδικώτερα: αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ ($n \in \mathbf{N}$), τότε η σειρά συγκλίνει, αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη: Ισχύει $s_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα η ακολουθία (s_n) είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Μάλιστα, επειδή $s_n = x_1 + \cdots + x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} s_n \geq 0$. Επίσης, αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη, τότε το $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$ είναι αριθμός ενώ, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. $\natural$

Πρέπει να τονιστεί ότι *κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με μη αρνητικούς όρους έχει άθροισμα και το άθροισμα αυτό είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Επομένως, το ότι μια τέτοια σειρά συγκλίνει ισοδυναμεί με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ και το ότι μια τέτοια σειρά αποκλίνει ισοδυναμεί με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$.*

Πρόταση 8.6 *Σύγκριση σειρών, ΙΙ*. (1) *Έστω $0 \leq x_n \leq y_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Τότε*

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\,.$$

Αν, επιπλέον, η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
(2) *Έστω $x_n \geq 0$, $y_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και έστω ότι η ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$ συγκλίνει ή, γενικότερα, είναι φραγμένη. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: (1) Οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα, οπότε από την Πρόταση 8.5 συνεπάγεται ότι $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε

$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ και, επομένως, η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
(2) Αν η ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$ είναι φραγμένη, υπάρχει u ώστε $\frac{x_n}{y_n} \leq u$ και, επομένως, $x_n \leq u y_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} u y_n$ συγκλίνει. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Για να μελετήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$ γράφουμε $\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n} = (\frac{2}{3})^{n-1} \frac{2+6\cdot 2^{-n}}{1+3n3^{-n}}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}}{(\frac{2}{3})^{n-1}} = 2$. Τώρα συγκρίνουμε την αρχική σειρά με την $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^{n-1}$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^{n-1}$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$ συγκλίνει.

(2) Αν $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $x_1 + \cdots + x_m \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ για κάθε $m \in \mathbf{N}$.

Πράγματι, αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n \, (n \in \mathbf{N})$, τότε η (s_n) είναι αύξουσα και, επομένως, για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $s_m \leq \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Ένας δεύτερος τρόπος να το δούμε είναι να θεωρήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, όπου $a_n = x_n$, αν $1 \leq n \leq m$, και $a_n = 0$, αν $n \geq m+1$. Τότε είναι $0 \leq a_n \leq x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Επίσης, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_m + \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n = x_1 + \cdots + x_m + \sum_{n=m+1}^{+\infty} 0 = x_1 + \cdots + x_m$.

Αξίζει να αποδείξουμε το εξής:

Πρόταση 8.7 *Ο e είναι άρρητος.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την $e = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $e \in \mathbf{Q}$ και, συγκεκριμένα, $e = \frac{l}{k}$, όπου $l, k \in \mathbf{N}$. Τότε $(k-1)!l = k!e = k! + \frac{k!}{1!} + \cdots + \frac{k!}{k!} + k! \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Καθένας από τους $(k-1)!l$, $k!$, $\frac{k!}{1!}$, ..., $\frac{k!}{k!}$ είναι ακέραιος, οπότε ο αριθμός $k! \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{k!}{n!}$ είναι ακέραιος. Όμως, είναι $0 < \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{k!}{n!} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)\cdots n} < \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^{n-k}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^n} = \frac{1}{k+1} \frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} = \frac{1}{k} \leq 1$ και καταλήγουμε σε άτοπο. $\natural$

Στις Προτάσεις 8.8, 8.9 θα δούμε δυο κριτήρια σύγκλισης για σειρές με μη αρνητικούς όρους *οι οποίοι φθίνουν*.

Πρόταση 8.8 ***Ολοκληρωτικό κριτήριο***. *Έστω (x_n) φθίνουσα και $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Έστω ότι υπάρχει $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ ώστε $f(n) = x_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Τότε υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f$, η τιμή του είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$ και*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f = +\infty$.
Επιπλέον,

$$\int_1^{n+1} f \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f \qquad (n \in \mathbf{N})$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f \le \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \le x_1 + \lim_{x\to+\infty}\int_1^x f.$$

Απόδειξη: Έστω $x\ge 1$ και $n\in\mathbf{N}$, $n\ge x$. Τότε $f(x)\ge f(n)=x_n\ge 0$. Άρα $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\ge 1$. Άρα, αν $1\le x_1<x_2$, τότε $\int_1^{x_2} f=\int_1^{x_1} f+\int_{x_1}^{x_2} f\ge \int_1^{x_1} f$. Επομένως, το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)=\int_1^x f$ $(x\in[1,+\infty))$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x στο $[1,+\infty)$. Άρα υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f$ και η τιμή του είναι αριθμός ή $+\infty$. Μάλιστα, επειδή $\int_1^x f\ge 0$ για κάθε $x\ge 1$, είναι $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f\ge 0$.

Για κάθε $k\in\mathbf{N}$ και κάθε $x\in[k,k+1]$ ισχύει $f(k+1)\le f(x)\le f(k)$, οπότε $f(k+1)\le\int_k^{k+1} f\le f(k)$ ή, ισοδύναμα, $x_{k+1}\le\int_k^{k+1} f\le x_k$. Προσθέτουμε τις αριστερές ανισότητες για $k=1,\dots,n-1$ και τις δεξιές ανισότητες για $k=1,\dots,n$ και βρίσκουμε $x_2+\cdots+x_n\le\int_1^n f$ και $\int_1^{n+1} f\le x_1+\cdots+x_n$, αντιστοίχως. Άρα $\int_1^{n+1} f\le x_1+\cdots+x_n\le x_1+\int_1^n f$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f\le\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\le x_1+\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f\le\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\le x_1+\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f$.

Τα (i), (ii) είναι άμεση συνέπεια της τελευταίας ανισότητας. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Θα μελετήσουμε τις *πολύ σημαντικές* σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$. Οι σειρές αυτές είναι σημαντικές *και* διότι χρησιμεύουν ως «πρότυπα σύγκρισης» για πολλές άλλες σειρές.

Η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ είναι σειρά μη αρνητικών όρων, οπότε έχει άθροισμα το οποίο είναι μη αρνητικός αριθμός ή $+\infty$.

Αν $p\le 0$, τότε $\frac{1}{n^p}\ge 1$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\ge\sum_{n=1}^{+\infty}1=+\infty$.

Έστω $p>0$. Τότε η $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα και έχει θετικούς όρους. Θεωρούμε την $f:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^p}$ η οποία είναι φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ και, προφανώς, $f(n)=\frac{1}{n^p}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Είναι $\int_1^x\frac{1}{t^p}\,dt=\frac{x^{1-p}-1}{1-p}$, αν $p\ne 1$, και $\int_1^x\frac{1}{t}\,dt=\log x$. Επομένως, $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t^p}\,dt=+\infty$, αν $0<p\le 1$, και $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t^p}\,dt=\frac{1}{p-1}<+\infty$, αν $p>1$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}\,, & p>1,\\ +\infty\,, & p\le 1.\end{cases}$$

Ειδικώτερα, η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$ ενώ η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Επιπλέον, έχουμε και τις εκτιμήσεις

$$\frac{1}{p-1}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\le 1+\frac{1}{p-1}\qquad(p>1),$$

$$\log(n+1)\le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\le 1+\log n\qquad(n\in\mathbf{N}),$$

$$\frac{(n+1)^{1-p}-1}{1-p}\le 1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\le 1+\frac{n^{1-p}-1}{1-p}\qquad(0\le p<1, n\in\mathbf{N}).$$

Παρατηρήστε ότι η αρμονική σειρά, όπως και κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ $(0<p\le 1)$, είναι παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία δε συγκλίνει αλλά για την οποία ισχύει

$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

(2) Για να μελετήσουμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ γράφουμε $\frac{2n-1}{n^2+3n+1} = \frac{1}{n}\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$ και βλέπουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n-1}{n^2+3n+1}} = \frac{1}{2}$. Επομένως, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνει. Αυτό δεν ισχύει, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ αποκλίνει.

(3) Για την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$ γράφουμε $\frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2+\frac{3}{n^2}}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{2}$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$ συγκλίνει.

Πρόταση 8.9 ***Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy***. *Έστω φθίνουσα (x_n) και $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Τότε*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} = +\infty$.

Απόδειξη: Οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$ έχουν άθροισμα, αφού είναι σειρές με μη αρνητικούς όρους.

Έστω $n \in \mathbf{N}$. Τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbf{Z}$, $k_0 \geq 0$ ώστε $2^{k_0} \leq n < 2^{k_0+1}$. Επειδή η (x_n) είναι φθίνουσα, $x_1 + \cdots + x_n = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \cdots + (x_{2^{k_0-1}} + \cdots + x_{2^{k_0}-1}) + (x_{2^{k_0}} + \cdots + x_n) \leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k_0-1}x_{2^{k_0-1}} + 2^{k_0}x_{2^{k_0}} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$. Άρα για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει $x_1 + \cdots + x_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$ και, επομένως, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(x_1 + \cdots + x_n) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$.

Επίσης, $x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^k x_{2^k} \leq 2x_1 + 2x_2 + 2(x_3 + x_4) + \cdots + 2(x_{2^{k-1}+1} + \cdots + x_{2^k}) = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}) \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Συνεπάγεται $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} = \lim_{k\to+\infty}(x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^k x_{2^k}) \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και τα αθροίσματα $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι είτε και τα δυο αριθμοί είτε και τα δυο $+\infty$. ♮

Παράδειγμα: Θα ξαναδούμε τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

Κατ' αρχάς, αν $p \leq 0$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.

Έστω $p > 0$, οπότε η $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα με μη αρνητικούς όρους. Εξετάζουμε την $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$. Η σειρά αυτή είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{2^{p-1}}$ και συγκλίνει, αν $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ ή, ισοδύναμα, αν $p > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$ ή, ισοδύναμα, αν $0 < p \leq 1$.

Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει, αν $p > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $p \leq 1$.

Ασκήσεις.

1. Εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο στις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n\log(\log n)}$, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n(\log(\log n))^2}$. Για όσες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους. Για όσες σειρές αποκλίνουν στο $+\infty$ βρείτε εκτιμήσεις για τα μερικά αθροίσματά τους.

2. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.6, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^4-n^2+4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+\frac{1}{n^2})$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-\cos\frac{1}{n})$.

3. Είναι πολύ απλό να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (άσκηση 4 της ενότητας 8.1). Βάσει αυτού, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

4. Έστω $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ συγκλίνει. Αν, επιπλέον, η (x_n) είναι φθίνουσα, τότε αποδείξτε και το αντίστροφο.

5. Εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο και το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy στις σειρές $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n(\log(\log n))^p}$ ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου p.

6. Αποδείξτε ότι $\lim_{p\to 1+}(p-1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1$.

7. Έστω $x_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε αποδείξτε ότι και οι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{{x_n}^2}{1+{x_n}^2}$ συγκλίνουν.

8. Μελετήστε τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{1+n^2}-n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a\big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a-n^b}$ $(0<b<a)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^n-b^n}$ $(0<b<a)$ ως προς τη σύγκλιση, συγκρίνοντάς τες με σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ ή $\sum_{n=1}^{+\infty} p^n$ για κατάλληλους p. Όπου εμφανίζονται παράμετροι a, b βρείτε τις τιμές τους για τις οποίες η αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

9. Έστω (x_n) φθίνουσα και $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$, τότε αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} nx_n = 0$. (*Υπόδ.:* Είναι $0 \leq \frac{n}{2}x_n \leq x_{[\frac{n}{2}]}+\cdots+x_n$.)

10. Έστω (x_n) φθίνουσα, $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και $x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} n(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}) = x_1$. (*Υπόδ.:* Η $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n - x_{n+1})$ συγκλίνει και είναι σειρά μη αρνητικών όρων οι οποίοι φθίνουν. Από την προηγούμενη άσκηση, $\lim_{n\to+\infty} n(x_n - x_{n+1}) = 0$. Αν s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} n(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2})$, τότε $s_n = x_1 - x_{n+1} - n(x_{n+1} - x_{n+2})$.)

8.3 p-αδικά αναπτύγματα.

Έστω $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$. Στην ενότητα 2.5 είδαμε ότι σε κάθε $x \in [0,1)$ αντιστοιχεί η ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n), όπου $x_n = [p^n x] - p[p^{n-1}x]$ $(n \in \mathbf{N})$. Αποδείξαμε ότι $x_n \in \mathbf{Z}$ και $0 \leq x_n \leq p-1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και ότι η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$. Τέλος είδαμε ότι, αν ορίσουμε $s_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}$, $t_n = s_n + \frac{1}{p^n} = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n}$ $(n \in \mathbf{N})$, τότε ισχύει

$s_n \le x < t_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Επίσης, η (s_n) είναι αύξουσα, η (t_n) φθίνουσα και $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} t_n = x$.

Τώρα μπορούμε να πούμε ότι η σχέση $\lim_{n\to+\infty} s_n = x$ γράφεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x.$$

Γενικά, μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **ακολουθία p-αδικών ψηφίων** αν $x_n \in \mathbf{Z}$, $0 \le x_n \le p-1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$.

Πρόταση 8.10 *Έστω $p \in \mathbf{Z}$, $p \ge 2$.*
(1) *Έστω ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n). Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι αριθμός στο διάστημα $[0,1)$.*
(2) *Για κάθε $x \in [0,1)$ υπάρχει μοναδική ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x.$$

Απόδειξη: (1) Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ είναι σειρά μη αρνητικών όρων, οπότε έχει άθροισμα, και, επειδή $0 \le x_n \le p-1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $0 \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1$. Επειδή, μάλιστα, ένας τουλάχιστον από τους x_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι $< p-1$, συνεπάγεται $0 \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1$.
(2) Έστω $0 \le x < 1$. Γνωρίζουμε ήδη ότι υπάρχει ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x$. Θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι μοναδική.

Έστω *οποιαδήποτε* ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x$. Έστω $m \in \mathbf{N}$. Τότε $p^{m-1}x = \sum_{n=1}^{m-1} x_n p^{m-n-1} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n-m+1}}$. Ορίζουμε $k = \sum_{n=1}^{m-1} x_n p^{m-n-1}$ και παρατηρούμε ότι ο k είναι ακέραιος. Επίσης, είναι $0 \le \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n-m+1}} \le \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{n-m+1}} = 1$. Μάλιστα, επειδή ένας τουλάχιστον από τους x_n $(n \in \mathbf{N}, n \ge m)$ είναι $< p-1$, συνεπάγεται $0 \le \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x_n}{p^{n-m+1}} < 1$. Άρα $k \le p^{m-1}x < k+1$ και συμπεραίνουμε ότι $[p^{m-1}x] = k = \sum_{n=1}^{m-1} x_n p^{m-n-1}$. Αυτό ισχύει για κάθε $m \in \mathbf{N}$, οπότε είναι και $[p^m x] = \sum_{n=1}^{m} x_n p^{m-n}$. Άρα $[p^m x] - p[p^{m-1}x] = \sum_{n=1}^{m} x_n p^{m-n} - p\sum_{n=1}^{m-1} x_n p^{m-n-1} = \sum_{n=1}^{m} x_n p^{m-n} - \sum_{n=1}^{m-1} x_n p^{m-n} = x_m$. Επομένως, $x_n = [p^n x] - p[p^{n-1}x]$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και καταλήγουμε στο ότι η (x_n) ταυτίζεται με την ήδη γνωστή ακολουθία p-αδικών ψηφίων του x. ♮

Αν η (x_n) είναι η ακολουθία των p-αδικών ψηφίων του $x \in [0,1)$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ ονομάζεται **p-αδικό ανάπτυγμα** του x και πολλές φορές την αντικαθιστούμε με το σύμβολο $\overline{0, x_1x_2x_3\,\ldots}^{\,p}$, οπότε γράφουμε

$$x = \overline{0, x_1x_2x_3\,\ldots}^{\,p}.$$

Στην ειδική περίπτωση $p = 10$ χρησιμοποιούμε, παραδοσιακά, το απλούστερο σύμβολο $x = 0, x_1x_2x_3\,\ldots$ αντί του $x = \overline{0, x_1x_2x_3\,\ldots}^{\,10}$.

Παρατηρήστε ότι η Πρόταση 8.10 λέει ότι *υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους αριθμούς στο* $[0,1)$ *και στις ακολουθίες p-αδικών ψηφίων ή, ισοδύναμα, στα p-αδικά αναπτύγματα* $\overline{0,x_1x_2x_3\ldots}^{\,p}$.

Ένα p-αδικό ανάπτυγμα $\overline{0,x_1x_2x_3\ldots}^{\,p}$ χαρακτηρίζεται **περιοδικό** αν υπάρχουν $m_0,k_0\in\mathbf{N}$ ώστε $x_{n+k_0}=x_n$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq m_0$. Αυτό σημαίνει ότι αμέσως μετά από το τμήμα $x_{m_0}x_{m_0+1}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}$ του p-αδικού αναπτύγματος ακολουθεί το ίδιο τμήμα $x_{m_0}x_{m_0+1}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}$ και αμέσως μετά από αυτό ακολουθεί το ίδιο τμήμα και ούτω καθ' εξής. Δηλαδή, το p-αδικό ανάπτυγμα έχει τη μορφή

$$\overline{0,x_1\ldots x_{m_0-1}\underbrace{x_{m_0}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}}\underbrace{x_{m_0}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}}\underbrace{x_{m_0}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}}\ldots}^{\,p}.$$

Χρησιμοποιούμε και τη συντομογραφία $\overline{0,x_1\ldots x_{m_0-1}\overline{x_{m_0}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}}}^{\,p}$.

Η Πρόταση 8.11 στην περίπτωση $p=10$, δηλαδή για τα δεκαδικά αναπτύγματα, είναι γνωστή από το δημοτικό σχολείο (χωρίς απόδειξη, φυσικά!).

Επισημαίνουμε ότι, εκτός από τους αριθμούς στο $[0,1)$, *και οι φυσικοί αριθμοί έχουν p-αδικά αναπτύγματα.* Αυτό το ζήτημα εντάσσεται στο πλαίσιο της στοιχειώδους αριθμητικής και, αν θέλετε, δείτε την άσκηση 1 για τα σχετικά.

Πρόταση 8.11 *Έστω $p\in\mathbf{N}$, $p\geq 2$ και $x\in[0,1)$. Τότε ο x είναι ρητός αν και μόνο αν το p-αδικό του ανάπτυγμα είναι περιοδικό.*

Απόδειξη: Έστω $x=\overline{0,x_1\ldots x_{m_0-1}\overline{x_{m_0}\,\ldots\,x_{m_0+k_0-1}}}^{\,p}$.

Τότε $x=\frac{x_1}{p}+\cdots+\frac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}}+\big(\frac{x_{m_0}}{p^{m_0}}+\cdots+\frac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\big(1+\frac{1}{p^{k_0}}+\frac{1}{p^{2k_0}}+\cdots\big)=\frac{x_1}{p}+\cdots+\frac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}}+\big(\frac{x_{m_0}}{p^{m_0}}+\cdots+\frac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\frac{1}{1-\frac{1}{p^{k_0}}}=\frac{x_1p^{m_0-2}+\cdots+x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}}+\frac{x_{m_0}p^{k_0-1}+\cdots+x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)}$ οπότε είναι φανερό ότι ο x είναι ρητός.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο $x\in[0,1)$ είναι ρητός, δηλαδή $x=\frac{a}{b}$ όπου $a,b\in\mathbf{Z}$, $0\leq a<b$. Γράφουμε $p={p_1}^{n_1}\cdots{p_r}^{n_r}$, όπου $p_1,\ldots,p_r$ είναι οι πρώτοι παράγοντες του p και $n_1,\ldots,n_r\in\mathbf{N}$. Ομοίως, γράφουμε $b={p_1}^{l_1}\cdots{p_r}^{l_r}b'$, όπου $l_1,\ldots,l_r\in\mathbf{Z}$, $l_1,\ldots,l_r\geq 0$ (αν κάποιος p_j δεν είναι πρώτος παράγων του b, τότε ο αντίστοιχος l_j είναι 0) και ο $b'\in\mathbf{N}$ είναι σχετικά πρώτος με τον p. Θεωρούμε οποιονδήποτε $m_0\in\mathbf{N}$ ώστε $(m_0-1)n_j\geq l_j$ $(j=1,\ldots,r)$. Ορίζουμε $v_j=(m_0-1)n_j-l_j$, οπότε $v_j\in\mathbf{Z}$, $v_j\geq 0$. Τότε είναι $x=\frac{a}{b}=\frac{a}{{p_1}^{l_1}\cdots{p_r}^{l_r}b'}=\frac{a{p_1}^{v_1}\cdots{p_r}^{v_r}}{({p_1}^{n_1}\cdots{p_r}^{n_r})^{m_0-1}b'}=\frac{a'}{p^{m_0-1}b'}$, όπου $a'\in\mathbf{Z}$, $a'\geq 0$. Τώρα, διαιρούμε τους $p,p^2,p^3,\ldots$ με τον b'. Τα πιθανά υπόλοιπα αυτών των διαιρέσεων (οι $0,\ldots,b'-1$) είναι πεπερασμένα αλλά οι αριθμοί είναι άπειροι, οπότε τουλάχιστον δυο από αυτούς θα δώσουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με τον b'. Δηλαδή, υπάρχουν $t,s\in\mathbf{N}$, $t<s$ ώστε $p^t=q_tb'+z$ και $p^s=q_sb'+z$, όπου $q_t,q_s\in\mathbf{Z}$ και ο z είναι ένας από τους $0,\ldots,b'-1$. Συνεπάγεται $p^t(p^{s-t}-1)=p^s-p^t=(q_s-q_t)b'$, οπότε ο b' διαιρεί τον $p^t(p^{s-t}-1)$. Επειδή οι b', p είναι σχετικά πρώτοι, ο b' διαιρεί τον $p^{s-t}-1$, οπότε υπάρχει $b''\in\mathbf{N}$ ώστε $b'b''=p^{s-t}-1$. Ορίζουμε τον $k_0=s-t\in\mathbf{N}$ και έχουμε ότι $b'b''=p^{k_0}-1$ και, επομένως, $x=\frac{a'b''}{p^{m_0-1}b'b''}=\frac{a''}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)}$, όπου $a''\in\mathbf{Z}$, $0\leq a''<p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)$. Κατόπιν, εκτελούμε τη διαίρεση του a'' με τον $p^{k_0}-1$, οπότε $a''=w(p^{k_0}-1)+u$, όπου $w\in\mathbf{Z}$, $0\leq w<p^{m_0-1}$ και ο

u είναι ένας από τους $0, \ldots, p^{k_0} - 2$. Τέλος, γράφουμε τα p-αδικά αναπτύγματα (δείτε την άσκηση 1) των w, u στη μορφή $w = x_1 p^{m_0-2} + \cdots + x_{m_0-1}$ και $u = x_{m_0} p^{k_0-1} + \cdots + x_{m_0+k_0-1}$ και παρατηρούμε ότι οι $x_{m_0}, \ldots, x_{m_0+k_0-1}$ δεν είναι όλοι ίσοι με $p-1$, διότι αλλιώς θα ήταν $u = (p-1)p^{k_0-1} + \cdots + (p-1)p + (p-1) = p^{k_0} - 1$. Συμπεραίνουμε ότι $x = \frac{w(p^{k_0}-1)+u}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} = \frac{w}{p^{m_0-1}} + \frac{u}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} = \frac{x_1 p^{m_0-2}+\cdots+x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \frac{x_{m_0} p^{k_0-1}+\cdots+x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\frac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \frac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\frac{1}{1-\frac{1}{p^{k_0}}} = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\frac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \frac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\big(1 + \frac{1}{p^{k_0}} + \frac{1}{p^{2k_0}} + \cdots\big) = \overline{x_1 \ldots x_{m_0-1}\overline{x_{m_0} \ \ldots \ x_{m_0+k_0-1}}}^{p}$. Άρα ο x έχει περιοδικό p-αδικό ανάπτυγμα. $\natural$

Ασκήσεις.

1. Έστω $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbf{N}$ υπάρχουν μοναδικοί $n_0 \in \mathbf{Z}$, $n_0 \geq 0$ και $x_0, x_1, \ldots, x_{n_0} \in \mathbf{Z}$, $0 \leq x_0, x_1, \ldots, x_{n_0} \leq p-1$ ώστε $x = x_0 + x_1 p + \cdots + x_{n_0} p^{n_0}$. Η παράσταση $x_0 + x_1 p + \cdots + x_{n_0} p^{n_0}$ ονομάζεται p-**αδικό ανάπτυγμα** του x και συμβολίζεται και $\overline{x_{n_0} \ \ldots \ x_1 x_0}^{p}$. Οι $x_0, x_1, \ldots, x_{n_0}$ ονομάζονται p-**αδικά ψηφία** του x. (*Υπόδ.:* Υπάρχει μοναδικός $n_0 \in \mathbf{Z}$, $n_0 \geq 0$ ώστε $p^{n_0} \leq x < p^{n_0+1}$. Θεωρήστε τους $x_0 = x - p[\frac{x}{p}]$, $x_1 = [\frac{x}{p}] - p[\frac{x}{p^2}]$ και, γενικά, $x_n = [\frac{x}{p^n}] - p[\frac{x}{p^{n+1}}]$ $(n \in \mathbf{N})$.) Ποιο είναι το δεκαδικό ανάπτυγμα των αριθμών 2, 16, 354, 10385; Βρείτε και τα δυαδικά, τριαδικά και δεκαεξαδικά αναπτύγματα των ίδιων αριθμών.

2. Βρείτε το δυαδικό, τετραδικό και δεκαεξαδικό ανάπτυγμα των $\frac{7}{16}$, $\frac{31}{32}$.

3. Έστω $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$ και $x, y \in [0,1)$. Αν για κάποιον $n \in \mathbf{N}$ οι n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις των x, y είναι ίδιες, αποδείξτε ότι $|x - y| < \frac{1}{p^n}$.

4. Έστω $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$ και $x \in [0,1)$. Αν s_n είναι η n-οστή p-αδική προσέγγιση του x, ποια είναι τα p-αδικά αναπτύγματα των $x - s_n$, $p^n(x - s_n)$;

5. Έστω $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$ και $x, y \in [0,1)$. (1) Αποδείξτε ότι το σφάλμα στον υπολογισμό του $x+y$ με την αντικατάσταση των x, y από τις n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις τους είναι $< \frac{2}{p^n}$. (2) Αποδείξτε ότι το αντίστοιχο σφάλμα στον υπολογισμό του xy είναι $< \frac{2}{p^n} - \frac{1}{p^{2n}}$.

6. Έστω $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$ και οποιοδήποτε συγκεκριμένο p-αδικό ψηφίο k. Αποδείξτε ότι το σύνολο των αριθμών στο $[0,1)$ των οποίων το n-οστό p-αδικό ψηφίο είναι ίσο με k είναι η ένωση p^{n-1} διαστημάτων τύπου $[a,b)$. Ποια ακριβώς είναι αυτά τα διαστήματα και τι μήκος έχει καθένα από αυτά; Ποιο είναι το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων; (*Υπόδ.:* Δείτε πρώτα τις περιπτώσεις $n = 1, 2, 3, 4$.)

7. Βρείτε την έκτη δεκαδική και την έκτη δυαδική προσέγγιση του $\sqrt{2} - 1$.

8. Υπολογίστε τους ρητούς $0,34\overline{239}$, $\overline{0,0\overline{1201}}^{3}$, $\overline{0,\overline{101}}^{2}$. Υπολογίστε το δυαδικό, το τριαδικό και το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα του $\frac{13}{150}$.

8.4 Κριτήρια σύγκλισης σειρών.

Θεώρημα 8.2 ***Κριτήριο του Cauchy***. *Η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| = |x_{m+1} + \cdots + x_n| < \epsilon$ για κάθε $m, n \in \mathbf{N}$, $n > m \geq n_0$.*

Απόδειξη: Έστω $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η (s_n) συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Το ότι η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_{m+1} + \cdots + x_n| = |(x_1 + \cdots + x_n) - (x_1 + \cdots + x_m)| = |s_n - s_m| < \epsilon$ για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n > m \geq n_0$. ♮

Το κριτήριο του Cauchy εκφράζεται και ως εξής: *η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\lim_{m,n\to+\infty} \sum_{k=m+1}^{n} x_k = 0$.*

Παράδειγμα: Η **αρμονική σειρά**: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Κατ' αρχάς, αν $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$, τότε $\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{n-m}{n}$.

Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνει. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}| < \frac{1}{2}$ για κάθε $m, n \in \mathbf{N}$, $n > m \geq n_0$. Άρα $|\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}| < \frac{1}{2}$ για κάθε $m \in \mathbf{N}$, $m \geq n_0$. Όμως, $|\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}| = \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m} \geq \frac{2m-m}{2m} = \frac{1}{2}$.

Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει και, επειδή είναι σειρά μη αρνητικών όρων, αποκλίνει στο $+\infty$.

Α. Απόλυτη σύγκλιση.

Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει απολύτως** αν η σειρά (με μη αρνητικούς όρους) $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.

Θεώρημα 8.3 ***Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης***. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

Πρώτη απόδειξη: Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\big||x_{m+1}| + \cdots + |x_n|\big| < \epsilon$ και, επομένως, $|x_{m+1} + \cdots + x_n| \leq |x_{m+1}| + \cdots + |x_n| < \epsilon$ για κάθε $m, n \in \mathbf{N}$, $n > m \geq n_0$. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.

Τώρα, επειδή $-|x_n| \leq x_n \leq |x_n|$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $-\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ και, επομένως, $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$.

Δεύτερη απόδειξη: Για κάθε x ορίζουμε $x^+ = \frac{|x|+x}{2}$, $x^- = \frac{|x|-x}{2}$. Τότε $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$, $x^+ + x^- = |x|$ και $x^+ - x^- = x$. Ειδικώτερα, $0 \leq x^+ \leq |x|$, $0 \leq x^- \leq |x|$.

Έστω, τώρα, ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Τότε και οι $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+$, $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-$ συγκλίνουν. Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} ({x_n}^+ - {x_n}^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-$, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.

Και $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| = \big|\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-\big| \le \big|\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+\big| + \big|\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ + \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^- = \sum_{n=1}^{+\infty}({x_n}^+ + {x_n}^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$. $\natural$

Αν δούμε την ανισότητα $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ ως γενίκευση των $|x_1+x_2| \le |x_1| + |x_2|$, $|x_1 + x_2 + x_3| \le |x_1| + |x_2| + |x_3|$ κλπ, τότε δικαιολογείται ο όρος **τριγωνική ανισότητα** για την ανισότητα αυτή.

Παράδειγμα: Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ συγκλίνει διότι συγκλίνει απολύτως. Πράγματι, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Πρόταση 8.12 ***Σύγκριση σειρών, ΙΙΙ.*** *(1) Αν $|x_n| \le y_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει. Επίσης,*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \le \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\,.$$

(2) Έστω $y_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και έστω ότι η ακολουθία $\big(\frac{|x_n|}{y_n}\big)$ συγκλίνει ή, γενικότερα, είναι φραγμένη. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.

Απόδειξη: (1) Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \le \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.
(2) Άμεση συνέπεια της Πρότασης 8.6 και του Θεωρήματος 8.3. $\natural$

Παράδειγμα: Για την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ γράφουμε $\big|\frac{(-2)^n}{3^n+2^n}\big| = \frac{2^n}{3^n+2^n} = (\frac{2}{3})^n \frac{1}{1+(\frac{2}{3})^n}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{|\frac{(-2)^n}{3^n+2^n}|}{(\frac{2}{3})^n} = 1$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2}{3})^n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως.

Β. Υπό συνθήκη σύγκλιση.

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει υπό συνθήκη** αν συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απολύτως.

Λήμμα 8.1 ***Άθροιση κατά μέρη (Abel).*** *Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) και $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n > m$ ισχύει $\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}$.*

Απόδειξη: Είναι $\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n}(s_k - s_{k-1})b_k = \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} s_{k-1} b_k = \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_{k+1} = \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_{k+1} + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1} = \sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}$. $\natural$

Δε χρειάζεται να θυμόμαστε την ισότητα του Λήμματος 8.1! Αρκεί να κατανοήσουμε την ιδέα: το άθροισμα $\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k$ αντικαθίσταται με ένα άλλο, στο οποίο τη θέση των a_k παίρνουν τα διαδοχικά μερικά αθροίσματά τους s_k και τη θέση των b_k παίρνουν οι διαδοχικές διαφορές τους $b_k - b_{k+1}$. Εμφανίζονται και οι «ακραίοι» όροι $s_n b_{n+1}$, $s_m b_{m+1}$.

Θεώρημα 8.4 *Έστω ακολουθίες* (a_n), (b_n) *και* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ $(n \in \mathbf{N})$.
(1) ***Dirichlet***. *Έστω ότι η* (b_n) *είναι φθίνουσα, ότι* $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ *και ότι η* (s_n) *είναι φραγμένη. Τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *συγκλίνει.*
(2) ***Abel***. *Έστω ότι η* (b_n) *είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι η* (s_n) *συγκλίνει (ή, ισοδύναμα, ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *συγκλίνει). Τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη: (1) Υπάρχει M ώστε $|s_n| \le M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Επίσης, επειδή η (b_n) είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, ισχύει $b_n \ge 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $b_n \le \frac{\epsilon}{2M+1}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Τότε για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n > m \ge n_0$ ισχύει $\big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\big| = \big|\sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}\big| \le \sum_{k=m+1}^{n} |s_k|(b_k - b_{k+1}) + |s_n| b_{n+1} + |s_m| b_{m+1} \le M\sum_{k=m+1}^{n}(b_k - b_{k+1}) + M b_{n+1} + M b_{m+1} = M(b_{m+1} - b_{n+1}) + M b_{n+1} + M b_{m+1} = 2M b_{m+1} \le \frac{2M\epsilon}{2M+1} < \epsilon$. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.
(2) Το $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$ υπάρχει και είναι αριθμός. Βάσει του (1), η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(b_n - b)$ συγκλίνει. Ισχύει $a_n b_n = a_n(b_n - b) + a_n b$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(b_n - b) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(b_n - b) + b\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. $\natural$

Παράδειγμα: Κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων. Αν η (b_n) είναι φθίνουσα και $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$ συγκλίνει.

Τα μερικά αθροίσματα της ακολουθίας $\big((-1)^{n-1}\big)$ είναι φραγμένα, αφού $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος.} \\ 1, & n \text{ περιττός.} \end{cases}$ Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.4(1), η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} b_n$ συγκλίνει.

Τυπικά παραδείγματα είναι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ $(0 < p \le 1)$. *Οι σειρές αυτές συγκλίνουν υπο συνθήκη*. Οι απλούστερες: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$.

Γ. Κριτήρια λόγου και ρίζας.

Πρόταση 8.13 ***Κριτήριο λόγου (d' Alembert)***. *Έστω* $x_n \neq 0$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$.
(1) *Αν* $\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, *η* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει απολύτως.*
(2) *Αν* $\liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$, *η* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *αποκλίνει.*
(3) *Αν* $\liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \le 1 \le \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, *τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*

Απόδειξη: (1) Θεωρούμε a ώστε $\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < a < 1$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \le a$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Άρα είναι $|x_{n_0+1}| \le a|x_{n_0}|$, $|x_{n_0+2}| \le a|x_{n_0+1}| \le a^2|x_{n_0}|$ και, επαγωγικά, $|x_n| \le a^{n-n_0}|x_{n_0}| = \frac{|x_{n_0}|}{a^{n_0}} a^n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Επειδή $0 \le a < 1$, η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.
(2) Υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \ge 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Δηλαδή, $|x_n| \ge |x_{n-1}| \ge \cdots \ge |x_{n_0}| > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Άρα, δεν ισχύει

$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και, επομένως, η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δε συγκλίνει.
(3) Για την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία δε συγκλίνει, είναι $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = 1$, οπότε $\liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = 1$. Ομοίως, για την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, η οποία συγκλίνει, είναι $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = 1$. ♮

Πρόταση 8.14 *Κριτήριο ρίζας (Cauchy).* *(1) Αν $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.*
(2) Αν $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.
(3) Αν $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$, δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.

Απόδειξη: (1) Θεωρούμε a ώστε $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < a < 1$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\sqrt[n]{|x_n|} \leq a$ και, επομένως, $|x_n| \leq a^n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Επειδή $0 \leq a < 1$, η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.
(2) Ισχύει $\sqrt[n]{|x_n|} > 1$ και, επομένως, $|x_n| > 1$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$. Άρα, δεν είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δε συγκλίνει.
(3) Για τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ είναι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} = 1$ και $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n^2}|} = 1$. Η πρώτη σειρά αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει. ♮

Στην εφαρμογή των Προτάσεων 8.13, 8.14 σε συγκεκριμένες σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τις περισσότερες φορές υπάρχουν τα όρια $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$. Γνωρίζουμε (και το χρησιμοποιήσαμε στις αποδείξεις των μερών (3) των Προτάσεων 8.13, 8.14) ότι τότε $\liminf_{n\to+\infty} = \limsup_{n\to+\infty} = \lim_{n\to+\infty}$.

Παραδείγματα: (1) Θεωρούμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$.

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $a = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}}\right| = |a|$. Άρα, αν $0 < |a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\frac{a^n}{n}|} = |a|$. Επομένως, αν $|a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.

Αν $|a| = 1$, κανένα από τα δυο κριτήρια δε δίνει συμπέρασμα. Αν $a = 1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει. Αν $a = -1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, η οποία συγκλίνει υπό συνθήκη. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $-1 \leq a < 1$ και συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $-1 < a < 1$.

(2) Θεωρούμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2}$.

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $a = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{a^n}{n^2}}\right| = |a|$. Άρα, αν $0 < |a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\frac{a^n}{n^2}|} = |a|$. Επομένως, αν $|a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.

Αν $|a| = 1$, κανένα από τα δυο κριτήρια δε δίνει συμπέρασμα. Αν $a = 1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, η οποία συγκλίνει απολύτως. Αν $a = -1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, η οποία, επίσης, συγκλίνει απολύτως. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2}$ συγκλίνει απολύτως αν $|a| \leq 1$ και αποκλίνει αν $|a| > 1$.

(3) Στην $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. Αν $a = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$. Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε a.

Η εφαρμογή του κριτηρίου ρίζας είναι πιο δύσκολη. Είναι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\frac{a^n}{n!}|} = \frac{|a|}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}}$ και χρειαζόμαστε το $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$. Το όριο αυτό είναι

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Ιδού η απόδειξη. Αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι άρτιος, γράφουμε $n! = 1 \cdots \frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1) \cdots n \geq (\frac{n}{2}+1) \cdots n \geq (\frac{n}{2}+1)^{\frac{n}{2}} \geq (\frac{n+1}{2})^{\frac{n}{2}}$, οπότε $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Αν ο $n \in \mathbf{N}$ είναι περιττός, τότε $n! = 1 \cdots \frac{n-1}{2} \frac{n+1}{2} \cdots n \geq \frac{n+1}{2} \cdots n \geq (\frac{n+1}{2})^{\frac{n+1}{2}} \geq (\frac{n+1}{2})^{\frac{n}{2}}$, οπότε $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Άρα $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{\frac{n+1}{2}}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

Επομένως, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\frac{a^n}{n!}|} = 0$ και η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ συγκλίνει απολύτως.

Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ είναι ιδιαιτέρως σημαντική και θα την ξαναδούμε στην επόμενη ενότητα και, κυρίως, στο Κεφάλαιο 10.

Ίσως αναρωτηθεί κανείς αν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στα κριτήρια λόγου και ρίζας στην περίπτωση που μπορούν να εφαρμοσθούν και τα δυο ταυτοχρόνως, δηλαδή, αν έχουμε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, όπου $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Η απάντηση είναι ότι *το κριτήριο ρίζας είναι ισχυρότερο από το κριτήριο λόγου*. Δηλαδή, αν το κριτήριο λόγου δίνει κάποιο αποτέλεσμα για τη σύγκλιση της σειράς, τότε και το κριτήριο ρίζας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα (δείτε την άσκηση 13), ενώ υπάρχουν παραδείγματα σειρών για τα οποία το κριτήριο λόγου δε δίνει αποτέλεσμα ενώ το κριτήριο ρίζας δίνει. Όμως, μερικές φορές, όπως στο τελευταίο παράδειγμα, είναι πιο εύκολο να εφαρμοσθεί το κριτήριο λόγου από το κριτήριο ρίζας.

Ασκήσεις.

1. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 e^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$.

2. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{n+1}{2n-1})^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 2^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n 2^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} e^n (\frac{n}{n+1})^{n^2}$.

3. Εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$ και $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots$, εφαρμόζοντας τα κριτήρια λόγου και ρίζας.

4. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1-\cos\frac{1}{n})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n}$.

5. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|<+\infty$, αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\cos(na)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\sin(na)$ συγκλίνουν.

6. Αποδείξτε ότι $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}\leq(\frac{2}{3})^n$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ και, επομένως, ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}$ συγκλίνει απολύτως.

7. (1) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\int_1^{n+1}\frac{1}{2x}\,dx=\log\sqrt{n+1}$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $1+x\leq e^x$, αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ συγκλίνει. (2) Αποδείξτε ότι $1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\leq1+\int_1^n\frac{1}{2x-1}\,dx=1+\log\sqrt{2n-1}$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $1+x\leq e^x$, αποδείξτε ότι $2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\leq e\sqrt{2n-1}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ δε συγκλίνει απολύτως.

8. Βρείτε τις τιμές του $x\neq-1$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}$ συγκλίνει.

9. Για ποιες τιμές των παραμέτρων p,q οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}p^nn^q$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ συγκλίνουν απολύτως; υπό συνθήκη;

10. Έστω (b_n) φθίνουσα ώστε $\lim_{n\to+\infty}b_n=0$. Ορίζουμε $s_n=b_1-b_2+\cdots+(-1)^{n-1}b_n$ $(n\in\mathbf{N})$ και $s=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$. Αποδείξτε ότι $0\leq(-1)^n(s-s_n)\leq b_{n+1}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$.

11. Έστω $x_n>0$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει. Ορίζουμε $r_n=\sum_{k=n}^{+\infty}x_k$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. (1) Αποδείξτε ότι $\frac{x_{m+1}}{r_{m+1}}+\cdots+\frac{x_n}{r_n}\geq1-\frac{r_{n+1}}{r_{m+1}}$ για κάθε $m,n\in\mathbf{N}$, $m<n$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{r_n}$ αποκλίνει. (*Υπόδ.:* Η (r_n) είναι φθίνουσα. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Cauchy και το ότι $\lim_{n\to+\infty}r_n=0$.) (2) Αποδείξτε ότι $\frac{x_n}{\sqrt{r_n}}<2(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}})$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{\sqrt{r_n}}$ συγκλίνει.

12. Έστω $x_n>0$ και $s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ αποκλίνει. (1) Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{1+x_n}$ αποκλίνει. (*Υπόδ.:* Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{1+x_n}$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{1+x_n}=0$.) (2) Αποδείξτε ότι $\frac{x_{m+1}}{s_{m+1}}+\cdots+\frac{x_n}{s_n}\geq1-\frac{s_m}{s_n}$ για κάθε $m,n\in\mathbf{N}$, $m<n$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{s_n}$ αποκλίνει. (*Υπόδ.:* Η (s_n) είναι αύξουσα. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Cauchy και το ότι $\lim_{n\to+\infty}s_n=+\infty$.) (3) Αποδείξτε ότι

$\frac{x_n}{{s_n}^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{s_n}^2}$ συγκλίνει. (*Υπόδ.:* $x_n = s_n - s_{n-1}$.)

13. (1) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, αποδείξτε ότι

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} .$$

(*Υπόδ.:* Έστω $x > \limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ να ισχύει $\frac{a_{n+1}}{a_n} < x$ και, επομένως, $\frac{a_n}{a_{n_0}} = \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} < x^{n-n_0}$. Άρα $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq x$.) Αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, αποδείξτε ότι υπάρχει και το $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ και τα δυο όρια είναι ίσα. Υπολογίστε τα $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$. (2) Να αποδείξετε ότι, όταν το κριτήριο λόγου δείχνει σύγκλιση ή απόκλιση σειράς, το ίδιο συμβαίνει και με το κριτήριο ρίζας.

8.5 Γινόμενο Cauchy σειρών.

Έστω οι $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Σχηματίζουμε τους όρους μιας νέας σειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ ως εξής:

$$c_0 = a_0 b_0$$
$$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$$
$$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Η $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} b_m \big)$ ονομάζεται **γινόμενο Cauchy** των $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Η ιδέα για αυτού του είδους πολλαπλασιασμό προέρχεται από τις δυναμοσειρές, δηλαδή σειρές της μορφής $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. (Αυτές τις σειρές θα τις μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 10.) Αν πολλαπλασιάσουμε τις $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ όπως πολλαπλασιάζουμε δυο πολυώνυμα, δηλαδή ομαδοποιώντας ίδιες δυνάμεις του x, βλέπουμε ότι σχηματίζεται η $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, της οποίας οι συντελεστές c_n δίνονται από τους παραπάνω τύπους.

Πρόταση 8.15 (1) *Αν η μια από τις $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει απολύτως και η άλλη συγκλίνει, το γινόμενο Cauchy $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ των δύο σειρών συγκλίνει και*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n .$$

(2) *Αν οι $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνουν απολύτως, το γινόμενο Cauchy των δυο σειρών συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη: (1) Έστω ότι οι $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$, $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ συγκλίνουν. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$, $t_n=\sum_{k=0}^{n}b_k$, $u_n=\sum_{k=0}^{n}c_k$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}|a_k|$. Έστω $s=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$, $t=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$, $S=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$. Επομένως, $\lim_{n\to+\infty}s_n=s$, $\lim_{n\to+\infty}t_n=t$, $\lim_{n\to+\infty}S_n=S$ και $S_n\le S$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$.

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}u_n=st$.

Είναι $u_n=a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)+\cdots+(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n)=a_0(b_0+b_1+\cdots+b_n)+a_1(b_0+b_1+\cdots+b_{n-1})+\cdots+a_{n-1}(b_0+b_1)+a_nb_0=a_0t_n+a_1t_{n-1}+\cdots+a_{n-1}t_1+a_nt_0$. Αν ορίσουμε $t_n^*=t_n-t$, τότε $\lim_{n\to+\infty}t_n^*=0$ και $u_n=a_0(t_n^*+t)+a_1(t_{n-1}^*+t)+\cdots+a_{n-1}(t_1^*+t)+a_n(t_0^*+t)=a_0t_n^*+a_1t_{n-1}^*+\cdots+a_{n-1}t_1^*+a_nt_0^*+(a_0+a_1+\cdots+a_n)t=a_0t_n^*+a_1t_{n-1}^*+\cdots+a_{n-1}t_1^*+a_nt_0^*+s_nt$. Αφού $\lim_{n\to+\infty}s_nt=st$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}(a_0t_n^*+a_1t_{n-1}^*+\cdots+a_{n-1}t_1^*+a_nt_0^*)=0$.

Επειδή $\lim_{n\to+\infty}t_n^*=0$, υπάρχει M ώστε $|t_n^*|\le M$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Τώρα, είναι $\sum_{k=n+1}^{+\infty}|a_k|=S-S_n$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}|a_k|=0$.

Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbf{N}$ ώστε $|t_n^*|<\frac{\epsilon}{2S+1}$ και $\sum_{k=n+1}^{+\infty}|a_k|<\frac{\epsilon}{2M+1}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\ge n_0$.

Για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2n_0$ ισχύει $|a_0t_n^*+\cdots+a_nt_0^*|\le|a_0||t_n^*|+\cdots+|a_{n-n_0}||t_{n_0}^*|+|a_{n-n_0+1}||t_{n_0-1}^*|+\cdots+|a_n||t_0^*|\le\frac{\epsilon}{2S+1}(|a_0|+\cdots+|a_{n-n_0}|)+M(|a_{n-n_0+1}|+\cdots+|a_n|)\le\frac{\epsilon}{2S+1}S+M\sum_{k=n-n_0+1}^{+\infty}|a_k|$. Αφού, όμως, $n-n_0\ge n_0$, συνεπάγεται $|a_0t_n^*+\cdots+a_nt_0^*|\le\frac{\epsilon}{2S+1}S+M\frac{\epsilon}{2M+1}<\epsilon$.

Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbf{N}$ ώστε $|a_0t_n^*+\cdots+a_nt_0^*|\le\epsilon$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}(a_0t_n^*+\cdots+a_nt_0^*)=0$.

(2) Τώρα, υποθέτουμε ότι και η $\sum_{n=0}^{+\infty}|b_n|$ συγκλίνει και θεωρούμε τον $T=\sum_{n=0}^{+\infty}|b_n|$ καθώς και τα μερικά αθροίσματα $T_n=\sum_{k=0}^{n}|b_k|$, $U_n=\sum_{k=0}^{n}|c_k|$. Τότε $T_n\le T$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$.

Είναι $U_n=|a_0b_0|+|a_1b_0+a_0b_1|+|a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2|+\cdots+|a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_1b_{n-1}+a_0b_n|\le|a_0||b_0|+(|a_1||b_0|+|a_0||b_1|)+(|a_2||b_0|+|a_1||b_1|+|a_0||b_2|)+\cdots+(|a_n||b_0|+|a_{n-1}||b_1|+\cdots+|a_1||b_{n-1}|+|a_0||b_n|)=|a_0|(|b_0|+|b_1|+\cdots+|b_n|)+|a_1|(|b_0|+|b_1|+\cdots+|b_{n-1}|)+\cdots+|a_{n-1}|(|b_0|+|b_1|)+|a_n||b_0|=|a_0|T_n+|a_1|T_{n-1}+\cdots+|a_{n-1}|T_1+|a_n|T_0\le|a_0|T+|a_1|T+\cdots+|a_{n-1}|T+|a_n|T=S_nT\le ST$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Άρα η (U_n) είναι άνω φραγμένη και, επομένως, η $\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|$ συγκλίνει. ♮

Παραδείγματα: (1) Γινόμενο Cauchy της $\sum_{n=0}^{+\infty}a^n$ με τον εαυτό της.

Είναι $1\cdot1=1$ και $a^n1+a^{n-1}a+\cdots+aa^{n-1}+1a^n=(n+1)a^n$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Άρα το γινόμενο Cauchy της $\sum_{n=0}^{+\infty}a^n$ με τον εαυτό της είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n$. Αν $|a|<1$, η $\sum_{n=0}^{+\infty}a^n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, και η $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n$ συγκλίνει απολύτως και

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n=\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\Big)^2=\frac{1}{(1-a)^2}\qquad(|a|<1).$$

(2) Γνωρίζουμε ότι οι $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^n}{n!}$ συγκλίνουν απολύτως για κάθε a,b.

Είναι $1\cdot1=1$ και, βάσει του δυωνυμικού τύπου του Newton, $\frac{a^n}{n!}1+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\frac{b^1}{1!}+\cdots+\frac{a^1}{1!}\frac{b^{n-1}}{(n-1)!}+1\frac{b^n}{n!}=\frac{1}{n!}\big(\binom{n}{n}a^n1+\binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1+\cdots+\binom{n}{1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{0}1b^n\big)=$

$\frac{(a+b)^n}{n!}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα το γινόμενο Cauchy των $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$ είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$ και, επομένως,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!} .$$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} a^n = \frac{1}{(1-a)^3}$ για κάθε $a \in (-1,1)$.

2. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το γινόμενο Cauchy της σειράς αυτής με τον εαυτό της αποκλίνει. (*Υπόδ.:* Το γινόμενο Cauchy είναι η $\sum_{n=2}^{+\infty} c_n$, όπου $c_n = (-1)^n \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{n-m}}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $2\sqrt{m}\sqrt{n-m} \leq m + (n-m) = n$ για να αποδείξετε ότι $|c_n| \geq \frac{2(n-1)}{n}$ και, επομένως, ότι δεν ισχύει $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$.)

3. Για κάθε x ορίζουμε $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Στην ενότητα αυτή αποδείξαμε ότι $f(a+b) = f(a)f(b)$ για κάθε a, b. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = e$. (1) Αποδείξτε ότι η $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στον 0. (*Υπόδ.:* $|f(x) - f(0)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{2^{n-1}} \leq \frac{2|x|}{2-|x|}$ για κάθε x, $|x| < 2$.) (2) Βάσει της άσκησης 5 της ενότητας 4.3, αποδείξτε ότι $f(x) = e^x$ για κάθε x, δηλαδή ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ για κάθε x. Αυτό το αποτέλεσμα θα το ξαναποδείξουμε με δυο τρόπους στο Κεφάλαιο 10.

8.6 Αναδιατάξεις σειρών.

Έστω ακολουθία (x_n). Θεωρούμε μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση

$$\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί $\sigma(n)$ $(n \in \mathbf{N})$ περιλαμβάνουν *κάθε φυσικό αριθμό ακριβώς μια φορά* ή, με άλλα λόγια, αποτελούν μια **αναδιάταξη των φυσικών αριθμών**. Αν συμβολίσουμε

$$x_n{}' = x_{\sigma(n)} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

τότε η ακολουθία $(x_n{}')$ ονομάζεται **αναδιάταξη** της (x_n). Επίσης, λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n{}'$ είναι μια **αναδιάταξη** της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ και $s_n{}' = \sum_{k=1}^{n} x_k{}'$, οι αριθμοί s_n , $s_n{}'$ δεν είναι ίδιοι. Το άθροισμα s_n περιέχει τους $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ενώ το s_n' τους $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$. Επομένως, δεν είναι καθόλου βέβαιο (και, εν γένει, δεν ισχύει) ότι $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s_n{}'$ ή, ισοδύναμα, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n{}'$.

Παράδειγμα: Γνωρίζουμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ συγκλίνει.

Θεωρούμε την $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$, η οποία είναι αναδιάταξη της προηγούμενης. Θα αποδείξουμε ότι η δεύτερη σειρά συγκλίνει, επίσης, αλλά ότι έχει διαφορετικό άθροισμα από την πρώτη.

Η δεύτερη σειρά αποτελείται από ομάδες τριών όρων, όπου η n-οστή ομάδα είναι η $\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$. Αν ονομάσουμε s_n τα μερικά αθροίσματα της δεύτερης σειράς, τότε $s_{3n}=\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)$. Τότε $s_{3(n+1)}-s_{3n}=\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}>0$ και, επομένως, η (s_{3n}) είναι αύξουσα. Επίσης, $s_{3n}=1+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right)-\frac{1}{2n}<1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ επειδή κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η (s_{3n}) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον s. Τώρα, $\lim_{n\to+\infty}s_{3n+1}=\lim_{n\to+\infty}(s_{3n}+\frac{1}{4n+1})=s+0=s$ και $\lim_{n\to+\infty}s_{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}(s_{3n}+\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3})=s+0+0=s$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}s_n=s$ και, επομένως, $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=s$.

Παρατηρούμε ότι $s_{3n}\geq\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{6}+\frac{13}{140}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$, οπότε $s\geq\frac{5}{6}+\frac{13}{140}$.

Έστω, τώρα, $t=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$. Αν t_n είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής, τότε $t_{2n-1}=1-\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)\leq 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$. Άρα $t=\lim_{n\to+\infty}t_{2n-1}\leq\frac{5}{6}$.

Άρα $t<s$.

Πρόταση 8.16 *Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει απολύτως. Τότε οποιαδήποτε αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{+\infty}{x_n}'$ της $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει, επίσης, απολύτως και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}{x_n}'=\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\,.$$

Απόδειξη: Έστω $\sigma:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ η ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση η οποία ορίζει την αναδιάταξη. Δηλαδή, ${x_n}'=x_{\sigma(n)}$ $(n\in\mathbf{N})$.

Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|=S$. Αν ${S_n}'=\sum_{k=1}^{n}|{x_k}'|$, τότε ${S_n}'\leq S$, αφού οι όροι $|{x_1}'|,\ldots,|{x_n}'|$, δηλαδή οι όροι $|x_{\sigma(1)}|,\ldots,|x_{\sigma(n)}|$, είναι κάποιοι από τους $|x_1|,|x_2|,\ldots$ (χωρίς επανάληψη). Άρα η $({S_n}')$ είναι άνω φραγμένη και, επομένως, η $\sum_{n=1}^{+\infty}|{x_n}'|$ συγκλίνει.

Έστω, τώρα, $s=\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$. Θεωρούμε τους ${s_n}'={x_1}'+\cdots+{x_n}'$. Θα αποδείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}{x_n}'=s$, δηλαδή ότι $\lim_{n\to+\infty}{s_n}'=s$.

Έστω $\epsilon>0$. Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|<+\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}s_n=s$, υπάρχει $n_0\in\mathbf{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}|x_n|<\frac{\epsilon}{2}$ και $|s_n-s|<\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq n_0$.

Επιλέγουμε $n_1\in\mathbf{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε οι $\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n_1)$ να περιλαμβάνουν τους $1,2,\ldots,n_0$. Είναι προφανές ότι $n_1\geq n_0$. Αν $n\in\mathbf{N}$, $n\geq n_1(\geq n_0)$, τότε στο ${s_n}'-s_n$ δεν περιλαμβάνονται οι $x_1,x_2,\ldots,x_{n_0}$, αφού καθένας από αυτούς περιέχεται ακριβώς μια φορά στο s_n και στο ${s_n}'$. Επομένως, αν $n\in\mathbf{N}$, $n\geq n_1$, είναι $|{s_n}'-s_n|\leq\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}|x_n|<\frac{\epsilon}{2}$. Άρα, για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\geq n_1$ ισχύει $|{s_n}'-s|\leq|{s_n}'-s_n|+|s_n-s|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}{s_n}'=s$. ♮

Η ύπαρξη του προηγούμενου παραδείγματος έχει ως βαθύτερη αιτία το ότι η αρχική σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως. Πράγματι, υπάρχει το εξής γενικότερο αποτέλεσμα.

Πρόταση 8.17 ***Riemann.*** *Έστω ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει υπό συνθήκη. Τότε για κάθε* $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a \leq b$ *υπάρχει αναδιάταξη* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n{}'$ *ώστε, αν* $s_n{}' = x_1{}' + \cdots + x_n{}'$ $(n \in \mathbf{N})$, *να είναι*

$$\liminf_{n \to +\infty} s_n{}' = a, \qquad \limsup_{n \to +\infty} s_n{}' = b.$$

Απόδειξη: Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη: η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αλλά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = +\infty$. Έστω $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Έστω, επίσης, τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $S_n = |x_1| + \cdots + |x_n|$.

Από τους x_n $(n \in \mathbf{N})$ ορίζουμε y_1 να είναι ο πρώτος ο οποίος είναι ≥ 0, y_2 ο δεύτερος ο οποίος είναι ≥ 0, y_3 ο τρίτος ο οποίος είναι ≥ 0 και ούτω καθ΄ εξής. Ομοίως, από τους x_n $(n \in \mathbf{N})$ ορίζουμε z_1 να είναι ο πρώτος ο οποίος είναι < 0, z_2 ο δεύτερος ο οποίος είναι < 0, z_3 ο τρίτος ο οποίος είναι < 0 και ούτω καθ΄ εξής. Θα αποδείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty$.

Κατ΄ αρχάς, και οι δυο σειρές έχουν άθροισμα διότι η πρώτη έχει μη αρνητικούς όρους και η δεύτερη αρνητικούς όρους. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $t_n = y_1 + \cdots + y_n$ και $u_n = z_1 + \cdots + z_n$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει, προφανώς, $m \in \mathbf{N}$, $m \geq n$ ώστε $y_n = x_m$. Τότε στο άθροισμα $s_m = x_1 + \cdots + x_m$ περιλαμβάνονται οι $y_1, \ldots, y_n$ και έστω ότι περιλαμβάνονται και οι $z_1, \ldots z_k$. Άρα είναι $s_m = t_n + u_k$ και $S_m = t_n - u_k$ και, επομένως, $t_n = \frac{s_m + S_m}{2}$.

Έστω $M > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $S_n > 2M - s + 1$ και $|s_n - s| < 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι, αν $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, τότε είναι $m \geq n_0$ και, επομένως, $t_n > \frac{s-1+2M-s+1}{2} = M$. Άρα $\lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$.

Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει, προφανώς, $m \in \mathbf{N}$, $m \geq n$ ώστε $z_n = x_m$. Τότε στο άθροισμα $s_m = x_1 + \cdots + x_m$ περιλαμβάνονται οι $z_1, \ldots, z_n$ και, έστω, ότι περιλαμβάνονται και οι $y_1, \ldots y_k$. Άρα είναι $s_m = u_n + t_k$ και $S_m = -u_n + t_k$ και, επομένως, $u_n = \frac{s_m - S_m}{2}$.

Έστω $M > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $S_n > 2M + s + 1$ και $|s_n - s| < 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι, αν $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, τότε είναι $m \geq n_0$ και, επομένως, $u_n < \frac{s+1-2M-s-1}{2} = -M$. Άρα $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty$.

Θεωρούμε δυο ακολουθίες (a_n), (b_n) ώστε $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \to +\infty} b_n = b$. (Αν $a \in \mathbf{R}$ θεωρούμε $a_n = a$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και, αν $a = -\infty$, θεωρούμε $a_n = -n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Ομοίως, αν $b \in \mathbf{R}$ θεωρούμε $b_n = b$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και, αν $b = +\infty$, θεωρούμε $b_n = n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.)

Βήμα 1. Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$, υπάρχει $n_1 \in \mathbf{N}$ ώστε $y_1 + \cdots + y_{n_1} > b_1$ και θεωρούμε ότι ο n_1 είναι ο ελάχιστος φυσικός με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $y_1 + \cdots + y_{n_1 - 1} \leq b_1$. Επομένως,

$$b_1 < y_1 + \cdots + y_{n_1} \leq b_1 + y_{n_1} .$$

Κατόπιν, επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty$, υπάρχει $n_1{}^* \in \mathbf{N}$ ώστε $z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} < a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1})$ και θεωρούμε ότι ο $n_1{}^*$ είναι ο ελάχιστος φυσικός με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $z_1 + \cdots + z_{n_1{}^* - 1} \geq a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1})$. Επομένως,

$$a_1 + z_{n_1{}^*} \leq y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} < a_1 .$$

Βήμα 2. Επειδή $\sum_{n=n_1+1}^{+\infty} y_n = +\infty$, υπάρχει $n_2 \in \mathbf{N}$, $n_2 > n_1$ ώστε $y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} > b_2 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1^*})$ και θεωρούμε ότι ο n_2 είναι ο ελάχιστος φυσικός με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2-1} \leq b_2 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1^*})$. Επομένως,

$$b_2 < y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} \leq b_2 + y_{n_2} .$$

Κατόπιν, επειδή $\sum_{n=n_1^*+1}^{+\infty} z_n = -\infty$, υπάρχει $n_2^* \in \mathbf{N}$, $n_2^* > n_1^*$ ώστε $z_{n_1^*+1} + \cdots + z_{n_2^*} < a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2})$ και θεωρούμε ότι ο n_1^* είναι ο ελάχιστος φυσικός με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $z_{n_1^*+1} + \cdots + z_{n_2^*-1} \geq a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2})$. Επομένως,

$$a_2 + z_{n_2^*} \leq y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} + z_{n_1^*+1} + \cdots + z_{n_2^*} < a_2 .$$

Συνεχίζουμε αυτά τα βήματα επ΄ άπειρον, επιλέγοντας διαδοχικά τους $y_1, \ldots, y_{n_1}, z_1, \ldots, z_{n_1^*}, y_{n_1+1}, \ldots, y_{n_2}, z_{n_1^*+1}, \ldots, z_{n_2^*}, \ldots$ οι οποίοι, στη σειρά αυτή που εμφανίζονται, δεν είναι τίποτε άλλο από μια αναδιάταξη των x_n ($n \in \mathbf{N}$). Θεωρούμε, τώρα, τα μερικά αθροίσματα ${s_n}'$ ($n \in \mathbf{N}$) της συγκεκριμένης αναδιάταξης. Παρατηρούμε ότι $b_1 < {s_{n_1}}' \leq b_1 + y_{n_1}$, $a_1 + z_{n_1^*} \leq {s_{n_1+n_1^*}}' < a_1$, $b_2 < {s_{n_1+n_1^*+n_2}}' \leq b_2 + y_{n_2}$, $a_2 + z_{n_2^*} \leq {s_{n_1+n_1^*+n_2+n_2^*}}' < a_2$ και, γενικότερα,

$$b_k < {s_{n_1+n_1^*+\cdots+n_k}}' \leq b_k + y_{n_k} , \quad a_k + z_{n_k^*} \leq {s_{n_1+n_1^*+\cdots+n_k+n_k^*}}' < a_k$$

για κάθε $k \in \mathbf{N}$.

Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και, επειδή, οι (y_n), (z_n) είναι υποακολουθίες της (x_n), συνεπάγεται $\lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} z_{n_k^*} = 0$. Άρα $\lim_{k\to+\infty} {s_{n_1+n_1^*+\cdots+n_k+n_k^*}}' = a$ και $\lim_{k\to+\infty} {s_{n_1+n_1^*+\cdots+n_k}}' = b$ και, επομένως,

$$\liminf_{n\to+\infty} {s_n}' \leq a, \qquad b \leq \limsup_{n\to+\infty} {s_n}' .$$

Είναι σαφές ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_1$ υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbf{N}$ ώστε είτε $n_1 + n_1^* + \cdots + n_k \leq n < n_1 + n_1^* + \cdots + n_k + n_k^*$ είτε $n_1 + n_1^* + \cdots + n_k + n_k^* \leq n < n_1 + n_1^* + \cdots + n_k + n_k^* + n_{k+1}$. Στην πρώτη περίπτωση, είναι ${s_{n_1+n_1^*+\cdots+n_k+n_k^*}}' \leq {s_n}' \leq {s_{n_1+n_1^*+\cdots+n_k}}'$ και στη δεύτερη περίπτωση είναι ${s_{n_1+n_1^*+\cdots+n_k+n_k^*}}' \leq {s_n}' \leq {s_{n_1+n_1^*+\cdots+n_k+n_k^*+n_{k+1}}}'$, οπότε, αντιστοίχως, είναι είτε $a_k + z_{n_k^*} \leq {s_n}' \leq b_k + y_{n_k}$ είτε $a_k + z_{n_k^*} \leq {s_n}' \leq b_{k+1} + y_{n_{k+1}}$. Από τις σχέσεις αυτές συνεπάγεται

$$a = \lim_{k\to+\infty} (a_k + z_{n_k^*}) \leq \liminf_{n\to+\infty} {s_n}' \qquad \limsup_{n\to+\infty} {s_n}' \leq \lim_{k\to+\infty} (b_k + y_{n_k}) = b.$$

Άρα $\liminf_{n\to+\infty} {s_n}' = a$ και $\limsup_{n\to+\infty} {s_n}' = b$. $\natural$

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots$.

2. Έστω η συγκλίνουσα σειρά $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$. Θεωρούμε την αναδιάταξη $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}-\frac{1}{10}+\cdots$. Αποδείξτε ότι η δεύτερη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Κεφάλαιο 9

Ακολουθίες συναρτήσεων.

9.1 Κατά σημείο σύγκλιση.

Έστω $f : A \to \mathbf{R}$ και συναρτήσεις $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$. Οι f_n $(n \in \mathbf{N})$ σχηματίζουν μια **ακολουθία συναρτήσεων** (f_n).

Λέμε ότι **η** (f_n) **συγκλίνει στην** f **κατά σημείο στο** A και συμβολίζουμε

$$f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f \quad \text{στο } A \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} f \quad \text{στο } A$$

αν για κάθε $x \in A$ *η ακολουθία αριθμών* $(f_n(x))$ *συγκλίνει στον αριθμό* $f(x)$, *δηλαδή* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x \in A)$. Με άλλα λόγια, $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} f$ *στο* A *αν για κάθε* $x \in A$ *και κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$ *ώστε* $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$.

Τα επόμενα παραδείγματα πρέπει να μελετηθούν προσεκτικά, διότι θα γίνεται συχνή αναφορά σε αυτά.

Παραδείγματα: (1) Έστω $f, f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ ώστε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$. Τότε $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}(f(x) + \frac{1}{n}) = f(x) + 0 = f(x)$ για κάθε $x \in A$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} f$ στο A.

(2) Έστω $f_n : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$. Τότε $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ και, αν $x > 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{1+nx} = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} 0$ στο $[0,\infty)$, όπου 0 είναι η σταθερή συνάρτηση 0.

(3) Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+nx}, & \frac{1}{n} < x \le 1, \\ \frac{nx}{2}, & 0 \le x \le \frac{1}{n}. \end{cases}$ Κατ' αρχάς, $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$. Αν $0 < x \le 1$, τότε ισχύει $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge [\frac{1}{x}] + 1 > \frac{1}{x}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} 0$ στο $[0,1]$.

(4) Έστω $f_n : (0,1] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$. Για κάθε $x \in (0,1]$ είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$. Επομένως, $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} 0$ στο (0,1].

(5) Έστω $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Τότε $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} 0$ στο $\mathbf{R}$.

(6) Έστω $f_n : (1,+\infty) \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$. Είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{x+n} = 0$ για κάθε $x > 1$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} 0$ στο $(1,+\infty)$.

(7) Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{x+n^2} = 0$ για κάθε $x \geq 0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} 0$ στο $[0,+\infty)$.

(8) Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = x^n$. Τότε $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ και, αν $0 \leq x < 1$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} f$ στο $[0,1]$, όπου $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

(9) Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)x-1}, & \frac{1}{n} < x \leq 1, \\ n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$ Τότε $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$. Επίσης, αν $0 < x \leq 1$, τότε ισχύει $f_n(x) = \frac{1}{(n+1)x-1}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq [\frac{1}{x}] + 1 > \frac{1}{x}$, οπότε είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)x-1} = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} 0$ στο $[0,1]$.

(10) Έστω $f_n : [0,2\pi] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Για κάθε $x \in [0,2\pi]$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} 0$ στο $[0,2\pi]$.

(11) Έστω $f_n : [0,2\pi] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = \cos(nx)$. Είναι $f_n(\pi) = (-1)^n$, οπότε η $(f_n(\pi))$ δε συγκλίνει. Άρα η (f_n) δε συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση κατά σημείο στο $[0,2\pi]$.

Πρόταση 9.1 *Έστω αριθμοί λ, μ, $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} f$, $\lim_{n\to+\infty} g_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} g$ στο A.*
(1) $\lim_{n\to+\infty}(\lambda f_n + \mu g_n) \overset{\kappa.\sigma.}{=} \lambda f + \mu g$ στο A.
(2) $\lim_{n\to+\infty} f_n g_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} fg$ στο A.
(3) Αν $g(x), g_n(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{f_n}{g_n} \overset{\kappa.\sigma.}{=} \frac{f}{g}$ στο A.

Απόδειξη: (1) Έστω $x \in A$. Τότε $\lim_{n\to+\infty}(\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)) = \lambda f(x) + \mu g(x)$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}(\lambda f_n + \mu g_n) \overset{\kappa.\sigma.}{=} \lambda f + \mu g$ στο A.
(2), (3) Ομοίως. $\natural$

Οι επόμενες τρεις ερωτήσεις είναι *πολύ σημαντικές* για την Ανάλυση.

Ερώτηση 1: Έστω $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} f$ στο A και έστω ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ η f_n είναι συνεχής στον $\xi \in A$. Είναι η f συνεχής στον ξ;

Απάντηση: Όχι πάντοτε. Στο παράδειγμα (8) όλες οι f_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι συνεχείς στον 1 αλλά η f δεν είναι συνεχής στον 1.

Ερώτηση 2: Έστω $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} f$ στο $[a,b]$ και έστω ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ η f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Είναι η f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$;

Απάντηση: Όχι πάντοτε. Στο παράδειγμα (9), $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n\to+\infty} \big(\frac{1}{2} +$

$\frac{2\log n}{n+1}) = \frac{1}{2}$. Όμως, $\int_0^1 f = \int_0^1 0 = 0$.

Ερώτηση 3: Έστω $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} f$ στο A και έστω ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ η f_n είναι παραγωγίσιμη στο A. Είναι η f παραγωγίσιμη στο A και ισχύει $\lim_{n\to+\infty} {f_n}' \overset{\kappa.\sigma.}{=} f'$ στο A;

Απάντηση: Όχι πάντοτε. Στο παράδειγμα (2), $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} 0$ στο $[0,+\infty)$. Η σταθερή συνάρτηση 0 είναι παραγωγίσιμη. Αλλά ${f_n}'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}$ $(x \in [0,+\infty), n \in \mathbf{N})$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} {f_n}'(0) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ και, αν $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+nx)^2} = 0$. Δηλαδή, $\lim_{n\to+\infty} {f_n}' \overset{\kappa.\sigma.}{=} g$ στο $[0,+\infty)$, όπου $g(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ και, επομένως, δεν ισχύει $\lim_{n\to+\infty} {f_n}' \overset{\kappa.\sigma.}{=} 0' = 0$ στο $[0,+\infty)$.

Στο παράδειγμα (8), κάθε f_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι παραγωγίσιμη στον 1 ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στον 1.

Στο παράδειγμα (10), ${f_n}'(x) = \cos(nx)$ $(x \in [0,2\pi], n \in \mathbf{N})$ και, όπως φαίνεται στο παράδειγμα (11), η (f_n') δε συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση κατά σημείο στο $[0,2\pi]$.

Στην επόμενη ενότητα θα ορίσουμε ένα δεύτερο είδος σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων, την *ομοιόμορφη σύγκλιση*. Τότε τα δυο πρώτα ερωτήματα έχουν καταφατική απάντηση ενώ μια παραλλαγή του τρίτου ερωτήματος έχει, επίσης, καταφατική απάντηση.

Ασκήσεις.

1. (1) Έστω $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $g_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^2x^2}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι οι (f_n), (g_n) συγκλίνουν σε κάποιες f, g κατά σημείο στο $\mathbf{R}$. Βρείτε τις f, g. (2) Έστω $f_n(x) = \frac{x}{n}[\frac{n}{x}]$ για κάθε $x \neq 0$ και $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Βρείτε την f.

2. Έστω $f_n(x) = \frac{n}{x}[\frac{x}{n}]$ για κάθε $x \neq 0$ και $n \in \mathbf{N}$. (1) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} 0$ στο $(0,+\infty)$. (2) Αποδείξτε ότι, αν το $A \subseteq \mathbf{R}\setminus\{0\}$ περιέχει τουλάχιστον έναν αρνητικό αριθμό, η (f_n) δε συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση κατά σημείο στο A.

9.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση.

Έστω $f, g : A \to \mathbf{R}$. Ορίζουμε την **ομοιόμορφη απόσταση των** f, g **στο** A, και τη συμβολίζουμε $\|f-g\|_A$, με τον τύπο:

$$\|f-g\|_A = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in A\}.$$

Το $\{|f(x)-g(x)| : x \in A\}$ είναι, προφανώς, μη κενό. Αν το σύνολο αυτό είναι άνω φραγμένο, τότε η $\|f-g\|_A$ είναι αριθμός, ενώ, αν δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $\|f-g\|_A = +\infty$. Επίσης, $\|f-g\|_A \geq 0$ αφού είναι $|f(x)-g(x)| \geq 0$ για κάθε $x \in A$. Άρα

$$0 \leq \|f-g\|_A \leq +\infty.$$

Παραδείγματα: (1) Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. Τότε $|f(x)-g(x)| = |x-x^2| = x-x^2$ και βρίσκουμε εύκολα ότι η μέγιστη τιμή της $x-x^2$ στο $[0,1]$ είναι $\frac{1}{4}$. Άρα $\|f-g\|_{[0,1]} = \sup\{x-x^2 : x \in [0,1]\} = \frac{1}{4}$.

(2) Έστω $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $g(x) = 0$. Τότε $|f(x)-g(x)| = \frac{x^2}{1+x^2}$ για κάθε x. Ισχύει $\frac{x^2}{1+x^2} < 1$ για κάθε x, οπότε ο 1 είναι άνω φράγμα του $\{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbf{R}\}$. Επειδή $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$, συνεπάγεται ότι, για κάθε $u < 1$, ισχύει $\frac{x^2}{1+x^2} > u$ κοντά στα $\pm\infty$. Άρα κανένας $u < 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbf{R}\}$ οπότε $\|f-g\|_{\mathbf{R}} = \sup\{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbf{R}\} = 1$.

(3) Έστω $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = 1$. Τότε $|f(x)-g(x)| = |x-1|$ για κάθε x. Επειδή $\lim_{x\to\pm\infty} |x-1| = +\infty$, συνεπάγεται ότι, για κάθε u, ισχύει $|x-1| > u$ κοντά στα $\pm\infty$. Άρα κανένας u δεν είναι άνω φράγμα του $\{|x-1| : x \in \mathbf{R}\}$ και, επομένως, $\|f-g\|_{\mathbf{R}} = \sup\{|x-1| : x \in \mathbf{R}\} = +\infty$.

Πριν προχωρήσουμε θα κάνουμε δυο γενικές παρατηρήσεις που θα φανούν χρήσιμες παρακάτω.

Πρώτη παρατήρηση (για όριο ακολουθίας): Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - x| \leq \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Αντιστρόφως, έστω ότι για *κάθε* $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - x| \leq \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Συμπεραίνουμε ότι *ο ορισμός του* $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ *μπορεί να διατυπωθεί, ισοδύναμα, αντικαθιστώντας την ανισότητα* $|x_n - x| < \epsilon$ *με την* $|x_n - x| \leq \epsilon$. Δείτε την άσκηση 8 της ενότητας 2.2.

Δεύτερη παρατήρηση (για το supremum): Έστω $\sup B \leq u$. Τότε ο u είναι άνω φράγμα του B, οπότε ισχύει $b \leq u$ για κάθε $b \in B$. Αντιστρόφως, έστω $b \leq u$ για κάθε $b \in B$. Τότε ο u είναι άνω φράγμα του B και, επειδή το $\sup B$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του B, συνεπάγεται $\sup B \leq u$. Συμπεραίνουμε ότι $\sup B \leq u$ *αν και μόνο αν ισχύει* $b \leq u$ *για κάθε* $b \in B$. Δείτε την άσκηση 8 της ενότητας 1.5.

Ειδική περίπτωση ομοιόμορφης απόστασης είναι η ομοιόμορφη απόσταση μιας $f : A \to \mathbf{R}$ από τη μηδενική συνάρτηση $0 : A \to \mathbf{R}$, δηλαδή η

$$\|f\|_A = \sup\{|f(x)| : x \in A\}.$$

Πρόταση 9.2 *Έστω* $f, g : A \to \mathbf{R}$ *και* $\lambda \in \mathbf{R}$.
(1) *Είναι* $\|f\|_A = 0$ *αν και μόνο αν η* f *είναι η μηδενική συνάρτηση στο* A.
(2) $\|f+g\|_A \leq \|f\|_A + \|g\|_A$.

(3) $\|\lambda f\|_A = |\lambda| \|f\|_A$.
(4) $\|fg\|_A \leq \|f\|_A \|g\|_A$.

Απόδειξη: (1) Αν $f = 0$ στο A, τότε $|f(x)| = 0$ για κάθε $x \in A$, οπότε $\|f\|_A = 0$. Αντιστρόφως, έστω $\|f\|_A = 0$. Τότε είναι $|f(x)| \leq 0$ και, επομένως, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.
(2) Για κάθε $x \in A$ ισχύει $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_A + \|g\|_A$. Άρα $\|f + g\|_A \leq \|f\|_A + \|g\|_A$.
(3) Αν $\lambda = 0$, τότε, βάσει του (1), και οι δυο μεριές της $\|\lambda f\|_A = |\lambda| \|f\|_A$ είναι ίσες με 0. Έστω, λοιπόν, $\lambda \neq 0$. Για κάθε $x \in A$ ισχύει $|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| \|f\|_A$. Άρα $\|\lambda f\|_A \leq |\lambda| \|f\|_A$. Ομοίως, για κάθε $x \in A$ ισχύει $|f(x)| = \frac{1}{|\lambda|} |\lambda f(x)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_A$. Άρα $\|f\|_A \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_A$ και, επομένως, $|\lambda| \|f\|_A \leq \|\lambda f\|_A$. Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες, βρίσκουμε $\|\lambda f\|_A = |\lambda| \|f\|_A$.
(4) Για κάθε $x \in A$ ισχύει $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_A \|g\|_A$. Άρα $\|fg\|_A \leq \|f\|_A \|g\|_A$. $\natural$

Απλή συνέπεια της Πρότασης 9.2 είναι ότι ισχύει $\|f - g\|_A = 0$ αν και μόνο αν οι f, g ταυτίζονται στο A. Επίσης, ισχύει $\|f - g\|_A \leq \|f - h\|_A + \|h - g\|_A$ και $\|\lambda f - \lambda g\|_A = |\lambda| \|f - g\|_A$ για κάθε $f, g, h : A \to \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Έστω $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ και $f : A \to \mathbf{R}$. Λέμε ότι **η** (f_n) **συγκλίνει στην** f **ομοιόμορφα στο A** και συμβολίζουμε

$$f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f \quad \text{στο } A \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f \quad \text{στο } A$$

αν $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_A = 0$. Με άλλα λόγια, είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$ *ώστε* $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\} = \|f_n - f\|_A \leq \epsilon$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

Επειδή η ανισότητα $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\} \leq \epsilon$ ισοδυναμεί με το ότι $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$, ο παραπάνω ορισμός διατυπώνεται και ως εξής: $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A *αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$ *ώστε* $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ *για κάθε* $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

Προσέξτε *πάρα πολύ καλά* τη διαφορά του ορισμού της ομοιόμορφης σύγκλισης από τον ορισμό της κατά σημείο σύγκλισης. (i) Το $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$, *ο οποίος εξαρτάται από τον* ϵ, ώστε $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. (ii) Το $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} f$ στο A σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $x \in A$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$, *ο οποίος εξαρτάται από τον* ϵ ***και*** *τον* x, ώστε $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

Στην ομοιόμορφη σύγκλιση η επιλογή του $n_0 \in \mathbf{N}$ εξαρτάται από τον $\epsilon > 0$ αλλά είναι «ομοιόμορφη» ως προς τον $x \in A$: για τον ίδιο $\epsilon > 0$ υπάρχει *ένας, ο ίδιος,* $n_0 \in \mathbf{N}$ για *κάθε* $x \in A$. Όμως, στην κατά σημείο σύγκλιση, για τον ίδιο $\epsilon > 0$, μπορεί διαφορετικοί $x \in A$ να καθορίζουν διαφορετικούς $n_0 \in \mathbf{N}$.

Παράδειγμα: Ας δούμε πάλι το παράδειγμα (4) της προηγούμενης ενότητας, όπου $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ για κάθε $x \in (0, 1]$, $n \in \mathbf{N}$ και όπου είδαμε ότι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} 0$ στο $(0, 1]$. Θα αποδείξουμε ότι *δεν* ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $(0, 1]$.

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $(0, 1]$. Έστω $0 < \epsilon < 1$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\frac{1}{1+nx} = |\frac{1}{1+nx} - 0| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in (0,1]$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Επειδή ισχύει $\frac{1}{1+nx} \leq \epsilon$ για κάθε $x \in (0,1]$, συνεπάγεται $1 = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+nx} \leq \epsilon$ και καταλήξαμε σε άτοπο.

Θα επαναλάβουμε, υπολογίζοντας την $\|f_n - 0\|_{(0,1]} = \|f_n\|_{(0,1]}$ $(n \in \mathbf{N})$. Για κάθε $x \in (0,1]$ είναι $|\frac{1}{1+nx}| = \frac{1}{1+nx} < 1$, οπότε ο 1 είναι άνω φράγμα του $\{|\frac{1}{1+nx}| : x \in (0,1]\}$. Επειδή $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+nx} = 1$, συνεπάγεται ότι, για κάθε $u < 1$, ισχύει $\frac{1}{1+nx} > u$ κοντά στον 0. Άρα κανένας $u < 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{|\frac{1}{1+nx}| : x \in (0,1]\}$ και, επομένως, $\|f_n\|_{(0,1]} = \sup\{|\frac{1}{1+nx}| : x \in (0,1]\} = 1$. Άρα δεν ισχύει $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{(0,1]} = 0$.

Ας κατανοήσουμε τι σημαίνει «γεωμετρικά» η ανισότητα $\|f - g\|_A \leq \epsilon$. Η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί με το ότι $|f(x) - g(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$ κι αυτό με το ότι $g(x) - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) + \epsilon$ για κάθε $x \in A$ κι αυτό με το ότι το γράφημα της f βρίσκεται ολόκληρο ανάμεσα στο γράφημα της $g - \epsilon$ και στο γράφημα της $g + \epsilon$, δηλαδή, μέσα στη ζώνη που δημιουργείται συμμετρικά γύρω από το γράφημα της g και έχει κατακόρυφο πλάτος 2ϵ. Άρα το $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ τα γραφήματα όλων των f_n $(n \in \mathbf{N})$ από κάποιον $n \in \mathbf{N}$ και πέρα, βρίσκονται *ολόκληρα* μέσα στη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ϵ συμμετρικά γύρω από το γράφημα της f.

Παράδειγμα: Ξαναγυρνάμε στο παράδειγμα (4) της προηγούμενης ενότητας, όπου $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} 0$ στο $(0,1]$. Αν σχεδιάσετε τα γραφήματα των f_n $(n \in \mathbf{N})$, θα δείτε ότι, για μικρούς $\epsilon > 0$ (συγκεκριμένα: για $0 < \epsilon < 1$), τα γραφήματα αυτά έχουν *όλα* κάποιο τμήμα τους *έξω* από τη ζώνη συμμετρικά γύρω από το γράφημα της 0 κατακόρυφου πλάτους 2ϵ. Άρα δεν ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $(0,1]$.

Ας επανεξετάσουμε τα έντεκα παραδείγματα της προηγούμενης ενότητας.

Παραδείγματα: (1) Εύκολα υπολογίζουμε $\|f_n - f\|_A = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A.

(2) $\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $[0,+\infty)$.

(3) $\|f_n\|_{[0,1]} = \frac{1}{2}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα δεν είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $[0,1]$.

(4) $\|f_n\|_{(0,1]} = 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα δεν είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $(0,1]$.

(5) $\|f_n\|_{\mathbf{R}} = +\infty$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα δεν είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $\mathbf{R}$.

(6) $\|f_n\|_{(1,+\infty)} = 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα δεν είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $(1,+\infty)$.

(7) $\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $[0,+\infty)$.

(8) $\|f_n - f\|_{[0,1]} = 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα δεν είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο $[0,1]$.

(9) $\|f_n\|_{[0,1]} = n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα δεν είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $[0,1]$.

(10) $\|f_n\|_{[0,2\pi]} = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $[0,2\pi]$.

(11) Λόγω της Πρότασης 9.3, η (f_n) δε συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$. Επίσης,

Πρόταση 9.3 *Αν* $\lim_{n\to+\infty} f_n \stackrel{\text{ομ}}{=} f$ *στο* A*, τότε* $\lim_{n\to+\infty} f_n \stackrel{\kappa.\sigma.}{=} f$ *στο* A*. Δηλαδή, η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη: Για κάθε $x \in A$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_A$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα, για κάθε $x \in A$, είναι $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. $\natural$

Βάσει της Πρότασης 9.3, μπορούμε, πιο εύκολα, να βρούμε τη συνάρτηση προς την οποία συγκλίνει (αν συγκλίνει) μια ακολουθία (f_n) ομοιόμορφα σε ένα σύνολο A. Πρώτα βρίσκουμε f ώστε $\lim_{n\to+\infty} f_n \stackrel{\kappa.\sigma.}{=} f$ στο A. Αυτό είναι εύκολο, διότι για κάθε $x \in A$ έχουμε να κάνουμε με την ακολουθία *αριθμών* $(f_n(x))$. Βρίσκουμε, λοιπόν, για κάθε $x \in A$ το όριο της $(f_n(x))$ (αν αυτό υπάρχει και είναι αριθμός), το ονομάζουμε $f(x)$ και δημιουργούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Απομένει να εξετάσουμε αν $\lim_{n\to+\infty} f_n \stackrel{\text{ομ}}{=} f$ στο A, υπολογίζοντας την $\|f_n - f\|_A$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Έστω $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) χαρακτηρίζεται **ομοιόμορφα φραγμένη στο** A αν υπάρχει M ώστε $\|f_n\|_A \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$.

Πρόταση 9.4 *Έστω αριθμοί* λ, μ, $\lim_{n\to+\infty} f_n \stackrel{\text{ομ}}{=} f$, $\lim_{n\to+\infty} g_n \stackrel{\text{ομ}}{=} g$ *στο* A.
(1) $\lim_{n\to+\infty}(\lambda f_n + \mu g_n) \stackrel{\text{ομ}}{=} \lambda f + \mu g$ *στο* A.
(2) *Αν οι* (f_n), (g_n) *είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο* A*, τότε* $\lim_{n\to+\infty} f_n g_n \stackrel{\text{ομ}}{=} fg$ *στο* A.
(3) *Αν οι* (f_n), $\left(\frac{1}{g_n}\right)$ *είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο* A*, τότε* $\lim_{n\to+\infty} \frac{f_n}{g_n} \stackrel{\text{ομ}}{=} \frac{f}{g}$ *στο* A.

Απόδειξη: (1) Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει $\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_A \leq |\lambda|\|f_n - f\|_A + |\mu|\|g_n - g\|_A$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_A = 0$.
(2) Υπάρχει M ώστε $\|f_n\|_A, \|g_n\|_A \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $|f_n(x)|, |g_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$. Από την Πρόταση 9.3 συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ και, επομένως, $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$. Ομοίως, $|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$. Άρα $\|f\|_A, \|g\|_A \leq M$.

Τώρα, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει $f_n g_n - fg = (f_n - f)(g_n - g) + f(g_n - g) + g(f_n - f)$ και, επομένως, $\|f_n g_n - fg\|_A \leq \|f_n - f\|_A \|g_n - g\|_A + \|f\|_A \|g_n - g\|_A + \|g\|_A \|f_n - f\|_A$. Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι $\lim_{n\to+\infty} \|f_n g_n - fg\|_A = 0$.
(3) Άμεση συνέπεια του (2). Μόνο μια επισήμανση. Υπάρχει M ώστε $\left|\frac{1}{g_n(x)}\right| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $x \in A$. Αυτό, ειδικότερα, σημαίνει ότι $g_n(x) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $x \in A$ και, επομένως, ορίζονται οι $\frac{f_n}{g_n} : A \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$. Επίσης, επειδή $|g_n(x)| \geq \frac{1}{M} > 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $x \in A$, συνεπάγεται $|g(x)| \geq \frac{1}{M} > 0$ για κάθε $x \in A$. Άρα ορίζεται και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbf{R}$. $\natural$

Θεώρημα 9.1 ***Κριτήριο του Cauchy***. *Η* (f_n) *συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο* A *αν και μόνο αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$ *ώστε* $\|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon$ *για κάθε* $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$.

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_A \leq \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Επομένως, (με απλή αλλαγή συμβόλου) $\|f_m - f\|_A \leq \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε

$m \in \mathbf{N}$, $m \geq n_0$. Άρα, για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$ ισχύει $\|f_n - f_m\|_A \leq \|f_n - f\|_A + \|f_m - f\|_A < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon$ για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$.

Έστω $x \in A$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon$ για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$. Άρα η ακολουθία (αριθμών) $(f_n(x))$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό. Ορίζουμε $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, οπότε δημιουργείται συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$ με την ιδιότητα: $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} f$ στο A.

Η υπόθεσή μας είναι ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$. Θεωρώντας το όριο $\lim_{m\to+\infty}$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_A \leq \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A. ♮

Τώρα θα δούμε ότι με την ομοιόμορφη σύγκλιση έχουμε πιο ικανοποιητικές απαντήσεις στα τρία ερωτήματα που διατυπώθηκαν στο τέλος της ενότητας 9.1 απ΄ ότι με την κατά σημείο σύγκλιση.

Θεώρημα 9.2 *Έστω $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A, $\xi \in A$. Αν κάθε f_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι συνεχής στον ξ, τότε η f είναι συνεχής στον ξ. Ειδικώτερα, αν κάθε f_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι συνεχής στο A, τότε η f είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\|f_{n_0} - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}$. Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Άρα $|f(x) - f(\xi)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + |f_{n_0}(\xi) - f(\xi)| \leq \|f_{n_0} - f\|_A + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + \|f_{n_0} - f\|_A < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ για κάθε $x \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$. Άρα η f είναι συνεχής στον ξ. ♮

Παράδειγμα: Στο παράδειγμα (8) μπορούμε να συμπεράνουμε, χωρίς υπολογισμό της $\|f_n - f\|_{[0,1]}$, ότι δεν είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο $[0,1]$, αφού κάθε f_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι συνεχής στον 1 ενώ η f *δεν* είναι συνεχής στον 1.

Θεώρημα 9.3 *Έστω $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο $[a,b]$. Αν κάθε f_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Ορίζουμε $\epsilon' = \frac{\epsilon}{1+2(b-a)} > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} \leq \epsilon'$. Επίσης, υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ ώστε $\overline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) < \epsilon'$. Ορίζουμε $u_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $u_k{}' = \sup\{f_{n_0}(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $l_k{}' = \inf\{f_{n_0}(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$.

Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $f(x) \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + f_{n_0}(x) \leq \|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} + u_k{}' \leq \epsilon' + u_k{}'$. Άρα $u_k \leq \epsilon' + u_k{}'$. Ομοίως, $f(x) \geq -|f(x) - f_{n_0}(x)| + f_{n_0}(x) \geq -\|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} + l_k{}' \geq -\epsilon' + l_k{}'$ και, επομένως, $l_k \geq -\epsilon' + l_k{}'$. Συνεπάγεται

$u_k - l_k \le u_k{}' - l_k{}' + 2\epsilon'$. Άρα $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n}(u_k{}' - l_k{}')(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} 2\epsilon'(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(f_{n_0};a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0};a,b;\Delta) + 2\epsilon'(b-a) < (1+2(b-a))\epsilon' = \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Επομένως, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει $\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \le \int_a^b |f_n - f| \le \|f_n - f\|_{[a,b]}(b-a)$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = 0$. ♮

Πολλές φορές, όταν πρόκειται να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 9.3, η f είναι *εμφανώς ολοκληρώσιμη* στο $[a,b]$. Για παράδειγμα, μπορεί όλες οι f_n $(n \in \mathbf{N})$ να είναι συνεχείς στο $[a,b]$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.2, η f είναι κι αυτή συνεχής στο $[a,b]$. Ή μπορεί να γνωρίζουμε τον τύπο της f και να διακρίνουμε ότι είναι κατά τμήματα συνεχής ή κατά τμήματα μονότονη στο $[a,b]$. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, το πρώτο και *σαφώς πιο δύσκολο* μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 9.3 (το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη του $\int_a^b f$) είναι περιττό και χρειάζεται μόνο η *σχετικά απλή* απόδειξη του $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Παράδειγμα: Στο παράδειγμα (9) είναι $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \frac{1}{2}$ και $\int_0^1 f = 0$. Άρα, χωρίς να υπολογίσουμε τις $\|f_n - f\|_{[0,1]}$, συμπεραίνουμε ότι δεν ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο $[0,1]$.

Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα (10), (11), δε μπορούμε να περιμένουμε ανάλογο θεώρημα για παραγώγους. Δηλαδή, το $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A *δε* συνεπάγεται το $\lim_{n\to+\infty} f_n{}' \overset{\text{ομ}}{=} f'$ στο A. Υπάρχει, όμως, ένα αποτέλεσμα στην αντίθετη κατεύθυνση.

Θεώρημα 9.4 *Έστω διάστημα I, $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ παραγωγίσιμες στο I και $g : I \to \mathbf{R}$. Αν $\lim_{n\to+\infty} f_n{}' \overset{\text{ομ}}{=} g$ στο I και η $(f_n(\xi))$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη: Έστω $x \in I$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\|f_n{}' - f_m{}'\|_I \le \frac{\epsilon}{2|x-\xi|+1}$ και $|f_n(\xi) - f_m(\xi)| \le \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \ge n_0$. Τώρα, για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \ge n_0$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, ξ ώστε $|f_n(x) - f_m(x)| \le \big|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(\xi) - f_m(\xi))\big| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| = |f_n{}'(\zeta) - f_m{}'(\zeta)||x - \xi| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \le \|f_n{}' - f_m{}'\|_I |x - \xi| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \le \frac{\epsilon}{2|x-\xi|+1}|x - \xi| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Άρα η $(f_n(x))$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει. Δηλαδή, για κάθε $x \in I$ υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Ορίζουμε, λοιπόν, $f : I \to \mathbf{R}$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, οπότε η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο I.

Έστω $x \in I$. Θα αποδείξουμε ότι $f'(x) = g(x)$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\|f_n{}' - g\|_I \le \frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Επίσης, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $\left|\frac{f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)}{y - x} - f_{n_0}{}'(x)\right| \le \frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $y \in I$, $0 < |y - x| < \delta_0$. Συνεπάγεται $\|f_n{}' - f_{n_0}{}'\|_I \le \|f_n{}' - g\|_I + \|f_{n_0}{}' - g\|_I \le \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$.

Έστω οποιοσδήποτε $y \in I$, $0 < |y - x| < \delta_0$ και $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$. Τότε

$\left|\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x}-g(x)\right| \leq \left|\frac{(f_n(y)-f_{n_0}(y))-(f_n(x)-f_{n_0}(x))}{y-x}\right|+\left|\frac{f_{n_0}(y)-f_{n_0}(x)}{y-x}-{f_{n_0}}'(x)\right|+ |{f_{n_0}}'(x)-g(x)|$. Κατ' αρχάς, $|{f_{n_0}}'(x)-g(x)| \leq \|{f_{n_0}}'-g\|_I \leq \frac{\epsilon}{4}$. Κατόπιν, υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, y ώστε $\left|\frac{(f_n(y)-f_{n_0}(y))-(f_n(x)-f_{n_0}(x))}{y-x}\right| = |{f_n}'(\zeta)-{f_{n_0}}'(\zeta)| \leq \|{f_n}'-{f_{n_0}}'\|_I \leq \frac{\epsilon}{2}$. Άρα $\left|\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x}-g(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}=\epsilon$. Αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ και κάθε $y \in I$, $0<|y-x|<\delta_0$. Παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-g(x)\right| \leq \epsilon$ για κάθε $y \in I$, $0<|y-x|<\delta_0$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=g(x)$ και, επομένως, $f'(x)=g(x)$.

Τέλος, θα δούμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε $[a,b] \subseteq I$. Ορίζουμε $M=\max\{|a-\xi|,|b-\xi|\}$, οπότε είναι $|x-\xi| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $\|{f_n}'-g\|_I \leq \frac{\epsilon}{2M+1}$ και $|f_n(\xi)-f(\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Τώρα, για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ και κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, ξ ώστε $|f_n(x)-f(x)| \leq \big|(f_n(x)-f(x))-(f_n(\xi)-f(\xi))\big|+|f_n(\xi)-f(\xi)| = |{f_n}'(\zeta)-f'(\zeta)||x-\xi|+|f_n(\xi)-f(\xi)| \leq \|{f_n}'-g\|_I M+|f_n(\xi)-f(\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2M+1}M+\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ ισχύει $\|f_n-f\|_{[a,b]} \leq \epsilon$. Άρα η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a,b]$. $\natural$

Παρατηρήστε στο Θεώρημα 9.4 ότι *υποθέτουμε* την ομοιόμορφη σύγκλιση της $({f_n}')$ και *συμπεραίνουμε* την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n). Επίσης, για την (f_n) *αρκεί* να υποθέσουμε την κατά σημείο σύγκλιση σε *ένα μόνο* σημείο ξ.

Ασκήσεις.

1. Έστω $f_n:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x)=xe^{-nx}$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$. Ποια είναι η f;

2. (1) Έστω $f_n:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,+\infty)$. Ποια είναι η f; Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. (2) Να επαναλάβετε με τις $f_n(x)=e^{-nx}$, $f_n(x)=nxe^{-nx}$.

3. Έστω $f_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ $(n \in \mathbf{N})$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $\mathbf{R}$. Ποια είναι η f; Αποδείξτε ότι, για κάθε δ, $0<\delta\leq 1$, η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $(-\infty,-1-\delta]\cup[-1+\delta,1-\delta]\cup[1+\delta,+\infty)$.

4. (1) Έστω $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A και $B \subseteq A$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο B. (2) Έστω $A=B\cup C$ και $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο B και στο C. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A.

5. Έστω $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A, η (x_n) είναι στο A, $\xi \in A$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n)=f(\xi)$. (*Υπόδ.:* $|f_n(x_n)-f(\xi)| \leq |f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(\xi)|$.)

6. Έστω $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A, ξ σημείο συσσώρευσης του A και έστω $y_n=\lim_{x\to\xi} f_n(x)$. Αποδείξτε ότι η (y_n) συγκλίνει και $\lim_{x\to\xi} f(x) =$

$\lim_{n\to+\infty} y_n$. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to\xi}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to\xi} f_n(x).$$

7. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = x^n$ και $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ με $g(1) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} gf_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $[0,1]$.

8. Έστω $f, g, f_n, g_n : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$, $\lim_{n\to+\infty} g_n \overset{\text{ομ}}{=} g$ και ότι δεν είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n g_n \overset{\text{ομ}}{=} fg$ στο $(0,+\infty)$.

9. Έστω $f_n : A \to [a,b]$ $(n \in \mathbf{N})$ και $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A. Αποδείξτε ότι $f : A \to [a,b]$. Αν, επιπλέον, η $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} g\circ f_n \overset{\text{ομ}}{=} g\circ f$ στο A. (*Υπόδ.:* Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.)

10. Αν $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο A και κάθε f_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι φραγμένη στο A, αποδείξτε ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A. (*Υπόδ.:* Κριτήριο Cauchy με $\epsilon = 1$.)

11. Έστω $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{n+1} \text{ ή } \frac{1}{n} < x, \\ (\sin\frac{\pi}{x})^2, & \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbf{R}$ και ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$. Ποια είναι η f; Ισχύει $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο $\mathbf{R}$; Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

12. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = n^p x(1-x^2)^n$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $[0,1]$. (*Υπόδ.:* Βρείτε το $\lim_{n\to+\infty} n^p a^n$ αν $0 \le a \le 1$.) Για ποιούς p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιούς p ισχύει $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$;

13. Έστω $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ $(n \in \mathbf{N})$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και $\lim_{n\to+\infty} f_n{}'(x) = f'(x)$, αν $x \ne 0$, αλλά δεν είναι $\lim_{n\to+\infty} f_n{}'(0) = f'(0)$.

14. Έστω $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$ $(n \in \mathbf{N})$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$ και $\lim_{n\to+\infty} f_n{}' \overset{\text{κ.σ.}}{=} 0$ στο $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n{}' \overset{\text{ομ}}{=} 0$ στο $(-\infty,-a] \cup [a,+\infty)$ αλλά όχι στο $[-a,a]$.

15. Έστω $f_n : [-1,1] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$. Αποδείξτε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[-1,1]$. Ποια είναι η f; Αποδείξτε ότι όλες οι f_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι παραγωγίσιμες στον 0 ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στον 0.

9.3 Το θεώρημα του Weierstrass.

Λήμμα 9.1 (1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.
(2) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
(3) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (n^2-n)x^2 + nx$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τον διωνυμικό τύπο $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k s^{n-k} = (t+s)^n$. Για το (1) θέτουμε $t = x$, $s = 1-x$. Για το (2) παραγωγίζουμε τον διωνυμικό τύπο ως προς t, πολλαπλασιάζουμε την ισότητα που προκύπτει με t και θέτουμε $t = x$, $s = 1-x$. Για το (3) παραγωγίζουμε δεύτερη φορά ως προς t, πολλαπλασιάζουμε με t και θέτουμε $t = x$, $s = 1-x$. $\natural$

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε μόνο ένα θεώρημα.

Θεώρημα 9.5 ***Weierstrass***. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ ώστε*

$$|p(x) - f(x)| \le \epsilon \qquad (x \in [a,b]).$$

Απόδειξη: Κατ΄ αρχάς θεωρούμε την περίπτωση του διαστήματος $[0,1]$.

Έστω $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[0,1]$. Έστω $\epsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x', x'' \in [0,1]$, $|x' - x''| < \delta_0$. Επίσης, η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει M ώστε $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [0,1]$. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $n \in \mathbf{N}$, $n \ge \max\{\frac{1}{{\delta_0}^4}, (\frac{M}{\epsilon})^2\}$ και το πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$. Θα αποδείξουμε ότι $|p(x) - f(x)| \le \epsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Έστω $x \in [0,1]$. Σύμφωνα με το Λήμμα 9.1, είναι $f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x) x^k (1-x)^{n-k}$. Άρα $p(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(f(\frac{k}{n}) - f(x)\big) x^k (1-x)^{n-k}$.

Χωρίζουμε τους αριθμούς $0, 1, \ldots, n$ σε δυο κατηγορίες. Το σύνολο A αποτελείται από τους $k = 0, 1, \ldots, n$ με την ιδιότητα: $|x - \frac{k}{n}| < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$. Το σύνολο B αποτελείται από τους υπόλοιπους $k = 0, 1, \ldots, n$, δηλαδή εκείνους με την ιδιότητα: $|x - \frac{k}{n}| \ge \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

Αν $k \in A$, συνεπάγεται $|x - \frac{k}{n}| < \delta_0$, οπότε $\big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\big| < \frac{\epsilon}{2}$. Επομένως, $\sum_{k \in A} \binom{n}{k} \big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{\epsilon}{2} \sum_{k \in A} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\epsilon}{2}$. Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 9.1.

Αν $k \in B$, είναι $\big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\big| \le \big|f(\frac{k}{n})\big| + |f(x)| \le 2M \le 2M\sqrt{n}(\frac{k}{n} - x)^2$. Άρα $\sum_{k \in B} \binom{n}{k} \big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} \le 2M\sqrt{n} \sum_{k \in B} (\frac{k}{n} - x)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le 2M\sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} (\frac{k}{n} - x)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{2Mx(1-x)}{\sqrt{n}} \le \frac{M}{2\sqrt{n}} \le \frac{\epsilon}{2}$. Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε, και πάλι, το Λήμμα 9.1.

Επομένως, $|p(x) - f(x)| \le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k \in A} \binom{n}{k} \big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in B} \binom{n}{k} \big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Άρα $|p(x) - f(x)| \le \epsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Θεωρούμε, τώρα, τη γενική περίπτωση διαστήματος $[a,b]$.

Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Ορίζουμε την $\phi : [0,1] \to [a,b]$, $\phi(t) = (b-a)t + a$ και την αντίστροφη $\psi : [a,b] \to [0,1]$, $\psi(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Κατόπιν, θεωρούμε τη σύνθεση $g = f \circ \phi : [0,1] \to \mathbf{R}$, $g(t) = f((b-a)t + a)$. Η g, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο $[0,1]$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης συνεπάγεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $q(t)$ ώστε $|q(t) - g(t)| \leq \epsilon$ για κάθε $t \in [0,1]$. Τώρα, θεωρούμε τη σύνθεση $p = q \circ \psi : [a,b] \to \mathbf{R}$, $p(x) = q(\frac{x-a}{b-a})$. Επειδή το $q(t)$ είναι πολυώνυμο, το $p(x)$ είναι κι αυτό πολυώνυμο και, μάλιστα, ίδιου βαθμού με το q. Από την $g = f \circ \phi$ συνεπάγεται η $f = g \circ \psi$. Τέλος, $|p(x) - f(x)| = |q(\psi(x)) - g(\psi(x))| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$. $\natural$

Παράδειγμα: Έστω η $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Ακολουθώντας τη διαδικασία της απόδειξης του Θεωρήματος 9.5, Θα βρούμε πολυώνυμο $p(x)$ ώστε να ισχύει $|\sqrt{x} - p(x)| \leq 10^{-4}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leq \frac{1}{2}10^{-4}$ για κάθε $x', x'' \in [0,1]$, $|x' - x''| \leq \frac{1}{4}10^{-8}$. Προφανώς, $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Άρα χρειαζόμαστε $n \geq \max\{4^4 10^{32}, 10^8\} = 4^4 10^{32}$. Με $n = 4^4 10^{32}$ σχηματίζουμε το ζητούμενο πολυώνυμο: $p(x) = \sum_{k=0}^{4^4 10^{32}} \binom{4^4 10^{32}}{k} \sqrt{\frac{k}{4^4 10^{32}}}\, x^k (1-x)^{4^4 10^{32} - k}$. Το πολυώνυμο αυτό είναι βαθμού $4^4 10^{32}$.

Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 9.5 γράφεται ισοδύναμα

$$\|p - f\|_{[a,b]} \leq \epsilon.$$

Από το Θεώρημα 9.5 συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p_n(x)$ ώστε $\|p_n - f\|_{[a,b]} \leq \frac{1}{n}$. Άρα υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\lim_{n \to +\infty} p_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο $[a,b]$. Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\lim_{n \to +\infty} p_n \overset{\text{ομ}}{=} f$ στο $[a,b]$ ή, ισοδύναμα, $\lim_{n \to +\infty} \|p_n - f\|_{[a,b]} = 0$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $\|p_n - f\|_{[a,b]} \leq \epsilon$. Άρα μια ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος του Weierstrass είναι: *αν η $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε*

$$\lim_{n \to +\infty} p_n \overset{\text{ομ}}{=} f \quad \text{στο } [a,b].$$

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις του Θεωρήματος 9.5. Η απόδειξη που μελετήσαμε είναι του S. Bernstein.

Ασκήσεις.

1. (1) Βρείτε πολυώνυμο $p(x)$ ώστε $\big|p(x) - |x|\big| \leq \frac{1}{100}$ για κάθε $x \in [-100, 100]$.
   (2) Βρείτε πολυώνυμο $p(x)$ ώστε $p(0) = 0$ και $|p(x) - \sin x| \leq \frac{1}{100}$ για κάθε $x \in [-100, 100]$.

2. Έστω $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ με την ιδιότητα: $\int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι $f = 0$. (*Υπόδ.:* Υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ ώστε $|p(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$. Βάσει της υπόθεσης, $\int_0^1 fp = 0$. Συνεπάγεται $0 \leq \int_0^1 f^2 = \int_0^1 f(f-p) \leq \int_0^1 |f||f-p| \leq \epsilon \int_0^1 |f|$.)

3. Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[1, +\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ ώστε $|p(\frac{1}{x}) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \geq 1$. (*Υπόδ.:* Έστω $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Θεωρήστε την $\phi : (0, 1] \to [1, +\infty)$, $\phi(t) = \frac{1}{t}$ και την αντίστροφη $\psi : [1, +\infty) \to (0, 1]$, $\psi(x) = \frac{1}{x}$. Έστω $g = f \circ \phi : (0, 1] \to \mathbf{R}$. Η g είναι συνεχής στο $(0, 1]$. Να ορίσετε $g(0) = l$.)

4. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $[0, +\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ ώστε $|p(e^{-x}) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \geq 0$. (*Υπόδ.:* Προσαρμόστε την υπόδειξη της προηγούμενης άσκησης.)

Κεφάλαιο 10

Σειρές συναρτήσεων.

10.1 Σειρές συναρτήσεων. Ορισμοί και ιδιότητες.

Έστω $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$. Θεωρούμε τα διαδοχικά αθροίσματα, δηλαδή τις συναρτήσεις $s_1 = f_1 : A \to \mathbf{R}$, $s_2 = f_1 + f_2 : A \to \mathbf{R}$, $s_3 = f_1 + f_2 + f_3 : A \to \mathbf{R}$ και, γενικότερα:

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n : A \to \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Δηλαδή, $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$.

Αν υπάρχει συνάρτηση $s : A \to \mathbf{R}$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} s_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A, τότε λέμε ότι η σειρά (συναρτήσεων) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ **συγκλίνει στη συνάρτηση** s **κατά σημείο στο** A και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Αν $\lim_{n\to+\infty} s_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A, τότε λέμε ότι η σειρά (συναρτήσεων) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ **συγκλίνει στη συνάρτηση** s **ομοιόμορφα στο** A και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Η συνάρτηση s_n ονομάζεται n**-οστό μερικό άθροισμα** των f_n $(n \in \mathbf{N})$. Η συνάρτηση s ονομάζεται **κατά σημείο άθροισμα** ή **ομοιόμορφο άθροισμα**, αντιστοίχως, της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ στο A.

Όπως και για τις σειρές αριθμών, υπάρχουν εναλλακτικοί συμβολισμοί ή και παραλλαγές των προηγούμενων συμβολισμών: $s \overset{\text{κ.σ.}}{=} f_1 + f_2 + \cdots$ ή $s \overset{\text{κ.σ.}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ ή $s \overset{\text{ομ}}{=} \sum_{n=m}^{+\infty} f_n$ κλπ.

Η ισότητα $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\kappa.\sigma.}{=} s$ στο A ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = s(x)$ κι αυτό ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $x \in A$ η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει στον αριθμό $s(x)$. Με άλλα λόγια, *το ότι* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} s$ *στο* A *ισοδυναμεί με το ότι* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = s(x)$ *για κάθε* $x \in A$.

Πρόταση 10.1 *Αν* $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{o\mu}{=} s$ *στο* A*, τότε* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\kappa.\sigma.}{=} s$ *στο* A.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ $(n \in \mathbf{N})$, οπότε η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των ορισμών και της Πρότασης 9.3. ♮

Παράδειγμα: Η γνωστή μας γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Γνωρίζουμε ότι η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση $s : (-1,1) \to \mathbf{R}$, $s(x) = \frac{1}{1-x}$ κατά σημείο στο $(-1,1)$. Δηλαδή, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \overset{\kappa.\sigma.}{=} \frac{1}{1-x}$ στο $(-1,1)$.

Ας δούμε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $(-1,1)$. Για κάθε $x \in (-1,1)$ είναι $s_n(x) = 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$, οπότε $|s_n(x)-s(x)| = \frac{|x|^n}{1-x}$. Επειδή $\lim_{x\to1-} \frac{|x|^n}{1-x} = +\infty$, είναι $\|s_n - s\|_{(0,1)} = +\infty$. Άρα η $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ δε συγκλίνει στην $\frac{1}{1-x}$ ομοιόμορφα στο $(-1,1)$.

Πρόταση 10.2 *Έστω αριθμοί* λ, μ, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{o\mu}{=} s$, $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \overset{o\mu}{=} t$ *στο* A*. Τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda f_n + \mu g_n) \overset{o\mu}{=} \lambda s + \mu t \text{ στο } A.$$

Το ίδιο ισχύει και για την κατά σημείο σύγκλιση.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$, $t_n = g_1 + \cdots + g_n$ $(n \in \mathbf{N})$ και εφαρμόζουμε τις Προτάσεις 9.1, 9.4. ♮

Θεώρημα 10.1 ***Κριτήριο του Cauchy***. *Η* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο* A *αν και μόνο αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbf{N}$ *ώστε* $|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \le \epsilon$ *για κάθε* $x \in A$ *και κάθε* $n, m \in \mathbf{N}$, $n > m \ge n_0$.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.1 στις $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ $(n \in \mathbf{N})$. ♮

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ένα *εξαιρετικά χρήσιμο* κριτήριο για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

Θεώρημα 10.2 ***Κριτήριο του Weierstrass***. *Έστω* $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ *και* $\|f_n\|_A \le M_n$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$ *ή, ισοδύναμα,* $|f_n(x)| \le M_n$ *για κάθε* $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$*. Αν η σειρά (αριθμών)* $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ *συγκλίνει, τότε η σειρά (συναρτήσεων)* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο* A.

Πρώτη απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $M_{m+1} + \cdots + M_n < \epsilon$ για κάθε $m, n \in \mathbf{N}$, $n > m \ge n_0$. Άρα $|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \le |f_{m+1}(x)| + \cdots + |f_n(x)| \le M_{m+1} + \cdots + M_n < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ και $m, n \in \mathbf{N}$, $n > m \ge n_0$. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

Δεύτερη απόδειξη: Έστω $x \in A$. Ισχύει $|f_n(x)| \le M_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (και, μάλιστα, απολύτως) σε κάποιον αριθμό. Ορίζουμε $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Αυτό γίνεται για κάθε $x \in A$, οπότε ορίζεται συνάρτηση $s : A \to \mathbf{R}$ και, προφανώς, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\kappa.\sigma.}{=} s$ στο A.

Τώρα, θεωρούμε τα $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$, και έχουμε $|s_n(x) - s(x)| = \big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)\big| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$ για κάθε $x \in A$. Άρα $\|s_n - s\|_A \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Επίσης, θεωρούμε τα $S_n = M_1 + \cdots + M_n$ $(n \in \mathbf{N})$ και το $S = \sum_{n=1}^{+\infty} M_n$. Τότε $0 \leq \|s_n - s\|_A \leq S - S_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} \|s_n - s\|_A = 0$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Επειδή $\big|\frac{x^n}{n^2}\big| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$, $n \in \mathbf{N}$ και επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[-1,1]$.

(2) Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Επειδή $\big|\frac{\sin(nx)}{n^2}\big| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε x και $n \in \mathbf{N}$ και επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το ανάλογο για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων του Θεωρήματος 8.4 (κριτήρια Dirichlet και Abel) που αναφέρεται σε σειρές αριθμών. Θα παρατηρήσετε ότι στην απόδειξη, όπως και στο Θεώρημα 8.4, χρησιμοποιείται το Λήμμα 8.1 (άθροιση κατά μέρη).

Θεώρημα 10.3 *Έστω $f_n, g_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ και $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ $(n \in \mathbf{N})$.*
(1) Έστω ότι η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \in A$, ότι $\lim_{n\to+\infty} g_n \overset{o\mu}{=} 0$ και ότι η (s_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.
(2) Έστω ότι η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \in A$ και ομοιόμορφα φραγμένη στο A και ότι $\lim_{n\to+\infty} s_n \overset{o\mu}{=} s$ στο A (ή, ισοδύναμα, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{o\mu}{=} s$ στο A). Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

Απόδειξη: (1) Υπάρχει M ώστε $|s_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$. Επίσης, επειδή για κάθε $x \in A$ η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, συνεπάγεται $g_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $g_n(x) \leq \frac{\epsilon}{2M+1}$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $x \in A$, $n, m \in \mathbf{N}$, $n > m \geq n_0$ είναι $\big|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) g_k(x)\big| = \big|\sum_{k=m+1}^{n} s_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + s_n(x) g_{n+1}(x) - s_m(x) g_{m+1}(x)\big| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |s_k(x)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + |s_n(x)| g_{n+1}(x) + |s_m(x)| g_{m+1}(x) \leq M\big(\sum_{k=m+1}^{n}(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x) + g_{m+1}(x)\big) = M(g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x) + g_{n+1}(x) + g_{m+1}(x)) = 2M g_{m+1}(x) \leq \frac{2M\epsilon}{2M+1} < \epsilon$. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.
(2) Κατ' αρχάς υποθέτουμε ότι $s(x) = 0$, $g_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$.

Υπάρχει M ώστε $0 \leq g_n(x) \leq M$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $|s_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2M+1}$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Επομένως, για κάθε $x \in A$, $n, m \in \mathbf{N}$, $n > m \geq n_0$ ισχύει $\big|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) g_k(x)\big| = \big|\sum_{k=m+1}^{n} s_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + s_n(x) g_{n+1}(x) - s_m(x) g_{m+1}(x)\big| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |s_k(x)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + |s_n(x)| g_{n+1}(x) + |s_m(x)|$

$g_{m+1}(x) \leq \frac{\epsilon}{2M+1}\big(\sum_{k=m+1}^{n}(g_k(x)-g_{k+1}(x))+g_{n+1}(x)+g_{m+1}(x)\big) = \frac{2\epsilon g_{m+1}(x)}{2M+1} \leq \epsilon$. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

Στη γενική περίπτωση, υπάρχει l ώστε $g_n(x) \geq l$ για κάθε $x \in A$, $n \in \mathbf{N}$. Ορίζουμε ${f_1}^* = f_1 - s$, οπότε ${f_1}^* + \sum_{n=2}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} 0$. Τότε, βάσει της ειδικής περίπτωσης, η ${f_1}^*(g_1 - l) + \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(g_n - l)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A. Επειδή το ίδιο ισχύει και για την $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n l = l\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n = {f_1}^*(g_1-l)+\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(g_n-l)+\sum_{n=1}^{+\infty} f_n l+s(g_1-l)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A. ♮

Παράδειγμα: Έστω $a > 0$ και η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ με πεδίο ορισμού το $[a, +\infty)$.

Τα μερικά αθροίσματα των σταθερών συναρτήσεων $(-1)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα στο $[a, +\infty)$. Πράγματι, είναι $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n-1} = 1$ ή 0 για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Για κάθε $x \in [a, +\infty)$ η $\left(\frac{1}{n^x}\right)$ είναι, προφανώς, φθίνουσα. Τέλος, είναι $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} \overset{\text{ομ}}{=} 0$, διότι $\lim_{n\to+\infty} \sup\{|\frac{1}{n^x}| : x \in [a, +\infty)\} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0$. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

Θεώρημα 10.4 *Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A, $\xi \in A$. Αν κάθε f_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι συνεχής στον ξ, τότε η s είναι συνεχής στον ξ. Ειδικώτερα, αν κάθε f_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι συνεχής στο A, τότε η s είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.2 στις $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ $(n \in \mathbf{N})$. ♮

Θεώρημα 10.5 *Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο $[a, b]$. Αν κάθε f_n $(n \in \mathbf{N})$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η s είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b s.$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.3 στις $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ $(n \in \mathbf{N})$. ♮

Οι σχέσεις $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b s$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ συνδυάζονται ως *εναλλαγή των συμβόλων της άθροισης και της ολοκλήρωσης*:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,.$$

Θεώρημα 10.6 *Έστω διάστημα I, $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ παραγωγίσιμες στο I και $t : I \to \mathbf{R}$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} {f_n}' \overset{\text{ομ}}{=} t$ στο I και η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια s κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η s είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $s'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.4 στις $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ $(n \in \mathbf{N})$. ♮

Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 10.6 γράφεται και

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n{}',$$

ως *εναλλαγή των συμβόλων της άθροισης και της παραγώγισης.*

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-x)x^n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα στο $(-1,1]$. Ποια είναι αυτή η συνάρτηση;

2. Έστω $p>1$. Αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^p}$ συγκλίνουν σε κάποιες συναρτήσεις ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$. Είναι οι συναρτήσεις αυτές συνεχείς στο $\mathbf{R}$; παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$;

3. Έστω $p>\frac{1}{2}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^p(1+nx^2)}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$.

4. Έστω $a>0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[-a,a]$. (*Υπόδ.:* Χωρίστε τη σειρά σε δυο σειρές.) Αποδείξτε ότι η σειρά δε συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x.

5. Έστω $a>0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\sin(1+\frac{x}{n})$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[-a,a]$. (*Υπόδ.:* $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$, $|\sin x|\leq|x|$ και $0\leq 1-\cos x\leq\frac{x^2}{2}$.)

6. Έστω $f_n:A\to\mathbf{R}$ $(n\in\mathbf{N})$ ώστε $|f_n(x)-f_{n+1}(x)|\leq M_n$ για κάθε $x\in A$, $n\in\mathbf{N}$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

7. Έστω η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x}$. (1) Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $x>0$ και ότι αποκλίνει για $x=0$. (2) Αν $a>0$, αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. (3) Ορίζεται $s:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $s(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x}$. Είναι η s συνεχής στο $(0,+\infty)$; (*Υπόδ.:* Έστω $x\in(0,+\infty)$. Θεωρήστε a ώστε $0<a<x$.) Είναι η s φραγμένη στο $(0,+\infty)$; (*Υπόδ.:* Αποδείξτε ότι $s(\frac{1}{n^2})\geq\frac{n}{2}$.) (4) Συγκλίνει η σειρά στην s ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$;

8. Έστω η $I:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $I(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$ Έστω ακολουθία (x_n) ώστε $x_n\neq x_m$ για κάθε $n,m\in\mathbf{N}$, $n\neq m$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|<+\infty$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}c_nI(x-x_n)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση, έστω s, ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι η s είναι συνεχής σε κάθε $x\neq x_n$ $(n\in\mathbf{N})$ και ασυνεχής σε κάθε x_n $(n\in\mathbf{N})$ με πήδημα c_n στον x_n. (*Υπόδ.:* $s(x)=\sum_{k=1}^{n-1}c_kI(x-x_k)+c_nI(x-x_n)+\sum_{k=n+1}^{+\infty}c_kI(x-x_k)$. Παρατηρήστε ότι η $\sum_{k=1}^{n-1}c_kI(x-x_k)$ και η $\sum_{k=n+1}^{+\infty}c_kI(x-x_k)$ είναι συνεχείς στον x_n.)

9. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx-[nx]}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση, έστω s, ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι κάθε ρητός είναι σημείο ασυνέχειας της s και κάθε άρρητος είναι σημείο συνέχειας της s. Αποδείξτε ότι η s είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα.

10. Θεωρήστε την $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Γνωρίζουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x>1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ για κάθε $x\leq 1$. Ορίζουμε τη **ζ-συνάρτηση του Riemann,** $\zeta:(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, με τον τύπο:

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\qquad (1<x<+\infty).$$

(1) Αποδείξτε ότι για κάθε $a>1$ η σειρά συγκλίνει στην ζ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Συμπεράνατε ότι η ζ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$. (*Υπόδ.:* Έστω $x\in(1,+\infty)$. Θεωρήστε a ώστε $1<a<x$.) (2) Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n^x}$ συγκλίνει για κάθε $x>1$ και ότι για κάθε $a>1$ η ίδια σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. (3) Αποδείξτε ότι η ζ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ και

$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n^x}\qquad (1<x<+\infty).$$

10.2 Δυναμοσειρές.

Κάθε σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n=a_0+a_1(x-\xi)+a_2(x-\xi)^2+\cdots+a_n(x-\xi)^n+\cdots$$

ονομάζεται **δυναμοσειρά** με **κέντρο** ξ και **συντελεστές** $a_0,a_1,a_2,\ldots$. Αυτή είναι η σειρά των συναρτήσεων a_0 και $a_n(x-\xi)^n$ $(n\in\mathbf{N})$.

Παραδείγματα: (1) Η $\sum_{n=0}^{+\infty}0(x-\xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 0 ονομάζεται **μηδενική δυναμοσειρά** και, προφανώς, συγκλίνει για κάθε x και έχει άθροισμα ίσο με 0. Δηλαδή, $\sum_{n=0}^{+\infty}0(x-\xi)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}0=0$ για κάθε x.

(2) Η **γεωμετρική δυναμοσειρά** $\sum_{n=0}^{+\infty}1(x-\xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 1 συγκλίνει μόνο όταν $-1<x-\xi<1$ ή, ισοδύναμα, $\xi-1<x<\xi+1$ και το άθροισμά της είναι ίσο με $\frac{1}{1-(x-\xi)}$. Δηλαδή, $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n=\frac{1}{1-(x-\xi)}$ για κάθε $x\in(\xi-1,\xi+1)$.

Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$. Αν $\rho=\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ (οπότε $0\leq\rho\leq+\infty$), τότε ο αριθμός

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\,, & 0<\rho\leq+\infty,\\ +\infty, & \rho=0,\end{cases}$$

ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Θεώρημα 10.7 *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και R η ακτίνα σύγκλισής της. Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [\xi - R, \xi + R]$. Τέλος, για τους $x = \xi \pm R$ δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα εκτός, βέβαια, από την περίπτωση $R = 0$, οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως για $x = \xi$.*

Απόδειξη: Έστω $0 < R \leq +\infty$ ή, ισοδύναμα, $0 \leq \rho < +\infty$. Αν $|x-\xi| < R$, τότε $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi| \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-\xi|\rho < 1$ και, σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει απολύτως.

Έστω $0 \leq R < +\infty$ ή, ισοδύναμα, $0 < \rho \leq +\infty$. Αν $|x-\xi| > R$, τότε $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi| \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-\xi|\rho > 1$, οπότε η σειρά αποκλίνει.

Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n$ βρίσκουμε $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|1|} = 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi \pm 1$, καταλήγουμε στις σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ οι οποίες αποκλίνουν.

Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^n}{n^2}$ βρίσκουμε $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n^2}|} = 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi \pm 1$, καταλήγουμε στις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ οι οποίες συγκλίνουν.

Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^n}{n}$ βρίσκουμε $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} = 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi + 1$, καταλήγουμε στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει και, αν $x = \xi - 1$, στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει.

Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(x-\xi)^n}{n}$ βρίσκουμε $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\frac{(-1)^n}{n}|} = 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi + 1$, καταλήγουμε στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει και, αν $x = \xi - 1$, στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει. $\natural$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι σε κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ αντιστοιχίζεται η ακτίνα σύγκλισής της $R \in [0, +\infty]$ και ότι υπάρχουν τα εξής απλά ενδεχόμενα: (i) αν $R = +\infty$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$, (ii) αν $R = 0$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για $x = \xi$ και αποκλίνει για κάθε $x \neq \xi$ και (iii) αν $0 < R < +\infty$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [\xi - R, \xi + R]$. Στην περίπτωση (iii) μπορούμε να πούμε περισσότερα: η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in I$, όπου I είναι το διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$ στο οποίο μπορεί να έχουν προστεθεί ένα ή και τα δυο άκρα $\xi \pm R$. Δηλαδή $I = (\xi - R, \xi + R)$ ή $(\xi - R, \xi + R]$ ή $[\xi - R, \xi + R)$ ή $[\xi - R, \xi + R]$, ανάλογα με τη συγκεκριμένη σειρά. Γράφοντας $I = (-\infty, +\infty)$ στην περίπτωση (i) και $I = \{\xi\}$ στην περίπτωση (ii), βλέπουμε ότι σε κάθε περίπτωση η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in I$. Άρα σε κάθε $x \in I$ αντιστοιχίζεται ο αριθμός

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$$

και, επομένως, ορίζεται συνάρτηση $s : I \to \mathbf{R}$. Λέμε ότι **η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση** $s : I \to \mathbf{R}$ ή ότι **η** $s : I \to \mathbf{R}$ **ορίζεται από**

τη δυναμοσειρά και, προφανώς, *η δυναμοσειρά συγκλίνει στη συνάρτηση* s *κατά σημείο στο διάστημα* I. Το I ονομάζεται **διάστημα σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Παραδείγματα: (1) Το διάστημα σύγκλισης της γεωμετρικής δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n$ είναι το $I=(\xi-1,\xi+1)$. Η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση $s:(\xi-1,\xi+1)\to\mathbf{R}$, $s(x)=\frac{1}{1-(x-\xi)}$.

Όπως φαίνεται στο παράδειγμα αυτό, *η συνάρτηση* s *που ορίζεται από μια δυναμοσειρά ενδέχεται να επεκτείνεται και εκτός του διαστήματος σύγκλισης* I *της δυναμοσειράς*. Μπορεί, δηλαδή, να υπάρχει συνάρτηση $f:A\to\mathbf{R}$, όπου $I\subseteq A$, $I\neq A$, ώστε $f(x)=s(x)$ για κάθε $x\in I$. Πράγματι, στο παράδειγμα η $f:\mathbf{R}\setminus\{\xi+1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{1-(x-\xi)}$ είναι επέκταση της s. Όμως: *η δυναμοσειρά ορίζει την* s *και όχι την* f, διότι συγκλίνει μόνο στο διάστημα σύγκλισης $(\xi-1,\xi+1)$ και όχι σε ολόκληρο το μεγαλύτερο σύνολο $\mathbf{R}\setminus\{\xi+1\}$.

(2) Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-\xi)^n}{n^2}$ είναι το $I=[\xi-1,\xi+1]$.

(3) Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-\xi)^n}{n}$ είναι το $I=[\xi-1,\xi+1)$.

(4) Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-\xi)^n}{n}$ είναι το $I=(\xi-1,\xi+1]$.

(5) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}n^n(x-\xi)^n$. Είναι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|n^n|}=+\infty$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=\frac{1}{+\infty}=0$ και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $\{\xi\}$.

(6) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}(x-\xi)^n$. Είναι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|}=0$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=+\infty$ και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty,+\infty)$.

Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ και $a_n\neq 0$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αν $\rho_1=\liminf_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\rho_2=\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (οπότε $0\leq\rho_1\leq\rho_2\leq+\infty$), ορίζουμε

$$R_1=\begin{cases}\frac{1}{\rho_1}, & 0<\rho_1\leq+\infty,\\ +\infty, & \rho_1=0,\end{cases}\qquad R_2=\begin{cases}\frac{1}{\rho_2}, & 0<\rho_2\leq+\infty,\\ +\infty, & \rho_2=0.\end{cases}$$

Πρόταση 10.3 *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ *ώστε* $a_n\neq 0$ *για κάθε* $n\in\mathbf{N}$, R *η ακτίνα σύγκλισής της και οι* R_1, R_2 *που μόλις ορίστηκαν. Τότε* $R_2\leq R\leq R_1$.

Απόδειξη: Έστω $0<R_2\leq+\infty$ ή, ισοδύναμα, $0\leq\rho_2<+\infty$. Αν $0<|x-\xi|<R_2$, τότε $\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right|=|x-\xi|\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x-\xi|\rho_2<1$ και, σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας, η $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει απολύτως. Άρα $R_2\leq R$.

Έστω $0\leq R_1<+\infty$ ή, ισοδύναμα, $0<\rho_1\leq+\infty$. Αν $|x-\xi|>R_1$, τότε $\liminf_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right|=|x-\xi|\liminf_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x-\xi|\rho_1>1$, οπότε η σειρά αποκλίνει. Άρα $R_1\geq R$. $\natural$

Η άσκηση 13 της ενότητας 8.4 παρέχει δεύτερη απόδειξη της Πρότασης 10.3.

Σε πάρα πολλές περιπτώσεις η Πρόταση 10.3 μας δίνει έναν χρήσιμο εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης μιας δυναμοσειράς: παρατηρήστε ότι, αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *τότε* $R = R_1 = R_2$.

Το Θεώρημα 10.8 συμπληρώνει το Θεώρημα 10.7.

Θεώρημα 10.8 *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ *και* s *η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της* I. *Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην* s *ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του* I.

Απόδειξη: Έστω $b \in I$, $\xi < b$. Θεωρούμε τις σταθερές συναρτήσεις $f_1(x) = a_n(b-\xi)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ και τις $g_n(x) = \frac{(x-\xi)^n}{(b-\xi)^n}$ $(n \in \mathbf{N})$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.3(2): η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στη σταθερή συνάρτηση $s(b) - a_0$ ομοιόμορφα στο $[\xi, b]$ και η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \in [\xi, b]$ και ισχύει $|g_n(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [\xi, b]$, $n \in \mathbf{N}$. Άρα η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[\xi, b]$.

Αν $a \in I$, $a < \xi$, με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a, \xi]$.

Έστω, τώρα, οποιοδήποτε διάστημα $[a, b] \subseteq I$. Αν $\xi \leq a \leq b$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[\xi, b]$ και, επομένως, στο $[a, b]$. Αν $a \leq b \leq \xi$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a, \xi]$ και, επομένως, στο $[a, b]$. Τέλος, αν $a < \xi < b$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a, \xi]$ και στο $[\xi, b]$ και, επομένως, στο $[a, b]$. $\natural$

Το Θεώρημα 10.8 λέει ότι μια δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε *κλειστό και φραγμένο* υποδιάστημα του διαστήματος σύγκλισής της, I. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι η δυναμοσειρά εν γένει δε συγκλίνει ομοιόμορφα στο I.

Παραδείγματα: (1) Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ συγκλίνει στην $\frac{1}{1-x}$ κατά σημείο αλλά *όχι ομοιόμορφα* στο $(-1, 1)$. Από την άλλη μεριά, η ίδια δυναμοσειρά συγκλίνει στην $\frac{1}{1-x}$ ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε $[a, b]$, $-1 < a \leq b < 1$.

(2) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο διάστημα σύγκλισής της, το $[-1, 1)$. Επομένως, η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε $[a, b]$, $-1 \leq a \leq b < 1$.

Στις επόμενες προτάσεις θα εξετάσουμε μερικές σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης η οποία ορίζεται από μια δυναμοσειρά.

Θεώρημα 10.9 *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$. *Η συνάρτηση* s *που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της,* I, *είναι συνεχής στο* I.

Απόδειξη: Έστω η εσωτερικό σημείο του I. Θεωρούμε $a, b \in I$ ώστε $a < \eta < b$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a, b]$ και, επειδή κάθε συνάρτηση $a_n(x-\xi)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, η s είναι συνεχής στο $[a, b]$. Επειδή ο η είναι εσωτερικό σημείο του $[a, b]$, η s είναι συνεχής στον η. (Προσέξτε: αν ο η ήταν άκρο του $[a, b]$, η s θα ήταν συνεχής στον η μόνο από τη μια πλευρά του.)

Έστω ότι ο η είναι δεξιό άκρο του I. Η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[\xi,\eta]$ και, επειδή κάθε συνάρτηση $a_n(x-\xi)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ είναι συνεχής στο $[\xi,\eta]$, η s είναι συνεχής στο $[\xi,\eta]$ και, επομένως, είναι συνεχής στον η. Με το ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν ο η είναι αριστερό άκρο του I, η s είναι συνεχής στον η.

Άρα η s είναι συνεχής στο I. $\natural$

Θεώρημα 10.10 *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$. *Αν s είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της, I, τότε για κάθε $a,b \in I$ ισχύει*

$$\int_a^b s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\big((b-\xi)^{n+1}-(a-\xi)^{n+1}\big).$$

Απόδειξη: Αν $a,b \in I$, $a<b$, η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$, οπότε το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 10.5.

Η περίπτωση $a=b$ είναι προφανής και η $b<a$ ανάγεται στην $a<b$. $\natural$

Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 10.10 γράφεται και

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n\Big)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\big((b-\xi)^{n+1}-(a-\xi)^{n+1}\big)$$

και μπορεί να «διαβαστεί» ως εναλλαγή των συμβόλων της σειράς και του ολοκληρώματος.

Θεώρημα 10.11 *Έστω οι* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ *και* $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$.
(1) *Οι δυο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, έστω R.*
(2) *Αν I, I' είναι, αντιστοίχως, τα διαστήματα σύγκλισης των δυο δυναμοσειρών, τότε $I' \subseteq I$. Επίσης, αν $R>0$, τότε η συνάρτηση s που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά είναι παραγωγίσιμη στο I' και*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1} \qquad (x \in I').$$

Απόδειξη: (1) Έστω $\rho = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ και $\rho' = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|na_n|}$.

Αν $\rho=+\infty$, τότε, προφανώς, $\rho' \le \rho$. Έστω $0 \le \rho < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $x>\rho$ και, κατόπιν, οποιονδήποτε y ώστε $\rho<y<x$. Τότε ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|}<y$ και, επειδή, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{n}<\frac{x}{y}$. Άρα ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|}<y$ και $\sqrt[n]{n}<\frac{x}{y}$ και, επομένως, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|na_n|} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{x}{y}y = x$. Αν, τώρα, ήταν $x<\rho'$, τότε θα ίσχυε $\sqrt[n]{|na_n|}>x$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ και θα καταλήγαμε σε άτοπο. Άρα $\rho' \le x$. Επειδή αυτό το τελευταίο ισχύει για κάθε $x>\rho$, συνεπάγεται $\rho' \le \rho$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\rho' \le \rho$.

Αν $\rho'=+\infty$, τότε, προφανώς, $\rho \le \rho'$. Έστω $0 \le \rho' < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $x>\rho'$. Τότε ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|na_n|}<x$ και, επειδή $\sqrt[n]{n}>1$, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|} < x$. Αν, τώρα, ήταν $x < \rho$, τότε θα ίσχυε $\sqrt[n]{|a_n|} > x$ για άπειρους $n \in \mathbf{N}$ και θα καταλήγαμε σε άτοπο. Άρα $\rho \leq x$. Επειδή αυτό το τελευταίο ισχύει για κάθε $x > \rho'$, συνεπάγεται $\rho \leq \rho'$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\rho \leq \rho'$.

Συμπεραίνουμε ότι $\rho' = \rho$ και, επομένως, οι δυναμοσειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, έστω R.

Αν πολλαπλασιάσουμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ με $x-\xi$, τότε προκύπτει η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^n$. Άρα οι δυο δυναμοσειρές συγκλίνουν για τους ίδιους ακριβώς x, οπότε έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, δηλαδή τον R.
(2) Αν $R = 0$, τότε, προφανώς, $I' = I = \{\xi\}$. Για τα παρακάτω υποθέτουμε ότι $R > 0$. Επειδή οι δυο δυναμοσειρές έχουν το ίδιο κέντρο ξ και τις ίδιες ακτίνες σύγκλισης R, τα διαστήματα I, I' έχουν τα ίδια εσωτερικά σημεία και διαφέρουν *πιθανόν* ως προς τα άκρα τους.

Έστω η εσωτερικό σημείο του I' και, επομένως, και του I. Επιλέγουμε εσωτερικά σημεία a, b των I' και I ώστε $a < \eta < b$. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.6, η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με παράγωγο $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ $(x \in [a,b])$. Επειδή ο η είναι εσωτερικό σημείο του $[a,b]$, η s είναι παραγωγίσιμη στον η και $s'(\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(\eta-\xi)^{n-1}$. (Προσέξτε: αν ο η ήταν άκρο του $[a,b]$, η s θα ήταν παραγωγίσιμη στον η μόνο από τη μια πλευρά του.)

Έστω η δεξιό άκρο του I' και έστω ότι ο η *ανήκει* στο I'. Επιλέγουμε εσωτερικό σημείο a του I ώστε $a < \eta$. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,\eta]$ και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει για $x = a$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.6, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a,\eta]$. Ειδικότερα, η δυναμοσειρά συγκλίνει αν $x = \eta$ και, επομένως, ο η *ανήκει* στο I. Άρα η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,\eta]$. Σύμφωνα, πάλι, με το Θεώρημα 10.6, η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a,\eta]$ με παράγωγο $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ $(x \in [a,\eta])$. Ειδικότερα, η s είναι παραγωγίσιμη στον η και $s'(\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(\eta-\xi)^{n-1}$.

Η απόδειξη είναι ίδια αν ο η είναι αριστερό άκρο του I'. $\natural$

Παρατηρήστε ότι τα διαστήματα I, I' στο Θεώρημα 10.11 μπορούν να διαφέρουν *μόνο ως προς τα άκρα τους* με τον εξής τρόπο: αν το I περιέχει κάποιο από τα άκρα του, το I' μπορεί να το περιέχει αλλά μπορεί και να μην το περιέχει και, αν το I δεν περιέχει κάποιο από τα άκρα του, το I' δεν το περιέχει, επίσης.

Παρατηρήστε ότι η $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ γράφεται και

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$$

και μπορεί να «διαβαστεί» ως εναλλαγή των συμβόλων της σειράς και της παραγώγου.

Θα δούμε, τώρα, μερικά σημαντικά παραδείγματα.

Παραδείγματα: (1) Η γεωμετρική δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Γνωρίζουμε ότι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-1,1)$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 10.9, η συνάρτηση s που ορίζεται από αυτήν στο $(-1,1)$ είναι συνεχής στο $(-1,1)$. Αυτό επιβεβαιώνεται άμεσα, αφού γνωρίζουμε ότι $s(x)=\frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$. Η συνάρτηση αυτή είναι, προφανώς, και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ κι αυτό, όπως θα δούμε, επιβεβαιώνει το Θεώρημα 10.11.

Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.11. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης, επίσης, $R=1$ και διάστημα σύγκλισης, επίσης, $(-1,1)$. Ακόμη, ισχύει $s'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ ή, ισοδύναμα, $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Θυμηθείτε ότι έχουμε ήδη αποδείξει τον ίδιο τύπο, χρησιμοποιώντας το γινόμενο Cauchy σειρών. Επαναλαμβάνουμε την παραγώγιση όσες φορές θέλουμε, διατηρώντας το ίδιο κάθε φορά διάστημα σύγκλισης, και καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{m!}{(1-x)^{m+1}}=\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} \qquad (-1<x<1)$$

για κάθε $m\in\mathbf{N}$.

Ολοκληρώνοντας τη γεωμετρική σειρά βάσει του Θεωρήματος 10.10, βρίσκουμε $-\log(1-x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$ για κάθε $x\in(-1,1)$ ή, ισοδύναμα, $\log x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ για κάθε $x\in(0,2)$.

(2) **Η λογαριθμική δυναμοσειρά**: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.

Η δυναμοσειρά αυτή προέκυψε στο προηγούμενο παράδειγμα, μέσω της γεωμετρικής δυναμοσειράς, αλλά θα την μελετήσουμε και ανεξάρτητα από τη γεωμετρική δυναμοσειρά.

Είναι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\frac{(-1)^{n-1}}{n}|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=\frac{1}{1}=1$ και το διάστημα σύγκλισης έχει άκρα $1-1=0$, $1+1=2$. Για $x=0$ η δυναμοσειρά γίνεται $-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ και αποκλίνει. Για $x=2$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(0,2]$. Έστω $s(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ $(0<x\leq 2)$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Τότε η s είναι συνεχής στο $(0,2]$.

Θεωρούμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.11. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R=1$ και διάστημα σύγκλισης το $(0,2)$ ή το $(0,2]$. Για $x=2$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ και αποκλίνει, οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(0,2)$. Η s είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και ισχύει $s'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}$ για κάθε $x\in(0,2)$. Άρα $s'(x)=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}=\log' x$ για κάθε $x\in(0,2)$, οπότε υπάρχει c ώστε $s(x)-\log x=c$ για κάθε $x\in(0,2)$. Είναι $s(1)=0$, οπότε $c=0$. Συμπεραίνουμε ότι $s(x)=\log x$ για κάθε $x\in(0,2)$. Επειδή η s είναι συνεχής στο $(0,2]$, συνεπάγεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=s(2)=\lim_{x\to 2-}s(x)=\lim_{x\to 2-}\log x=\log 2$. Επομένως,

$$\log x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad (0<x\leq 2).$$

Ξαναβρίσκουμε, λοιπόν, την τελευταία σχέση του προηγούμενου παραδείγματος αλλά *και για τον* $x = 2$. Παρατηρήστε την ενδιαφέρουσα σχέση $\log 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$.

(3) **Η εκθετική δυναμοσειρά**: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

Είναι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = +\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$. Έστω $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ $(x \in \mathbf{R})$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Η s είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = s(x)$ για κάθε x. Τώρα, ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x} s(x)$ και βρίσκουμε ότι $f'(x) = -e^{-x} s(x) + e^{-x} s'(x) = 0$ για κάθε x. Άρα υπάρχει c ώστε $f(x) = c$ ή, ισοδύναμα, $s(x) = ce^x$ για κάθε x. Είναι $s(0) = 1$, οπότε $c = 1$ και συμπεραίνουμε ότι $s(x) = e^x$ για κάθε x. Δηλαδή

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Δείτε και την άσκηση 3 της ενότητας 8.5.

(4) **Η δυναμοσειρά του συνημιτόνου**, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, και **η δυναμοσειρά του ημιτόνου**, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$.

Η ακολουθία των συντελεστών της πρώτης δυναμοσειράς έχει διπλό τύπο: $a_{2k-1} = 0$, $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Άρα $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = \lim_{k\to+\infty} 0 = 0$ και $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}} = 0$. Επομένως, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $\mathbf{R}$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα για τη δεύτερη δυναμοσειρά. Έστω, τώρα, $c(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$ $(x \in \mathbf{R})$ οι συναρτήσεις που ορίζονται από τις δυναμοσειρές. Οι c, s είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ και $c'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2k \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-1} = -s(x)$, $s'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1) \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-2} = c(x)$ για κάθε x. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = (c(x) - \cos x)^2 + (s(x) - \sin x)^2$ και βρίσκουμε ότι $f'(x) = 2(c(x) - \cos x)(-s(x) + \sin x) + 2(s(x) - \sin x)(c(x) - \cos x) = 0$ για κάθε x. Άρα υπάρχει c ώστε $f(x) = c$ για κάθε x. Επειδή $f(0) = 0$, συνεπάγεται $(c(x) - \cos x)^2 + (s(x) - \sin x)^2 = 0$ για κάθε x. Άρα $c(x) = \cos x$, $s(x) = \sin x$ για κάθε x. Δηλαδή,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sin x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

(5) **Η δυναμοσειρά της τόξο-εφαπτόμενης**: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1}$.

Η ακολουθία των συντελεστών έχει διπλό τύπο: $a_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$, $a_{2k} = 0$. Άρα $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[2k-1]{2k-1}} = 1$ και $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to+\infty} 0 = 0$. Άρα $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι

$R = \frac{1}{1} = 1$ και το διάστημα σύγκλισης έχει άκρα -1, 1. Για $x = -1$ η δυναμοσειρά γίνεται $-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ και συγκλίνει. Για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1]$. Έστω $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1}$ $(x \in [-1, 1])$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Η s είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.

Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1) \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.11. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης, επίσης, $R = 1$. Για $x = \pm 1$ γίνεται $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ και αποκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης της νέας δυναμοσειράς είναι το $(-1, 1)$. Η s είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και $s'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα $s'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επομένως, υπάρχει c ώστε $s(x) - \arctan x = c$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επειδή $s(0) = 0$, συνεπάγεται $c = 0$, οπότε $s(x) = \arctan x$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επειδή η s είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, ισχύει $s(1) = \lim_{x \to 1-} s(x) = \lim_{x \to 1-} \arctan x = \arctan 1$ και $s(-1) = \lim_{x \to -1+} s(x) = \lim_{x \to -1+} \arctan x = \arctan(-1)$. Επομένως,

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} \qquad (-1 \le x \le 1).$$

Παρατηρήστε τη σχέση: $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

(6) **Η δυωνυμική σειρά**: $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, όπου οι αριθμοί $\binom{\alpha}{n}$ ορίζονται για κάθε α με τους τύπους

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Είναι φανερό ότι το σύμβολο $\binom{\alpha}{n}$ είναι επέκταση του γνωστού συμβόλου $\binom{m}{n}$, το οποίο είχε ορισθεί για $n, m \in \mathbf{Z}$, $0 \le n \le m$. Παρατηρήστε ότι, αν ο α είναι μη αρνητικός ακέραιος, τότε $\binom{\alpha}{n} = 0$ για κάθε $n \ge \alpha + 1$, οπότε η δυναμοσειρά γράφεται $1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha} x^\alpha = (1+x)^\alpha$, βάσει του δυωνυμικού τύπου του Newton. Επομένως, στην περίπτωση που ο α είναι μη αρνητικός ακέραιος η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Στην περίπτωση που ο α *δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος*, υπολογίζουμε $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = 1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 1. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι ένα από τα: $(-1, 1)$, $(-1, 1]$, $[-1, 1)$, $[-1, 1]$. Θα αποδείξουμε ότι (i) *αν* $\alpha \le -1$, *τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $(-1, 1)$, (ii) *αν* $-1 < \alpha < 0$, *τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $(-1, 1]$ *και* (iii) *αν* $\alpha \ge 0$ *(και ο* α *δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος), τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $[-1, 1]$. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 10.1 *Αν* $\mu, \nu > -1$, *τότε υπάρχουν δυο αριθμοί* $c_1, c_2 > 0$, *οι οποίοι* *εξαρτώνται μόνο από τους* μ, ν, *ώστε*

$$c_1 n^{\mu-\nu} \leq \frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq c_2 n^{\mu-\nu} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Απόδειξη: Γράφουμε $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} = (1+\frac{\mu-\nu}{\nu+1})(1+\frac{\mu-\nu}{\nu+2})\cdots(1+\frac{\mu-\nu}{\nu+n}) \leq e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}+\frac{\mu-\nu}{\nu+2}+\cdots+\frac{\mu-\nu}{\nu+n}} = e^{(\mu-\nu)(\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\cdots+\frac{1}{\nu+n})}$. Τώρα, αν $\nu \leq \mu$, συνεπάγεται $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{(\mu-\nu)\left(\frac{1}{\nu+1}+\int_1^n \frac{1}{\nu+x}\,dx\right)} = e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\frac{\nu+n}{\nu+1})^{\mu-\nu}$. Επειδή $\nu+n \leq (\nu+2)n$, συνεπάγεται $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\frac{\nu+2}{\nu+1})^{\mu-\nu} n^{\mu-\nu}$. Αν $\mu \leq \nu$, τότε $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{(\mu-\nu)\int_1^{n+1} \frac{1}{\nu+x}\,dx} = (\frac{\nu+n+1}{\nu+1})^{\mu-\nu}$ και, επειδή $\nu+n+1 \geq n$, συνεπάγεται $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq \frac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu}} n^{\mu-\nu}$. Επομένως, σε κάθε περίπτωση ισχύει $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq c_2 n^{\mu-\nu}$, όπου c_2 είναι ο αριθμός $e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\frac{\nu+2}{\nu+1})^{\mu-\nu}$ ή ο $\frac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu}}$ ανάλογα με το αν $-1 < \nu \leq \mu$ ή $-1 < \mu \leq \nu$, αντιστοίχως.

Αποδείχτηκε, λοιπόν, η δεξιά ανισότητα. Η αριστερή ανισότητα είναι ακριβώς ίδια με τη δεξιά (με $c_1 = \frac{1}{c_2}$), αρκεί να εναλλάξουμε τους ρόλους των μ, ν. $\natural$

Επιστρέφουμε στη μελέτη της σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ για $x = \pm 1$.

(i) Αν $x = 1$, η δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$.

Αν $\alpha < 0$, τότε $\binom{\alpha}{n} = (-1)^n \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αν $\alpha \leq -1$, τότε $|\binom{\alpha}{n}| \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε η σειρά αποκλίνει. Αν $-1 < \alpha < 0$, ο $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}$ φθίνει καθώς ο n αυξάνει και $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \leq c_2 n^{|\alpha|-1}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} = 0$. Άρα, αν $-1 < \alpha < 0$, η σειρά συγκλίνει. Παρεμπιπτόντως, βλέπουμε ότι $|\binom{\alpha}{n}| = \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \geq c_1 n^{|\alpha|-1}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε η σειρά δε συγκλίνει απολύτως.

Αν $\alpha \geq 0$, επειδή ο α δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος, ισχύει $m < \alpha < m+1$, όπου $m = [\alpha]$ είναι μη αρνητικός ακέραιος. Άρα για $n \in \mathbf{N}$, $n \geq m+1$ είναι $|\binom{\alpha}{n}| = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!} = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)} \frac{(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{(m+2)\cdots n} \leq c_2 \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$. Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

(ii) Αν $x = -1$, η δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n$.

Αν $\alpha < 0$, τότε $\binom{\alpha}{n}(-1)^n = \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \geq c_1 \frac{1}{n^{1-|\alpha|}}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε η σειρά αποκλίνει.

Αν $\alpha \geq 0$, ισχύει $m < \alpha < m+1$, όπου $m = [\alpha]$ είναι μη αρνητικός ακέραιος. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq m+1$ είναι $|\binom{\alpha}{n}(-1)^n| = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!} = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)} \frac{(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{(m+2)\cdots n} \leq c_2 \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Έστω I το διάστημα σύγκλισης της διωνυμικής δυναμοσειράς και s η συνάρτηση που ορίζεται από αυτήν στο I. Η s είναι συνεχής στο I και θα βρούμε τον τύπο της. Θεωρούμε και τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.11. Η νέα δυναμοσειρά έχει διάστημα σύγκλισης τουλάχιστον το $(-1,1)$, η s είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και $s'(x) =$

$\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Με λίγες πράξεις, συνεπάγεται $(1+x)s'(x)=\alpha s(x)$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Ορίζουμε την $f(x)=(1+x)^{-\alpha}s(x)$ $(x\in(-1,1))$, οπότε $f'(x)=-\alpha(1+x)^{-\alpha-1}s(x)+(1+x)^{-\alpha}s'(x)=0$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Άρα υπάρχει c ώστε $f(x)=c$ ή, ισοδύναμα, $s(x)=c(1+x)^\alpha$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Είναι $s(0)=1$, οπότε $c=1$ και, επομένως, $s(x)=(1+x)^\alpha$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Το διάστημα I ενδέχεται να περιέχει και έναν ή και τους δυο από τους ±1. Αν $\alpha>-1$, τότε $1\in I$ και, επειδή η s είναι συνεχής στο I, συνεπάγεται $s(1)=\lim_{x\to1-}s(x)=\lim_{x\to1-}(1+x)^\alpha=2^\alpha$. Αν $\alpha\geq0$ (και ο α δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος), τότε $-1\in I$ και, για τον ίδιο λόγο, συνεπάγεται $s(-1)=\lim_{x\to-1+}s(x)=\lim_{x\to-1+}(1+x)^\alpha=0$. Συμπέρασμα:

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

για κάθε x στο διάστημα $(-1,1)$, αν $\alpha\leq-1$, στο $(-1,1]$, αν $-1<\alpha<0$, και στο $[-1,1]$, αν $\alpha\geq0$ (και ο α δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος). Η σχέση αυτή ονομάζεται **γενικός δυωνυμικός τύπος του Newton**.

Αξίζει να ξεχωρίσουμε δυο ειδικές περιπτώσεις:

$$\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\frac{x^n}{2n-1}\qquad(-1\leq x\leq1).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}x^n\qquad(-1<x\leq1).$$

Ασκήσεις.

1. Βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}n^3x^n$.

2. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των $\sum_{n=0}^{+\infty}2^nx^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}n!x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{\sqrt{n^3+1}}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(2^n+\frac{3^n}{n}\big)x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^n}x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n+3^n+5^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{4n-3}x^{3n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n^2}}{\sqrt{n}}x^{n^2}$. Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης.

3. Έστω $R>0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ και s η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $(\xi-R,\xi+R)$. Αποδείξτε ότι

$$s^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{+\infty}n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-\xi)^{n-m}\quad(\xi-R<x<\xi+R)$$

και

$$s^{(m)}(\xi)=m!a_m\,.$$

4. Αναλόγως της τιμής του p, (i) βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n$ και (ii) αν s είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της, βρείτε σε ποιο διάστημα είναι η s παραγωγίσιμη.

5. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\big)^3 x^n$. Για τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης χρησιμοποιήστε το Λήμμα 10.1.

6. Θεωρήστε τη δυναμοσειρά

$$1+\frac{ab}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots .$$

Αυτή ονομάζεται **υπεργεωμετρική σειρά** και η συνάρτηση που ορίζεται από αυτήν στο διάστημα σύγκλισής της ονομάζεται **υπεργεωμετρική συνάρτηση** και συμβολίζεται $F(a,b,c;x)$. Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της υπεργεωμετρικής σειράς ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων a,b,c. Για τα άκρα του διαστήματος σύγκλισης χρησιμοποιήστε το Λήμμα 10.1.

7. Αποδείξτε ότι $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$ για κάθε $x\in(-1,1)$, γράφοντας το $\frac{1}{1+x^2}$ ως γεωμετρική σειρά. Κατόπιν, αποδείξτε ότι η σχέση αυτή ισχύει και για $x=\pm 1$.

8. Αποδείξτε ότι $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\,x^{2k-1}$ για κάθε $x\in(-1,1)$. (*Υπόδ.:* Χρησιμοποιήστε τον γενικό διωνυμικό τύπο του Newton με $a=-\frac{1}{2}$ και $-x^2$ στη θέση του x.) Αποδείξτε ότι

$$\arcsin x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\,x^{2k-1}\qquad(-1\le x\le 1).$$

9. Έστω αριθμοί p,q, όχι και οι δυο ίσοι με 0, και δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Υποθέτουμε ότι $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ για κάθε $n\in\mathbf{Z}$, $n\ge 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε x στο διάστημα σύγκλισής της η δυναμοσειρά έχει άθροισμα $\frac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$. Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

10.3 Σειρές Taylor.

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ ορίζει μια συνάρτηση στο διάστημα σύγκλισής της, το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τον ξ και περιέχει κανένα ή ένα ή και τα δυο άκρα του. Σ' αυτήν την ενότητα θα ακολουθήσουμε την αντίστροφη διαδικασία.

Έστω συνάρτηση $f:A\to\mathbf{R}$ και $\xi\in A$. Αν υπάρχει διάστημα $I\subseteq A$ με μέσο ξ, το οποίο *δεν αποτελείται μόνο από τον* ξ, και δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ ώστε $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ για κάθε $x\in I$, τότε λέμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ είναι η **σειρά Taylor της f στον** ξ.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Το διάστημα $(-1,1)$ με μέσο 0 περιέχεται στο σύνολο αυτό και υπάρχει η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ για την οποία ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Επομένως, η $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ είναι η σειρά Taylor της $\frac{1}{1-x}$ στον 0.

Η σειρά Taylor της f στον ξ, αν υπάρχει, είναι μοναδική. Πράγματι, είναι άμεση συνέπεια της άσκησης 3 της ενότητας 10.2 ότι οι συντελεστές της σειράς Taylor της f στον ξ είναι οι αριθμοί $a_0 = f(\xi)$ και $a_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ $(n \in \mathbf{N})$.

Θεώρημα 10.12 *Έστω $f : A \to \mathbf{R}$, $\xi \in A$, διάστημα $I \subseteq A$ με μέσο ξ, το οποίο δεν αποτελείται μόνο από τον ξ, και έστω ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο I. Τότε για κάθε $x \in I$, $n \in \mathbf{N}$ ισχύει*

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + R_{n,\xi}(x,\zeta) \text{ ή } R_{n,\xi}(x),$$

όπου $R_{n,\xi}(x,\zeta)$ είναι το υπόλοιπο Lagrange ή το υπόλοιπο Cauchy τάξης n και $R_{n,\xi}(x)$ είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο τάξης n.

Αν για κάθε $x \in I$ ισχύει $\lim_{n\to+\infty} R_{n,\xi}(x,\zeta) = 0$ ή $\lim_{n\to+\infty} R_{n,\xi}(x) = 0$, τότε η σειρά Taylor της f στον ξ είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$. Δηλαδή,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \qquad (x \in I).$$

Απόδειξη: Το πρώτο μέρος είναι απλή συνέπεια των Θεωρημάτων 5.5, 7.2. Το δεύτερο μέρος είναι προφανές: αν $\lim_{n\to+\infty} R_{n,\xi}(x,\zeta) = 0$ για κάθε $x \in I$, τότε $\lim_{n\to+\infty}\big(f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\big) = f(x)$ ή, ισοδύναμα, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = f(x)$ για κάθε $x \in I$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού m και οποιοσδήποτε ξ.

Για κάθε x και $n \in \mathbf{N}$, $n \geq m$ ισχύει $p^{(n+1)}(x) = 0$. Άρα το υπόλοιπο Lagrange είναι $R_{n,\xi}(x,\zeta) = \frac{p^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1} = 0$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} R_{n,\xi}(x,\zeta) = 0$. Άρα η σειρά Taylor της p στον ξ είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = p(\xi) + \frac{p'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{p^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m$. Δηλαδή,

$$p(x) = p(\xi) + \frac{p'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{p^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Αυτό είναι το λεγόμενο *ανάπτυγμα πολυωνύμου σε δυνάμεις του* $x - \xi$ (αντί του x). Φυσικά, στην περίπτωση $\xi = 0$, $p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{p^{(m)}(0)}{m!}x^m$.

(2) Η εκθετική συνάρτηση $\exp$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και, μάλιστα, ισχύει $\exp^{(n)} = \exp$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Ειδικότερα, είναι $\exp^{(n)}(0) = 1$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, οπότε η πιθανή σειρά Taylor της $\exp$ στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$.

Το υπόλοιπο Lagrange τάξης n της exp στον 0 είναι $R_{n,0}(x,\zeta) = \frac{e^\zeta}{(n+1)!}x^{n+1}$, όπου $\zeta \in [0,x]$ ή $\zeta \in [x,0]$. Αν $x \geq 0$, τότε $|R_{n,0}(x,\zeta)| = \frac{e^\zeta}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ και, αν $x \leq 0$, τότε $|R_{n,0}(x;\zeta)| = \frac{e^\zeta}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}$.

Αποδεικνύεται ότι, για κάθε a,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Το όριο αυτό είναι απλή συνέπεια της σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$. Ένας πιο άμεσος τρόπος να αποδείξουμε το $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ είναι ο εξής. Ορίζουμε $m = [|a|]$, οπότε για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq m+1$ ισχύει $0 \leq \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^m}{m!}\frac{|a|}{m+1}\cdots\frac{|a|}{n} \leq \frac{|a|^m}{m!}\frac{|a|}{m+1}\cdots\frac{|a|}{m+1} = \frac{(m+1)^m}{m!}(\frac{|a|}{m+1})^n$. Επειδή $0 \leq \frac{|a|}{m+1} < 1$, είναι $\lim_{n\to+\infty}(\frac{|a|}{m+1})^n = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a|^n}{n!} = 0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω όριο, βρίσκουμε $\lim_{n\to+\infty}|R_{n,0}(x,\zeta)| = 0$. Άρα η σειρά Taylor της exp στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$. Δηλαδή,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

(3) Η cos είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και $\cos^{(n)} = \pm\cos$ ή $\pm\sin$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Ειδικώτερα, είναι $\cos^{(n)}(0) = 1$ ή 0 ή -1 ή 0 αν είναι, αντιστοίχως, $n = 4k+0$ ή $+1$ ή $+2$ ή $+3$, $(k \in \mathbf{Z}, k \geq 0)$. Άρα η πιθανή σειρά Taylor της cos στον 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$.

Το υπόλοιπο Lagrange τάξης n της cos στον 0 είναι $R_{n,0}(x,\zeta) = \frac{\pm\cos\zeta}{(n+1)!}x^{n+1}$ ή $\frac{\pm\sin\zeta}{(n+1)!}x^{n+1}$, όπου $\zeta \in [0,x]$ ή $\zeta \in [x,0]$. Τότε $|R_{n,0}(x,\zeta)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}R_{n,0}(x,\zeta) = 0$. Επομένως, η σειρά Taylor της cos στον 0 είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$. Δηλαδή

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τη σειρά Taylor της sin στον 0:

$$\sin x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

(4) Η $\log(1+x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ και έχει παραγώγους n-οστής τάξης $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. Ειδικώτερα, οι παράγωγοι στον 0 είναι $(-1)^{n-1}(n-1)!$, οπότε η πιθανή σειρά Taylor της $\log(1+x)$ στον 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

Υπολογίζουμε το υπόλοιπο Lagrange στον 0: $R_{n,0}(x,\zeta) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)!}x^{n+1}$ $= \frac{(-1)^n}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)}x^{n+1}$, όπου $\zeta \in [0,x]$ ή $\zeta \in [x,0]$. Αν $0 < x \leq 1$, τότε $|R_{n,}(x,\zeta)| = \frac{x^{n+1}}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)} \leq \frac{1}{n+1}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} R_{n,0}(x,\zeta) = 0$.

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στον 0 είναι $R_{n,0}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}(x-t)^n\,dt =$ $(-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$. Αν $-1 < x \leq 0$, τότε $R_{n,0}(x) = -\int_x^0 \frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$, οπότε $|R_{n,0}(x)| = \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$. Τώρα, είναι $(\frac{t-x}{1+t})^n \leq |x|^n$ για κάθε $t \in [x,0]$, οπότε $|R_{n,0}(x)| \leq |x|^n \int_x^0 \frac{1}{1+t}\,dt = |x|^n \log\frac{1}{1+x}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} R_{n,0}(x) = 0$.

Άρα η σειρά Taylor της $\log(1+x)$ στον 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$. Δηλαδή,

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad (-1 < x \leq 1).$$

Προφανώς, η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την $\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ $(0 < x \leq 2)$ την οποία έχουμε αποδείξει στην προηγούμενη ενότητα.

Τώρα θα βρούμε τη σειρά Taylor της $\log(1+x)$ στον 0 με έναν άλλο τρόπο, χωρίς να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 10.12. Αυτός ο τρόπος θα εφαρμοστεί σε ένα ακόμη παράδειγμα, όπου θα είναι δύσκολη η εφαρμογή του Θεωρήματος 10.12.

Αρχίζουμε με τον γνωστό τύπο $\frac{1-(-t)^n}{1+t} = 1 + (-t) + \cdots + (-t)^{n-1}$, ο οποίος ισχύει για κάθε $t \neq -1$, και τον γράφουμε $\frac{1}{1+t} = 1 - t + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} +$ $(-1)^n\frac{t^n}{1+t}$. Επομένως, $\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t\,dt + \cdots + (-1)^{n-1}\int_0^x t^{n-1}\,dt +$ $(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$ για κάθε $x > -1$, οπότε $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n +$ $(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$ για κάθε $x > -1$.

Αν $0 \leq x \leq 1$, τότε $\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt = 0$.

Αν $-1 < x \leq 0$, τότε $\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| = \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{1+x}\int_x^0 |t|^n\,dt =$ $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{1}{(n+1)(1+x)}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt = 0$.

Άρα για κάθε $x \in (-1,1]$ ισχύει $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt = 0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right) = \log(1+x)$. Συνεπάγεται $\log(1+x) =$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ για κάθε x στο $(-1,1]$.

(5) Θα δούμε ότι η σειρά Taylor της $\arctan x$ στον 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ με διάστημα σύγκλισης το $[-1,1]$. Δηλαδή,

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} \qquad (-1 \leq x \leq 1).$$

Η $\arctan x$ έχει παράγωγο $\frac{1}{x^2+1}$ αλλά ο υπολογισμός των παραγώγων ανώτερης τάξης είναι περίπλοκος και δεν είναι βολική η εφαρμογή του Θεωρήματος 10.12. Γι αυτό καταφεύγουμε σε ένα τέχνασμα παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στο τέλος του προηγούμενου παραδείγματος.

Είναι $\frac{1-(-t^2)^n}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2}$, οπότε $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}$ για κάθε t. Επομένως, $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t^2\,dt + \int_0^x t^4\,dt - \cdots + (-1)^{n-1}\int_0^x t^{2n-2}\,dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$. Αυτό το γράφουμε $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$.

Αν $|x| \le 1$, τότε $\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt\right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \le \int_0^{|x|} t^{2n}\,dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \le \frac{1}{2n+1}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt = 0$.

Άρα $\lim_{n\to+\infty}\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right) = \arctan x$ ή, ισοδύναμα, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} = \arctan x$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

(6) Η παράγωγος n-οστής τάξης της $(1+x)^\alpha$ είναι $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ και, ειδικώτερα, στον 0 είναι $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$. Επομένως, η πιθανή σειρά Taylor της $(1+x)^\alpha$ στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

Αν ο α είναι μη αρνητικός ακέραιος, τότε αφ' ενός η $y = (1+x)^\alpha$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού α αφ' ετέρου η παραπάνω δυναμοσειρά γίνεται (όπως έχουμε ξαναπεί) πεπερασμένο άθροισμα $1 + \binom{\alpha}{1} x + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha} x^\alpha$. Στην περίπτωση αυτή η ισότητα

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha} x^\alpha$$

δεν είναι παρά ο δυωνυμικός τύπος του Newton και, επομένως, η παραπάνω δυναμοσειρά είναι, πράγματι, η σειρά Taylor της $y = (1+x)^\alpha$ στον 0 με διάστημα σύγκλισης το $\mathbf{R}$.

Αν ο α δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος, θα αποδείξουμε ότι και πάλι η σειρά Taylor της $(1+x)^\alpha$ στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. Δηλαδή,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

για κάθε x στο διάστημα $(-1,1)$, αν $\alpha \le -1$, στο $(-1,1]$, αν $-1 < \alpha < 0$, και στο $[-1,1]$, αν $\alpha \ge 0$ (και ο α δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος).

Το υπόλοιπο Lagrange είναι $R_{n,0}(x,\zeta) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\zeta)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1} = \binom{\alpha}{n+1}(1+\zeta)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$ για κάποιον $\zeta \in [0,x]$ ή $\zeta \in [x,0]$.

Αν $0 \le x \le 1$, τότε $x \le 1 \le 1+\zeta \le 2$ και, επομένως, $|R_{n,0}(x,\zeta)| = \left|\binom{\alpha}{n+1}\right|(1+\zeta)^\alpha(\frac{x}{1+\zeta})^{n+1}$. Τώρα, αν $a > 0$, εφαρμόζοντας προσεκτικά το Λήμμα 10.1, βρίσκουμε ότι για $n > [\alpha]$ είναι $|R_{n,0}(x,\zeta)| \le c_2 \binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}2^\alpha$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} R_{n,0}(x,\zeta) = 0$. Αν $-1 < \alpha < 0$, τότε, πάλι από το Λήμμα 10.1, $|R_{n,0}(x,\zeta)| \le c_2(n+1)^{-\alpha-1}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} R_{n,0}(x,\zeta) = 0$.

Αν $0 \le x < 1$ και $\alpha \le -1$, τότε, από το Λήμμα 10.1, $|R_{n,0}(x,\zeta)| \le \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| x^{n+1} \le c_2(n+1)^{-\alpha-1}x^{n+1}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} R_{n,0}(x,\zeta) = 0$.

Αν $-1 < x \leq 0$, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι $R_{n,0}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\, dt$, οπότε $|R_{n,0}(x)| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| \int_x^0 (1+t)^{\alpha-n-1}(t-x)^n\, dt$. Επειδή $\frac{t-x}{1+t} \leq -x$ για $x \leq t \leq 0$, είναι $|R_{n,0}(x)| \leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| |x|^n \int_x^0 (1+t)^{\alpha-1}\, dt = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| |x|^n \frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha} = (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| |x|^n \frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha}$. Αν $\alpha > 0$, τότε για $n > [\alpha]$ είναι $|R_{n,0}(x)| \leq c_2(n+1)\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}|x|^n \frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} R_{n,0}(x) = 0$. Αν $\alpha < 0$, τότε $|R_{n,0}(x)| \leq c_2(n+1)^{-\alpha}|x|^n \frac{(1+x)^\alpha-1}{|\alpha|}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} R_{n,0}(x) = 0$.

Συνοψίζουμε: σε κάθε περίπτωση εκτός μιας έχουμε αποδείξει ότι $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

Η μόνη περίπτωση που απομένει είναι όταν $x = -1$ και $\alpha > 0$. Τότε, όμως, δε μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 10.12, οπότε κάνουμε το εξής. Χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις της προηγούμενης παραγράφου για $-1 < x \leq 0$ και γράφουμε $\left|(1+x)^\alpha - 1 - \binom{\alpha}{1}x - \cdots - \binom{\alpha}{n}x^n\right| = |R_{n,0}(x)| \leq c_2(n+1)\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}|x|^n \frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha}$. Παίρνουμε όρια καθώς $x \to -1+$ και βρίσκουμε $\left|0 - 1 - \binom{\alpha}{1}(-1) - \cdots - \binom{\alpha}{n}(-1)^n\right| \leq c_2(n+1)\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}\frac{1}{\alpha}$. Συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \binom{\alpha}{1}(-1) + \cdots + \binom{\alpha}{n}(-1)^n\right) = 0$. Άρα και στην περίπτωση αυτή ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = (1+x)^\alpha$.

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους των $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-(-2)^n\right)x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$, $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\log a)^n}{n!}x^n$, $1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$, $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$.

2. Χρησιμοποιώντας τις σειρές Taylor των sin, cos στον ξ, αποδείξτε τους τύπους $\sin x = \sin\xi\cos(x-\xi) + \cos\xi\sin(x-\xi)$, $\cos x = \cos\xi\cos(x-\xi) - \sin\xi\sin(x-\xi)$, οι οποίοι είναι ισοδύναμοι με τους τύπους για το ημίτονο και το συνημίτονο αθροίσματος γωνιών.

3. Βρείτε τις σειρές Taylor στον 0 των $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4. Βρείτε τους αρχικούς όρους των σειρών Taylor στον 0 των $\tan x$, $\frac{1}{\cos x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$. (Δείτε, κατόπιν, την άσκηση 8 της ενότητας 10.2.)

5. Υπολογίστε τα αθροίσματα $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2-1}$.

6. Η άσκηση 13 της ενότητας 5.8 λέει ότι η $h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ότι $h^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n$ η σειρά Taylor της h στον 0;

7. (1) Αν $x \leq -1$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = -\infty$. (2) Αν $x > 1$, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$.

8. Έστω ότι ο α δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος. (1) Αν $\alpha < 0$ και $x \leq -1$ ή αν $\alpha > 0$, ο $[\alpha]$ είναι περιττός και $x < -1$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k = +\infty$. Επίσης, αν $\alpha > 0$, ο $[\alpha]$ είναι άρτιος και $x < -1$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k = -\infty$. (2) Αν $x > 1$ ή $x = 1$ και $\alpha \leq -1$, αποδείξτε ότι το $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k$ δεν υπάρχει.

10.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Α. Ορισμός μέσω δυναμοσειρών.

Στην υποενότητα αυτή θα δούμε έναν από τους «αναλυτικούς» ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και τις αποδείξεις των βασικών ιδιοτήτων τους. Όπως είχαμε αναφέρει στην ενότητα 3.2, μέχρι τώρα βασιστήκαμε στον «γεωμετρικό» ορισμό των συναρτήσεων αυτών, ο οποίος δεν θεωρείται επαρκής από τη σκοπιά της Ανάλυσης, και θεωρήσαμε γνωστές τις ιδιότητές τους.

Ξεκινάμε με τις δυναμοσειρές $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$, για τις οποίες γνωρίζουμε, από την ενότητα 10.2, ότι έχουν ως διάστημα σύγκλισης το $\mathbf{R}$. Στην ίδια ενότητα, «γνωρίζοντας» τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είχαμε «αποδείξει» ότι η πρώτη δυναμοσειρά είναι ίση με την $\cos x$ και η δεύτερη με την $\sin x$. Τώρα, όμως, δεχόμαστε ότι *δε γνωρίζουμε* τις $\cos x$, $\sin x$ και *θα τις ορίσουμε*, χρησιμοποιώντας τις δυναμοσειρές και τις ιδιότητές τους.

Επομένως, *ορίζουμε* τη συνάρτηση $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ να είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά και τη συνάρτηση $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ να είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δεύτερη δυναμοσειρά. Δηλαδή, *ορίζουμε*:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Από το Θεώρημα 10.11 συνεπάγεται ότι οι cos, sin είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ και $\cos' x = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k 2k\frac{x^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sin x$ και $\sin' x = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)\frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Δηλαδή,

$$\cos' x = -\sin x, \quad \sin' x = \cos x \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Ορίζουμε την $f(x) = (\sin x)^2 + (\cos x)^2$. Τότε $f'(x) = 2\sin x\sin' x + 2\cos x\cos' x = 2\sin x\cos x - 2\cos x\sin x = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα υπάρχει c ώστε $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = c$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Τώρα, $c = (\sin 0)^2 + (\cos 0)^2 = 1$, οπότε

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

και, επομένως,

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1 \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Μπορούμε, επίσης, να αποδείξουμε τις σχέσεις

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\ , \qquad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$. Οι σχέσεις αυτές μπορούν να αποδειχτούν χρησιμοποιώντας γινόμενα Cauchy σειρών, αλλά ο τρόπος αυτός είναι αρκετά περίπλοκος. Ένας δεύτερος τρόπος είναι ο εξής. Έστω $y \in \mathbf{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \cos(y-x)\cos x - \sin(y-x)\sin x$, οπότε $f'(x) = \sin(y-x)\cos x - \cos(y-x)\sin x + \cos(y-x)\sin x - \sin(y-x)\cos x = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα υπάρχει c ώστε $\cos(y-x)\cos x - \sin(y-x)\sin x = c$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Είναι $c = \cos(y-0)\cos 0 - \sin(y-0)\sin 0 = \cos y$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, οπότε $\cos(y-x)\cos x - \sin(y-x)\sin x = \cos y$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Αφού αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$, μετατρέπουμε το y σε $y+x$ και καταλήγουμε στην $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται είτε με παρόμοιο τρόπο είτε παραγωγίζοντας την πρώτη ισότητα ως προς το x.

Θα αποδείξουμε, τώρα, μερικές επιπλέον ιδιότητες των συναρτήσεων cos, sin και, κυρίως, *θα ορίσουμε τον αριθμό* π. Υπενθυμίζουμε ότι σε ένα από τα παραδείγματα της ενότητας 2.5 είχαμε ορίσει δυο ακολουθίες (p_n), (q_n) και είχαμε αποδείξει ότι αυτές συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό, τον 2π. Βάσει αυτού, θα μπορούσαμε να *ορίσουμε*: $\pi = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} q_n$. Θα είχαμε, όμως, δυσκολία στο να συσχετίσουμε τον π με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Γι αυτό θα ακολουθήσουμε άλλη πορεία.

Πρόταση 10.4 *Υπάρχει ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης* $\cos x = 0$.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς, είναι $\cos 0 = 1$. Επίσης, είναι $\cos 3 = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{3^{2k}}{(2k)!} = \lim_{k\to+\infty}\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{3^{2m}}{(2m)!}$. Αν ο k είναι άρτιος ≥ 4, τότε $\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{3^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{3^2}{2!} + \frac{3^4}{4!} - \left(\frac{3^6}{6!} - \frac{3^8}{8!}\right) - \cdots - \left(\frac{3^{2k-2}}{(2k-2)!} - \frac{3^{2k}}{(2k)!}\right) < 1 - \frac{3^2}{2!} + \frac{3^4}{4!} = -\frac{1}{8}$. Επίσης, αν ο k είναι περιττός ≥ 4, τότε $\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{3^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{3^2}{2!} + \frac{3^4}{4!} - \left(\frac{3^6}{6!} - \frac{3^8}{8!}\right) - \cdots - \left(\frac{3^{2k-4}}{(2k-4)!} - \frac{3^{2k-2}}{(2k-2)!}\right) - \frac{3^{2k}}{(2k)!} < 1 - \frac{3^2}{2!} + \frac{3^4}{4!} = -\frac{1}{8}$. Άρα $\cos 3 \leq -\frac{1}{8} < 0$.

Επειδή η cos είναι συνεχής και $\cos 3 < 0 < \cos 0$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in (0,3)$ ώστε $\cos x = 0$. Άρα το $\{x > 0 : \cos x = 0\}$, ως μη κενό και κάτω φραγμένο, έχει infimum, έστω ξ. Επειδή ο 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου, συνεπάγεται $0 \leq \xi$. Επίσης, επειδή $\xi = \inf\{x > 0 : \cos x = 0\}$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο σύνολο αυτό (δηλαδή, $\cos x_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$) ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$. Λόγω συνέχειας της cos, είναι $\cos\xi = \lim_{n\to+\infty}\cos x_n = 0$. Επειδή $\cos 0 = 1$, συνεπάγεται $\xi > 0$ και, επομένως, $\xi \in \{x > 0 : \cos x = 0\}$. Άρα ο ξ είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\{x > 0 : \cos x = 0\}$ ή, ισοδύναμα, είναι η ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης $\cos x = 0$. $\natural$

Το σύμβολο π *δηλώνει το διπλάσιο της ελάχιστης θετικής λύσης της εξίσωσης* $\cos x = 0$. Επομένως,

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{και} \qquad \cos x > 0 \quad \Big(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\Big).$$

Η σχέση $\sin' x = \cos x > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ συνεπάγεται ότι η sin είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Από την $(\sin\frac{\pi}{2})^2 + (\cos\frac{\pi}{2})^2 = 1$ παίρνουμε $\sin\frac{\pi}{2} =$

± 1 και, επειδή $\sin 0 = 0$ και η sin είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, συνεπάγεται $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Επομένως, η $\sin : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ είναι ένα-προς-ένα (ως γνησίως αύξουσα) και επί (ως συνεχής). Κατόπιν, η σχέση $\cos' x = -\sin x < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ συνεπάγεται ότι η cos είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως, η $\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ είναι και αυτή ένα-προς-ένα και επί.

Πρόταση 10.5 *Για κάθε $a, b \in [0,1]$, $a^2 + b^2 = 1$ υπάρχει μοναδικός $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε $\sin x = a$ και $\cos x = b$.*

Απόδειξη: Επειδή η $\sin : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$ είναι ένα-προς-ένα και επί, υπάρχει μοναδικός $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε $\sin x = a$. Από την $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ συνεπάγεται $\cos x = \pm b$ και, επειδή $\cos x \geq 0$, έχουμε $\cos x = b$. $\natural$

Από τις ισότητες $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ και $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ βρίσκουμε τις τιμές των cos και sin στα σημεία π, $\frac{3\pi}{2}$ και 2π και, κατόπιν, παίρνουμε εύκολα τις σχέσεις $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x$ και $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Από τις σχέσεις αυτές καθώς και από τη συμπεριφορά της cos στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, διακρίνουμε τη συμπεριφορά της cos στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, δηλαδή συνολικά στο $[0, 2\pi]$. Επίσης, η τελευταία σχέση σημαίνει ότι η cos είναι περιοδική με περίοδο 2π. Παρόμοιες σχέσεις και συμπεράσματα ισχύουν και για την sin.

Πρόταση 10.6 (1) *Οι συναρτήσεις* sin, cos *είναι περιοδικές με ελάχιστη θετική περίοδο τον αριθμό 2π.*
(2) *Για κάθε $a, b \in [-1,1]$, $a^2 + b^2 = 1$ υπάρχει μοναδικός $x \in [0, 2\pi)$ ώστε $\sin x = a$ και $\cos x = b$.*

Δε θα αποδείξουμε την Πρόταση 10.6, διότι οι λεπτομέρειες είναι εύκολες και άνευ ουσίας. Και τα δυο συμπεράσματα προκύπτουν από την προηγούμενη συζήτηση. Το δεύτερο συμπέρασμα είναι επέκταση του συμπεράσματος της Πρότασης 10.5 και η απόδειξή του χρησιμοποιεί την Πρόταση 10.5 και τη διάκριση των περιπτώσεων: $a \geq 0, b \geq 0$ ή $a \geq 0, b < 0$ ή $a < 0, b \geq 0$ ή $a < 0, b < 0$. Ασχοληθείτε εσείς με τις λεπτομέρειες.

Είναι εύλογο πολλοί να προτιμούν τον «γεωμετρικό» ορισμό των τριγωνομετρικών συνατήσεων λόγω της απλότητάς του. Επίσης, υπάρχουν και άλλοι, και μάλιστα «αναλυτικοί», ορισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Έναν από αυτούς θα δούμε στην επόμενη υποενότητα. Γι αυτό θα αποδείξουμε ότι, ασχέτως του τρόπου τον οποίο επιλέγουμε για να ορίσουμε τις συναρτήσεις αυτές, *καταλήγουμε στις ίδιες συναρτήσεις*. Θα σκεφτούμε ότι, ασχέτως του τρόπου ορισμού των sin, cos, αποδεικνύεται ότι έχουν τις εξής βασικές ιδιότητες: $\cos' x = -\sin x$, $\sin' x = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

Πρόταση 10.7 *Έστω δυο ζεύγη συναρτήσεων $f_1, g_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και $f_2, g_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ώστε (i) ${f_1}' = -g_1$ και ${g_1}' = f_1$, (ii) ${f_2}' = -g_2$ και ${g_2}' = f_2$ και (iii) $f_1(0) = f_2(0)$ και $g_1(0) = g_2(0)$. Τότε τα δυο ζεύγη είναι τα ίδια. Δηλαδή, $f_1(x) = f_2(x)$ και $g_1(x) = g_2(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = ((f_1(x)-f_2(x))^2+(g_1(x)-g_2(x))^2$ και τότε $f'(x) = 2(f_1(x)-f_2(x))(-g_1(x)+g_2(x))+2(g_1(x)-g_2(x))(f_1(x)-f_2(x)) = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα υπάρχει c ώστε $(f_1(x)-f_2(x))^2+(g_1(x)-g_2(x))^2 = c$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Είναι $c = (f_1(0)-f_2(0))^2+(g_1(0)-g_2(0))^2 = 0$, οπότε $(f_1(x)-f_2(x))^2+(g_1(x)-g_2(x))^2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Άρα $f_1(x) = f_2(x)$ και $g_1(x) = g_2(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. $\natural$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε το εξής. Στα κεφάλαια 4 και 5 αποδείχτηκε η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με βάση τον γεωμετρικό ορισμό τους. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν οι ανισότητες

$$|\sin x| \leq |x|, \qquad |x| \leq |\tan x|$$

από τις οποίες η πρώτη ισχύει για κάθε x και η δεύτερη ισχύει αν $|x| < \frac{\pi}{2}$. Οι ανισότητες αυτές, σ' αυτό το πλαίσιο, αποδεικνύονται, φυσικά, με γεωμετρικό τρόπο. Από τη στιγμή, όμως, που η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποδεικνύονται με βάση τον αναλυτικό ορισμό τους (ως παραδείγματα δυναμοσειρών), οι ανισότητες αυτές πρέπει να αποδειχτούν με αναλυτικό τρόπο. Ιδού η απόδειξή τους.

Θεωρούμε τις $f(x) = x \pm \sin x$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$. Είναι $f'(x) = 1 \pm \cos x \geq 0$ για κάθε x, οπότε οι f είναι αύξουσες. Επομένως, είναι $x \pm \sin x = f(x) \geq f(0) = 0$ για κάθε $x \geq 0$ και $x \pm \sin x = f(x) \leq f(0) = 0$ για κάθε $x \leq 0$. Άρα είναι $|\sin x| \leq |x|$ για κάθε x. Κατόπιν θεωρούμε την $g(x) = x\cos x - \sin x$ για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Είναι $g'(x) = -x\sin x \leq 0$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, οπότε η g είναι φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Άρα $x\cos x - \sin x = g(x) \leq g(0) = 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ και $x\cos x - \sin x = g(x) \geq g(0) = 0$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$. Άρα είναι $|x| \leq |\tan x|$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

A. Ορισμός μέσω ολοκληρώματος.

Σ' αυτήν την υποενότητα ορίζουμε

$$\arctan y = \int_0^y \frac{1}{1+s^2}\, ds \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

Δηλαδή, ορίζουμε τη συνάρτηση $\arctan : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ως αόριστο ολοκλήρωμα της $\frac{1}{1+y^2}$ στο $\mathbf{R}$. Η $\frac{1}{1+y^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε η $\arctan$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει

$$\arctan' y = \frac{1}{1+y^2} \qquad (y \in \mathbf{R}).$$

Προφανώς, $\arctan 0 = 0$ και, επειδή η παράγωγος είναι θετική, η $\arctan$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\arctan$ είναι περιττή στο $\mathbf{R}$. Πράγματι, $\arctan(-y) = \int_0^{-y} \frac{1}{1+s^2}\, ds = -\int_0^y \frac{1}{1+(-s)^2}\, ds = -\arctan y$ για κάθε $y \in \mathbf{R}$.

Για κάθε $y \geq 1$ ισχύει $\arctan y = \int_0^y \frac{1}{1+s^2}\, ds = \int_0^1 \frac{1}{1+s^2}\, ds + \int_1^y \frac{1}{1+s^2}\, ds \leq \int_0^1 1\, ds + \int_1^y \frac{1}{s^2}\, ds = 1 + 1 - \frac{1}{y} \leq 2$. Άρα η $\arctan$ είναι άνω φραγμένη στο $\mathbf{R}$ και, επομένως, το $\lim_{y\to+\infty} \arctan y$ υπάρχει και είναι αριθμός. Ορίζουμε

$$\pi = 2 \lim_{y\to+\infty} \arctan y.$$

Επειδή η arctan είναι περιττή, είναι $\lim_{y\to-\infty} \arctan y = \lim_{y\to+\infty} \arctan(-y) = -\lim_{y\to+\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}$.

Άρα το σύνολο τιμών της arctan είναι το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, την οποία συμβολίζουμε

$$\tan : \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big) \to \mathbf{R}$$

και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με σύνολο τιμών το $\mathbf{R}$. Συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$ και $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$.

Κατόπιν, έστω $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$. Τότε για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ είναι $x - k\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, οπότε έχει οριστεί η τιμή $\tan(x - k\pi)$. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε $\tan x = \tan(x-k\pi)$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση tan ορίζεται σε κάθε διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$. Καθώς ο x διατρέχει το $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, ο $x - k\pi$ διατρέχει το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και μπορούμε εύκολα να δούμε ότι όλες οι ιδιότητες της tan στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ «μεταφέρονται» ως ιδιότητές της στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Για παράδειγμα, η tan είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $\mathbf{R}$:

$$\tan : \Big(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \Big) \to \mathbf{R}$$

Επίσης, είναι $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2}+k\pi)+} \tan x = -\infty$ και $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)-} \tan x = +\infty$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η tan ορίζεται στην ένωση $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ή, ισοδύναμα, στο σύνολο $\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ και είναι φανερό ότι η tan είναι περιοδική με περίοδο π.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης, υπολογίζουμε την παράγωγο της tan στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και τον αντίστοιχο $y = \tan x \in \mathbf{R}$ είναι $\tan' x = \frac{1}{\arctan' y} = \frac{1}{\frac{1}{1+y^2}} = 1 + y^2 = 1 + (\tan x)^2$. Λόγω περιοδικότητας, αυτό ισχύει σε κάθε διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$. Δηλαδή,

$$\tan' x = 1 + (\tan x)^2 \qquad \Big(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\Big).$$

Τέλος, ορίζουμε τις συναρτήσεις $\cos, \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπους:

$$\cos x = \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{1+(\tan x)^2}}, & -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z}), \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z}), \end{cases}$$

$$\sin x = \begin{cases} (-1)^k \frac{\tan x}{\sqrt{1+(\tan x)^2}}, & -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z}), \\ (-1)^k, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

Είναι, τώρα, πολύ εύκολο να αποδειχθούν όλες οι ιδιότητες των cos, sin. Για παράδειγμα, αμέσως αποδεικνύεται ότι ισχύει $(\cos x)^2+(\sin x)^2 = 1$ για κάθε x, ότι οι cos, sin είναι παραγωγίσιμες σε κάθε $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$ και ότι ισχύει $\cos' = -\sin$ και $\sin' = \cos$ σε κάθε τέτοιο διάστημα. Επίσης, μέσω του ορισμού της παραγώγου, βλέπουμε ότι είναι παραγωγίσιμες σε κάθε $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ και ότι οι σχέσεις $\cos' = -\sin$ και $\sin' = \cos$ ισχύουν και στα σημεία αυτά και, επομένως, ότι ισχύουν σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$. Φυσικά, θα αποφύγουμε την (επίπονη αλλά και βαρετή) διεκπεραίωση των πράξεων.

Κεφάλαιο 11

Γενικευμένα ολοκληρώματα.

11.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.

Στο Κεφάλαιο 6 εξετάσαμε πότε μια *φραγμένη* συνάρτηση ορισμένη σε *κλειστό και φραγμένο* διάστημα είναι (Riemann) ολοκληρώσιμη σε αυτό. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι κατά τμήματα συνεχείς και οι κατά τμήματα μονότονες συναρτήσεις. Όμως, από τον ορισμό των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων *δεν* καλύπτονται δύο σημαντικές κατηγορίες συναρτήσεων: οι συναρτήσεις που δεν είναι φραγμένες και οι συναρτήσεις που ορίζονται σε μη φραγμένα ή μη κλειστά διαστήματα.

Περίπτωση 1. Έστω $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : [a, b) \to \mathbf{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a, b)$ και, ειδικότερα, στο $[a, x]$ για κάθε $x \in [a, b)$. Τότε το σύμβολο

$$\int_a^{\to b} f$$

ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b)$ και η τιμή του, αν αυτή υπάρχει, καθορίζεται ως εξής. Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f$, τότε λέμε ότι το $\int_a^{\to b} f$ **αποκλίνει** και ότι *δεν έχει τιμή*. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f \in \overline{\mathbf{R}}$, τότε αυτό το όριο ορίζεται να είναι *η τιμή του* $\int_a^{\to b} f$ και γράφουμε

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{x\to b-} \int_a^x f.$$

Ειδικότερα, αν το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f$ είναι αριθμός, λέμε ότι το $\int_a^{\to b} f$ **συγκλίνει** και, αν $\lim_{x\to b-} \int_a^x f = \pm\infty$, λέμε ότι το $\int_a^{\to b} f$ **αποκλίνει στο** $\pm\infty$. Προσοχή: *το σύμβολο* $\int_a^{\to b} f$ *έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ΄ ενός συμβολίζει το γενικευμένο* *ολοκλήρωμα της f στο $[a,b)$, ανεξάρτητα από το αν αυτό έχει τιμή ή όχι. Αφ΄ ετέρου, στην περίπτωση που το γενικευμένο ολοκλήρωμα έχει τιμή, συμβολίζει την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος.*

Παραδείγματα (1) Είναι $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x}) = 1$. Δηλαδή, το $\int_1^{\to+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή 1.

(2) Είναι $\int_1^{\to+\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty$. Δηλαδή, το $\int_1^{\to+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$.

(3) Είναι $\int_0^{\to1}\frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{x\to1-}\int_0^x\frac{1}{t-1}\,dt = \lim_{x\to1-}\log(1-x) = -\infty$. Δηλαδή, το $\int_0^{\to1}\frac{1}{x-1}\,dx$ αποκλίνει στο $-\infty$.

(4) Είναι $\int_0^{\to1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{x\to1-}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \lim_{x\to1-}(2-2\sqrt{1-x}) = 2$. Άρα το $\int_0^{\to1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή 2.

(5) Το $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\cos t\,dt = \lim_{x\to+\infty}\sin x$ δεν υπάρχει. Άρα το $\int_0^{\to+\infty}\cos x\,dx$ δεν έχει τιμή.

Η Πρόταση 11.1 αποδεικνύει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι γενίκευση του ολοκληρώματος.

Πρόταση 11.1 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f$ συγκλίνει και*

$$\int_a^{\to b} f = \int_a^b f.$$

Απόδειξη: Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει M ώστε $|f(x)|\le M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Ακόμη, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$ και, επομένως, σε κάθε $[a,x]$ $(a\le x<b)$. Επίσης, $\left|\int_a^x f - \int_a^b f\right| = \left|-\int_x^b f\right| \le M(b-x)$ για κάθε $x\in[a,b)$, οπότε $\lim_{x\to b-}\int_a^x f = \int_a^b f$. $\natural$

Περίπτωση 2. Έστω $a\in\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ και $f:(a,b]\to\mathbf{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(a,b]$ και, ειδικώτερα, στο $[x,b]$ για κάθε $x\in(a,b]$. Τότε το σύμβολο $\int_{a\leftarrow}^b f$ ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f στο $(a,b]$ και η τιμή του, αν αυτή υπάρχει, καθορίζεται ως εξής. Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a+}\int_x^b f$, τότε λέμε ότι το $\int_{a\leftarrow}^b f$ **αποκλίνει** και ότι *δεν έχει τιμή*. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to a+}\int_x^b f\in\overline{\mathbf{R}}$, τότε αυτό το όριο ορίζεται να είναι *η τιμή του* $\int_{a\leftarrow}^b f$ και γράφουμε

$$\int_{a\leftarrow}^b f = \lim_{x\to a+}\int_x^b f.$$

Ειδικώτερα, αν το $\lim_{x\to a+}\int_x^b f$ είναι αριθμός, τότε λέμε ότι το $\int_{a\leftarrow}^b f$ **συγκλίνει** και, αν $\lim_{x\to a+}\int_x^b f = \pm\infty$, τότε λέμε ότι το $\int_{a\leftarrow}^b f$ **αποκλίνει στο** $\pm\infty$.

Παραδείγματα: (1) Είναι $\int_{0\leftarrow}^{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{x\to0+}\int_x^2\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\lim_{x\to0+}(2\sqrt{2}-2\sqrt{x})=2\sqrt{2}$. Δηλαδή, το $\int_{0\leftarrow}^{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή $2\sqrt{2}$.

(2) Είναι $\int_{0\leftarrow}^{2}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{x\to0+}\int_x^2\frac{1}{t}\,dt=\lim_{x\to0+}(\log 2-\log x)=+\infty$. Δηλαδή, το $\int_{0\leftarrow}^{2}\frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$.

(3) Είναι $\int_{-\infty\leftarrow}^{0}\frac{1}{(x-1)^2}\,dx=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0\frac{1}{(t-1)^2}\,dt=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{1-x})=1$. Δηλαδή, το $\int_{-\infty\leftarrow}^{0}\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ συγκλίνει και η τιμή του είναι 1.

Ισχύει, επίσης, η Πρόταση 11.1, καταλλήλως προσαρμοσμένη.

Πρόταση 11.2 *Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{b}f$ συγκλίνει και*

$$\int_{a\leftarrow}^{b}f=\int_a^b f.$$

Απόδειξη: Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει M ώστε $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Ακόμη, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$ και, επομένως, σε κάθε $[x,b]$ $(a<x\leq b)$. Επίσης, $\left|\int_x^b f-\int_a^b f\right|=\left|-\int_a^x f\right|\leq M(x-a)$ για κάθε $x\in(a,b]$, οπότε $\lim_{x\to a+}\int_x^b f=\int_a^b f$. $\natural$

Περίπτωση 3. Έστω $a\in\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ και $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του (a,b). Το σύμβολο $\int_{a\leftarrow}^{\to b}f$ ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f στο (a,b) και η τιμή του, αν υπάρχει, καθορίζεται ως εξής. Θεωρούμε οποιονδήποτε d, $a<d<b$. Αν ένα τουλάχιστον από τα $\int_{a\leftarrow}^{d}f$, $\int_d^{\to b}f(x)\,dx$ δεν έχει τιμή, τότε *ούτε το* $\int_{a\leftarrow}^{\to b}f$ *έχει τιμή*. Επίσης, αν και τα δυο $\int_{a\leftarrow}^{d}f$, $\int_d^{\to b}f$ έχουν τιμή και το $\int_{a\leftarrow}^{d}f+\int_d^{\to b}f$ είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το $\int_{a\leftarrow}^{\to b}f$ *δεν έχει τιμή*. Τέλος, αν και τα δυο $\int_{a\leftarrow}^{d}f$, $\int_d^{\to b}f$ έχουν τιμή και το $\int_{a\leftarrow}^{d}f+\int_d^{\to b}f$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το $\int_{a\leftarrow}^{\to b}f$ *έχει τιμή* η οποία ορίζεται να είναι

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b}f=\int_{a\leftarrow}^{d}f+\int_d^{\to b}f.$$

Αν η τιμή του $\int_{a\leftarrow}^{\to b}f$ είναι αριθμός, τότε λέμε ότι το $\int_{a\leftarrow}^{\to b}f$ **συγκλίνει** και, αν η τιμή του είναι $\pm\infty$, τότε λέμε ότι **αποκλίνει στο** $\pm\infty$, αντιστοίχως.

Εύκολα βλέπει κανείς ότι η επιλογή του ενδιάμεσου d δεν επηρεάζει τη σύγκλιση ή την απόκλιση ή την τιμή του $\int_{a\leftarrow}^{\to b}f$.

Λήμμα 11.1 *Έστω $a\in\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ και $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του (a,b). Έστω $a<d<d'<b$. Αν ορίζεται το άθροισμα $\int_{a\leftarrow}^{d}f+\int_d^{\to b}f$, τότε ορίζεται και το άθροισμα $\int_{a\leftarrow}^{d'}f+\int_{d'}^{\to b}f$ και έχουν τις ίδιες τιμές.*

Απόδειξη: Είναι $\int_{d'}^{x} f = \int_{d}^{x} f + \int_{d'}^{d} f$ για κάθε $x \in (a,b)$. Επομένως, επειδή υπάρχει το $\lim_{x\to b-}\int_{d}^{x} f$, υπάρχει και το $\lim_{x\to b-}\int_{d'}^{x} f$ και ισχύει $\lim_{x\to b-}\int_{d'}^{x} f = \lim_{x\to b-}\int_{d}^{x} f + \int_{d'}^{d} f$. Δηλαδή, $\int_{d'}^{\to b} f = \int_{d}^{\to b} f + \int_{d'}^{d} f$.

Ομοίως, είναι $\int_{x}^{d'} f = \int_{x}^{d} f - \int_{d'}^{d} f$ για κάθε $x \in (a,b)$. Επομένως, επειδή υπάρχει το $\lim_{x\to a+}\int_{x}^{d} f$, υπάρχει και το $\lim_{x\to a+}\int_{x}^{d'} f$ και ισχύει $\lim_{x\to a+}\int_{x}^{d'} f = \lim_{x\to a+}\int_{x}^{d} f - \int_{d'}^{d} f$. Δηλαδή, $\int_{a\leftarrow}^{d'} f = \int_{a\leftarrow}^{d} f - \int_{d'}^{d} f$.

Το $\int_{d'}^{d} f$ είναι αριθμός, οπότε, προσθέτοντας τις δύο ισότητες, συμπεραίνουμε ότι $\int_{a\leftarrow}^{d'} f + \int_{d'}^{\to b} f = \int_{a\leftarrow}^{d} + \int_{d}^{\to b} f$. $\natural$

Η Πρόταση 11.3 είναι ανάλογη των Προτάσεων 11.1, 11.2.

Πρόταση 11.3 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$ συγκλίνει και*

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f = \int_{a}^{b} f.$$

Απόδειξη: Έστω $a < d < b$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,d]$ και στο $[d,b]$. Από τις Προτάσεις 11.1, 11.2 συνεπάγεται $\int_{a\leftarrow}^{d} f = \int_{a}^{d} f$ και $\int_{d}^{\to b} f = \int_{d}^{b} f$ και, προσθέτοντας, $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f = \int_{a}^{b} f$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Είναι $\int_{0}^{\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_{0}^{x} \frac{t}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\log(x^2+1) = +\infty$. Επίσης, είναι $\int_{-\infty\leftarrow}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{0} \frac{t}{t^2+1}\,dt = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\log(x^2+1) = -\infty$. Άρα το $\int_{-\infty\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ αποκλίνει και δεν ορίζεται τιμή του.

(2) Είναι $\int_{0}^{\to+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_{0}^{x} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ και, επίσης, $\int_{-\infty\leftarrow}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{0} \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\lim_{x\to-\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. Άρα $\int_{-\infty\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi$.

Στο εξής, τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{a}^{\to b} f$, $\int_{a\leftarrow}^{b} f$, $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f$, που εξετάσαμε στις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις, θα τα συμβολίζουμε

$$\int_{a}^{b} f.$$

Δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης του γενικευμένου ολοκληρώματος με το ολοκλήρωμα, διότι, σύμφωνα με τις Προτάσεις 11.1 - 11.3, αν ορίζεται το ολοκλήρωμα (δηλαδή, αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη), τότε ορίζεται και το γενικευμένο ολοκλήρωμα και οι τιμές τους συμπίπτουν. Εξυπακούεται, φυσικά, ότι, ανάλογα με τη συγκεκριμένη συνάρτηση και το συγκεκριμένο διάστημα, μπορούμε να διακρίνουμε αν πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα ή για ολοκλήρωμα.

Περίπτωση 4. Η περίπτωση αυτή συνδυάζει όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Έστω $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ και f ορισμένη στο διάστημα (a, b) εκτός, ίσως, από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Δηλαδή, μπορεί να υπάρχουν $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ ώστε $f : (a, \xi_1) \cup (\xi_1, \xi_2) \cup \cdots \cup (\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) \cup (\xi_{n-1}, b) \to \mathbf{R}$. Αν όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{\xi_1} f$, $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f$, $\dots$,$\int_{\xi_{n-2}}^{\xi_{n-1}} f$, $\int_{\xi_{n-1}}^{b} f$ συγκλίνουν, λέμε ότι **το γενικευμένο ολοκλήρωμα της** f **στο** (a, b) **συγκλίνει** και η τιμή του είναι

$$\int_a^b f = \int_a^{\xi_1} f + \int_{\xi_1}^{\xi_2} f + \cdots + \int_{\xi_{n-2}}^{\xi_{n-1}} f + \int_{\xi_{n-1}}^{b} f.$$

Αν όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα έχουν τιμή και ένα τουλάχιστον από τα ολοκληρώματα αποκλίνει στο $+\infty$ και κανένα δεν αποκλίνει στο $-\infty$, τότε λέμε ότι **το γενικευμένο ολοκλήρωμα της** f **στο** (a, b) **αποκλίνει στο** $+\infty$ και γράφουμε $\int_a^b f = +\infty$. Ομοίως, αν όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα έχουν τιμή και ένα τουλάχιστον από τα ολοκληρώματα αποκλίνει στο $-\infty$ και κανένα δεν αποκλίνει στο $+\infty$, τότε λέμε ότι **το γενικευμένο ολοκλήρωμα της** f **στο** (a, b) **αποκλίνει στο** $-\infty$ και γράφουμε $\int_a^b f = -\infty$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a, b) αποκλίνει και ότι δεν έχει τιμή.

Παραδοχή: *Στη θεωρητική μας συζήτηση από εδώ και πέρα θα περιοριστούμε στην περίπτωση 1. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ θα είναι το $\int_a^{\to b} f$. Αυτό σημαίνει ότι η $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ θα είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a, b)$ και $\int_a^b f = \int_a^{\to b} f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f$, αν το όριο υπάρχει. Σε κάθε άλλη περίπτωση τα αποτελέσματα είναι ανάλογα και αποδεικνύονται με ανάλογο τρόπο.*

Πρόταση 11.4 *Έστω $a < c < b$. Τότε το $\int_a^b f$ έχει τιμή αν και μόνο αν το $\int_c^b f$ έχει τιμή και*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Απόδειξη: Ισχύει $\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$ για κάθε $x \in [a, b)$. Το $\int_a^c f$ είναι αριθμός, οπότε το $\lim_{x \to b-} \int_a^x f$ υπάρχει αν και μόνο αν το $\lim_{x \to b-} \int_c^x f$ υπάρχει και, σ' αυτήν την περίπτωση, είναι $\int_a^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f = \int_a^c f + \lim_{x \to b-} \int_c^x f = \int_a^c f + \int_c^b f$. $\natural$

Πρόταση 11.5 *Αν οι f, g ταυτίζονται κοντά στο b, τότε το $\int_a^b f$ έχει τιμή αν και μόνο αν το $\int_a^b g$ έχει τιμή. Επίσης, οι τιμές είναι είτε και οι δυο αριθμοί είτε και οι δυο $+\infty$ είτε και οι δυο $-\infty$.*

Απόδειξη: Έστω $a < c < b$ και έστω $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [c, b)$. Τότε είναι σαφές ότι το $\int_c^b f$ έχει τιμή αν και μόνο αν το $\int_c^b g$ έχει τιμή και, μάλιστα, είναι $\int_c^b f = \int_c^b g$. Τα υπόλοιπα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 11.4. $\natural$

Πρόταση 11.6 *Αν τα* $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ *έχουν τιμή και το* $\int_a^b f + \int_a^b g$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το* $\int_a^b (f+g)$ *έχει τιμή και*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Απόδειξη: Είναι $\int_a^x (f+g) = \int_a^x f + \int_a^x g$ για κάθε $x \in [a,b)$. Άρα $\int_a^b (f+g) = \lim_{x\to b-} \int_a^x (f+g) = \lim_{x\to b-} \int_a^x f + \lim_{x\to b-} \int_a^x g = \int_a^b f + \int_a^b g$. $\natural$

Πρόταση 11.7 *Αν το* $\int_a^b f$ *έχει τιμή και το* $\lambda \int_a^b f$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το* $\int_a^b \lambda f$ *έχει τιμή και*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Απόδειξη: Είναι $\int_a^x \lambda f = \lambda \int_a^x f$ για κάθε $x \in [a,b)$. Άρα $\int_a^b \lambda f = \lim_{x\to b-} \int_a^x \lambda f$ $= \lambda \lim_{x\to b-} \int_a^x f = \lambda \int_a^b f$. $\natural$

Πρόταση 11.8 ***Σύγκριση ολοκληρωμάτων, Ι***. *Έστω* $f(x) \leq g(x)$ *για κάθε* $x \in [a,b)$.
(1) *Αν τα* $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ *έχουν τιμή, τότε*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(2) *Αν* $\int_a^b f = +\infty$, *τότε* $\int_a^b g = +\infty$.
(3) *Αν* $\int_a^b g = -\infty$, *τότε* $\int_a^b f = -\infty$.

Απόδειξη: (1) Είναι $\int_a^x f \leq \int_a^x g$ για κάθε $x \in [a,b)$. Άρα $\int_a^b f = \lim_{x\to b-} \int_a^x f \leq \lim_{x\to b-} \int_a^x g = \int_a^b g$.
(2) Όπως πριν, είναι $\int_a^x f \leq \int_a^x g$ για κάθε $x \in [a,b)$. Επειδή $\lim_{x\to b-} \int_a^x f = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to b-} \int_a^x g = +\infty$.
(3) Όπως στο (2). $\natural$

Τα δύο αποτελέσματα της Πρότασης 11.9 είναι πολύ χρήσιμα. Ο ρόλος τους είναι ο ίδιος με τον ρόλο των ανάλογων αποτελεσμάτων για τα συνήθη ολοκληρώματα: χρησιμεύουν σε υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 11.9 (1) *Έστω ότι οι* f, g *έχουν συνεχή παράγωγο στο* $[a,b)$. *Αν το* $\int_a^b f'g$ *έχει τιμή, αν υπάρχει το* $\lim_{x\to b-} f(x)g(x)$ *και αν το* $\lim_{x\to b-} f(x)g(x) - \int_a^b f'g$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και το* $\int_a^b fg'$ *έχει τιμή και είναι:*

$$\int_a^b fg' = \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

(2) *Έστω ότι η* $\phi : [a,b) \to [A,B)$ *έχει συνεχή παράγωγο στο* $[a,b)$, *ότι* $\phi(a) = A$, $\lim_{x\to b-} \phi(x) = B$ *και ότι η* f *είναι συνεχής στο* $[A,B)$. *Τότε το* $\int_A^B f$ *έχει τιμή αν και μόνο αν το* $\int_a^b (f\circ\phi)\phi'$ *έχει τιμή και, σ΄ αυτήν την περίπτωση,*

$$\int_A^B f = \int_a^b (f\circ\phi)\phi' \,.$$

Απόδειξη: (1) Για κάθε $x \in [a,b)$ ισχύει $\int_a^x fg' = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'g$. Άρα $\int_a^b fg' = \lim_{x\to b-} \int_a^x fg' = \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \lim_{x\to b-} \int_a^x f'g = \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$.
(2) Για κάθε $x \in [a,b)$ είναι $\int_a^x (f\circ\phi)\phi' = \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f = \int_A^{\phi(x)} f$. Άρα $\int_a^b (f\circ\phi)\phi' = \lim_{x\to b-} \int_a^x (f\circ\phi)\phi' = \lim_{x\to b-} \int_A^{\phi(x)} f = \lim_{y\to B-} \int_A^y f = \int_A^B f$. $\natural$

Έστω $f : [a,c) \cup (c,b] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,c)$ και του $(c,b]$. Ονομάζουμε **πρωτεύουσα τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος** $\int_a^b f$ το όριο (αν υπάρχει) $\lim_{\epsilon\to 0+} \big(\int_a^{c-\epsilon} f + \int_{c+\epsilon}^b f \big)$ και τη συμβολίζουμε $P.V. \int_a^b f$. Δηλαδή,

$$P.V. \int_a^b f = \lim_{\epsilon\to 0+} \Big(\int_a^{c-\epsilon} f + \int_{c+\epsilon}^b f \Big).$$

Υπάρχουν παραδείγματα όπου το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν έχει τιμή ενώ έχει πρωτεύουσα τιμή.

Παράδειγμα: Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ δεν έχει τιμή. Πράγματι, $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0+}(-\log x) = +\infty$. Επίσης, $\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to 0-} \int_{-1}^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0-} \log|x| = -\infty$. Επομένως, το $\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = (-\infty) + (+\infty)$ είναι απροσδιόριστη μορφή. Από την άλλη μεριά, $P.V. \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \big(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx \big) = \lim_{\epsilon\to 0+} 0 = 0$.

Πρόταση 11.10 *Έστω* $f : [a,c) \cup (c,b] \to \mathbf{R}$ *ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του* $[a,c)$ *και του* $(c,b]$. *Αν το* $\int_a^b f$ *έχει τιμή, τότε υπάρχει και η πρωτεύουσα τιμή* $P.V. \int_a^b f$ *και είναι ίση με την τιμή του* $\int_a^b f$.

Απόδειξη: Επειδή το $\int_a^b f$ έχει τιμή, συνεπάγεται ότι και τα $\int_a^c f$, $\int_c^b f$ έχουν τιμή. Άρα $\lim_{\epsilon\to 0+} \int_a^{c-\epsilon} f = \int_a^c f$ και $\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{c+\epsilon}^b f = \int_c^b f$. Επίσης, το $\int_a^c f + \int_c^b f$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, οπότε $P.V. \int_a^b f = \lim_{\epsilon\to 0+} \big(\int_a^{c-\epsilon} f + \int_{c+\epsilon}^b f \big) = \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$. $\natural$

Ασκήσεις.

1. Διακρίνατε τα $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$, $\int_1^3 \frac{2}{x-2}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int_{-1}^7 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$, $\int_2^7 \log\big(\frac{x}{x-1}\big)\,dx$, $\int_0^{+\infty} \log x\,dx$ σε (απλά) ολοκληρώματα και σε γενικευμένα ολοκληρώματα.

2. Είναι σαφές ότι τα $\int_0^1 x\log x\,dx$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int_1^5 \frac{\log x}{x-1}\,dx$, $\int_0^1 \log x\log(1+x)\,dx$ είναι γενικευμένα ολοκληρώματα. Πώς πρέπει να χειριστούμε τις συναρτήσεις που εμφανίζονται μέσα στα γενικευμένα ολοκληρώματα ώστε αυτά να μπορούν να θεωρηθούν (απλά) ολοκληρώματα;

3. Μπορούν να θεωρηθούν (απλά) ολοκληρώματα ή, έστω, γενικευμένα ολοκληρώματα τα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin x}\,dx$, $\int_0^{+\infty} \log|\cos x|\,dx$, $\int_0^1 \frac{1}{\sin(\frac{1}{x})}\,dx$;

4. Υπολογίστε τα $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$, $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\,dx$ $(a>0)$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ $(a>0)$.

5. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 x^p\log x\,dx = -\frac{1}{(p+1)^2}$ $(p>-1)$ και $\int_1^{+\infty} x^p\log x\,dx = \frac{1}{(p+1)^2}$ $(p<-1)$.

6. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}}\,dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$ για κάθε $n,m\in\mathbf{N}$.

7. Αν $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ (η απόδειξη θα γίνει στο τέλος της ενότητας 11.4), αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}\,dx=\frac{\pi}{4}$, $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^2}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$, $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^4}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$, $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^4}{x^4}\,dx=\frac{\pi}{3}$.

8. Εστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(0,+\infty)$ και $0<A\leq B<+\infty$. (1) Ορίζουμε την $g(x)=\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ $(0<x<+\infty)$ και έστω ότι το όριο $L=\lim_{x\to+\infty} g(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι (i) $\int_A^B\frac{f(x)}{x}\,dx = g(B)-g(A)+\int_A^B\frac{g(x)}{x}\,dx$, (ii) $\lim_{T\to+\infty}\int_{AT}^{BT}\frac{f(x)}{x}\,dx = L\log\frac{B}{A}$, (iii) $\int_1^{+\infty}\frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx = -L\log\frac{B}{A}+\int_A^B\frac{f(x)}{x}\,dx$. (2) Ορίζουμε την $h(x)=x\int_x^1\frac{f(t)}{t^2}\,dt$ $(0<x<+\infty)$ και έστω ότι το όριο $l=\lim_{x\to0+}h(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι (i) $\int_A^B\frac{f(x)}{x}\,dx = h(A)-h(B)+\int_A^B\frac{h(x)}{x}\,dx$, (ii) $\lim_{t\to0+}\int_{At}^{Bt}\frac{f(x)}{x}\,dx = l\log\frac{B}{A}$, (iii) $\int_0^1\frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx = l\log\frac{B}{A}-\int_A^B\frac{f(x)}{x}\,dx$. (3) Με τις υποθέσεις των (1), (2): $\int_0^{+\infty}\frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx = (L-l)\log\frac{A}{B}$. (4) Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(Ax)-\cos(Bx)}{x}\,dx=\log\frac{B}{A}$ και $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-Ax}-e^{-Bx}}{x}\,dx=\log\frac{B}{A}$.

11.2 Μη αρνητικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 11.1 *Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b)$, τότε το $\int_a^b f$ έχει τιμή και αυτή είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Δηλαδή, $0\leq\int_a^b f\leq+\infty$.*

Ειδικώτερα, το $\int_a^b f$ συγκλίνει, αν η συνάρτηση $\int_a^x f$ $(x\in[a,b))$ είναι άνω φραγμένη, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν η ίδια συνάρτηση δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη: Αν $a\leq x_1<x_2<b$, συνεπάγεται $\int_a^{x_2} f=\int_a^{x_1} f+\int_{x_1}^{x_2} f\geq\int_a^{x_1} f$. Άρα η $\int_a^x f$ $(x\in[a,b))$ είναι αύξουσα στο $[a,b)$. Επομένως, το $\lim_{x\to b-}\int_a^x f$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $+\infty$. Μάλιστα, ισχύει $\int_a^x f\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b)$, οπότε

$\lim_{x\to b-}\int_a^x f \geq 0$. Τέλος, αν η $\int_a^x f$ $(x\in[a,b))$ είναι άνω φραγμένη, τότε το $\lim_{x\to b-}\int_a^x f$ είναι αριθμός, ενώ αν δεν είναι άνω φραγμένη, τότε το $\lim_{x\to b-}\int_a^x f$ είναι $+\infty$. ♮

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα μη αρνητικής συνάρτησης έχει πάντοτε τιμή, η οποία είναι είτε αριθμός* ≥ 0 *είτε* $+\infty$. *Μπορούμε, επίσης, να πούμε ότι η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος ισοδυναμεί με* $\int_a^b f < +\infty$ *ενώ η απόκλισή του ισοδυναμεί με* $\int_a^b f = +\infty$.

Πρόταση 11.11 ***Σύγκριση ολοκληρωμάτων, ΙΙ.*** *(1) Έστω* $0\leq f(x)\leq g(x)$ *για κάθε* $x\in[a,b)$. *Τότε*

$$0\leq \int_a^b f\leq \int_a^b g.$$

Αν, επιπλέον, το $\int_a^b g$ *συγκλίνει, τότε και το* $\int_a^b f$ *συγκλίνει.*
(2) Έστω $f(x)\geq 0$, $g(x)>0$ *για κάθε* $x\in[a,b)$ *και έστω ότι το* $\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}$ *υπάρχει και είναι αριθμός ή, γενικότερα, ότι η συνάρτηση* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *είναι φραγμένη κοντά στο* b. *Αν το* $\int_a^b g$ *συγκλίνει, τότε και το* $\int_a^b f$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη: (1) Τα $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ έχουν τιμή, οπότε $0\leq\int_a^b f\leq\int_a^b g$. Αν το $\int_a^b g$ συγκλίνει, συνεπάγεται $\int_a^b g<+\infty$, οπότε $\int_a^b f<+\infty$ και, επομένως, το $\int_a^b f$ συγκλίνει.
(2) Υπάρχει M και $c\in[a,b)$ ώστε $0\leq\frac{f(x)}{g(x)}\leq M$ για κάθε $x\in[c,b)$. Το $\int_a^b g$ συγκλίνει, οπότε και το $\int_c^b g$ συγκλίνει. Άρα $\int_c^b f\leq\int_c^b Mg = M\int_c^b g<+\infty$. Άρα το $\int_c^b f$ συγκλίνει και, επομένως, το $\int_a^b f$ συγκλίνει. ♮

Ας δούμε, τώρα, μερικά παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνότατα ως *συναρτήσεις σύγκρισης* εφαρμόζοντας είτε την Πρόταση 11.11 είτε, αργότερα, την Πρόταση 11.12.

Παραδείγματα: (1) Θα μελετήσουμε το $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$.

Αν $p\neq 1$, τότε $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t^p}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-p}-1}{1-p}$. Άρα $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=+\infty$, αν $p<1$, και $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\frac{1}{p-1}$, αν $p>1$. Τέλος, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty$. Συνοψίζουμε:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leq 1.\end{cases}$$

(2) Όπως πριν, θα μελετήσουμε το $\int_0^1\frac{1}{x^p}\,dx$.

Αν $p\neq 1$, τότε $\int_0^1\frac{1}{x^p}\,dx=\lim_{x\to 0+}\int_x^1\frac{1}{t^p}\,dt=\lim_{x\to 0+}\frac{1-x^{1-p}}{1-p}$. Άρα $\int_0^1\frac{1}{x^p}\,dx=\frac{1}{1-p}$, αν $p<1$, και $\int_0^1\frac{1}{x^p}\,dx=+\infty$, αν $p>1$. Τέλος, $\int_0^1\frac{1}{x}\,dx=$

$\lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\lim_{x\to 0+}\log x = +\infty$. Συνοψίζουμε:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\,, & p<1,\\ +\infty, & p\geq 1. \end{cases}$$

(3) Έστω $c,q>0$. Θα μελετήσουμε το $\int_1^{+\infty} x^p e^{-cx^q}\,dx$.

Θεωρούμε $n\in\mathbf{N}$, $n>\frac{p+1}{q}$. Για κάθε $x\geq 0$ είναι $e^x\geq\frac{x^n}{n!}$. Αντικαθιστούμε το x με το cx^q και βρίσκουμε $e^{cx^q}\geq\frac{c^n}{n!}x^{qn}$. Άρα $x^pe^{-cx^q}\leq\frac{n!}{c^n}\frac{1}{x^{qn-p}}$ για κάθε $x>0$. Επειδή $qn-p>1$, το $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{qn-p}}\,dx$ συγκλίνει. Άρα $0\leq\int_1^{+\infty}x^pe^{-cx^q}\,dx\leq\frac{n!}{c^n}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{qn-p}}\,dx<+\infty$. Δηλαδή, το $\int_1^{+\infty}x^pe^{-cx^q}\,dx$ συγκλίνει σε μη αρνητικό αριθμό:

$$0\leq\int_1^{+\infty}x^pe^{-cx^q}\,dx<+\infty\,.$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η Πρόταση 8.8 μπορεί να αναδιατυπωθεί ως αποτέλεσμα που συνδυάζει σειρές και γενικευμένα ολοκληρώματα.

Πρόταση 8.8 ***Ολοκληρωτικό κριτήριο***. *Έστω (x_n) φθίνουσα και $x_n\geq 0$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Έστω ότι υπάρχει $f:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$ φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ ώστε $f(n)=x_n$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Τότε υπάρχει το $\int_1^{+\infty}f$, η τιμή του είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$ και*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n<+\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty}f<+\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n=+\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty}f=+\infty$.

Επιπλέον,

$$\int_1^{n+1}f\leq x_1+\cdots+x_n\leq x_1+\int_1^n f\qquad(n\in\mathbf{N})$$

$$\int_1^{+\infty}f\leq\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\leq x_1+\int_1^{+\infty}f.$$

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι $\int_1^{+\infty}(\sin\frac{1}{x})^2\,dx\leq 1$.

2. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^2}{x^2}\,dx\leq 2$.

3. Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p,q>-1$.

4. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $0<p+1<q$.

5. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty}e^{-(x+x^{-1})}\,dx$, $\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ συγκλίνουν.

6. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty}x^xe^{-x^p}\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p>0$.

7. Αποδείξτε ότι το $\int_2^{+\infty} x^p(\log x)^q\,dt$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p < -1$ ή $p = -1$, $q < -1$.

8. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^8(\sin x)^2}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^4(\sin x)^2}\,dx$ συγκλίνουν και τα $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^8(\sin x)^2}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2(\sin x)^2}\,dx$ αποκλίνουν στο $+\infty$.

11.3 Κριτήρια σύγκλισης.

Θεώρημα 11.2 ***Κριτήριο του Cauchy.*** *Το $\int_a^b f$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $c_0 \in [a,b)$ ώστε $\big|\int_{x'}^{x''} f\big| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in (c_0, b)$.*

Απόδειξη: Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f \;\; (x \in [a,b))$, τότε βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα που ζητάμε είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 3.4 στη συνάρτηση F. $\natural$

A. Απόλυτη σύγκλιση.

Λέμε ότι το $\int_a^b f$ **συγκλίνει απολύτως** αν το $\int_a^b |f|$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, $\int_a^b |f| < +\infty$.

Θεώρημα 11.3 ***Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης.*** *Αν το $\int_a^b f$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leq \int_a^b |f|.$$

Πρώτη απόδειξη: Έστω ότι το $\int_a^b |f|$ συγκλίνει. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $c_0 \in [a,b)$ ώστε $\big|\int_{x'}^{x''} |f|\big| < \epsilon$ και, επομένως, $\big|\int_{x'}^{x''} f\big| \leq \int_{x'}^{x''} |f| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in (c_0, b)$. Άρα το $\int_a^b f$ συγκλίνει.

Τέλος, επειδή για κάθε $x \in [a,b)$ ισχύει $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, συνεπάγεται $-\int_a^b |f| = \int_a^b(-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Άρα $\big|\int_a^b f\big| \leq \int_a^b |f|$.
Δεύτερη απόδειξη: Είναι $0 \leq (f(x))^+ \leq |f(x)|$ και $0 \leq (f(x))^- \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in [a,b)$. Επειδή $\int_a^b |f| < +\infty$, συνεπάγεται ότι τα $\int_a^b f^+$, $\int_a^b f^-$ συγκλίνουν. Επειδή $\int_a^b f = \int_a^b (f^+ - f^-) = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$, συνεπάγεται ότι το $\int_a^b f$ συγκλίνει.

Επίσης, $\big|\int_a^b f\big| = \big|\int_a^b f^+ - \int_a^b f^-\big| \leq \big|\int_a^b f^+\big| + \big|\int_a^b f^-\big| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b (f^+ + f^-) = \int_a^b |f|$. $\natural$

Πρόταση 11.12 ***Σύγκριση ολοκληρωμάτων, III.*** *(1) Αν $|f(x)| \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b)$ και το $\int_a^b g$ συγκλίνει, τότε το $\int_a^b f$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει. Επίσης,*

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leq \int_a^b g.$$

(2) *Έστω $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to b-} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ υπάρχει και είναι αριθμός ή, γενικότερα, ότι η συνάρτηση $\frac{|f(x)|}{g(x)}$ είναι φραγμένη κοντά στο b. Αν το $\int_a^b g$ συγκλίνει, τότε το $\int_a^b f$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.*

Απόδειξη: (1) Επειδή το $\int_a^b g$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι το $\int_a^b |f|$ συγκλίνει, οπότε και το $\int_a^b f$ συγκλίνει και $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b g$.
(2) Άμεση συνέπεια της Πρότασης 11.11 και του Θεωρήματος 11.3. ♮

Παραδείγματα: (1) Το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ συγκλίνει απολύτως, διότι $|\frac{\sin x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ συγκλίνει.

(2) Θα αποδείξουμε ότι $\int_\pi^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|\,dx = \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$, δηλαδή ότι το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ δε συγκλίνει απολύτως.

Είναι $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, συνεπάγεται $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$.

Σε λίγο θα δούμε ότι το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.

Β. Υπό συνθήκη σύγκλιση.

Λέμε ότι το $\int_a^b f(x)\,dx$ **συγκλίνει υπό συνθήκη**, αν συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απολύτως.

Θεώρημα 11.4 *Έστω $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ και $F(x) = \int_a^x f$ $(x \in [a, b))$ και έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b)$ και η g έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b)$.*
(1) Έστω ότι η g είναι φθίνουσα στο $[a, b)$, ότι $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$ και ότι η F είναι φραγμένη στο $[a, b)$. Τότε το $\int_a^b fg$ συγκλίνει.
(2) Έστω ότι η g είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη στο $[a, b)$ και ότι υπάρχει το $\lim_{x\to b-} F(x)$ και είναι αριθμός (ή, ισοδύναμα, ότι το $\int_a^b f$ συγκλίνει). Τότε το $\int_a^b fg$ συγκλίνει.

Απόδειξη: (1) Υπάρχει M ώστε $|F(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b)$. Επειδή η f είναι συνεχής, συνεπάγεται $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b)$. Επίσης, είναι $g'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, b)$.

Ισχύει $\int_a^x fg = \int_a^x F'g = F(x)g(x) - \int_a^x Fg'$ για κάθε $x \in [a, b)$. Το $\int_a^b Fg'$ συγκλίνει απολύτως: $\int_a^b |Fg'| \leq M \int_a^b |g'| = -M \int_a^b g' = -M \lim_{x\to b-} \int_a^x g' = -M \lim_{x\to b-}(g(x) - g(a)) = Mg(a)$. Άρα το $\int_a^b Fg'$ συγκλίνει και, επομένως, το $\lim_{x\to b-} \int_a^x Fg'$ υπάρχει και είναι αριθμός. Επίσης, ισχύει $|F(x)g(x)| \leq Mg(x)$ για κάθε $x \in [a, b)$, οπότε $\lim_{x\to b-} F(x)g(x) = 0$.

Άρα από την $\int_a^x fg = F(x)g(x) - \int_a^x Fg'$ συνεπάγεται ότι το $\lim_{x\to b-} \int_a^x fg$ υπάρχει και είναι αριθμός, οπότε το $\int_a^b fg$ συγκλίνει.
(2) Το $l = \lim_{x\to b-} g(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Βάσει του (1), το $\int_a^b f(g - l)$

συγκλίνει. Τότε $\int_a^b fg = \int_a^b f(g-l) + \int_a^b fl = \int_a^b f(g-l) + l\int_a^b f$. $\natural$

Παράδειγμα: Θα δούμε ότι το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει, δηλαδή ότι συγκλίνει υπό συνθήκη.

Η $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα με συνεχή παράγωγο στο $[\pi,+\infty)$ και είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$. Επίσης, η $\sin x$ είναι συνεχής στο $[\pi,+\infty)$ και ισχύει $\left|\int_\pi^x \sin t\,dt\right| = |\cos\pi - \cos x| \leq 2$ για κάθε $x \geq \pi$. Άρα το $\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.

Για το $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$ η κατάσταση είναι πιο απλή. Παρατηρούμε ότι η $g : [0,\pi] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \leq \pi, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[0,\pi]$. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\pi g$ έχει τιμή ίση με την τιμή του (απλού) ολοκληρώματος $\int_0^\pi g$.

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, βλέπουμε ότι το $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει. Θα υπολογίσουμε την τιμή του $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ λίγο αργότερα, αλλά προς το παρόν θα δούμε ότι είναι θετικός αριθμός.

Με ολοκλήρωση κατά μέρη, βρίσκουμε $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos x)'}{x}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{x} - \lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{x} + \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$. Άρα $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$. Επειδή είναι $1-\cos x \geq 1-\cos\frac{\pi}{4}$ για κάθε $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$, συνεπάγεται $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx \geq (1-\cos\frac{\pi}{4})\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{12(2-\sqrt{2})}{7\pi} > 0$.

Ασκήσεις.

1. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n-1 \leq x < n, n \in \mathbf{N})$. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} f$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

2. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$ συγκλίνουν απολύτως.

3. Αποδείξτε ότι, αν $p > 1$, το $\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,dx$ συγκλίνει απολύτως ενώ, αν $0 < p \leq 1$, το ίδιο ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη.

4. Αν $1 < x < +\infty$ ορίζουμε $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. (Δείτε τις ασκήσεις 10 της ενότητας 10.1 και 19 της ενότητας 7.3.) (1) Αποδείξτε ότι $\zeta(x) = x\int_1^{+\infty}\frac{[t]}{t^{x+1}}\,dt$ για κάθε $x > 1$ καθώς και ότι $\frac{1}{x-1} \leq x\int_1^{+\infty}\frac{[t]}{t^{x+1}}\,dt \leq \frac{x}{x-1}$ για κάθε $x > 1$, βρίσκοντας έτσι με δεύτερο τρόπο τις ήδη γνωστές ανισότητες $\frac{1}{x-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x} \leq \frac{x}{x-1}$. (2) Αποδείξτε ότι $\zeta(x) = \frac{x}{x-1} - x\int_1^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^{x+1}}\,dt$ για κάθε $x > 1$. Αποδείξτε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x > 0$. Επομένως, η συνάρτηση ζ επεκτείνεται, μέσω του τύπου αυτού, και στο διάστημα $(0,1)$.

5. Έστω ότι η $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ότι $f(0) = 0$ και η $f'(0)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}\,dx$ συγκλίνει

απολύτως. (*Υπόδ.:* Συγκρίνατε με το $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$.)

6. Για ποιες τιμές των p,q τα $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{x-1}\,dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^p)}{x^q}\,dx$ συγκλίνουν είτε απολύτως είτε υπό συνθήκη;

7. Αποδείξτε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^p}\,dx$ συγκλίνει για κάθε $p>0$.

8. Με τις ισότητες της υπόδειξης της άσκησης 4 της ενότητας 6.2, αποδείξτε ότι (1) $\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}\,dx=\pi$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, (2) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx=\pi$ ή 0, αν ο $n\in\mathbf{N}$ είναι περιττός ή άρτιος, αντιστοίχως, (3) $\int_0^{\pi} \big(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\big)^2\,dx=n\pi$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$.

11.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα με παράμετρο.

Α. Συνεχείς συναρτήσεις δυο μεταβλητών.

Σ' αυτήν την υποενότητα θα μελετήσουμε, πολύ συνοπτικά και κάπως πρόχειρα, τις συνεχείς συναρτήσεις δυο μεταβλητών. Θα δούμε μόνο τα αποτελέσματα που θα χρειαστούμε στις επόμενες δυο υποενότητες.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbf{R}^2=\{(x,y):x,y\in\mathbf{R}\}$. Μια ειδική κατηγορία υποσυνόλων του $\mathbf{R}^2$ είναι τα καρτεσιανά γινόμενα $B\times C=\{(x,y):x\in B, y\in C\}$, όπου B,C είναι οποιαδήποτε υποσύνολα του $\mathbf{R}$. Θεωρούμε, επίσης, συναρτήσεις $f:A\to\mathbf{R}$ με πεδίο ορισμού οποιοδήποτε $A\subseteq\mathbf{R}^2$ και τιμές στο $\mathbf{R}$.

Έστω $A\subseteq\mathbf{R}^2$, συνάρτηση $f:A\to\mathbf{R}$ και $(\xi,\eta)\in A$. Η f χαρακτηρίζεται **συνεχής στο** (ξ,η) αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε $|f(x,y)-f(\xi,\eta)|<\epsilon$ για κάθε $(x,y)\in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\delta_0$. Θυμηθείτε: η παράσταση $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ εκφράζει, «γεωμετρικά», την *ευκλείδεια απόσταση* ανάμεσα στα σημεία (x,y), (ξ,η) του επιπέδου.

Αν η $f:A\to\mathbf{R}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $A\subseteq\mathbf{R}^2$, τότε λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο** A.

Παραδείγματα: (1) Οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση $c:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $c(x,y)=c$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}^2$. Πράγματι, έστω $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2$ και $\epsilon>0$. Θεωρούμε $\delta_0=1>0$ και, τότε, για κάθε $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<1$ συνεπάγεται $|c(x,y)-c(\xi,\eta)|=|c-c|=0<\epsilon$. Άρα η c είναι συνεχής στο (ξ,η).

(2) Οι συναρτήσεις $\pi_1,\pi_2:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ ορίζονται με τύπους $\pi_1(x,y)=x$ και $\pi_2(x,y)=y$. Η π_1 ονομάζεται **προβολή στον x-άξονα** και η π_2 ονομάζεται **προβολή στον y-άξονα**. Οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}^2$. Πράγματι, έστω $(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2$ και $\epsilon>0$. Θεωρούμε $\delta_0=\epsilon>0$ και, τότε, για κάθε $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\delta_0$ συνεπάγεται $|\pi_1(x,y)-\pi_1(\xi,\eta)|=|x-\xi|\leq\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\delta_0=\epsilon$. Άρα η π_1 είναι συνεχής στο (ξ,η) και, ομοίως, η π_2 είναι συνεχής στο (ξ,η).

Πρόταση 11.13 *Έστω $A \subseteq \mathbf{R}^2$ και $f : A \to \mathbf{R}$ συνεχής στο $(\xi, \eta) \in A$. Τότε η $f(x, \eta)$, ως συνάρτηση του x στο $\{x : (x, \eta) \in A\}$, είναι συνεχής στον ξ. Επίσης, η $f(\xi, y)$, ως συνάρτηση του y στο $\{y : (\xi, y) \in A\}$, είναι συνεχής στον η.*

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x,y) - f(\xi,\eta)| < \epsilon$ για κάθε $(x,y) \in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta_0$. Άρα για κάθε x, $(x,\eta) \in A$, $|x - \xi| < \delta_0$ συνεπάγεται $\sqrt{(x-\xi)^2 + (\eta-\eta)^2} = |x-\xi| < \delta_0$ και, επομένως, $|f(x,\eta) - f(\xi,\eta)| < \epsilon$. Άρα η $f(x,\eta)$ είναι συνεχής στον ξ.

Η απόδειξη του δεύτερου μέρους είναι παρόμοια. $\natural$

Η Πρόταση 11.14 είναι ανάλογη της Πρότασης 4.6.

Πρόταση 11.14 *Έστω $A \subseteq \mathbf{R}^2$ και $f, g : A \to \mathbf{R}$ συνεχείς στο $(\xi, \eta) \in A$. Τότε οι $f + g, f - g, fg, |f| : A \to \mathbf{R}$ είναι συνεχείς στο (ξ, η). Αν, επιπλέον, $g(x, y) \neq 0$ για κάθε $(x, y) \in A$, τότε και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο (ξ, η).*

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x,y) - f(\xi,\eta)| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|g(x,y) - g(\xi,\eta)| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $(x,y) \in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta_0$. Επομένως, για κάθε $(x,y) \in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta_0$ ισχύει $\big|(f(x,y) + g(x,y)) - (f(\xi,\eta) + g(\xi,\eta))\big| \leq |f(x,y) - f(\xi,\eta)| + |g(x,y) - g(\xi,\eta)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Άρα η $f + g$ είναι συνεχής στο (ξ, η).

Οι υπόλοιπες αποδείξεις είναι παρόμοιες. $\natural$

Η Πρόταση 11.15 είναι ανάλογη της Πρότασης 4.7.

Πρόταση 11.15 *Έστω $A \subseteq \mathbf{R}^2$, $B \subseteq \mathbf{R}$, $f : A \to B$ και $g : B \to \mathbf{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $(\xi, \eta) \in A$ και η g είναι συνεχής στο $\zeta = f(\xi, \eta) \in B$, τότε η $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο (ξ, η).*

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει ${\delta_0}' > 0$ ώστε $|g(z) - g(\zeta)| < \epsilon$ για κάθε $z \in B$, $|z - \zeta| < {\delta_0}'$. Κατόπιν, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x,y) - \zeta| = |f(x,y) - f(\xi,\eta)| < {\delta_0}'$ για κάθε $(x,y) \in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta_0$. Άρα για κάθε $(x,y) \in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta_0$ ισχύει $|(g \circ f)(x,y) - (g \circ f)(\xi,\eta)| = |g(f(x,y)) - g(\zeta)| < \epsilon$. Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στο (ξ, η). $\natural$

Βάσει αυτών των κανόνων και των προηγούμενων παραδειγμάτων, μπορούμε να αποδείξουμε ότι πολλές συναρτήσεις δυο μεταβλητών είναι συνεχείς.

Παραδείγματα: (1) Ένα μονώνυμο δυο μεταβλητών $cx^n y^m$ $(n, m \in \mathbf{Z}, n, m \geq 0)$ είναι συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}^2$, διότι η συνάρτηση $cx^n y^m$ γράφεται $c(\pi_1(x,y))^n (\pi_2(x,y))^m = c\pi_1(x,y) \cdots \pi_1(x,y)\pi_2(x,y) \cdots \pi_2(x,y)$.

Άρα κάθε πολυώνυμο δυο μεταβλητών, δηλαδή άθροισμα μονωνύμων, όπως, για παράδειγμα, το $3 + 2x^3y^2 - 4xy^5 - 2x^3y^8$, είναι συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}^2$. Τέλος, κάθε ρητή συνάρτηση δυο μεταβλητών, δηλαδή λόγος πολυωνύμων δυο μεταβλητών, όπως, για παράδειγμα, η $\frac{xy - 2xy^3 + 4x^2y^5}{x^2y - 3x^2y^3 + 2x^5y}$, είναι συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}^2$ στο οποίο δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής της ρητής συνάρτησης.

(2) Η συνάρτηση $e^{xy^2}\sin(xy+y^2)$ είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}^2$. Πράγματι, η xy^2 είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}^2$ και έχει τιμές στο $\mathbf{R}$. Επίσης, η e^z είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}$. Άρα η σύνθετη συνάρτηση e^{xy^2} είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}^2$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι η $\sin(xy+y^2)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}^2$. Άρα το γινόμενο $e^{xy^2}\sin(xy+y^2)$ είναι συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbf{R}^2$.

Η Πρόταση 11.16 είναι ανάλογη της μιας από τις δυο κατευθύνσεις του Θεωρήματος 4.1.

Πρόταση 11.16 *Έστω $A\subseteq\mathbf{R}^2$ και $f:A\to\mathbf{R}$ συνεχής στο $(\xi,\eta)\in A$. Έστω ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $(x_n,y_n)\in A$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ και $\lim_{n\to+\infty}x_n=\xi$, $\lim_{n\to+\infty}y_n=\eta$. Τότε $\lim_{n\to+\infty}f(x_n,y_n)=f(\xi,\eta)$.*

Απόδειξη: Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε $|f(x,y)-f(\xi,\eta)|<\epsilon$ για κάθε $(x,y)\in A$, $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}<\delta_0$. Κατόπιν, υπάρχει $n_0\in\mathbf{N}$ ώστε $|x_n-\xi|<\frac{\delta_0}{\sqrt{2}}$ και $|y_n-\eta|<\frac{\delta_0}{\sqrt{2}}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\ge n_0$. Άρα για κάθε $n\in\mathbf{N}$, $n\ge n_0$ ισχύει $\sqrt{(x_n-\xi)^2+(y_n-\eta)^2}<\sqrt{\frac{{\delta_0}^2}{2}+\frac{{\delta_0}^2}{2}}=\delta_0$ και, επομένως, $|f(x_n,y_n)-f(\xi,\eta)|<\epsilon$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}f(x_n,y_n)=f(\xi,\eta)$. $\natural$

Τέλος, το Θεώρημα 11.5 είναι ανάλογο του Θεωρήματος 4.5.

Θεώρημα 11.5 *Έστω $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbf{R}$ συνεχής στο $[a,b]\times[c,d]$. Τότε για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta_0>0$ ώστε $|f(x',y')-f(x'',y'')|<\epsilon$ για κάθε $(x',y'),(x'',y'')\in[a,b]\times[c,d]$, $\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}<\delta_0$.*

Απόδειξη: Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχει $\epsilon_0>0$ ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχουν $(x',y'),(x'',y'')\in[a,b]\times[c,d]$, $\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}<\delta$ ώστε $|f(x',y')-f(x'',y'')|\ge\epsilon_0$. Επομένως, για κάθε $n\in\mathbf{N}$ υπάρχουν $({x_n}',{y_n}'),({x_n}'',{y_n}'')\in[a,b]\times[c,d]$, $\sqrt{({x_n}'-{x_n}'')^2+({y_n}'-{y_n}'')^2}<\frac{1}{n}$ ώστε $|f({x_n}',{y_n}')-f({x_n}'',{y_n}'')|\ge\epsilon_0$. Από την $\sqrt{({x_n}'-{x_n}'')^2+({y_n}'-{y_n}'')^2}<\frac{1}{n}$ συνεπάγεται $|{x_n}'-{x_n}''|<\frac{1}{n}$ και $|{y_n}'-{y_n}''|<\frac{1}{n}$.

Η $({x_n}')$ είναι στο $[a,b]$ οπότε υπάρχει υποακολουθία $({x_{n_k}}')$ η οποία συγκλίνει, έστω στον ξ. Επειδή $|{x_{n_k}}'-{x_{n_k}}''|<\frac{1}{n_k}$ για κάθε $k\in\mathbf{N}$, συνεπάγεται ότι και η $({x_{n_k}}'')$ συγκλίνει στον ξ. Δηλαδή, $\lim_{k\to+\infty}{x_{n_k}}'=\lim_{k\to+\infty}{x_{n_k}}''=\xi$.

Η $({y_n}')$ και, επομένως, η υποακολουθία $({y_{n_k}}')$ είναι στο $[c,d]$. Άρα υπάρχει υποακολουθία $({y_{n_{k_l}}}')$ η οποία συγκλίνει, έστω στον η. Επειδή $|{y_{n_{k_l}}}'-{y_{n_{k_l}}}''|<\frac{1}{n_{k_l}}$ για κάθε $l\in\mathbf{N}$, συνεπάγεται ότι και η $({y_{n_{k_l}}}'')$ συγκλίνει στον η. Δηλαδή, $\lim_{l\to+\infty}{y_{n_{k_l}}}'=\lim_{l\to+\infty}{y_{n_{k_l}}}''=\eta$. Συνεπάγεται, επίσης, ότι $\lim_{l\to+\infty}{x_{n_{k_l}}}'=\lim_{l\to+\infty}{x_{n_{k_l}}}''=\xi$.

Επειδή η $({x_{n_{k_l}}}')$ είναι στο $[a,b]$, συνεπάγεται $\xi\in[a,b]$ και, επειδή η $({y_{n_{k_l}}}')$ είναι στο $[c,d]$, συνεπάγεται $\eta\in[c,d]$. Άρα $(\xi,\eta)\in[a,b]\times[c,d]$, οπότε η f είναι συνεχής στο (ξ,η). Άρα $\lim_{l\to+\infty}f({x_{n_{k_l}}}',{y_{n_{k_l}}}')=f(\xi,\eta)$ και $\lim_{l\to+\infty}f({x_{n_{k_l}}}'',{y_{n_{k_l}}}'')=f(\xi,\eta)$. Άρα $\lim_{l\to+\infty}\big(f({x_{n_{k_l}}}',{y_{n_{k_l}}}')-f({x_{n_{k_l}}}'',{y_{n_{k_l}}}'')\big)=0$. Αυτό αντιφάσκει με το ότι ισχύει $\big|f({x_{n_{k_l}}}',{y_{n_{k_l}}}')-f({x_{n_{k_l}}}'',{y_{n_{k_l}}}'')\big|\ge\epsilon_0$ για κάθε $l\in\mathbf{N}$. $\natural$

Β. Ολοκληρώματα με παράμετρο.

Έστω διάστημα I και συνάρτηση δυο μεταβλητών $f : I \times [c,d] \to \mathbf{R}$. Αν για κάποιον $x \in I$ η $f(x,y)$, ως συνάρτηση μιας μεταβλητής, του $y \in [c,d]$, είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$, τότε ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$. Αν αυτό ισχύει για *κάθε* $x \in I$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $g : I \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι θεωρούμε το «ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ με παράμετρο $x \in I$». Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d]$, τότε για κάθε $x \in I$ η $f(x,y)$, ως συνάρτηση του $y \in [c,d]$, είναι συνεχής στο $[c,d]$ και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$.

Στα Θεωρήματα 11.6, 11.7 θα δούμε ότι, με κατάλληλες υποθέσεις, η g είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη, αντιστοίχως, στο I.

Θεώρημα 11.6 *Έστω διάστημα I και $f : I \times [c,d] \to \mathbf{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d]$, τότε η $g : I \to \mathbf{R}$, $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη: Έστω $\xi \in I$. Θεωρούμε διάστημα $[a,b] \subseteq I$ έτσι ώστε: αν ο ξ είναι δεξιό ή αριστερό άκρο του I, τότε ο ξ να είναι, ομοίως, δεξιό ή αριστερό άκρο του $[a,b]$ και, αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I, τότε ο ξ να είναι, ομοίως, εσωτερικό σημείο του $[a,b]$. Άρα για να αποδείξουμε ότι η g είναι συνεχής στον ξ αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ είναι συνεχής στον ξ.

Έστω $\epsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b] \times [c,d]$, οπότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f(x',y') - f(x'',y'')| < \frac{\epsilon}{d-c+1}$ για κάθε $(x',y'),(x'',y'') \in [a,b] \times [c,d]$, $\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2} < \delta_0$. Τότε για κάθε $x \in [a,b]$, $|x-\xi| < \delta_0$ και για κάθε $y \in [c,d]$ συνεπάγεται $(x,y),(\xi,y) \in [a,b] \times [c,d]$, $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-y)^2} = |x-\xi| < \delta_0$ και, επομένως, $|f(x,y) - f(\xi,y)| < \frac{\epsilon}{d-c+1}$. Άρα για κάθε $x \in [a,b]$, $|x-\xi| < \delta_0$ ισχύει $|g(x) - g(\xi)| = \big|\int_c^d (f(x,y) - f(\xi,y))\,dy\big| \leq \frac{\epsilon}{d-c+1}(d-c) < \epsilon$. Άρα ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ είναι συνεχής στον ξ. $\natural$

Το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x,\eta)-f(\xi,\eta)}{x-\xi}$, αν υπάρχει, ονομάζεται **μερική παράγωγος ως προς x της f στο σημείο** (ξ,η). Ομοίως, το όριο $\lim_{y\to\eta} \frac{f(\xi,y)-f(\xi,\eta)}{y-\eta}$, αν υπάρχει, ονομάζεται **μερική παράγωγος ως προς y της f στο σημείο** (ξ,η). Συμβολίζουμε

$$f'_x(\xi,\eta) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x,\eta) - f(\xi,\eta)}{x-\xi}\,, \qquad f'_y(\xi,\eta) = \lim_{y\to\eta} \frac{f(\xi,y) - f(\xi,\eta)}{y-\eta}\,.$$

Θεώρημα 11.7 *Έστω διάστημα I και $f : I \times [c,d] \to \mathbf{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d]$ και η f'_x είναι, επίσης, συνεχής στο $I \times [c,d]$. Τότε η $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ $(x \in I)$ είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $g'(x) = \int_c^d f'_x(x,y)\,dy$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη: Έστω $\xi \in I$. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 11.6, θεωρούμε διάστημα $[a,b] \subseteq I$ που περιέχει τον ξ στο εσωτερικό του, αν ο ξ είναι στο εσωτερικό του I, ή ως άκρο του, αν ο ξ είναι άκρο του I. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ έχει παράγωγο στον ξ ίση με $g'(\xi) = \int_c^d f'_x(\xi,y)\,dy$.

Έστω $\epsilon > 0$. Η f'_x είναι συνεχής στο $[a,b]\times[c,d]$, οπότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε $|f'_x(x',y') - f'_x(x'',y'')| < \frac{\epsilon}{d-c+1}$ για κάθε $(x',y'),(x'',y'') \in [a,b]\times[c,d]$, $\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2} < \delta_0$. Έστω $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $|x-\xi| < \delta_0$. Τότε υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, ξ ώστε $\frac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} = f'_x(\zeta,y)$ και, επειδή $|\zeta-\xi| \leq |x-\xi| < \delta_0$, συνεπάγεται $\big|\frac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} - f'_x(\xi,y)\big| = |f'_x(\zeta,y)-f'_x(\xi,y)| < \frac{\epsilon}{d-c+1}$. Άρα για κάθε $x \in [a,b]$, $|x-\xi| < \delta_0$ ισχύει $\big|\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} - \int_c^d f'_x(\xi,y)\,dy\big| = \big|\int_c^d \big(\frac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} - f'_x(\xi,y)\big)\,dy\big| \leq \frac{\epsilon}{d-c+1}(d-c) < \epsilon$. Άρα $\lim_{x\to\xi}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = \int_c^d f'_x(\xi,y)\,dy$ και, επομένως, ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ έχει παράγωγο στον ξ ίση με $g'(\xi) = \int_c^d f'_x(\xi,y)\,dy$. $\natural$

Παράδειγμα: Έστω $f(x) = \big(\int_0^x e^{-s^2}\,ds\big)^2$ και $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}\,dy$. Τότε, κατ' αρχάς, ισχύει $f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-s^2}\,ds$ για κάθε x. Η μερική παράγωγος ως προς x της $\frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}$, δηλαδή η $-2xe^{-x^2(y^2+1)}$, είναι συνεχής στο $\mathbf{R}\times[0,1]$, οπότε είναι $g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(y^2+1)}\,dy = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2y^2}\,dy = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-s^2}\,ds$ για κάθε x. Συνεπάγεται $f'(x)+g'(x) = 0$ για κάθε x. Άρα η $f+g$ είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbf{R}$, οπότε είναι $f(x)+g(x) = f(0)+g(0) = 0 + \int_0^1 \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$ για κάθε x.

Παρατηρούμε ότι ισχύει $0 \leq g(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{4}e^{-x^2}$ για κάθε x και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} - \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{4}$. Άρα $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Τέλος, επειδή η e^{-x^2} είναι άρτια, εύκολα βλέπουμε ότι $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Καταλήγουμε, επομένως, στο πολύ σημαντικό **ολοκλήρωμα του Gauss**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Γ. Γενικευμένα ολοκληρώματα με παράμετρο.

Έστω $d \in \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, διάστημα I και $f : I\times[c,d) \to \mathbf{R}$. Έστω ότι για κάποιον $x \in I$ η $f(x,y)$, ως συνάρτηση του $y \in [c,d)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[c,d)$ και ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει. Αν αυτό ισχύει για κάθε $x \in I$, τότε ορίζεται, και πάλι, συνάρτηση $g : I \to \mathbf{R}$ με τύπο

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

και λέμε ότι πρόκειται για «γενικευμένο ολοκλήρωμα με παράμετρο $x \in I$». Επίσης, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ **συγκλίνει στην** $g(x)$ **κατά σημείο στο διάστημα** I.

Σκοπεύουμε να δούμε υπό ποιες υποθέσεις η g είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη στο διάστημα I.

Παραδείγματα: (1) Θεωρούμε το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$.

Για κάθε $y \geq 0$ είναι $\int_0^y e^{-xt}\,dt = \begin{cases} -\frac{e^{-xy}-1}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0 \end{cases}$ και, επομένως, είναι $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy = \begin{cases} +\infty, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$ Άρα το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει στην $\frac{1}{x}$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)$. Βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής και, μάλιστα, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

(2) Θεωρούμε το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\,dy$.

Κατ΄ αρχάς, αν $x = 0$, το ολοκλήρωμα έχει τιμή 0. Έστω, τώρα, ότι $x > 0$. Με αλλαγή μεταβλητής βρίσκουμε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy$. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy$ συγκλίνει και έστω A η τιμή του. Άρα $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\,dy = A$ για κάθε $x > 0$. Αν $x < 0$, τότε $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-|x|y)}{y}\,dy = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(|x|y)}{y}\,dy = -A$.

Άρα το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\,dy$ συγκλίνει στην $g(x) = \begin{cases} A, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -A, & x < 0. \end{cases}$ κατά σημείο στο $\mathbf{R}$. Έχουμε, επίσης, δει ότι $A > 0$ και, επομένως, η g δεν είναι συνεχής στον 0 ενώ είναι συνεχής και, μάλιστα, παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

Λέμε ότι το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ **συγκλίνει στην** $g(x)$ **ομοιόμορφα στο διάστημα** I αν

$$\lim_{y \to d-} \sup\left\{\left|g(x) - \int_c^y f(x,t)\,dt\right| : x \in I\right\} = 0$$

ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $c_0 \in [c,d)$ ώστε $\left|g(x) - \int_c^y f(x,t)\,dt\right| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in I$ και $y \in (c_0,d)$.

Τώρα, για κάθε $y \in [c,d)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_y : I \to \mathbf{R}$, $g_y(x) = \int_c^y f(x,t)\,dt$. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\sup\left\{\left|g(x) - \int_c^y f(x,t)\,dt\right| : x \in I\right\} = \sup\{|g(x) - g_y(x)| : x \in I\} = \|g_y - g\|_I$. Άρα ο παραπάνω ορισμός αναδιατυπώνεται ως εξής: *το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα στο διάστημα I αν*

$$\lim_{y \to d-} \|g_y - g\|_I = 0.$$

Πρόταση 11.17 *Αν το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα στο διάστημα I, τότε συγκλίνει στην $g(x)$ και κατά σημείο στο I.*

Απόδειξη: Έστω $\xi \in I$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $c_0 \in [c,d)$ ώστε $\left|g(x) - \int_c^y f(x,t)\,dt\right| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in I$ και $y \in (c_0,d)$. Συνεπάγεται $\left|g(\xi) - \int_c^y f(\xi,t)\,dt\right| \leq \epsilon$ για κάθε $y \in (c_0,d)$. Άρα $g(\xi) = \lim_{y \to d-} \int_c^y f(\xi,t)\,dt = \int_c^d f(\xi,y)\,dy$. Τέλος, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\xi \in I$, συμπεραίνουμε ότι το

$\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ κατά σημείο στο I. ♮

Παράδειγμα: Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει στην $\frac{1}{x}$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)$. Θα δούμε, τώρα, ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\left|\frac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| = \frac{e^{-xy}}{x}$ για κάθε $x > 0$ και $y \geq 0$. Άρα $\sup\left\{\left|\frac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| : x \in (0,+\infty)\right\} = \sup\{\frac{e^{-xy}}{x} : x > 0\} = +\infty$ για κάθε $y \geq 0$. Άρα δεν ισχύει ότι $\lim_{y\to+\infty} \sup\left\{\left|\frac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| : x \in (0,+\infty)\right\} = 0$ και, επομένως, το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ δε συγκλίνει στην $\frac{1}{x}$ ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$.

Από την άλλη μεριά, θεωρώντας οποιονδήποτε $a > 0$, θα αποδείξουμε ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει στην $\frac{1}{x}$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Πράγματι, $\sup\left\{\left|\frac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| : x \in [a,+\infty)\right\} = \sup\{\frac{e^{-xy}}{x} : x \geq a\} = \frac{e^{-ay}}{a}$ για κάθε $y > 0$ και, επομένως, $\lim_{y\to+\infty} \sup\left\{\left|\frac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| : x \in [a,+\infty)\right\} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-ay}}{a} = 0$.

Έστω ακολουθία (y_n) στο $[c,d)$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} y_n = d$. Έχουμε ήδη ορίσει τις συνάρτησεις $g_{y_n} : I \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$,

$$g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt.$$

Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τους ορισμούς, αν το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ κατά σημείο ή ομοιόμορφα στο I, τότε, αντιστοίχως, $\lim_{n\to+\infty} g_{y_n} \overset{\kappa.\sigma.}{=} g$ ή $\lim_{n\to+\infty} g_{y_n} \overset{\text{ομ}}{=} g$ στο I. Αυτή η παρατήρηση θα μας βοηθήσει να μελετήσουμε τις ιδιότητες συνέχειας και παραγωγισιμότητας της g, διότι θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε τα σχετικά αποτελέσματα για ακολουθίες συναρτήσεων.

Θεώρημα 11.8 *Έστω $d \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, διάστημα I και $f : I \times [c,d) \to \mathbf{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d)$ και το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα στο I, τότε η $g : I \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη: Θεωρούμε ακολουθία (y_n) στο $[c,d)$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} y_n = d$. Κατόπιν, ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_{y_n} : I \to \mathbf{R}$, $g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt$. Τότε $\lim_{n\to+\infty} g_{y_n} \overset{\text{ομ}}{=} g$ στο I. Η f είναι συνεχής στο $I \times [c,y_n]$, αφού αυτό είναι υποσύνολο του $I \times [c,d)$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.6, κάθε g_{y_n} $(n \in \mathbf{N})$ είναι συνεχής στο I. Άρα η g είναι συνεχής στο I. ♮

Θεώρημα 11.9 *Έστω $d \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, διάστημα I και $f : I \times [c,d) \to \mathbf{R}$. Έστω ότι οι f, f'_x είναι συνεχείς στο $I \times [c,d)$, ότι το $\int_c^d f'_x(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο I και ότι το $\int_c^d f(\xi,y)\,dy$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$. Τότε το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η g είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $g'(x) = h(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (y_n) στο $[c,d)$ ώστε $\lim_{n\to+\infty} y_n = d$ και ορίζουμε τις $g_{y_n} : I \to \mathbf{R}$, $g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt$. Σύμφωνα με το Θεώρημα

11.7, είναι ${g_{y_n}}'(x) = \int_c^{y_n} f'_x(x,t)\,dt$ για κάθε $x \in I$. Λόγω της υπόθεσης, ισχύει $\lim_{n\to+\infty} {g_{y_n}}' \overset{\text{ομ}}{=} h$ στο I. Επίσης, λόγω της υπόθεσης, η $(g_{y_n}(\xi))$ συγκλίνει.

Από το Θεώρημα 9.4 συνεπάγεται ότι η (g_{y_n}) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση g κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι ισχύει $g'(x) = h(x)$ για κάθε $x \in I$. Ειδικώτερα, ισχύει $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_{y_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt = \int_c^d f(x,y)\,dy$ για κάθε $x \in I$.

Μένει να αποδείξουμε ότι το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ *ομοιόμορφα* σε κάθε $[a,b] \subseteq I$. Ορίζουμε την $F : [c,d) \to \mathbf{R}$, $F(y) = \|g_y - g\|_{[a,b]}$. Σύμφωνα με τον ορισμό, το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ αν και μόνο αν $\lim_{y\to d-} F(y) = 0$. Τώρα, θεωρούμε οποιαδήποτε (y_n) στο $[c,d)$ με την ιδιότητα $\lim_{n\to+\infty} y_n = d$ και τις αντίστοιχες $g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt$ $(x \in I)$. Επειδή η (g_{y_n}) συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $[a,b]$, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} F(y_n) = \lim_{n\to+\infty} \|g_{y_n} - g\|_{[a,b]} = 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2, συνεπάγεται $\lim_{y\to d-} F(y) = 0$. $\natural$

Για την εφαρμογή των Θεωρημάτων 11.8, 11.9 χρειαζόμαστε ένα κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Θα δούμε, τώρα, ένα πολύ σημαντικό κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων, το οποίο μοιάζει πολύ με το κριτήριο Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

Θεώρημα 11.10 *Έστω διάστημα I, $f : I \times [c,d) \to \mathbf{R}$ και $F : [c,d) \to \mathbf{R}$ ώστε $|f(x,y)| \le F(y)$ για κάθε $y \in [c,d)$, $x \in I$. Αν το $\int_c^d F(y)\,dy$ συγκλίνει, τότε το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 11.12 συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in I$ το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει. Άρα ορίζεται η $g : I \to \mathbf{R}$, $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$. Ορίζουμε, επίσης, και τις $g_y : I \to \mathbf{R}$, $g_y(x) = \int_c^y f(x,t)\,dt$. Μένει να δούμε αν το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ *ομοιόμορφα* στο I ή, ισοδύναμα, αν $\lim_{y\to d-} \|g_y - g\|_I = 0$.

Για κάθε $y \in [c,d)$, $x \in I$ είναι $|g(x) - g_y(x)| = \big|\int_c^d f(x,t)\,dt - \int_c^y f(x,t)\,dt\big| = \big|\int_y^d f(x,t)\,dt\big| \le \int_y^d |f(x,t)|\,dt \le \int_y^d F(t)\,dt$, οπότε $\|g_y - g\|_I \le \int_y^d F(t)\,dt = \int_c^d F(t)\,dt - \int_c^y F(t)\,dt$. Άρα $\lim_{y\to d-} \|g_y - g\|_I = 0$. $\natural$

Παραδείγματα: (1) Θα μελετήσουμε το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$.

Είναι $|e^{-y}\sin(xy)| \le e^{-y}$ για κάθε $y \in [0,+\infty)$, $x \in \mathbf{R}$. Το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy$ συγκλίνει και, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.10, το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια $g(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$. Ειδικώτερα, $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ για κάθε x. Η συνάρτηση $e^{-y}\sin(xy)$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R} \times [0,+\infty)$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.8, η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Η μερική παράγωγος ως προς x της $e^{-y}\sin(xy)$ είναι η $ye^{-y}\cos(xy)$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbf{R} \times [0,+\infty)$. Επίσης, $|ye^{-y}\cos(xy)| \le ye^{-y}$ για κάθε $y \in [0,+\infty)$, $x \in \mathbf{R}$ και το $\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,dy$ συγκλίνει. Άρα το $\int_0^{+\infty} ye^{-y}\cos(xy)\,dy$

συγκλίνει σε μια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$. Έχουμε, επίσης, ήδη αποδείξει ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ κατά σημείο στο $\mathbf{R}$. Από το Θεώρημα 11.9 συνεπάγεται ότι $g'(x) = h(x) = \int_0^{+\infty} ye^{-y}\cos(xy)\,dy$ για κάθε x.

Παρεμπιπτόντως, μπορούμε να υπολογίσουμε το $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ με ολοκληρώσεις κατά μέρη: $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy = -\int_0^{+\infty} \frac{d\,e^{-y}}{dy}\sin(xy)\,dy = -\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\sin(xy) + x\int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(xy)\,dy = -x\int_0^{+\infty} \frac{d\,e^{-y}}{dy}\cos(xy)\,dy = -x\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\cos(xy)+x-x^2\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)dy = x-x^2\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)dy$. Χρησιμοποιήσαμε τα όρια $\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\sin(xy) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\cos(xy) = 0$, τα οποία ισχύουν διότι είναι $|e^{-y}\sin(xy)| \leq e^{-y}$ και $|e^{-y}\cos(xy)| \leq e^{-y}$.

Άρα είναι $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy = \frac{x}{1+x^2}$.

(2) Θεωρούμε το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ για κάθε $x > 0$.

Είναι $\left|e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right| \leq e^{-xy}$ για κάθε $y \in (0,+\infty)$, $x \in (0,+\infty)$. Το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 11.12, το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ συγκλίνει για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και ορίζει συνάρτηση $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ στο $(0,+\infty)$.

Έστω $a > 0$. Παρατηρούμε ότι $\left|e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right| \leq e^{-xy} \leq e^{-ay}$ για κάθε $y \in (0,+\infty)$ και $x \in [a,+\infty)$. Το $\int_0^{+\infty} e^{-ay}\,dy$ συγκλίνει, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.10, το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Η συνάρτηση $e^{-xy}\frac{\sin y}{y}$ είναι συνεχής στο $[a,+\infty)\times(0,+\infty)$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.8, η g είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $a > 0$, συνεπάγεται ότι η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Η μερική παράγωγος ως προς x της $e^{-xy}\frac{\sin y}{y}$ είναι η $-e^{-xy}\sin y$, η οποία είναι συνεχής στο $[a,+\infty)\times(0,+\infty)$. Επίσης, $|-e^{-xy}\sin y| \leq e^{-xy} \leq e^{-ay}$ για κάθε $y \in (0,+\infty)$, $x \in [a,+\infty)$ και το $\int_0^{+\infty} e^{-ay}\,dy$ συγκλίνει. Άρα το $-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Από το Θεώρημα 11.9 συνεπάγεται ότι $g'(x) = h(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$. Μετά από αλλαγή μεταβλητής, $g'(x) = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(\frac{y}{x})\,dy$, οπότε, από το προηγούμενο παράδειγμα, $g'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$.

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $a > 0$, συμπεραίνουμε ότι $g'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$ για κάθε $x > 0$. Άρα $g'(x) = -\arctan' x$ για κάθε $x > 0$, οπότε υπάρχει σταθερά c ώστε να είναι $g(x) = -\arctan x + c$ για κάθε $x > 0$.

Τώρα, είναι $|g(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy}|\frac{\sin y}{y}|\,dy \leq \int_0^{-\infty} e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Άρα $0 = -\lim_{x\to+\infty}\arctan x + c$, οπότε $c = \frac{\pi}{2}$. Άρα

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2} - \arctan x \qquad (x > 0).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(y) = \int_0^y \frac{\sin t}{t}\,dt$. Γνωρίζουμε, από το τελευταίο παράδειγμα της ενότητας 11.3, ότι υπάρχει το $A = \lim_{y\to+\infty} F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ και ότι είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to0+}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy = A$.

Κατ' αρχάς, είναι σαφές ότι $F'(y) = \frac{\sin y}{y}$ για κάθε $y > 0$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $y_0 > 0$ ώστε $|F(y) - A| < \frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $y \geq y_0$ και, επομένως, $|F(y) - F(y_0)| < |F(y) - A| + |F(y_0) - A| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $y \geq y_0$. Τότε συνεπάγεται $\big|\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy\big| = \big|\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\frac{d\,(F(y)-F(y_0))}{dy}\,dy\big| = \big|x\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}(F(y) - F(y_0))\,dy\big| \leq \frac{\epsilon}{2}x\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\,dy = \frac{\epsilon}{2}e^{-xy_0} < \frac{\epsilon}{2}$. Επίσης, $\big|\int_{y_0}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy\big| = |A - F(y_0)| < \frac{\epsilon}{4}$.

Κατόπιν, $\big|\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy - A\big| = \big|\int_0^{y_0} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy + \int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy - \int_0^{y_0}\frac{\sin y}{y}\,dy - \int_{y_0}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy\big| \leq \big|\int_0^{y_0} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy - \int_0^{y_0}\frac{\sin y}{y}\,dy\big| + \big|\int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy\big| + \big|\int_{y_0}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy\big| < \big|\int_0^{y_0}(e^{-xy}-1)\frac{\sin y}{y}\,dy\big| + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} \leq \int_0^{y_0}(1-e^{-xy})\,dy + \frac{3\epsilon}{4}$. Από τη γνωστή ανισότητα $1 + t \leq e^t$ συνεπάγεται $\int_0^{y_0}(1 - e^{-xy})\,dy \leq x\int_0^{y_0} y\,dy = \frac{x{y_0}^2}{2}$. Άρα είναι $\big|\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy - A\big| < \frac{x{y_0}^2}{2} + \frac{3\epsilon}{4}$.

Τέλος, θεωρούμε $\delta_0 = \frac{\epsilon}{2{y_0}^2}$. Αν $0 < x < \delta_0$, τότε $\big|\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy - A\big| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{3\epsilon}{4} = \epsilon$. Άρα $\lim_{x\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy = A$.

Συνεπάγεται ότι $A = \lim_{x\to 0+}(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \frac{\pi}{2}$. Άρα είναι

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

Ασκήσεις.

1. Έστω $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\cos(2xy)\,dy$. Αποδείξτε ότι $F'(x) + 2xF(x) = 0$ για κάθε x. Κατόπιν, αποδείξτε ότι $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$ για κάθε x. (*Υπόδ.:* Αποδείξτε ότι η $e^{x^2}F(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση.)

2. (Συνέχεια της άσκησης 4 της ενότητας 11.3.) Αποδείξτε ότι το $\int_1^{+\infty}\frac{[y]}{y^{x+1}}\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, b] \subseteq (1, +\infty)$. Αποδείξτε ότι το $\int_1^{+\infty}\frac{y-[y]}{y^{x+1}}\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση ζ είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ και ότι η $(x-1)\zeta(x)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

11.5 Η συνάρτηση Γ.

Θεωρούμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$$

με παράμετρο $x \in (0, +\infty)$.

Λήμμα 11.2 *Αν $x > 0$, τα $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$, $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ $(n \in \mathbf{N})$ συγκλίνουν. Επίσης, τα γενικευμένα αυτά ολοκληρώματα συγκλίνουν σε αντίστοιχες συναρτήσεις ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$.*

Απόδειξη: Το πρώτο ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του δεύτερου με $n = 0$. Το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ χωρίζεται σε δύο γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy, \qquad \int_1^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy.$$

Θεωρούμε a, b ώστε $0 < a \le b < +\infty$ και $x \in [a, b]$. Αν $y \ge 1$, τότε είναι $|y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}| \le y^{n+x-1}e^{-y} \le y^{n+b-1}e^{-y}$ και, επειδή το $\int_1^{+\infty} y^{n+b-1}e^{-y}\,dy$ συγκλίνει, το $\int_1^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Αν $0 < y \le 1$, τότε $|y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}| \le y^{a-1}|\log y|^n$ και, επειδή το $\int_0^1 y^{a-1}|\log y|^n\,dy$ συγκλίνει, το $\int_0^1 y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Άρα το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Για να αποδείξουμε, τώρα, ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x > 0$, εφαρμόζουμε τη γνωστή διαδικασία. Δηλαδή, παίρνουμε τυχόν $\xi > 0$ και, κατόπιν, διαλέγουμε διάστημα $[a, b]$ ώστε $0 < a < \xi < b < +\infty$. Αφού έχουμε αποδείξει ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει (ομοιόμορφα) στο $[a, b]$, συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει και στο ξ. ♮

Η συνάρτηση που ορίζεται από το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ συμβολίζεται

$$\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

και ονομάζεται **συνάρτηση** Γ. Δηλαδή,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy \qquad (0 < x < +\infty).$$

Η συνάρτηση Γ είναι εξαιρετικά σημαντική.

Πρόταση 11.18 *Η Γ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\,dy \qquad (0 < x < +\infty, n \in \mathbf{N}).$$

Απόδειξη: Έστω $\xi \in (0, +\infty)$. Θεωρούμε a, b ώστε $0 < a < \xi < b < +\infty$ και παρατηρούμε ότι η $y^{x-1}e^{-y}$ και η μερική παράγωγός της ως προς x, δηλαδή η $y^{x-1}\log y\, e^{-y}$, είναι συνεχείς στο $[a, b] \times (0, +\infty)$ και η σύγκλιση των $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$ και $\int_0^{+\infty} y^{x-1}\log y\, e^{-y}\,dy$ είναι ομοιόμορφη στο $[a, b]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.9, έχουμε $\Gamma'(\xi) = \int_0^{+\infty} y^{\xi-1}\log y\, e^{-y}\,dy$.

Επαναλαμβάνουμε με την $y^{x-1}\log y\, e^{-y}$ και τη μερική της παράγωγο ως προς x, δηλαδή την $y^{x-1}(\log y)^2e^{-y}$, οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a, b] \times (0, +\infty)$, και με τα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} y^{x-1}\log y\, e^{-y}\,dy$ και $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^2e^{-y}\,dy$, τα οποία συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.9, $\Gamma''(\xi) = \int_0^{+\infty} y^{\xi-1}(\log y)^2e^{-y}\,dy$.

Η επαγωγική γενίκευση για παραγώγους ανώτερης τάξης είναι προφανής. ♮

Πρόταση 11.19 *Η συνάρτηση Γ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*
(1) $\Gamma(x) > 0$ *για κάθε* $x \in (0, +\infty)$.
(2) $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$ *και* $\lim_{x\to0+} \Gamma(x) = +\infty$.
(3) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *για κάθε* $x \in (0, +\infty)$.
(4) $\Gamma(1) = 1$ *και* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$.
(5) *Η* Γ *είναι κυρτή στο* $(0, +\infty)$.

Απόδειξη: (1) Επειδή $y^{x-1}e^{-y} > 0$ για κάθε $y \in (0, +\infty)$, συνεπάγεται $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy \geq 0$. Για τη γνήσια ανισότητα, παρατηρούμε ότι η τιμή της $y^{x-1}e^{-y}$ για $y = 1$ είναι $\frac{1}{e} > 0$, οπότε, λόγω συνέχειας, υπάρχουν c, d, $0 < c < 1 < d < +\infty$ ώστε $y^{x-1}e^{-y} \geq \frac{1}{2e}$ για κάθε $y \in [c, d]$. Συνεπάγεται $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy = \int_0^c y^{x-1}e^{-y}\,dy + \int_c^d y^{x-1}e^{-y}\,dy + \int_d^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy \geq 0 + \int_c^d \frac{1}{2e}\,dy + 0 = \frac{d-c}{2e} > 0$.
(2) $\Gamma(x) \geq \int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\,dy \geq e^{-1}\int_0^1 y^{x-1}\,dy = \frac{1}{ex}$. Άρα $\lim_{x\to0+} \Gamma(x) = +\infty$. Επίσης, για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $\Gamma(x) \geq \int_2^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy \geq 2^{x-1}\int_2^{+\infty} e^{-y}\,dy = 2^{x-1}e^{-2}$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
(3) Με ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ότι $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} y^x e^{-y}\,dy = x\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy = x\Gamma(x)$.
(4) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 1$. Από την $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, με την αρχή της επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2! = 3!$ και, γενικότερα, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
(5) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^2 e^{-y}\,dy \geq 0$. $\natural$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση Γ είναι ορισμένη σε ολόκληρο το διάστημα $(0, +\infty)$ και στα σημεία του $\mathbf{N}$ ταυτίζεται με τη συνάρτηση *παραγοντικό*.

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιώντας ότι $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής αποδείξτε ότι $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$. Αποδείξτε ότι

$$\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}\,, \qquad (n \in \mathbf{Z}, n \geq 0).$$

2. (Συνέχεια της άσκησης 2 της ενότητας 11.4.) Σε όλα τα επόμενα υποθέτουμε ότι $x > 1$. (1) Αποδείξτε ότι, αν $a > 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $\frac{y^{x-1}}{e^y-1}$ στο $[a, +\infty)$. (*Υπόδ.:* Αν $n \in \mathbf{N}$, $n \geq \frac{x-1}{a}$, η $y^{x-1}e^{-ny}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του y στο $[a, +\infty)$. Άρα, αν $n \in \mathbf{N}$, $n \geq \frac{x-1}{a}$, ισχύει $\big|\sum_{k=1}^n e^{-ky}y^{x-1} - \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\big| = \frac{y^{x-1}e^{-ny}}{e^y-1} \leq \frac{a^{x-1}e^{-na}}{e^a-1}$ για κάθε $y \in [a, +\infty)$.) (2) Αν $0 < a < b < +\infty$, αποδείξτε ότι $\int_a^b \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b e^{-ny}y^{x-1}\,dy \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy$. (3) Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy$. (4) Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει $\sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} e^{-ky}y^{x-1}\,dy \leq \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy$. (*Υπόδ.:*

$\sum_{k=1}^{n} e^{-ky} y^{x-1} \leq \frac{y^{x-1}}{e^y-1}$.) (5) Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-ny} y^{x-1}\, dy \leq \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\, dy$.
Από τα (3), (5) συνεπάγεται αμέσως ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-ny} y^{x-1}\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^y - 1}\, dy \qquad (x > 1).$$

(6) Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-ny} y^{x-1}\, dy = \frac{\Gamma(x)}{n^x}$. (7) Αποδείξτε ότι

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^y - 1}\, dy \qquad (x > 1).$$

Κεφάλαιο 12

Η αξιωματική θεμελίωση.

12.1 Οι φυσικοί και τα αξιώματα του Peano.

Θεωρούμε δεδομένο ένα σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε $\mathbf{N}$ και του οποίου τα στοιχεία ονομάζουμε **φυσικούς**. Το σύνολο $\mathbf{N}$ έχει τις εξής πρωταρχικές ιδιότητες, οι οποίες δεν αποδεικνύονται και γι αυτό ονομάζονται **αξιώματα**, τα αξιώματα του Peano, και από τις οποίες αποδεικνύονται (σύμφωνα με τους στοιχειώδεις κανόνες της λογικής) όλες οι άλλες ιδιότητες του $\mathbf{N}$.

Αξίωμα 1. Το $\mathbf{N}$ έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, το οποίο συμβολίζουμε 1.

Αξίωμα 2. Σε κάθε $n \in \mathbf{N}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένας $n' \in \mathbf{N}$, ο οποίος ονομάζεται **ο επόμενος του** n.

Αξίωμα 3. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι $n' \neq 1$.

Δηλαδή, ο 1 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού.

Αξίωμα 4. Αν $n, m \in \mathbf{N}$ και $n' = m'$, τότε $n = m$.

Ισοδύναμα, αν $n, m \in \mathbf{N}$ και $n \neq m$, τότε $n' \neq m'$.

Αξίωμα 5. Αξίωμα της Επαγωγής. Έστω ότι ένα σύνολο $K \subseteq \mathbf{N}$ έχει τις εξής δυο ιδιότητες: (i) $1 \in K$ και (ii) αν $n \in K$, τότε $n' \in K$. Τότε $K = \mathbf{N}$.

Το Αξίωμα 2 λέει ότι η απεικόνιση $n \mapsto n'$ είναι *συνάρτηση* με πεδίο ορισμού το $\mathbf{N}$ και σύνολο τιμών υποσύνολο του $\mathbf{N}$. Τώρα, το Αξίωμα 3 λέει ότι ο 1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής και το Αξίωμα 4 λέει ότι η συνάρτηση αυτή είναι ένα - προς - ένα.

Α. Πρόσθεση.

Πρόταση 12.1 *Για κάθε* $n \in \mathbf{N}$ *είναι* $n' \neq n$.

Απόδειξη: Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbf{N}$ για τους οποίους είναι $n' \neq n$. Από τα Αξιώματα 1 και 3 συνεπάγεται $1 \in K$. Έστω $n \in K$. Τότε $n \in \mathbf{N}$ και $n' \neq n$.

Από το Αξίωμα 4 συνεπάγεται $(n')' \neq n'$ και, επομένως, $n' \in K$. Από το Αξίωμα 5 συνεπάγεται $K = \mathbf{N}$. $\natural$

Πρόταση 12.2 *Για κάθε $m \in \mathbf{N}$, $m \neq 1$ υπάρχει ακριβώς ένας $n \in \mathbf{N}$ ώστε $n' = m$.*

Απόδειξη: Έστω K το σύνολο με στοιχεία τον 1 και κάθε $m \in \mathbf{N}$ για τον οποίο υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $n' = m$. Τότε, κατ᾽ αρχάς, $1 \in K$. Έστω $m \in K$. Τότε $m' \in \mathbf{N}$ και υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ (συγκεκριμένα: ο m) ώστε $n' = m'$. Άρα $m' \in K$. Από το Αξίωμα 5 συνεπάγεται $K = \mathbf{N}$. Άρα κάθε $m \in \mathbf{N}$ ανήκει στο K, οπότε, αν $m \neq 1$, υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $n' = m$. Από το Αξίωμα 4 συνεπάγεται ότι ο $n \in \mathbf{N}$ για τον οποίο ισχύει $n' = m$ είναι μοναδικός. $\natural$

Η Πρόταση 12.2 λέει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $n \mapsto n'$ είναι ακριβώς το $\mathbf{N} \setminus \{1\}$, οπότε, σύμφωνα και με τα προηγούμενα συμπεράσματα, η συνάρτηση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\mathbf{N} \to \mathbf{N} \setminus \{1\}$.

Θεώρημα 12.1 *Υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\phi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ με τις εξής ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι $\phi(n,1) = n'$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$ είναι $\phi(n,m') = (\phi(n,m))'$.*

Απόδειξη: Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbf{N}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $f_n(m') = (f_n(m))'$.

Κατ᾽ αρχάς, $1 \in K$. Πράγματι, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ με τύπο $f_1(m) = m'$. Τότε (i) $f_1(1) = 1'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $f_1(m') = (m')' = (f_1(m))'$.

Τώρα, έστω $n \in K$. Δηλαδή, έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $f_n(m') = (f_n(m))'$. Θα αποδείξουμε ότι $n' \in K$. Ορίζουμε συνάρτηση $f_{n'} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ με τύπο $f_{n'}(m) = (f_n(m))'$. Τότε (i) $f_{n'}(1) = (f_n(1))' = (n')'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $f_{n'}(m') = (f_n(m'))' = ((f_n(m))')' = (f_{n'}(m))'$. Άρα $n' \in K$.

Άρα $K = \mathbf{N}$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $f_n(m') = (f_n(m))'$.

Τώρα, ορίζουμε $\phi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ με τύπο $\phi(n,m) = f_n(m)$. Η ϕ έχει τις ιδιότητες: (i) $\phi(n,1) = f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$ είναι $\phi(n,m') = f_n(m') = (f_n(m))' = (\phi(n,m))'$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση ϕ με τις ιδιότητες $(i), (ii)$ είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχει και συνάρτηση $\psi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ με τις ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι $\psi(n,1) = n'$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$ είναι $\psi(n,m') = (\psi(n,m))'$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \in \mathbf{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbf{N}$ με την ιδιότητα: $\phi(n,m) = \psi(n,m)$. Τότε $1 \in K$, διότι $\phi(n,1) = n' = \psi(n,1)$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, δηλαδή $\phi(n,m) = \psi(n,m)$. Τότε $\phi(n,m') = (\phi(n,m))' = (\psi(n,m))' = \psi(n,m')$ και, επομένως, $m' \in K$. Άρα $K = \mathbf{N}$. Άρα για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $\phi(n,m) = \psi(n,m)$ και, επειδή αυτό ισχύει για οποιονδήποτε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $\phi(n,m) = \psi(n,m)$ για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$. Άρα οι ϕ, ψ ταυτίζονται. $\natural$

Το στοιχείο $\phi(n,m) \in \mathbf{N}$ που, σύμφωνα με το Θεώρημα 12.1, αντιστοιχίζεται στους $n, m \in \mathbf{N}$ ονομάζεται **άθροισμα** των n, m και συμβολίζεται

$$n + m.$$

Δηλαδή, $n + m = \phi(n,m)$. Η πράξη που σε κάθε $n, m \in \mathbf{N}$ αντιστοιχίζει το άθροισμά τους ονομάζεται **πρόσθεση στο N**. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.1 και με την απόδειξή του, η πρόσθεση έχει τις εξής ιδιότητες: $n+1 = \phi(n,1) = n'$, $1 + n = \phi(1,n) = f_1(n) = n'$, $n + m' = \phi(n,m') = (\phi(n,m))' = (n+m)'$ και $n' + m = \phi(n',m) = f_{n'}(m) = (f_n(m))' = (\phi(n,m))' = (n+m)'$. Συνοπτικά:

$$n + 1 = n' = 1 + n, \qquad n + m' = (n+m)' = n' + m.$$

Πρόταση 12.3 ***Αντιμεταθετική ιδιότητα***. *Για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$ είναι $n + m = m + n$.*

Απόδειξη: Έστω $n \in \mathbf{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbf{N}$ με την ιδιότητα: $n + m = m + n$.

Είναι $n + 1 = n' = 1 + n$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, οπότε $n + m = m + n$. Τότε $n + m' = (n+m)' = (m+n)' = m' + n$, οπότε $m' \in K$.

Άρα $K = \mathbf{N}$. $\natural$

Πρόταση 12.4 ***Προσεταιριστική ιδιότητα***. *Για κάθε $n, m, k \in \mathbf{N}$ είναι $(n + m) + k = n + (m + k)$.*

Απόδειξη: Έστω $n, m \in \mathbf{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbf{N}$ με την ιδιότητα: $(n + m) + k = n + (m + k)$.

Είναι $(n+m)+1 = (n+m)' = n+m' = n+(m+1)$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $(n+m)+k = n+(m+k)$. Τότε $(n+m)+k' = ((n+m)+k)' = (n + (m+k))' = n + (m+k)' = n + (m+k')$, οπότε $k' \in K$.

Άρα $K = \mathbf{N}$. $\natural$

Με την προσεταιριστική και την αντιμεταθετική ιδιότητα αποδεικνύεται ότι το τελικό αποτέλεσμα διαδοχικών προσθέσεων δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία γίνονται αυτές οι προσθέσεις. Για παράδειγμα: $(m + n) + (k + l) = ((n+l)+m)+k$, διότι $(m+n)+(k+l) = (n+m)+(l+k) = ((n+m)+l)+k = (n + (m + l)) + k = (n + (l + m)) + k = ((n + l) + m) + k$. Επομένως, στο εξής θα ακολουθούμε τη συνήθη πρακτική να παραλείπουμε τις παρενθέσεις σε παραστάσεις με αθροίσματα καθώς και να αλλάζουμε τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων. Για παράδειγμα: τα δυο ίσα αθροίσματα $(m + n) + (k + l)$, $((n+l)+m)+k$ θα τα γράφουμε $n+m+k+l$ (ή $n+l+k+m$ ή $k+m+l+n$ κλπ).

Πρόταση 12.5 *Για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$ είναι $m \neq n + m$.*

Απόδειξη: Έστω $n \in \mathbf{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbf{N}$ με την ιδιότητα: $m \neq n + m$.

Είναι $1 \neq n' = n + 1$, οπότε $1 \in K$. Τώρα, έστω $m \in K$, οπότε $m \neq n + m$. Τότε $m' \neq (n+m)' = n + m'$, οπότε $m' \in K$.

Άρα $K = \mathbf{N}$. $\natural$

Πρόταση 12.6 *Έστω* $n, m, k \in \mathbf{N}$. *Αν* $m \neq k$, *τότε* $n + m \neq n + k$.

Απόδειξη: Έστω $m, k \in \mathbf{N}$, $m \neq k$ και έστω K το σύνολο των $n \in \mathbf{N}$ με την ιδιότητα: $n + m \neq n + k$.

Είναι $1 + m = m' \neq k' = 1 + k$, οπότε $1 \in K$. Τώρα, έστω $n \in K$, οπότε $n + m \neq n + k$. Τότε $n' + m = (n + m)' \neq (n + k)' = n' + k$, οπότε $n' \in K$.

Άρα $K = \mathbf{N}$. $\natural$

Πρόταση 12.7 *Για κάθε* $n, m \in \mathbf{N}$ *ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό:* (i) $n = m$, (ii) *υπάρχει* $k \in \mathbf{N}$ *ώστε* $n = m + k$ *και* (iii) *υπάρχει* $k \in \mathbf{N}$ *ώστε* $m = n + k$. *Ο* k *στα* (ii), (iii) *είναι μοναδικός.*

Απόδειξη: Έστω $n \in \mathbf{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbf{N}$ ώστε να ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i) - (iii)$.

Κατ' αρχάς, $1 \in K$. Πράγματι, αν $n = 1$, τότε ισχύει το (i) για τον 1. Και, αν $n \neq 1$, τότε υπάρχει $k \in \mathbf{N}$ ώστε $n = k' = 1 + k$, οπότε ισχύει το (ii) για τον 1.

Έστω $m \in K$, οπότε ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i) - (iii)$ για τον m. Αν ισχύει το (i) για τον m, τότε $n = m$, οπότε $n + 1 = n' = m'$ και, επομένως, ισχύει το (iii) για τον m'. Έστω ότι ισχύει το (ii) για τον m, οπότε υπάρχει $k \in \mathbf{N}$ ώστε $n = m + k$. Αν $k = 1$, τότε $n = m + 1 = m'$, οπότε ισχύει το (i) για τον m'. Αν $k \neq 1$, τότε υπάρχει $l \in \mathbf{N}$ ώστε $k = l'$, οπότε $n = m + l' = (m + l)' = m' + l$ και, επομένως, ισχύει το (ii) για τον m'. Τέλος, έστω ότι ισχύει το (iii) για τον m, οπότε υπάρχει $k \in \mathbf{N}$ ώστε $m = n + k$. Τότε $m' = (n + k)' = n + k'$, οπότε ισχύει το (iii) για τον m'. Άρα, σε κάθε περίπτωση, για τον m' ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i) - (iii)$ και, επομένως, $m' \in K$.

Άρα $K = \mathbf{N}$.

Το ότι ο k στα (ii), (iii) είναι μοναδικός είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 12.6.

Τα (i), (ii) δε μπορούν να ισχύουν συγχρόνως λόγω της Πρότασης 12.5. Για τον ίδιο λόγο, τα (i), (iii) δε μπορούν να ισχύουν συγχρόνως. Αν ίσχυαν συγχρόνως τα (ii), (iii), δηλαδή αν $n = m + k$ και $m = n + l$ για κάποιους $k, l \in \mathbf{Z}$, τότε θα ήταν $n = m + k = n + l + k = (l + k) + n$, που απαγορεύεται από την Πρόταση 12.5. Άρα ισχύει ακριβώς ένα από τα $(i) - (iii)$. $\natural$

B. Διάταξη.

Έστω $n, m \in \mathbf{N}$. Αν υπάρχει $k \in \mathbf{N}$ ώστε $n = m + k$, τότε λέμε ότι ο n είναι **μεγαλύτερος από** τον m και γράφουμε $n > m$ ή, ισοδύναμα, ότι ο m είναι **μικρότερος από** τον n και γράφουμε $m < n$.

Έστω $n, m \in \mathbf{N}$. Αν $n > m$, τότε ο $k \in \mathbf{N}$ για τον οποίο ισχύει $n = m + k$ ονομάζεται **διαφορά** των n, m και συμβολίζεται

$$n - m.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n > m$ αντιστοιχίζει τον $n - m$ ονομάζεται **αφαίρεση στο** $\mathbf{N}$.

Πρόταση 12.8 *Για κάθε* $n, m \in \mathbf{N}$ *ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό:* $n = m$, $n > m$, $n < m$.

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια της Πρότασης 12.7. $\natural$

Έστω $n, m \in \mathbf{N}$. Αν $n > m$ ή $n = m$ ή, ισοδύναμα, αν $m < n$ ή $m = n$, τότε λέμε ότι ο n είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον m και γράφουμε $n \geq m$ ή, ισοδύναμα, ότι ο m είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον n και γράφουμε $m \leq n$.

Πρόταση 12.9 ***Μεταβατική ιδιότητα***. *Έστω $m, n, k \in \mathbf{N}$.*
(1) Αν $n < m$ και $m < k$, τότε $n < k$.
(2) Αν $n \leq m$ και $m < k$ ή αν $n < m$ και $m \leq k$, τότε $n < k$.
(3) Αν $n \leq m$ και $m \leq k$, τότε $n \leq k$.

Απόδειξη: (1) Έστω $n < m$ και $m < k$. Τότε υπάρχουν $p, q \in \mathbf{N}$ ώστε $m = n + p$ και $k = m + q$. Συνεπάγεται $k = m + q = n + p + q = n + (p + q)$, οπότε $n < k$.
$(2), (3)$ Προφανή, λόγω του (1). $\natural$

Πρόταση 12.10 *Για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$ είναι $n + m > n$.*

Απόδειξη: Προφανής. $\natural$

Πρόταση 12.11 *Έστω $m, n, k \in \mathbf{N}$. Είναι $n < m$ αν και μόνο αν $n+k < m+k$. Επίσης, είναι $n = m$ αν και μόνο αν $n + k = m + k$.*

Απόδειξη: Έστω $n < m$. Τότε υπάρχει $l \in \mathbf{N}$ ώστε $m = n + l$. Άρα $m + k = n + l + k = (n + k) + l$ και, επομένως, $n + k < m + k$.

Έστω $n + k < m + k$. Αν $n = m$, τότε $n + k = m + k$ και, αν $m < n$, τότε $m + k < n + k$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n < m$.

Προφανώς, αν $n = m$, τότε $n + k = m + k$. Έστω $n + k = m + k$. Αν $n < m$, τότε $n + k < m + k$ και, αν $m < n$, τότε $m + k < n + k$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n = m$. $\natural$

Πρόταση 12.12 *Έστω $m, n, k, l \in \mathbf{N}$.*
(1) Αν $n < m$ και $k < l$, τότε $n + k < m + l$.
(2) Αν $n \leq m$ και $k < l$ ή αν $n < m$ και $k \leq l$, τότε $n + k < m + l$.
(3) Αν $n \leq m$ και $k \leq l$, τότε $n + k \leq m + l$.

Απόδειξη: (1) Έστω $n < m$ και $k < l$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 12.11, $n + k < m + k < m + l$.
$(2), (3)$ Προφανή, λόγω του (1). $\natural$

Πρόταση 12.13 *Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι $n \geq 1$.*

Απόδειξη: Αν $n = 1$, τότε $n \geq 1$. Αν $n \neq 1$, τότε υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ ώστε $n = m' = m + 1 > 1$. $\natural$

Πρόταση 12.14 *Έστω $m, n \in \mathbf{N}$.*
(1) Αν $n > m$, τότε $n \geq m + 1$.
(2) Αν $n < m + 1$, τότε $n \leq m$.

Απόδειξη: (1) Αν $n > m$, τότε υπάρχει $k \in \mathbf{N}$ ώστε $n = m + k$. Επειδή $k \geq 1$, είναι $n \geq m + 1$.
(2) Προφανές, λόγω του (1). $\natural$

Θεώρημα 12.2 ***Αρχή της Καλής Διάταξης.*** *Κάθε μη κενό υποσύνολο του* $\mathbf{N}$ *έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη: Έστω μη κενό $M \subseteq \mathbf{N}$ και έστω $m_0 \in M$. Θεωρούμε το σύνολο K των $n \in \mathbf{N}$ οι οποίοι είναι $\leq m$ για κάθε $m \in M$.

Προφανώς, $1 \in K$. Επειδή $m_0 + 1 > m_0$ και $m_0 \in M$, ο $m_0 + 1$ δεν ανήκει στο K. Άρα το K είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbf{N}$, οπότε, σύμφωνα με το Αξίωμα 5, υπάρχει $n_0 \in K$ ώστε $n_0 + 1 = n_0{}' \notin K$.

Κατ' αρχάς, είναι (i) $n_0 \leq m$ για κάθε $m \in M$. Αυτό είναι προφανές, διότι $n_0 \in K$. Κατόπιν, έστω $n_0 \notin M$. Τότε για κάθε $m \in M$ ισχύει $n_0 < m$ και, επομένως, $n_0 + 1 \leq m$. Άρα $n_0 + 1 \in K$ και αυτό είναι άτοπο. Άρα (ii) $n_0 \in M$.

Από τα (i), (ii) συνεπάγεται ότι ο n_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του M. $\natural$

Γ. Πολλαπλασιασμός.

Θεώρημα 12.3 *Υπάρχει μοναδική συνάρτηση* $\phi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *με τις εξής ιδιότητες:* (i) *για κάθε* $n \in \mathbf{N}$ *είναι* $\phi(n, 1) = n$ *και* (ii) *για κάθε* $n, m \in \mathbf{N}$ *είναι* $\phi(n, m') = \phi(n, m) + n$.

Απόδειξη: Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbf{N}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $f_n(m') = f_n(m) + n$.

Κατ' αρχάς, $1 \in K$. Πράγματι, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ με τύπο $f_1(m) = m$. Τότε (i) $f_1(1) = 1$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $f_1(m') = m' = m + 1 = f_1(m) + 1$.

Τώρα, έστω $n \in K$. Δηλαδή, έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $f_n(m') = f_n(m) + n$. Θα αποδείξουμε ότι $n' \in K$. Ορίζουμε συνάρτηση $f_{n'} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ με τύπο $f_{n'}(m) = f_n(m) + m$. Τότε (i) $f_{n'}(1) = f_n(1) + 1 = n + 1 = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $f_{n'}(m') = f_n(m') + m' = f_n(m) + n + m' = f_n(m) + n' + m = f_{n'}(m) + n'$. Άρα $n' \in K$.

Άρα $K = \mathbf{N}$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbf{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $f_n(m') = f_n(m) + n$.

Τώρα, ορίζουμε $\phi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ με τύπο $\phi(n, m) = f_n(m)$. Η ϕ έχει τις ιδιότητες: (i) $\phi(n, 1) = f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$ είναι $\phi(n, m') = f_n(m') = f_n(m) + n = \phi(n, m) + n$.

Τώρα θα αποδείξουμε η συνάρτηση ϕ με τις ιδιότητες $(i), (ii)$ είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχει και συνάρτηση $\psi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ με τις ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι $\psi(n, 1) = n$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$ είναι $\psi(n, m') = \psi(n, m) + n$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \in \mathbf{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbf{N}$ με την ιδιότητα: $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $1 \in K$, διότι $\phi(n, 1) = n = \psi(n, 1)$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, δηλαδή $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $\phi(n, m') = \phi(n, m) + n = \psi(n, m) + n = \psi(n, m')$ και, επομένως, $m' \in K$. Άρα $K = \mathbf{N}$. Άρα για κάθε $m \in \mathbf{N}$ είναι $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ και, επειδή αυτό ισχύει για οποιονδήποτε $n \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$. Άρα οι ϕ, ψ ταυτίζονται. $\natural$

Το στοιχείο $\phi(n,m) \in \mathbf{N}$ που, σύμφωνα με το Θεώρημα 12.3, αντιστοιχίζεται στους $n,m \in \mathbf{N}$ ονομάζεται **γινόμενο** των n,m και συμβολίζεται

$$n \cdot m.$$

Δηλαδή, $n \cdot m = \phi(n,m)$. Η πράξη που σε κάθε $n,m \in \mathbf{N}$ αντιστοιχίζει το γινόμενό τους ονομάζεται **πολλαπλασιασμός στο N**. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.3 και με την απόδειξή του, ο πολλαπλασιασμός έχει τις εξής ιδιότητες: $n \cdot 1 = \phi(n,1) = n$, $1 \cdot n = \phi(1,n) = f_1(n) = n$, $n \cdot m' = \phi(n,m') = \phi(n,m) + n = n \cdot m + n$ και $n' \cdot m = \phi(n',m) = f_{n'}(m) = f_n(m) + m = \phi(n,m) + m = n \cdot m + m$. Συνοπτικά:

$$n \cdot 1 = n = 1 \cdot n, \qquad n \cdot m' = n \cdot m + n, \qquad n' \cdot m = n \cdot m + m.$$

Το $n \cdot m$ θα το γράφουμε πιο συνοπτικά nm και οι παραπάνω ιδιότητες γράφονται

$$n1 = n = 1n, \qquad nm' = nm + n, \qquad n'm = nm + m.$$

Πρόταση 12.15 ***Αντιμεταθετική ιδιότητα***. *Για κάθε $n,m \in \mathbf{N}$ είναι $nm = mn$.*

Απόδειξη: Έστω $n \in \mathbf{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbf{N}$ με την ιδιότητα: $nm = mn$.

Είναι $n1 = n = 1n$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, οπότε $nm = mn$. Τότε $nm' = nm + n = mn + n = m'n$, οπότε $m' \in K$.

Άρα $K = \mathbf{N}$. ♮

Πρόταση 12.16 ***Επιμεριστική ιδιότητα***. *Για κάθε $n,m,k \in \mathbf{N}$ είναι $n(m+k) = nm + nk$.*

Απόδειξη: Έστω $n,m \in \mathbf{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbf{N}$ με την ιδιότητα: $n(m+k) = nm + nk$.

Είναι $n(m+1) = nm' = nm + n = nm + n1$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $n(m+k) = nm+nk$. Τότε $n(m+k') = n(m+k)' = n(m+k)+n = nm + nk + n = nm + nk'$, οπότε $k' \in K$.

Άρα $K = \mathbf{N}$. ♮

Πρόταση 12.17 ***Προσεταιριστική ιδιότητα***. *Για κάθε $n,m,k \in \mathbf{N}$ είναι $(nm)k = n(mk)$.*

Απόδειξη: Έστω $n,m \in \mathbf{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbf{N}$ με την ιδιότητα: $(nm)k = n(mk)$.

Είναι $(nm)1 = nm = n(m1)$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $(nm)k = n(mk)$. Τότε $(nm)k' = (nm)k + nm = n(mk) + nm = n(mk+m) = n(mk')$, οπότε $k' \in K$.

Άρα $K = \mathbf{N}$. ♮

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση της πρόσθεσης, η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

Πρόταση 12.18 *Έστω $m, n, k \in \mathbf{N}$. Είναι $n < m$ αν και μόνο αν $nk < mk$. Επίσης, είναι $n = m$ αν και μόνο αν $nk = mk$.*

Απόδειξη: Έστω $n < m$. Τότε υπάρχει $l \in \mathbf{N}$ ώστε $m = n+l$. Άρα $mk = nk+lk$ και, επομένως, $nk < mk$.

Έστω $nk < mk$. Αν $n = m$, τότε $nk = mk$ και, αν $m < n$, τότε $mk < nk$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n < m$.

Προφανώς, αν $n = m$, τότε $nk = mk$. Έστω $nk = mk$. Αν $n < m$, τότε $nk < mk$ και, αν $m < n$, τότε $mk < nk$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n = m$. ♮

Πρόταση 12.19 *Έστω $m, n, k, l \in \mathbf{N}$.*
(1) Αν $n < m$ και $k < l$, τότε $nk < ml$.
(2) Αν $n \leq m$ και $k < l$ ή αν $n < m$ και $k \leq l$, τότε $nk < ml$.
(3) Αν $n \leq m$ και $k \leq l$, τότε $nk \leq ml$.

Απόδειξη: (1) Έστω $n < m$ και $k < l$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 12.18, $nk < mk < ml$.
(2), (3) Προφανή, λόγω του (1). ♮

12.2 Οι θετικοί ρητοί.

Θεωρούμε όλα τα ζεύγη φυσικών (n_1, n_2), δηλαδή τα στοιχεία του $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Λέμε ότι δυο τέτοια ζεύγη (n_1, n_2), (m_1, m_2) είναι **ισοδύναμα** και γράφουμε

$$(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$$

αν $n_1 m_2 = m_1 n_2$.

Πρόταση 12.20 *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$.*
(1) $(n_1, n_2) \sim (n_1, n_2)$.
(2) Αν $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, τότε $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$.
(3) Αν $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$, τότε $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$.

Απόδειξη: (1) Είναι $n_1 n_2 = n_1 n_2$, οπότε $(n_1, n_2) \sim (n_1, n_2)$.
(2) Έστω $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, οπότε $n_1 m_2 = m_1 n_2$. Συνεπάγεται $m_1 n_2 = n_1 m_2$, οπότε $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$.
(3) Έστω $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$, οπότε $n_1 m_2 = m_1 n_2$ και $m_1 k_2 = k_1 m_2$. Συνεπάγεται $n_1 m_2 m_1 k_2 = m_1 n_2 k_1 m_2$, οπότε $n_1 k_2 = k_1 n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$. ♮

Άρα η σχέση $\sim$ ανάμεσα στα ζεύγη φυσικών είναι **σχέση ισοδυναμίας** και, επομένως, το σύνολο $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *διαμερίζεται* σε ξένες ανά δύο κλάσεις ισοδυναμίας: κάθε δυο ζεύγη φυσικών, τα οποία είναι ισοδύναμα, ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας και κάθε δυο ζεύγη φυσικών, τα οποία δεν είναι ισοδύναμα, ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε τέτοια κλάση ισοδυναμίας ονομάζεται **θετικός ρητός** και το σύνολο των θετικών ρητών συμβολίζεται $\mathbf{Q}_+$. Αν r είναι οποιοσδήποτε θετικός ρητός (δηλαδή, κλάση ισοδυναμίας), τότε *κάθε* ζεύγος φυσικών που ανήκει στον r ονομάζεται **αντιπρόσωπος** του r. Επομένως, δυο ισοδύναμα ζεύγη φυσικών είναι αντιπρόσωποι του ίδιου θετικού ρητού και δυο μη ισοδύναμα ζεύγη φυσικών είναι αντιπρόσωποι διαφορετικών θετικών ρητών.

A. Διάταξη.

Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Λέμε ότι το (n_1, n_2) είναι **μεγαλύτερο από** το (m_1, m_2) και γράφουμε $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι το (m_1, m_2) είναι **μικρότερο από** το (n_1, n_2) και γράφουμε $(m_1, m_2) \prec (n_1, n_2)$ αν είναι $n_1 m_2 > m_1 n_2$ ή, ισοδύναμα, $m_1 n_2 < n_1 m_2$.

Πρόταση 12.21 *Έστω* $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. *Αν είναι* $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$, $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, *τότε* $(k_1, k_2) \succ (l_1, l_2)$.

Απόδειξη: Έστω $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$. Τότε $n_1 m_2 > m_1 n_2$, $n_1 k_2 = k_1 n_2$ και $m_1 l_2 = l_1 m_2$. Τότε $k_1 n_2 m_1 l_2 = l_1 m_2 n_1 k_2 > l_1 k_2 n_2 m_1$. Άρα $k_1 l_2 > l_1 k_2$ και, επομένως, $(k_1, k_2) \succ (l_1, l_2)$. ♮

Η Πρόταση 12.21 λέει ότι αν κάποιος αντιπρόσωπος ενός θετικού ρητού r είναι μεγαλύτερος από κάποιον αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s, τότε κάθε αντιπρόσωπος του r είναι μεγαλύτερος από κάθε αντιπρόσωπο του s. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

Έστω $r, s \in \mathbf{Q}_+$. Λέμε ότι ο r είναι **μεγαλύτερος από** τον s και γράφουμε $r > s$ ή, ισοδύναμα, ότι ο s είναι **μικρότερος από** τον r και γράφουμε $s < r$ αν είναι $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$ για οποιονδήποτε (και, επομένως, για κάθε) αντιπρόσωπο (n_1, n_2) του r και για οποιονδήποτε (και, επομένως, για κάθε) αντιπρόσωπο (m_1, m_2) του s.

Πρόταση 12.22 *Για κάθε* $r, s \in \mathbf{Q}_+$ *ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό:* $r = s$, $r > s$, $r < s$.

Απόδειξη: Έστω οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2) των r, s, αντιστοίχως. Βάσει των ορισμών, το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $r = s$, $r > s$, $r < s$ είναι ισοδύναμο με το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ και αυτό είναι ισοδύναμο με το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $n_1 m_2 = m_1 n_2$, $n_1 m_2 > m_1 n_2$, $n_1 m_2 < m_1 n_2$. ♮

Επίσης, λέμε ότι ο r είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον s και γράφουμε $r \geq s$ ή, ισοδύναμα, ότι ο s είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον r και γράφουμε $s \leq r$ αν είναι $r > s$ ή $r = s$ ή, ισοδύναμα, αν είναι $s < r$ ή $s = r$.

Πρόταση 12.23 ***Μεταβατική ιδιότητα.*** *Έστω* $r, s, t \in \mathbf{Q}_+$.
(1) *Αν* $r < s$ *και* $s < t$, *τότε* $r < t$.
(2) *Αν* $r \leq s$ *και* $s < t$ *ή αν* $r < s$ *και* $s \leq t$, *τότε* $r < t$.
(3) *Αν* $r \leq s$ *και* $s \leq t$, *τότε* $r \leq t$.

Απόδειξη: (1) Έστω $r < s$ και $s < t$. Έστω οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε είναι $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ και

$(m_1, m_2) \prec (k_1, k_2)$, οπότε $n_1 m_2 < m_1 n_2$ και $m_1 k_2 < k_1 m_2$. Συνεπάγεται $n_1 m_2 m_1 k_2 < m_1 n_2 k_1 m_2$ και, επομένως, $n_1 k_2 < k_1 n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \prec (k_1, k_2)$, οπότε $r < t$.
(2), (3) Προφανή, λόγω του (1). ♮

Πρόταση 12.24 (1) *Για κάθε* $r \in \mathbf{Q}_+$ *υπάρχει* $s \in \mathbf{Q}_+$ *ώστε* $s > r$.
(2) *Για κάθε* $r \in \mathbf{Q}_+$ *υπάρχει* $s \in \mathbf{Q}_+$ *ώστε* $s < r$.
(3) *Για κάθε* $r, s \in \mathbf{Q}_+$, $r < s$ *υπάρχει* $t \in \mathbf{Q}_+$ *ώστε* $r < t < s$.

Απόδειξη: (1) Έστω $r \in \mathbf{Q}_+$ και οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος (n_1, n_2) του r. Θεωρούμε το ζεύγος $(n_1 + n_1, n_2)$ και τον $s \in \mathbf{Q}_+$, ο οποίος έχει το $(n_1 + n_1, n_2)$ ως αντιπρόσωπο. Είναι $(n_1 + n_1, n_2) \succ (n_1, n_2)$ διότι $(n_1 + n_1) n_2 = n_1 n_2 + n_1 n_2 > n_1 n_2$. Άρα $s > r$.
(2) Έστω $r \in \mathbf{Q}_+$ και οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος (n_1, n_2) του r. Θεωρούμε το ζεύγος $(n_1, n_2 + n_2)$ και τον $s \in \mathbf{Q}_+$, ο οποίος έχει το $(n_1, n_2 + n_2)$ ως αντιπρόσωπο. Είναι $(n_1, n_2 + n_2) \prec (n_1, n_2)$ διότι $n_1(n_2 + n_2) = n_1 n_2 + n_1 n_2 > n_1 n_2$. Άρα $s < r$.
(3) Έστω $r, s \in \mathbf{Q}_+$, $r < s$ και οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι (n_1, n_2) και (m_1, m_2) των r, s, αντιστοίχως. Επομένως, είναι $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$, οπότε $n_1 m_2 < m_1 n_2$. Θεωρούμε το ζεύγος $(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ και τον $t \in \mathbf{Q}_+$, ο οποίος έχει το $(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ ως αντιπρόσωπο.

Από την $n_1 m_2 < m_1 n_2$ συνεπάγεται $n_1 n_2 + n_1 m_2 < n_1 n_2 + m_1 n_2$, οπότε $n_1(n_2 + m_2) < (n_1 + m_1) n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \prec (n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ και, επομένως, $r < t$.

Από την $n_1 m_2 < m_1 n_2$ συνεπάγεται $n_1 m_2 + m_1 m_2 < m_1 n_2 + m_1 m_2$, οπότε $(n_1 + m_1) m_2 < m_1 (n_2 + m_2)$. Άρα $(n_1 + m_1, n_2 + m_2) \prec (m_1, m_2)$ και, επομένως, $t < s$. ♮

B. Πρόσθεση.

Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Ορίζουμε ως **άθροισμα** των ζευγών αυτών και το συμβολίζουμε $(n_1, n_2) + (m_1, m_2)$ το ζεύγος $(n_1 m_2 + m_1 n_2, n_2 m_2)$.

Πρόταση 12.25 *Έστω* $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. *Αν είναι* $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ *και* $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, *τότε* $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) + (l_1, l_2)$.

Απόδειξη: Έστω $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$. Τότε $n_1 k_2 = k_1 n_2$ και $m_1 l_2 = l_1 m_2$. Για να αποδείξουμε ότι $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) + (l_1, l_2)$ ή, ισοδύναμα, $(n_1 m_2 + m_1 n_2, n_2 m_2) \sim (k_1 l_2 + l_1 k_2, k_2 l_2)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1 m_2 + m_1 n_2) k_2 l_2 = (k_1 l_2 + l_1 k_2) n_2 m_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια των $n_1 k_2 = k_1 n_2$ και $m_1 l_2 = l_1 m_2$. ♮

Η Πρόταση 12.25 λέει το εξής. Έστω ότι προσθέτουμε έναν αντιπρόσωπο ενός θετικού ρητού r και έναν αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s και βρίσκουμε κάποιο άθροισμα. Το άθροισμα αυτό είναι αντιπρόσωπος κάποιου τρίτου θετικού ρητού t. Αν προσθέσουμε έναν άλλο αντιπρόσωπο του r και έναν άλλο αντιπρόσωπο του s, τότε το νέο άθροισμα θα είναι ισοδύναμο με το προηγούμενο άθροισμα, οπότε θα είναι αντιπρόσωπος του ίδιου t. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

Έστω $r, s \in \mathbf{Q}_+$. Ορίζουμε ως **άθροισμα** των r, s και το συμβολίζουμε

$$r + s$$

τον θετικό ρητό ο οποίος έχει αντιπρόσωπο το άθροισμα $(n_1, n_2) + (m_1, m_2)$ οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (n_1, n_2) του r και οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (m_1, m_2) του s. Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbf{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $r + s$ ονομάζεται **πρόσθεση** στο $\mathbf{Q}_+$.

Πρόταση 12.26 ***Αντιμεταθετική ιδιότητα***. *Για κάθε $r, s \in \mathbf{Q}_+$ είναι $r + s = s + r$.*

Απόδειξη: Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Τότε ο $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + s$ και ο $(m_1, m_2) + (n_1, n_2) = (m_1n_2 + n_1m_2, m_2n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $s + r$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2) \sim (m_1n_2 + n_1m_2, m_2n_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο αυτά ζεύγη είναι ίδια. $\natural$

Πρόταση 12.27 ***Προσεταιριστική ιδιότητα***. *Για κάθε $r, s, t \in \mathbf{Q}_+$ είναι $(r + s) + t = r + (s + t)$.*

Απόδειξη: Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) και (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s και t, αντιστοίχως. Τότε ο $((n_1, n_2) + (m_1, m_2)) + (k_1, k_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2) + (k_1, k_2) = (n_1m_2k_2 + m_1n_2k_2 + k_1n_2m_2, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $(r + s) + t$ και ο $(n_1, n_2) + ((m_1, m_2) + (k_1, k_2)) = (n_1, n_2) + (m_1k_2 + k_1m_2, m_2k_2) = (n_1m_2k_2 + m_1k_2n_2 + k_1m_2n_2, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + (s + t)$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2k_2 + m_1n_2k_2 + k_1n_2m_2, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_2k_2 + m_1k_2n_2 + k_1m_2n_2, n_2m_2k_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο ζεύγη είναι ίδια. $\natural$

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικές προσθέσεις καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων.

Πρόταση 12.28 *Για κάθε $r, s \in \mathbf{Q}_+$ είναι $r + s > r$.*

Απόδειξη: Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Τότε ο $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + s$, οπότε, για να αποδείξουμε ότι $r + s > r$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2) \succ (n_1, n_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2n_2 + m_1n_2n_2 > n_1n_2m_2$, το οποίο είναι σωστό. $\natural$

Πρόταση 12.29 *Έστω $r, s, t \in \mathbf{Q}_+$. Είναι $r < s$ αν και μόνο αν $r + t < s + t$. Επίσης, είναι $r = s$ αν και μόνο αν $r + t = s + t$.*

Απόδειξη: Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε είναι $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2 < m_1n_2$. Οι $(n_1, n_2) + (k_1, k_2) = (n_1k_2 + k_1n_2, n_2k_2)$, $(m_1, m_2) + (k_1, k_2) = (m_1k_2 +$

$k_1m_2, m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωποι των $r+t$, $s+t$, αντιστοίχως. Επομένως, για να αποδείξουμε ότι $r+t < s+t$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1k_2 + k_1n_2, n_2k_2) \prec (m_1k_2 + k_1m_2, m_2k_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι $n_1k_2m_2k_2 + k_1n_2m_2k_2 < m_1k_2n_2k_2 + k_1m_2n_2k_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1m_2 < m_1n_2$.

Έστω $r+t < s+t$. Αν $r = s$, τότε $r+t = s+t$ και, αν $s < r$, τότε $s+t < r+t$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r < s$.

Προφανώς, αν $r = s$, τότε $r+t = s+t$. Έστω $r+t = s+t$. Αν $r < s$, τότε $r+t < s+t$ και, αν $s < r$, τότε $s+t < r+t$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r = s$. ♮

Πρόταση 12.30 *Έστω $r, s, t, u \in \mathbf{Q}_+$.*
(1) Αν $r < s$ και $t < u$, τότε $r+t < s+u$.
(2) Αν $r \leq s$ και $t < u$ ή αν $r < s$ και $t \leq u$, τότε $r+t < s+u$.
(3) Αν $r \leq s$ και $t \leq u$, τότε $r+t \leq s+u$.

Απόδειξη: (1) Έστω $r < s$ και $t < u$. Τότε, $r+t < s+t < s+u$.
(2), (3) Προφανή, λόγω του (1). ♮

Πρόταση 12.31 *Έστω $r, s \in \mathbf{Q}_+$. Αν $r < s$, τότε υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $r+t = s$. Αντιθέτως, αν $r \geq s$, τότε δεν υπάρχει κανένας $t \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $r+t = s$.*

Απόδειξη: Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Τότε είναι $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2 < m_1n_2$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $k \in \mathbf{N}$ ώστε $n_1m_2 + k = m_1n_2$. Θεωρούμε τον $t \in \mathbf{Q}_+$ ο οποίος έχει ως αντιπρόσωπο το ζεύγος (k, n_2m_2). Τότε ο $r+t$ έχει ως αντιπρόσωπο το $(n_1, n_2) + (k, n_2m_2) = (n_1n_2m_2 + kn_2, n_2n_2m_2)$ και, για να αποδείξουμε ότι $r+t = s$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1n_2m_2 + kn_2, n_2n_2m_2) \sim (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1n_2m_2m_2 + kn_2m_2 = m_1n_2n_2m_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1m_2 + k = m_1n_2$.

Το ότι ο t είναι μοναδικός είναι συνέπεια της Πρότασης 12.29.

Γνωρίζουμε ότι από $r+t = s$ συνεπάγεται $s > r$. Άρα, αν $r \geq s$, τότε δεν υπάρχει κανένας $t \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $r+t = s$. ♮

Αν $r, s \in \mathbf{Q}_+$, $r < s$, τότε ο μοναδικός $t \in \mathbf{Q}_+$ που ικανοποιεί την $r+t = s$ ονομάζεται **διαφορά** των s, r και συμβολίζεται

$$s - r.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbf{Q}_+$, $r < s$ αντιστοιχίζει τον $s - r$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbf{Q}_+$.

Γ. Πολλαπλασιασμός.

Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Ορίζουμε ως **γινόμενο** των ζευγών αυτών και το συμβολίζουμε $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2)$ το ζεύγος (n_1m_1, n_2m_2).

Πρόταση 12.32 *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Αν είναι $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, τότε $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) \cdot (l_1, l_2)$.*

Απόδειξη: Έστω $(n_1,n_2) \sim (k_1,k_2)$ και $(m_1,m_2) \sim (l_1,l_2)$. Τότε $n_1k_2 = k_1n_2$ και $m_1l_2 = l_1m_2$. Συνεπάγεται $n_1k_2m_1l_2 = k_1n_2l_1m_2$ και, επομένως, $(n_1m_1, n_2m_2) \sim (k_1l_1, k_2l_2)$, δηλαδή $(n_1,n_2)\cdot(m_1,m_2) \sim (k_1,k_2)\cdot(l_1,l_2)$. $\natural$

Η Πρόταση 12.32 λέει το εξής. Έστω ότι πολλαπλασιάζουμε έναν αντιπρόσωπο ενός θετικού ρητού r και έναν αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s και βρίσκουμε κάποιο γινόμενο. Το γινόμενο αυτό είναι αντιπρόσωπος κάποιου τρίτου θετικού ρητού t. Αν πολλαπλασιάσουμε έναν άλλο αντιπρόσωπο του r και έναν άλλο αντιπρόσωπο του s, τότε το νέο γινόμενο θα είναι αντιπρόσωπος του ίδιου t. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

Έστω $r, s \in \mathbf{Q}_+$. Ορίζουμε ως **γινόμενο** των r, s και το συμβολίζουμε

$$r \cdot s$$

τον θετικό ρητό ο οποίος έχει αντιπρόσωπο το γινόμενο $(n_1,n_2)\cdot(m_1,m_2)$ οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (n_1,n_2) του r και οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (m_1,m_2) του s. Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbf{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $r \cdot s$ ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbf{Q}_+$.

Στο εξής, θα γράφουμε rs αντί $r \cdot s$.

Πρόταση 12.33 ***Αντιμεταθετική ιδιότητα***. *Για κάθε $r, s \in \mathbf{Q}_+$ είναι $rs = sr$.*

Απόδειξη: Έστω (n_1,n_2), (m_1,m_2) οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Τότε ο $(n_1,n_2)(m_1,m_2) = (n_1m_1, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του rs και ο $(m_1,m_2)(n_1,n_2) = (m_1n_1, m_2n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του sr. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1, n_2m_2) \sim (m_1n_1, m_2n_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο ζεύγη είναι ίδια. $\natural$

Πρόταση 12.34 ***Προσεταιριστική ιδιότητα***. *Για κάθε $r, s, t \in \mathbf{Q}_+$ είναι $(rs)t = r(st)$.*

Απόδειξη: Έστω οι αντιπρόσωποι (n_1,n_2), (m_1,m_2), (k_1,k_2), αντιστοίχως, των r, s, t. Ο $((n_1,n_2)(m_1,m_2))(k_1,k_2) = (n_1m_1, n_2m_2)(k_1,k_2) = (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$ και ο $(n_1,n_2)((m_1,m_2)(k_1,k_2)) = (n_1,n_2)(m_1k_1, m_2k_2) = (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωποι των $(rs)t$ και $r(st)$, αντιστοίχως. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1k_1, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δυο ζεύγη είναι ίδια. $\natural$

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

Πρόταση 12.35 ***Επιμεριστική ιδιότητα*** *Για κάθε $r, s, t \in \mathbf{Q}_+$ ισχύει $r(s+t) = rs + rt$.*

Απόδειξη: Έστω (n_1,n_2), (m_1,m_2), (k_1,k_2) αντιπρόσωποι, αντιστοίχως, των r, s, t. Τότε ο $(n_1,n_2)((m_1,m_2)+(k_1,k_2)) = (n_1m_1k_2 + n_1k_1m_2, n_2m_2k_2)$ και ο $(n_1,n_2)(m_1,m_2) + (n_1,n_2)(k_1,k_2) = (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2, n_2m_2n_2k_2)$ είναι αντιπρόσωποι των $r(s+t)$ και $rs+rt$, αντιστοίχως. Άρα, για να αποδείξουμε ότι $r(s+t) = rs+rt$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1k_2 + n_1k_1m_2, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2, n_2m_2n_2k_2)$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με $(n_1m_1k_2 + n_1k_1m_2)n_2m_2n_2k_2 = (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2)n_2m_2k_2$, που είναι προφανές. ♮

Πρόταση 12.36 *Έστω $r, s, t \in \mathbf{Q}_+$. Είναι $r < s$ αν και μόνο αν $rt < st$. Επίσης, είναι $r = s$ αν και μόνο αν $rt = st$.*

Απόδειξη: Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε είναι $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2 < m_1n_2$. Οι $(n_1, n_2)(k_1, k_2) = (n_1k_1, n_2k_2)$, $(m_1, m_2)(k_1, k_2) = (m_1k_1, m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωποι των rt, st, αντιστοίχως. Άρα για να αποδείξουμε ότι $rt < st$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1k_1, n_2k_2) \prec (m_1k_1, m_2k_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι $n_1k_1m_2k_2 < m_1k_1n_2k_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1m_2 < m_1n_2$.

Έστω $rt < st$. Αν $r = s$, τότε $rt = st$ και, αν $s < r$, τότε $st < rt$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r < s$.

Προφανώς, αν $r = s$, τότε $rt = st$. Έστω $rt = st$. Αν $r < s$, τότε $rt < st$ και, αν $s < r$, τότε $st < rt$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r = s$. ♮

Πρόταση 12.37 *Έστω $r, s, t, u \in \mathbf{Q}_+$.*
(1) Αν $r < s$ και $t < u$, τότε $rt < su$.
(2) Αν $r \leq s$ και $t < u$ ή αν $r < s$ και $t \leq u$, τότε $rt < su$.
(3) Αν $r \leq s$ και $t \leq u$, τότε $rt \leq su$.

Απόδειξη: (1) Έστω $r < s$ και $t < u$. Τότε $rt < st < su$.
(2), (3) Προφανή, λόγω του (1). ♮

Πρόταση 12.38 *Έστω $r, s \in \mathbf{Q}_+$. Τότε υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $rt = s$.*

Απόδειξη: Έστω οι αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2), αντιστοίχως, των r, s. Θεωρούμε τον $t \in \mathbf{Q}_+$, ο οποίος έχει ως αντιπρόσωπο το ζεύγος (m_1n_2, n_1m_2). Τότε το $(n_1, n_2)(m_1n_2, n_1m_2) = (n_1m_1n_2, n_2n_1m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του rt. Άρα, για να αποδείξουμε ότι $rt = s$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1n_2, n_2n_1m_2) \sim (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_1n_2m_2 = m_1n_2n_1m_2$, το οποίο είναι προφανές.

Το ότι ο t είναι μοναδικός είναι συνέπεια της Πρότασης 12.36. ♮

Αν $r, s \in \mathbf{Q}_+$, τότε ο μοναδικός $t \in \mathbf{Q}_+$ που ικανοποιεί την $rt = s$ ονομάζεται **λόγος** των s, r και συμβολίζεται

$$\frac{s}{r}.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbf{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $\frac{s}{r}$ ονομάζεται **διαίρεση** στο $\mathbf{Q}_+$.

Δ. Οι θετικοί ακέραιοι και οι φυσικοί.

Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ θεωρούμε τον θετικό ρητό με αντιπρόσωπο το ζεύγος $(n, 1)$ και τον συμβολίζουμε $\overline{n}$. Κάθε $r \in \mathbf{Q}_+$, ο οποίος γράφεται $r = \overline{n}$ για κάποιον

$n \in \mathbf{N}$ ονομάζεται **θετικός ακέραιος**. Το σύνολο των θετικών ακεραίων συμβολίζεται $\mathbf{Z}_+$. Δηλαδή, $\mathbf{Z}_+ = \{\overline{n} : n \in \mathbf{N}\}$ και είναι $\mathbf{Z}_+ \subseteq \mathbf{Q}_+$.

Πρόταση 12.39 *Έστω $n, m \in \mathbf{N}$. Τότε είναι $n < m$ αν και μόνο αν $\overline{n} < \overline{m}$. Επίσης, είναι $n = m$ αν και μόνο αν $\overline{n} = \overline{m}$.*

Απόδειξη: Οι $\overline{n}$ και $\overline{m}$ έχουν αντιπροσώπους τους $(n, 1)$ και $(m, 1)$, αντιστοίχως. Άρα το $\overline{n} < \overline{m}$ είναι ισοδύναμο με το $(n, 1) \prec (m, 1)$ κι αυτό είναι ισοδύναμο με το $n1 < m1$. Ομοίως, το $\overline{n} = \overline{m}$ είναι ισοδύναμο με το $(n, 1) \sim (m, 1)$ κι αυτό είναι ισοδύναμο με το $n1 = m1$. $\natural$

Μια άμεση συνέπεια της Πρότασης 12.39 είναι ότι για κάθε θετικό ακέραιο $r \in \mathbf{Z}_+$ υπάρχει *ακριβώς* ένας $n \in \mathbf{N}$ ώστε $r = \overline{n}$.

Πρόταση 12.40 *Έστω $r, s \in \mathbf{Q}_+$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $\overline{n}r > s$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τον $t = \frac{s}{r} \in \mathbf{Q}_+$, για τον οποίο είναι $tr = s$. Έστω (n_1, n_2) οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος του t και έστω $n = n_1 + 1$. Επειδή $n_2 \geq 1$, είναι $nn_2 \geq n > n_1 = n_1 1$, οπότε $(n, 1) \succ (n_1, n_2)$. Άρα $\overline{n} > t$ και, επομένως, $\overline{n}r > tr = s$. $\natural$

Πρόταση 12.41 *Έστω $r \in \mathbf{Q}_+$. Τότε υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ ώστε $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$. Ειδικώτερα, το ζεύγος (n_1, n_2) είναι αντιπρόσωπος του r αν και μόνο αν $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε οποιονδήποτε αντιπρόσωπο (n_1, n_2) του $r \in \mathbf{Q}_+$. Οι $(n_1, 1)$ και $(n_2, 1)$ είναι αντιπρόσωποι των $\overline{n_1}$ και $\overline{n_2}$, αντιστοίχως. Άρα ο $(n_2, 1)(n_1, n_2) = (n_2 n_1, n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n_2}\, r$ και, επειδή, $(n_2 n_1, n_2) \sim (n_1, 1)$, συνεπάγεται ότι $\overline{n_2}\, r = \overline{n_1}$. Άρα $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$.

Αντιστρόφως, έστω $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ ώστε $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$ και, επομένως $\overline{n_2}\, r = \overline{n_1}$. Αν (m_1, m_2) είναι οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος του r, τότε το $(n_2, 1)(m_1, m_2) = (n_2 m_1, m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n_2}\, r$, οπότε είναι $(n_2 m_1, m_2) \sim (n_1, 1)$ ή, ισοδύναμα, $n_2 m_1 = n_1 m_2$ ή, ισοδύναμα, $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$. Άρα το (n_1, n_2) είναι αντιπρόσωπος του r. $\natural$

Πρόταση 12.42 *Έστω $n, m, k \in \mathbf{N}$.*
(1) Είναι $n + m = k$ αν και μόνο αν $\overline{n} + \overline{m} = \overline{k}$.
(2) Είναι $nm = k$ αν και μόνο αν $\overline{n}\,\overline{m} = \overline{k}$.

Απόδειξη: (1) Οι $(n, 1)$, $(m, 1)$, $(k, 1)$ είναι αντιπρόσωποι των $\overline{n}$, $\overline{m}$, $\overline{k}$. Άρα ο $(n, 1) + (m, 1) = (n1 + m1, 11) = (n + m, 1)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n} + \overline{m}$. Άρα είναι $\overline{n} + \overline{m} = \overline{k}$ αν και μόνο αν $(n + m, 1) \sim (k, 1)$ αν και μόνο αν $(n + m)1 = k1$ αν και μόνο αν $n + m = k$.
(2) Ο $(n, 1)(m, 1) = (nm, 11) = (nm, 1)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n}\,\overline{m}$. Άρα είναι $\overline{n}\,\overline{m} = \overline{k}$ αν και μόνο αν $(nm, 1) \sim (k, 1)$ αν και μόνο αν $nm1 = k1$ αν και μόνο αν $nm = k$. $\natural$

Μια συνέπεια της Πρότασης 12.42 είναι η εξής: *το άθροισμα και το γινόμενο θετικών ακεραίων είναι θετικοί ακέραιοι.* Πράγματι, το άθροισμα $\overline{n} + \overline{m}$ των θετικών ακεραίων $\overline{n}$, $\overline{m}$ είναι ίσο με τον θετικό ακέραιο $\overline{k}$, όπου $k = n + m$. Με άλλα λόγια, είναι $\overline{n}+\overline{m}=\overline{n+m}$. Ομοίως, το γινόμενο $\overline{n}\,\overline{m}$ των θετικών ακεραίων $\overline{n}$, $\overline{m}$ είναι ίσο με τον θετικό ακέραιο $\overline{k}$, όπου $k=nm$. Δηλαδή, είναι $\overline{n}\,\overline{m}=\overline{nm}$.

Μια πιο σημαντική συνέπεια των Προτάσεων 12.39 και 12.42 είναι η εξής. Ας υποθέσουμε ότι αντικαθιστούμε κάθε $n \in \mathbf{N}$ με τον αντίστοιχο $\overline{n} \in \mathbf{Z}_+$ ή, αντιστρόφως, ότι αντικαθιστούμε κάθε $\overline{n} \in \mathbf{Z}_+$ με τον αντίστοιχο $n \in \mathbf{N}$. Τότε *οι σχέσεις διάταξης καθώς και οι αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του* $\mathbf{N}$ *μένουν αμετάβλητες ως σχέσεις διάταξης καθώς και αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα αντίστοιχα στοιχεία του* $\mathbf{Z}_+$ *και αντιστρόφως*. Πιο συγκεκριμένα: (i) είναι $n<m$ αν και μόνο αν είναι $\overline{n}<\overline{m}$ και είναι $n=m$ αν και μόνο αν είναι $\overline{n}=\overline{m}$, (ii) είναι $n+m=k$ αν και μόνο αν είναι $\overline{n}+\overline{m}=\overline{k}$ και (iii) είναι $nm=k$ αν και μόνο αν είναι $\overline{n}\,\overline{m}=\overline{k}$. Αυτό μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbf{N}$ με το σύνολο $\mathbf{Z}_+$ ή, αντιστρόφως, το σύνολο $\mathbf{Z}_+$ με το σύνολο $\mathbf{N}$ χωρίς καμιά ουσιαστική αλλαγή στις βασικές δομές των δυο συνόλων, τη δομή διάταξης και τις αλγεβρικές δομές. Μπορούμε να φανταστούμε ότι πρόκειται για το ίδιο βασικό σύνολο του οποίου κάθε στοιχείο εμφανίζεται με δυο ονόματα: ένα όνομα n και ένα άλλο όνομα $\overline{n}$.

Στο εξής, θεωρούμε ότι κάθε φυσικός n έχει αντικατασταθεί από τον αντίστοιχο θετικό ακέραιο $\overline{n}$ και, επομένως, ότι το σύνολο $\mathbf{N}$ *έχει αντικατασταθεί από το σύνολο* $\mathbf{Z}_+$. *Αφού, λοιπόν, «πετάξουμε» και «ξεχάσουμε» τους n και το σύνολό τους* $\mathbf{N}$, *θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο n στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου $\overline{n}$ του* $\mathbf{Z}_+$. *Επίσης, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε εναλλακτικά και τα δυο σύμβολα* $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}_+$ *για το σύνολο* $\mathbf{Z}_+$ *και να χρησιμοποιούμε και τις δυο ονομασίες «φυσικός» και «θετικός ακέραιος» για τα στοιχεία του* $\mathbf{Z}_+$. *Ουσιαστικά, λοιπόν, ταυτίζουμε τα σύνολα* $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}_+$, *έτσι ώστε κάθε φυσικός να θεωρείται θετικός ρητός και το σύνολο* $\mathbf{N}$ *να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου* $\mathbf{Q}_+$.

Για παράδειγμα, στην Πρόταση 12.40 θα αντικαταστήσουμε το σύμβολο $\overline{n}$ με το n και θα πούμε: *για κάθε δυο θετικούς ρητούς r, s υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $nr>s$.* Και, επειδή τους θετικούς ακεραίους θα τους λέμε και φυσικούς, θα πούμε:

Για κάθε δυο θετικούς ρητούς r, s υπάρχει φυσικός n ώστε $nr>s$.

Ένα ακόμη παράδειγμα. Η Πρόταση 12.41 λέει: *κάθε θετικός ρητός r είναι ίσος με τον λόγο $\frac{n_1}{n_2}$ δυο θετικών ακεραίων* ή, ισοδύναμα,

Κάθε θετικός ρητός r είναι ίσος με τον λόγο $\frac{n_1}{n_2}$ δυο φυσικών.

Με άλλα λόγια, η Πρόταση 12.41 διατυπώνει τη γνωστή μας σχέση ανάμεσα σε θετικούς ρητούς και φυσικούς.

12.3 Οι θετικοί πραγματικοί.

Ονομάζουμε **θετικό πραγματικό** κάθε *υποσύνολο* x του $\mathbf{Q}_+$, το οποίο έχει τις εξής τρεις ιδιότητες: (i) το x δεν είναι κενό και δεν είναι ολόκληρο το $\mathbf{Q}_+$, (ii) κάθε στοιχείο του συνόλου x είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του $\mathbf{Q}_+$ εκτός του συνόλου x και (iii) το x δεν έχει μέγιστο στοιχείο, δηλαδή για κάθε στοιχείο του x υπάρχει άλλο μεγαλύτερο στοιχείο του x.

Το σύνολο των θετικών πραγματικών συμβολίζεται $\mathbf{R}_+$.

Τονίζουμε: *κάθε θετικός πραγματικός είναι (σύμφωνα με τον ορισμό του) σύνολο θετικών ρητών.*

Τα σύνολα με τις ιδιότητες $(i)-(iii)$, τα οποία ονομάσαμε θετικούς πραγματικούς, ονομάζονται, επίσης, **τομές** ή και **τομές Dedekind**.

Η επόμενη πρόταση εκφράζει μερικές απλές ιδιότητες των θετικών πραγματικών.

Πρόταση 12.43 *Έστω* $x \in \mathbf{R}_+$.
(1) *Για κάθε* $r, s \in \mathbf{Q}_+$: *αν* $r \notin x$ *και* $s > r$, *τότε* $s \notin x$.
(2) *Για κάθε* $r, s \in \mathbf{Q}_+$: *αν* $r \in x$ *και* $s < r$, *τότε* $s \in x$.
(3) *Για κάθε* $r \in x$ *υπάρχει* $s \in x$, $s > r$.

Απόδειξη: Καθένα από τα (1), (2) είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα (ii) του x. Το (3) είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα (iii) του x. $\natural$

Έστω $x \in \mathbf{R}_+$. Λόγω της ιδιότητας (ii) του x, κάθε στοιχείο του x χαρακτηρίζεται **κατώτερος αριθμός** του x και κάθε στοιχείο εκτός του x χαρακτηρίζεται **ανώτερος αριθμός** του x.

Το να αποδείξουμε ότι κάποιο υποσύνολο του $\mathbf{Q}_+$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή ότι έχει τις ιδιότητες $(i)-(iii)$, είναι ισοδύναμο με το να αποδείξουμε τα εξής: (i) το σύνολο περιέχει τουλάχιστον έναν θετικό ρητό και δεν περιέχει τουλάχιστον έναν θετικό ρητό, (ii) για κάθε θετικό ρητό που περιέχεται στο σύνολο, στο σύνολο περιέχεται και *κάθε* θετικός ρητός μικρότερός του και (iii) για κάθε θετικό ρητό που περιέχεται στο σύνολο, στο σύνολο περιέχεται και *κάποιος* θετικός ρητός μεγαλύτερός του.

Α. Διάταξη.

Αν $x, y \in \mathbf{R}_+$, λέμε ότι ο y είναι **μεγαλύτερος από** τον x και γράφουμε $y > x$ ή, ισοδύναμα, ότι ο x είναι **μικρότερος από** τον y και γράφουμε $x < y$ αν είναι $y \supset x$ ή, ισοδύναμα, $x \subset y$. Θυμηθείτε: το σύμβολο $\supset$ σημαίνει γνήσιο υπερσύνολο και το $\subset$ σημαίνει γνήσιο υποσύνολο ενώ το $\supseteq$ σημαίνει υπερσύνολο και το $\subseteq$ σημαίνει υποσύνολο.

Πρόταση 12.44 *Έστω* $x, y \in \mathbf{R}_+$. *Είναι* $x < y$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $r \in \mathbf{Q}_+$ *ώστε* $r \in y$ *και* $r \notin x$.

Απόδειξη: Έστω $x < y$, δηλαδή $x \subset y$. Τότε υπάρχει $r \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$.

Έστω ότι υπάρχει $r \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$. Έστω $s \in x$. Τότε $s < r$ και, επομένως, $s \in y$. Άρα $x \subseteq y$ και, λόγω του r, είναι $x \subset y$. $\natural$

Πρόταση 12.45 *Για κάθε* $x, y \in \mathbf{R}_+$ *ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό:* $x = y$, $x > y$, $x < y$.

Απόδειξη: Επειδή τα $x = y$, $x > y$, $x < y$ είναι ισοδύναμα, αντιστοίχως, με τα $x = y$, $x \supset y$, $x \subset y$, είναι σαφές ότι τα τρία αυτά ενδεχόμενα αλληλοαποκλείονται.

Έστω $x \neq y$. Τότε είτε (i) υπάρχει $r \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$ είτε (ii) υπάρχει $r \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $r \in x$ και $r \notin y$. Στην περίπτωση (i) είναι, σύμφωνα με την Πρόταση 12.44, $x < y$ και στην περίπτωση (ii) είναι, για τον ίδιο λόγο, $x > y$. ♮

Αν $x, y \in \mathbf{R}_+$, λέμε ότι ο y είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον x και γράφουμε $y \geq x$ ή, ισοδύναμα, ότι ο x είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον y και γράφουμε $x \leq y$ αν είναι $y > x$ ή $y = x$ ή, ισοδύναμα, $x < y$ ή $x = y$. Με άλλα λόγια, είναι $y \geq x$ ή, ισοδύναμα, $x \leq y$ αν και μόνο αν $y \supseteq x$ ή, ισοδύναμα, $x \subseteq y$.

Πρόταση 12.46 ***Μεταβατική ιδιότητα***. *Έστω $x, y, z \in \mathbf{R}_+$.*
(1) Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.
(2) Αν $x \leq y$ και $y < z$ ή αν $x < y$ και $y \leq z$, τότε $x < z$.
(3) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.

Απόδειξη: (1) Έστω $x < y$ και $y < z$. Τότε $x \subset y$ και $y \subset z$ και, επομένως, $x \subset z$. Άρα $x < z$.
$(2), (3)$. Ομοίως. ♮

Β. Πρόσθεση.

Θεώρημα 12.4 *Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$. Τότε το σύνολο $z = \{r + s : r \in x, s \in y\}$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του $\mathbf{R}_+$. Επίσης, για κάθε $t, u \in \mathbf{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ είναι $t + u \notin z$.*

Απόδειξη: Υπάρχουν $r \in x$, $s \in y$ και, τότε, $r + s \in z$. Άρα το σύνολο z δεν είναι κενό. Επίσης, υπάρχουν $t, u \in \mathbf{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$. Τότε, για κάθε $r \in x$, $s \in y$ είναι $r < t$, $s < u$, οπότε $r + s < t + u$. Άρα κάθε στοιχείο του z είναι $\neq t+u$, οπότε $t+u \notin z$. Συμπεραίνουμε ότι το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.

Αποδείξαμε, επίσης, ότι για κάθε $t, u \in \mathbf{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ είναι $t + u \notin z$.

Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το $r + s$, όπου $r \in x$, $s \in y$. Έστω οποιοσδήποτε $t \in \mathbf{Q}_+$, $t < r+s$. Επειδή $\frac{t}{r+s}(r+s) = t < r+s = 1(r+s)$, συνεπάγεται $\frac{t}{r+s} < 1$. Άρα $r\frac{t}{r+s} < r1 = r$ και $s\frac{t}{r+s} < s1 = s$. Συνεπάγεται $r\frac{t}{r+s} \in x$ και $s\frac{t}{r+s} \in y$ και, επομένως, $r\frac{t}{r+s} + s\frac{t}{r+s} \in z$. Όμως, $r\frac{t}{r+s} + s\frac{t}{r+s} = (r + s)\frac{t}{r+s} = t$, οπότε $t \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.

Πάλι, έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το $r + s$, όπου $r \in x$, $s \in y$. Υπάρχουν $t \in x$, $u \in y$ ώστε $r < t$, $s < u$. Συνεπάγεται $r + s < t + u$ και το $t + u$ είναι στοιχείο του z. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.

Άρα $z \in \mathbf{R}_+$. ♮

Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$. Τότε το στοιχείο $z \in \mathbf{R}_+$ στο Θεώρημα 12.4 ονομάζεται

άθροισμα των x, y και συμβολίζεται

$$x + y.$$

Δηλαδή, $x + y = \{r + s : r \in x, s \in y\}$. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbf{R}_+$ αντιστοιχίζει το άθροισμα $x + y$ ονομάζεται **πρόσθεση** στο $\mathbf{R}_+$.

Πρόταση 12.47 ***Αντιμεταθετική ιδιότητα***. *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}_+$ είναι $x + y = y + x$.*

Απόδειξη: $x + y = \{r + s : r \in x, s \in y\} = \{s + r : s \in y, r \in x\} = y + x$. ♮

Πρόταση 12.48 ***Προσεταιριστική ιδιότητα***. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}_+$ είναι $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

Απόδειξη: Είναι $x + y = \{r + s : r \in x, s \in y\}$ και $y + z = \{s + t : s \in y, t \in z\}$. Άρα $(x + y) + z = \{(r + s) + t : r \in x, s \in y, t \in z\} = \{r + (s + t) : r \in x, s \in y, t \in z\} = x + (y + z)$. ♮

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικές προσθέσεις καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων.

Πρόταση 12.49 *Έστω $t \in \mathbf{Q}_+$ και $x \in \mathbf{R}_+$. Υπάρχουν $r \in x$, $s \in \mathbf{Q}_+$, $s \notin x$ ώστε $s - r = t$.*

Απόδειξη: Υπάρχει $r_1 \in x$ και $s_1 \in \mathbf{Q}_+$, $s_1 \notin x$. Τότε είναι $s_1 > r_1$, οπότε $s_1 - r_1 \in \mathbf{Q}_+$. Σύμφωνα με την Πρόταση 12.40, υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ ώστε $nt > s_1 - r_1$, οπότε $r_1 + nt > s_1$. Άρα το $\{n \in \mathbf{N} : r_1 + nt \notin x\}$ δεν είναι κενό, οπότε έχει ελάχιστο στοιχείο n_0.

Αν $n_0 = 1$, τότε ορίζουμε $r = r_1$, $s = r_1 + n_0 t = r_1 + t$, οπότε είναι $r \in x$, $s \in \mathbf{Q}_+$, $s \notin x$ και $s - r = t$. Αν $n_0 > 1$, τότε ορίζουμε $r = r_1 + (n_0 - 1)t \in x$, $s = r_1 + n_0 t \notin x$, οπότε είναι $r \in x$, $s \in \mathbf{Q}_+$, $s \notin x$ και $s - r = t$. ♮

Πρόταση 12.50 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}_+$ είναι $x + y > x$.*

Απόδειξη: Υπάρχει $t \in y$. Βάσει της Πρότασης 12.49, υπάρχουν $r \in x$, $s \in \mathbf{Q}_+$, $s \notin x$ ώστε $s - r = t$. Τότε, είναι $r + t = s \notin x$ και $r + t \in x + y$. Άρα, από την Πρόταση 12.44, είναι $x < x + y$. ♮

Πρόταση 12.51 *Έστω $x, y, z \in \mathbf{R}_+$. Είναι $x < y$ αν και μόνο αν $x + z < y + z$. Επίσης, είναι $x = y$ αν και μόνο αν $x + z = y + z$.*

Απόδειξη: Έστω $x < y$. Υπάρχει $t_1 \notin x$, $t_1 \in y$. Κατόπιν, υπάρχει $t_2 \in y$, $t_2 > t_1$, οπότε $t_2 - t_1 \in \mathbf{Q}_+$. Βάσει της Πρότασης 12.49, υπάρχουν $r \in z$, $s \in \mathbf{Q}_+$, $s \notin z$ ώστε $s - r = t_2 - t_1$. Ορίζουμε $t = t_1 + s = t_2 + r$. Επειδή $t_2 \in y$, $r \in z$, είναι $t \in y + z$. Επειδή $t_1 \notin x$, $s \notin z$, είναι $t \notin x + z$. Άρα $x + z < y + z$.

Έστω $x + z < y + z$. Αν $x = y$, τότε $x + z = y + z$ και, αν $y < x$, τότε $y + z < x + z$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x < y$.

Προφανώς, αν $x = y$, τότε $x + z = y + z$. Έστω $x + z = y + z$. Αν $x < y$, τότε $x + z < y + z$ και, αν $y < x$, τότε $y + z < x + z$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x = y$. ♮

Πρόταση 12.52 *Έστω $x, y, z, w \in \mathbf{R}_+$.*
(1) Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x + z < y + w$.
(2) Αν $x \leq y$ και $z < w$ ή αν $x < y$ και $z \leq w$, τότε $x + z < y + w$.
(3) Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $x + z \leq y + w$.

Απόδειξη: (1) Έστω $x < y$ και $z < w$. Τότε $x + z < y + z < y + w$.
$(2), (3)$ Προφανή, λόγω του (1). ♮

Πρόταση 12.53 *Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$. Αν $x < y$, υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbf{R}_+$ ώστε $x + z = y$. Αντιθέτως, αν $x \geq y$, δεν υπάρχει κανένας $z \in \mathbf{R}_+$ ώστε $x + z = y$.*

Απόδειξη: Το τελευταίο μέρος είναι σαφές, διότι $x+z > x$. Επίσης, η μοναδικότητα του z είναι συνέπεια της Πρότασης 12.51.

Έστω $x < y$. Ορίζουμε το σύνολο $z = \{s - r : s \in y, r \notin x, s > r\}$ και θα αποδείξουμε ότι $z \in \mathbf{R}_+$ και $x + z = y$.

Υπάρχει $t_1 \notin x$, $t_1 \in y$. Τώρα, υπάρχει $t_2 \in y$, $t_2 > t_1$. Τότε $t_2 - t_1 \in z$. Κατόπιν, υπάρχει $t \in \mathbf{Q}_+$, $t \notin y$. Για κάθε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$, είναι $s - r < (s - r) + r = s < t$. Άρα $t \notin z$. Άρα το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.

Έστω $s - r \in z$, δηλαδή ώστε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Έστω $t \in \mathbf{Q}_+$, $t < s - r$. Τότε $t + r < (s - r) + r = s$, οπότε $t + r \in y$. Επίσης, $t + r > r$. Άρα $t = (t + r) - r \in z$. Άρα το z έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.

Πάλι, έστω $s - r \in z$, δηλαδή ώστε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Υπάρχει $t \in y$, $t > s$, οπότε και $t > r$. Τότε $t - r = (t - s) + (s - r) > s - r$ και ο $t - r \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.

Άρα $z \in \mathbf{R}_+$.

Κατόπιν, θα αποδείξουμε ότι $x+z \subseteq y$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r_1+(s-r)$ του $x+z$, δηλαδή ώστε $r_1 \in x$, $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Τότε $(r_1+(s-r))+(r-r_1) = s$ και $r > r_1$, οπότε $r_1 + (s - r) < s$. Άρα $r_1 + (s - r) \in y$.

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι $y \subseteq x + z$. (i) Έστω $s \in y$, $s \notin x$. Υπάρχει $s_1 \in y$, $s_1 > s$. Επίσης, υπάρχουν $r \in x$, $s_2 \in \mathbf{Q}_+$, $s_2 \notin x$ ώστε $s_2 - r = s_1 - s$. Τότε είναι $s = r + (s_1 - s_2)$, όπου $r \in x$, $s_1 \in y$, $s_2 \notin x$ και $s_1 > s_2$ (διότι $s_1 = s_2 + (s - r)$ και $s > r$). Άρα $s \in x + z$. (ii) Έστω $s \in y$, $s \in x$. Υπάρχει $s_1 \in y$, $s_1 \notin x$ και είναι $s < s_1$. Στο (i) είδαμε ότι $s_1 \in x + z$. Άρα $s \in x + z$.

Από $x + z \subseteq y$ και $y \subseteq x + z$ συνεπάγεται $x + z = y$. ♮

Αν $x, y \in \mathbf{R}_+$, $x < y$, τότε ο μοναδικός $z \in \mathbf{R}_+$ που ικανοποιεί την $x + z = y$ ονομάζεται **διαφορά** των y, x και συμβολίζεται

$$y - x.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbf{R}_+$, $x < y$ αντιστοιχίζει τον $y - x$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbf{R}_+$.

Γ. Πολλαπλασιασμός.

Θεώρημα 12.5 *Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$. Τότε το σύνολο $z = \{rs : r \in x, s \in y\}$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του $\mathbf{R}_+$. Επίσης, για κάθε $t, u \in \mathbf{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ είναι $tu \notin z$.*

Απόδειξη: Υπάρχουν $r \in x$, $s \in y$ και, τότε, $rs \in z$. Άρα το σύνολο z δεν είναι κενό. Επίσης, υπάρχουν $t, u \in \mathbf{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$. Τότε, για κάθε $r \in x$, $s \in y$ είναι $r < t$, $s < u$, οπότε $rs < tu$. Άρα κάθε στοιχείο του z είναι $\neq tu$, οπότε $tu \notin z$. Συμπεραίνουμε ότι το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.

Αποδείξαμε, επίσης, ότι για κάθε $t, u \in \mathbf{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ είναι $tu \notin z$.

Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in y$. Έστω οποιοσδήποτε $t \in \mathbf{Q}_+$, $t < rs$. Επειδή $r\frac{t}{r} = t < rs$, συνεπάγεται $\frac{t}{r} < s$. Άρα $\frac{t}{r} \in y$ και, επομένως, $t = r\frac{t}{r} \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.

Πάλι, έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in y$. Υπάρχουν $t \in x$, $u \in y$ ώστε $r < t$, $s < u$. Συνεπάγεται $rs < tu$ και το tu είναι στοιχείο του z. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.

Άρα $z \in \mathbf{R}_+$. ♮

Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$. Τότε το στοιχείο $z \in \mathbf{R}_+$ στο Θεώρημα 12.5 ονομάζεται **γινόμενο** των x, y και συμβολίζεται

$$x \cdot y.$$

Δηλαδή, $x \cdot y = \{rs : r \in x, s \in y\}$. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbf{R}_+$ αντιστοιχίζει το γινόμενο $x \cdot y$ ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbf{R}_+$. Το $x \cdot y$, στο εξής, θα το γράφουμε xy.

Πρόταση 12.54 ***Αντιμεταθετική ιδιότητα.*** *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}_+$ είναι $xy = yx$.*

Απόδειξη: $xy = \{rs : r \in x, s \in y\} = \{sr : s \in y, r \in x\} = yx$. ♮

Πρόταση 12.55 ***Προσεταιριστική ιδιότητα.*** *Για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}_+$ είναι $(xy)z = x(yz)$.*

Απόδειξη: Είναι $xy = \{rs : r \in x, s \in y\}$ και $yz = \{st : s \in y, t \in z\}$. Άρα $(xy)z = \{(rs)t : r \in x, s \in y, t \in z\} = \{r(st) : r \in x, s \in y, t \in z\} = x(yz)$. ♮

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

Πρόταση 12.56 ***Επιμεριστική ιδιότητα.*** *Για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}_+$ είναι $x(y + z) = xy + xz$.*

Απόδειξη: Ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $x(y+z)$ γράφεται $r(s+t)$, όπου $r \in x$, $s \in y$, $t \in z$. Όμως, τότε $r(s+t) = rs + rt \in xy + xz$. Άρα $x(y+z) \subseteq xy + xz$.

Ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $xy + xz$ γράφεται $r_1 s + r_2 t$, όπου $r_1, r_2 \in x$, $s \in y$, $t \in z$. Ορίζουμε r να είναι ο μεγαλύτερος από τους r_1, r_2. Τότε $r \in x$ και $rs \geq r_1 s$, $rt \geq r_2 t$, οπότε $r(s+t) \geq r_1 s + r_2 t$. Επειδή $r(s+t) \in x(y+z)$, συνεπάγεται $r_1 s + r_2 t \in x(y+z)$. Άρα $xy + xz \subseteq x(y+z)$.

Άρα $x(y+z) = xy + xz$. ♮

Πρόταση 12.57 *Έστω $x, y, z \in \mathbf{R}_+$. Είναι $x < y$ αν και μόνο αν $xz < yz$. Επίσης, είναι $x = y$ αν και μόνο αν $xz = yz$.*

Απόδειξη: Έστω $x < y$. Βάσει της Πρότασης 12.53, υπάρχει $w \in \mathbf{R}_+$ ώστε $x + w = y$. Τότε είναι $yz = (x + w)z = xz + wz > xz$.

Έστω $xz < yz$. Αν $x = y$, τότε $xz = yz$ και, αν $y < x$, τότε $yz < xz$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x < y$.

Προφανώς, αν $x = y$, τότε $xz = yz$. Έστω $xz = yz$. Αν $x < y$, τότε $xz < yz$ και, αν $y < x$, τότε $yz < xz$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x = y$. ♮

Πρόταση 12.58 *Έστω $x, y, z, w \in \mathbf{R}_+$.*
(1) Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $xz < yw$.
(2) Αν $x \leq y$ και $z < w$ ή αν $x < y$ και $z \leq w$, τότε $xz < yw$.
(3) Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $xz \leq yw$.

Απόδειξη: (1) Έστω $x < y$ και $z < w$. Τότε $xz < yz < yw$.
(2), (3) Προφανή, λόγω του (1). ♮

Πρόταση 12.59 *Έστω $r \in \mathbf{Q}_+$. Τότε το σύνολο $r^* = \{s \in \mathbf{Q}_+ : s < r\}$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του $\mathbf{R}_+$.*

Απόδειξη: Υπάρχει $s \in \mathbf{Q}_+$, $s < r$ και, προφανώς, ο r δεν ανήκει στο r^*. Άρα το r^* έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.

Έστω $s \in r^*$ και $t \in \mathbf{Q}_+$, $t < s$. Τότε $s < r$, οπότε $t < r$ και, επομένως, $t \in r^*$. Άρα το r^* έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.

Έστω $s \in r^*$. Δηλαδή $s \in \mathbf{Q}_+$, $s < r$. Τότε υπάρχει $s_1 \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $s < s_1 < r$. Άρα $s_1 \in r^*$ και $s_1 > s$. Άρα το r^* έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών. ♮

Πρόταση 12.60 *Για κάθε $x \in \mathbf{R}_+$ είναι $x1^* = x$.*

Απόδειξη: Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του $x1^*$. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in \mathbf{Q}_+$, $s < 1$. Τότε είναι $rs \in \mathbf{Q}_+$ και $rs < r1 = r$, οπότε $rs \in x$. Άρα $x1^* \subseteq x$.

Έστω $r \in x$. Υπάρχει $r_1 \in x$, $r_1 > r$. Τότε $\frac{r}{r_1} r_1 = r < r_1 = 1r_1$, οπότε $\frac{r}{r_1} < 1$ και, επομένως, $\frac{r}{r_1} \in 1^*$. Άρα $r = r_1 \frac{r}{r_1} \in x1^*$. Άρα $x \subseteq x1^*$.

Άρα $x1^* = x$. ♮

Πρόταση 12.61 *Για κάθε $x \in \mathbf{R}_+$ υπάρχει μοναδικός $y \in \mathbf{R}_+$ ώστε $xy = 1^*$.*

Απόδειξη: Η μοναδικότητα του y είναι συνέπεια της Πρότασης 12.57.

Αν δεν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbf{Q}_+$, $s \notin x$, ορίζουμε $y = \{\frac{1}{s} : s \in \mathbf{Q}_+, s \notin x\}$. Αν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbf{Q}_+$, $s \notin x$ και αυτός είναι ο s_0, ορίζουμε $y = \{\frac{1}{s} : s \in \mathbf{Q}_+, s \notin x, s \neq s_0\}$.

Υπάρχει $s \in \mathbf{Q}_+$, $s \notin x$. Τότε $s + s \in \mathbf{Q}_+$, $s + s > s$, οπότε $s + s \notin x$ και ο $s + s$ δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα ο $\frac{1}{s+s}$ είναι στοιχείο του y. Κατόπιν, υπάρχει $r \in x$. Για κάθε $s \in \mathbf{Q}_+$, $s \notin x$ είναι $s \neq r$ και, επειδή $s\frac{1}{s} = 1 = r\frac{1}{r}$, συνεπάγεται $\frac{1}{r} \neq \frac{1}{s}$. Άρα ο $\frac{1}{r}$ δεν είναι ίσος με κανένα στοιχείο του y. Άρα το y έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.

Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $\frac{1}{s}$ του y, δηλαδή έστω $s \in \mathbf{Q}_+$, $s \notin x$. Έστω $r < \frac{1}{s}$. Τότε $r\frac{1}{r} = 1 = \frac{1}{s}s$, οπότε $s < \frac{1}{r}$. Άρα $\frac{1}{r} \in \mathbf{Q}_+$, $\frac{1}{r} \notin x$ και ο $\frac{1}{r}$ δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $r = \frac{1}{\frac{1}{r}} \in y$. Άρα το y έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.

Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $\frac{1}{s}$ του y, δηλαδή έστω $s \in \mathbf{Q}_+$, $s \notin x$ και ο s δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα υπάρχει $s_1 \in \mathbf{Q}_+$, $s_1 \notin x$, $s_1 < s$ και, επομένως, υπάρχει $s_2 \in \mathbf{Q}_+$, $s_1 < s_2 < s$. Τότε, φυσικά, $s_2 \notin x$ και ο s_2 δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $\frac{1}{s_2} \in y$ και $\frac{1}{s} < \frac{1}{s_2}$. Άρα το y έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.

Άρα $y \in \mathbf{R}_+$.

Τώρα, θα αποδείξουμε ότι $xy \subseteq 1^*$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r\frac{1}{s}$ του xy, δηλαδή έστω $r \in x$, $s \in \mathbf{Q}_+$ $s \notin x$. Τότε $s > r$, οπότε $r\frac{1}{s} < s\frac{1}{s} = 1$ και $r\frac{1}{s} \in \mathbf{Q}_+$. Άρα $r\frac{1}{s} \in 1^*$.

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι $1^* \subseteq xy$. Έστω $t \in \mathbf{Q}_+$, $t < 1$. Υπάρχει $r \in x$ και, κατόπιν, υπάρχουν $r_1 \in x$, $s_1 \in \mathbf{Q}_+$, $s_1 \notin x$ ώστε $s_1 - r_1 = (1-t)r$. Τότε $\frac{r_1}{t} \in \mathbf{Q}_+$ και $\frac{r_1}{t} > s_1$ (διότι $(1-t)s_1 > (1-t)r$, οπότε $r_1 = s_1 - (1-t)r > ts_1$). Άρα $\frac{r_1}{t} \notin x$ και δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $\frac{1}{\frac{r_1}{t}} \in y$. Τέλος, είναι $t = r_1\frac{1}{\frac{r_1}{t}} \in xy$.

Από $xy \subseteq 1^*$ και $1^* \subseteq xy$ συνεπάγεται $xy = 1^*$. ♮

Ο y της Πρότασης 12.61 ονομάζεται **αντίστροφος** του x και συμβολίζεται

$$x^{-1}.$$

Πρόταση 12.62 *Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$. Τότε υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbf{R}_+$ ώστε $xz = y$.*

Απόδειξη: Η μοναδικότητα του z είναι συνέπεια της Πρότασης 12.57.

Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$. Αν $z = x^{-1}y \in \mathbf{R}_+$, τότε $xz = xx^{-1}y = 1^*y = y$. ♮

Αν $x, y \in \mathbf{R}_+$, τότε ο μοναδικός $z \in \mathbf{R}_+$ που ικανοποιεί την $xz = y$, δηλαδή ο $x^{-1}y$, ονομάζεται **λόγος** των y, x και συμβολίζεται

$$\frac{y}{x}.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbf{R}_+$ αντιστοιχίζει τον $\frac{y}{x}$ ονομάζεται **διαίρεση** στο $\mathbf{R}_+$.

Δ. Η ιδιότητα συνέχειας του $\mathbf{R}_+$.

Θεώρημα 12.6 *Έστω μη κενά $A, B \subseteq \mathbf{R}_+$ ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Τότε υπάρχει $\xi \in \mathbf{R}_+$ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $\xi = \bigcup\{a : a \in A\} = \{r \in \mathbf{Q}_+ : r \in a$ για κάποιο $a \in A\}$. Δηλαδή, το ξ είναι η ένωση όλων των συνόλων a $(a \in A)$.

Υπάρχει κάποιο $a_0 \in A$ και υπάρχει κάποιος $r_0 \in \mathbf{Q}_+$, $r_0 \in a_0$. Άρα $r_0 \in \xi$. Κατόπιν, υπάρχει κάποιος $b_0 \in B$ και υπάρχει κάποιος $s_0 \in \mathbf{Q}_+$, $s_0 \notin b_0$. Έστω

$r \in \xi$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$. Επειδή $a \leq b_0$ (δηλαδή $a \subseteq b_0$), είναι $r \in b_0$, οπότε $r \neq s_0$. Συμπεραίνουμε ότι $r \neq s_0$ για κάθε $r \in \xi$, οπότε $s_0 \notin \xi$. Άρα το ξ έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.

Έστω $r \in \xi$ και $r_1 \in \mathbf{Q}_+$, $r_1 < r$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$, οπότε $r_1 \in a$. Άρα $r_1 \in \xi$. Άρα το ξ έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.

Έστω $r \in \xi$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$. Επομένως, υπάρχει $r_1 \in a$, $r_1 > r$. Άρα υπάρχει $r_1 \in \xi$, $r_1 > r$. Άρα το ξ έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.

Άρα $\xi \in \mathbf{R}_+$.

Από τον ορισμό του το ξ έχει την ιδιότητα: $a \subseteq \xi$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $a \leq \xi$ για κάθε $a \in A$. Κατόπιν, έστω $b \in B$. Επειδή $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, είναι $a \subseteq b$ για κάθε $a \in A$ και, επομένως, $\xi \subseteq b$. Άρα είναι $\xi \leq b$ για κάθε $b \in B$. $\natural$

Ε. Οι ρητοί θετικοί πραγματικοί.

Για κάθε $r \in \mathbf{Q}_+$, ο θετικός πραγματικός $r^* \in \mathbf{R}_+$ ονομάζεται **ρητός θετικός πραγματικός** και για κάθε $n \in \mathbf{Z}_+(= \mathbf{N})$, ο θετικός πραγματικός $n^* \in \mathbf{R}_+$ ονομάζεται **ακέραιος θετικός πραγματικός**. Θα συμβολίσουμε (προσωρινά) ${\mathbf{Q}_+}^*$ το υποσύνολο του $\mathbf{R}_+$ με στοιχεία τους ρητούς θετικούς πραγματικούς r^* $(r \in \mathbf{Q}_+)$ και θα συμβολίσουμε (προσωρινά) ${\mathbf{Z}_+}^*$ το υποσύνολο του $\mathbf{R}_+$ με στοιχεία τους ακέραιους θετικούς πραγματικούς n^* $(n \in \mathbf{Z}_+(= \mathbf{N}))$. Δηλαδή, ${\mathbf{Q}_+}^* = \{r^* : r \in \mathbf{Q}_+\}$ και ${\mathbf{Z}_+}^* = \{r^* : r \in \mathbf{Z}_+(= \mathbf{N})\}$.

Πρόταση 12.63 *Έστω $r, s \in \mathbf{Q}_+$. Τότε είναι $r < s$ αν και μόνο αν $r^* < s^*$. Επίσης, είναι $r = s$ αν και μόνο αν $r^* = s^*$.*

Απόδειξη: Έστω $r < s$. Τότε $r \in s^*$ και $r \notin r^*$. Άρα $r^* < s^*$.

Έστω $r^* < s^*$. Αν $r = s$, τότε $r^* = s^*$ και, αν $s < r$, τότε $s^* < r^*$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $r < s$.

Αν $r = s$, τότε, προφανώς, $r^* = s^*$. Έστω $r^* = s^*$. Αν $r < s$, τότε $r^* < s^*$ και, αν $s < r$, τότε $s^* < r^*$. Και στις δυο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $r = s$. $\natural$

Πρόταση 12.64 *Έστω $r, s, t \in \mathbf{Q}_+$.*

(1) *Είναι $r + s = t$ αν και μόνο αν $r^* + s^* = t^*$.*

(2) *Είναι $r - s = t$ αν και μόνο αν $r^* - s^* = t^*$.*

(3) *Είναι $rs = t$ αν και μόνο αν $r^* s^* = t^*$.*

(4) *Είναι $\frac{r}{s} = t$ αν και μόνο αν $\frac{r^*}{s^*} = t^*$.*

Απόδειξη: (1) Έστω $r + s = t$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r_1 + s_1$ του $r^* + s^*$, δηλαδή έστω $r_1, s_1 \in \mathbf{Q}_+$, $r_1 < r$, $s_1 < s$. Τότε $r_1 + s_1 \in \mathbf{Q}_+$ και $r_1 + s_1 < r + s = t$, οπότε $r_1 + s_1 \in t^*$. Άρα $r^* + s^* \subseteq t^*$.

Αντιστρόφως έστω $t_1 \in t^*$, δηλαδή $t_1 \in \mathbf{Q}_+$, $t_1 < t = r + s$. Τότε είναι $\frac{t_1}{r+s} < 1$, οπότε $\frac{t_1}{r+s} r < r$ και $\frac{t_1}{r+s} s < s$ και, επομένως, $\frac{t_1}{r+s} r \in r^*$ και $\frac{t_1}{r+s} s \in s^*$. Άρα $t_1 = \frac{t_1}{r+s} r + \frac{t_1}{r+s} s \in r^* + s^*$. Άρα $t^* \subseteq r^* + s^*$.

Άρα $r^* + s^* = t^*$.

Αντιστρόφως, έστω $r^* + s^* = t^*$ και $r + s = u$. Τότε είναι $u^* = r^* + s^* = t^*$ και, επομένως, $u = t$.

(2) Συνέπεια του (1).
(3) Έστω $rs = t$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r_1 s_1$ του $r^* s^*$, δηλαδή έστω $r_1, s_1 \in \mathbf{Q}_+$, $r_1 < r$, $s_1 < s$. Τότε $r_1 s_1 \in \mathbf{Q}_+$ και $r_1 s_1 < rs = t$, οπότε $r_1 s_1 \in t^*$. Άρα $r^* s^* \subseteq t^*$.

Αντιστρόφως έστω $t_1 \in t^*$, δηλαδή $t_1 \in \mathbf{Q}_+$, $t_1 < t = rs$. Υπάρχει $t_2 \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $t_1 < t_2 < rs$. Τότε είναι $\frac{t_2}{s} < r$ και $\frac{t_1}{t_2} s < s$ και, επομένως, $\frac{t_2}{s} \in r^*$ και $\frac{t_1}{t_2} s \in s^*$. Άρα $t_1 = \frac{t_2}{s} \frac{t_1}{t_2} s \in r^* s^*$. Άρα $t^* \subseteq r^* s^*$.

Άρα $r^* s^* = t^*$.

Αντιστρόφως, έστω $r^* s^* = t^*$ και $rs = u$. Τότε είναι $u^* = r^* s^* = t^*$ και, επομένως, $u = t$.
(4) Συνέπεια του (3). ♮

Πρόταση 12.65 *Έστω $x \in \mathbf{R}_+$. Τότε $x \in {\mathbf{Q}_+}^*$ αν και μόνο αν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $s \notin x$. Στην περίπτωση αυτή, αν ο r είναι ο ελάχιστος $s \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $s \notin x$, τότε $x = r^*$.*

Απόδειξη: Έστω $x \in {\mathbf{Q}_+}^*$ και, συγκεκριμένα, έστω $x = r^*$, όπου $r \in \mathbf{Q}_+$. Τότε, $x = \{t \in \mathbf{Q}_+ : t < r\}$, οπότε είναι φανερό ότι ο r είναι ο ελάχιστος $s \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $s \notin x$. Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $s \notin x$ και ότι αυτός ο ελάχιστος s είναι ο r. Τότε για κάθε $t \in x$ συνεπάγεται $t < r$ (διότι $r \notin x$) και, αντιστρόφως, αν $t \in \mathbf{Q}_+$, $t < r$, συνεπάγεται $t \in x$. Άρα $x = \{t \in \mathbf{Q}_+ : t < r\} = r^*$. ♮

Πρόταση 12.66 *Έστω $x \in \mathbf{R}_+$, $r \in \mathbf{Q}_+$. Τότε (i) είναι $r \in x$ αν και μόνο αν $r^* < x$ και (ii) είναι $r \notin x$ αν και μόνο αν $r^* \geq x$.*

Απόδειξη: (i) Έστω $r \in x$. Επειδή $r \notin r^*$, συνεπάγεται $r^* < x$. Αντιστρόφως, έστω $r^* < x$. Τότε υπάρχει $r_1 \in x$, $r_1 \notin r^*$. Άρα $r_1 \in x$ και $r_1 \geq r$, οπότε $r \in x$.

Το (ii) είναι ισοδύναμο με το (i). ♮

Πρόταση 12.67 *Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$, $x < y$. Τότε υπάρχει $r \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $x < r^* < y$.*

Απόδειξη: Έστω $x < y$. Τότε υπάρχει $s \in y$, $s \notin x$. Επίσης, υπάρχει $r \in y$, $r > s$. Τότε είναι $r \in y$ και $r \notin r^*$, οπότε $r^* < y$. Επίσης, είναι $s \in r^*$ και $s \notin x$, οπότε $x < r^*$. ♮

Πρόταση 12.68 *Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$ και $t \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $xy < t^*$. Τότε υπάρχουν $r, s \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $rs = t$ και $x < r^*$, $y < s^*$.*

Απόδειξη: Έστω z ο μικρότερος από τους 1^* και $\frac{t^* - xy}{x+y+1^*}$. Τότε, φυσικά, $z \leq 1^*$ και $z \leq \frac{t^* - xy}{x+y+1^*}$. Τώρα, υπάρχουν $r_1, s_1 \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $x < {r_1}^* < x + z$ και $y < {s_1}^* < y + z$. Τότε ${r_1}^* {s_1}^* < (x+z)(y+z) = xy + xz + zy + zz \leq xy + xz + zy + z = xy + (x + y + 1^*)z \leq xy + (t^* - xy) = t^*$ και, επομένως, $r_1 s_1 < t$. Ορίζουμε $r = \frac{t}{s_1} \in \mathbf{Q}_+$ και $s = s_1 \in \mathbf{Q}_+$. Τότε $rs = t$, $s^* = {s_1}^* > y$ και $r^* = (\frac{t}{s_1})^* = \frac{t^*}{{s_1}^*} > {r_1}^*$. ♮

Πρόταση 12.69 *Για κάθε $y \in \mathbf{R}_+$ υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbf{R}_+$ ώστε $xx = y$.*

Απόδειξη: Η μοναδικότητα του x είναι συνέπεια της Πρότασης 12.58.

Ορίζουμε τον $x = \{r \in \mathbf{Q}_+ : rr \in y\}$.

Κατ' αρχάς, υπάρχει $r \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $r < 1$, $r \in y$. Τότε, $rr < r$, οπότε $rr \in y$. Άρα $r \in x$. Κατόπιν, υπάρχει $s \in \mathbf{Q}_+$, $s > 1$, $s \notin y$. Τότε $ss > s$, οπότε $ss \notin y$. Άρα $s \notin x$. Άρα ο x έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.

Έστω $r \in x$ και $r_1 \in \mathbf{Q}_+$, $r_1 < r$. Τότε $r_1 r_1 < rr$ και, επειδή $rr \in y$, είναι $r_1 r_1 \in y$. Άρα $r_1 \in x$. Επομένως, ο x έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.

Έστω $r \in x$, οπότε $r \in \mathbf{Q}_+$ και $rr \in y$. Υπάρχει $s \in y$, $s > rr$ και θεωρούμε $t \in \mathbf{Q}_+$ μικρότερο από τον μικρότερο από τους 1, $\frac{s-rr}{r+r+1}$. Τότε $t < 1$, $t < \frac{s-rr}{r+r+1}$. Άρα $(r+t)(r+t) = rr + rt + tr + tt < rr + rt + tr + t = rr + (r+r+1)t < rr + (s - rr) = s$. Επειδή $s \in y$, συνεπάγεται $(r+t)(r+t) \in y$, οπότε $r + t \in x$. Επειδή $r + t > r$, ο x έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.

Άρα $x \in \mathbf{R}_+$.

Έστω $xx > y$. Τότε υπάρχει $s \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $xx > s^* > y$. Άρα $s \in xx$, οπότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in x$ ώστε $r_1 r_2 = s$. Αν r είναι ο μεγαλύτερος από τους r_1 , r_2 , τότε $r \in x$ και $rr \geq s$. Επειδή $r \in x$, είναι $rr \in y$ και, επειδή $rr \geq s$, είναι $s \in y$. Αυτό αντιφάσκει με το $s^* > y$.

Έστω $xx < y$. Τότε υπάρχει $s \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $xx < s^* < y$. Από την Πρόταση 12.68, υπάρχουν $t_1, t_2 \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $t_1 t_2 = s$ και $x < {t_1}^*$, $x < {t_2}^*$. Ορίζουμε t να είναι ο μικρότερος από τους t_1 , t_2 , οπότε $x < t^*$ και $tt \leq s$. Επειδή $s^* < y$, είναι $s \in y$ και, επειδή $tt \leq s$, είναι $tt \in y$. Άρα $t \in x$ και αυτό αντιφάσκει με το $x < t^*$.

Άρα $xx = y$. $\natural$

Η Πρόταση 12.69 λέει ότι *κάθε θετικός πραγματικός έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα.*

Κάθε $x \in \mathbf{R}_+$ ο οποίος δεν είναι ρητός θετικός πραγματικός χαρακτηρίζεται **άρρητος θετικός πραγματικός**. Η επόμενη πρόταση λέει ότι *η τετραγωνική ρίζα του* $1 + 1$ *είναι άρρητος θετικός πραγματικός.*

Πρόταση 12.70 *Υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος θετικός πραγματικός.*

Απόδειξη: Υπάρχει $x \in \mathbf{R}_+$ ώστε $xx = (1+1)^*$.

Έστω ότι ο x είναι ρητός θετικός πραγματικός. Τότε υπάρχει $r \in \mathbf{Q}_+$ ώστε $x = r^*$, οπότε συνεπάγεται $rr = 1+1$. Σύμφωνα με την Πρόταση 12.41, υπάρχουν $n, m \in \mathbf{N}$ ώστε $r = \frac{m}{n}$. Άρα $mm = (1+1)nn$.

Βάσει της Αρχής Καλής Διάταξης υπάρχει ελάχιστος $n_0 \in \mathbf{N}$ με την ιδιότητα να υπάρχει $m_0 \in \mathbf{N}$ ώστε $m_0 m_0 = (1+1)n_0 n_0$.

Τώρα, είναι $n_0 n_0 < (1+1)n_0 n_0 = m_0 m_0 = ((1+1)n_0)n_0 < (1+1)n_0(1+1)n_0$ και, επομένως, $n_0 < m_0 < (1+1)n_0$.

Ορίζουμε $n_1 = m_0 - n_0 \in \mathbf{N}$.

Τότε $n_1 < n_0$ και ορίζουμε $m_1 = n_0 - n_1 \in \mathbf{N}$.

Τώρα, με λίγες πράξεις αποδεικνύεται ότι $m_1 m_1 = (1+1)n_1 n_1$. Αυτό είναι άτοπο, επειδή $n_1 < n_0$. $\natural$

Μια συνέπεια των Προτάσεων 12.63 και 12.64 είναι η εξής. Ας υποθέσουμε ότι αντικαθιστούμε κάθε $r \in \mathbf{Q}_+$ με τον αντίστοιχο $r^* \in {\mathbf{Q}_+}^*$. Τότε *οι σχέσεις* *διάταξης καθώς και οι αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία r του $\mathbf{Q}_+$ μένουν αμετάβλητες ως σχέσεις διάταξης καθώς και αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα αντίστοιχα στοιχεία r^* του ${\mathbf{Q}_+}^*$.* Αυτό μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbf{Q}_+$ των *θετικών ρητών* r με το υποσύνολο ${\mathbf{Q}_+}^*$ του $\mathbf{R}_+$ που αποτελείται από τους αντίστοιχους *ρητούς θετικούς πραγματικούς* r^*.

Στο εξής, θα θεωρούμε ότι κάθε θετικός ρητός r έχει αντικατασταθεί από τον αντίστοιχο ρητό θετικό πραγματικό r^* και, επομένως, ότι το σύνολο $\mathbf{Q}_+$ έχει αντικατασταθεί από το αντίστοιχο υποσύνολο ${\mathbf{Q}_+}^*$ του $\mathbf{R}_+$. Αφού, λοιπόν, «πετάξουμε» και «ξεχάσουμε» τους r και το σύνολό τους $\mathbf{Q}_+$, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο r στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου r^* του ${\mathbf{Q}_+}^*$. Επίσης, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbf{Q}_+$ για το σύνολο ${\mathbf{Q}_+}^*$ και να χρησιμοποιούμε την ονομασία «θετικός ρητός» αντί «ρητός θετικός πραγματικός» για τα στοιχεία του ${\mathbf{Q}_+}^*$. Ουσιαστικά, λοιπόν, ταυτίζουμε τα σύνολα $\mathbf{Q}_+$, ${\mathbf{Q}_+}^*$, έτσι ώστε κάθε θετικός ρητός να θεωρείται ρητός θετικός πραγματικός και το σύνολο $\mathbf{Q}_+$ να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου $\mathbf{R}_+$.

Αυτομάτως, κάθε θετικός ακέραιος (δηλαδή, φυσικός) n αντικαθίσταται από τον αντίστοιχο ακέραιο θετικό πραγματικό n^*, οπότε το σύνολο $\mathbf{Z}_+$ αντικαθίσταται από το αντίστοιχο υποσύνολο ${\mathbf{Z}_+}^*$ του $\mathbf{R}_+$. Όμως, χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο n στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου n^* του ${\mathbf{Z}_+}^*$. Επίσης, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbf{Z}_+$ ή, ισοδύναμα, το σύμβολο $\mathbf{N}$ για το σύνολο ${\mathbf{Z}_+}^*$ και χρησιμοποιούμε την ονομασία «θετικός ακέραιος» αντί «ακέραιος θετικός πραγματικός» για τα στοιχεία του ${\mathbf{Z}_+}^*$. Δηλαδή, ταυτίζουμε τα σύνολα $\mathbf{Z}_+$, ${\mathbf{Z}_+}^*$, έτσι ώστε κάθε θετικός ακέραιος να θεωρείται ακέραιος θετικός πραγματικός και το σύνολο $\mathbf{Z}_+ = \mathbf{N}$ να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου $\mathbf{R}_+$.

Μετά από αυτές τις αλλαγές, έχει ενδιαφέρον να δούμε πώς διατυπώνονται μερικές από τις προηγούμενες προτάσεις.

Η Πρόταση 12.67 λέει:

Ανάμεσα σε δυο οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός ρητός.

Η Πρόταση 12.66 περιγράφει την αντιστοιχία ανάμεσα στη σχέση διάταξης των (νέων) θετικών ρητών με τους θετικούς πραγματικούς και στη σχέση εγκλεισμού των (παλαιών) θετικών ρητών με τους θετικούς πραγματικούς: *ένας (νέος) θετικός ρητός είναι μικρότερος από έναν θετικό πραγματικό αν και μόνο αν ο αντίστοιχος (παλαιός) θετικός ρητός περιέχεται στον ίδιο θετικό πραγματικό* και *ένας (νέος) θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με έναν θετικό πραγματικό αν και μόνο αν ο αντίστοιχος (παλαιός) θετικός ρητός δεν περιέχεται στον ίδιο θετικό πραγματικό.*

Μετά από αυτά, η Πρόταση 12.65 λέει το εξής «προφανές»: *ένας θετικός πραγματικός είναι θετικός ρητός αν και μόνο αν υπάρχει ελάχιστος θετικός ρητός μεγαλύτερος από ή ίσος με αυτόν και, σ΄ αυτήν την περίπτωση, αυτός ο ελάχιστος θετικός ρητός είναι ο ίδιος ο εαυτός του.*

Η Πρόταση 12.60 λέει:

$x1 = x$ για κάθε x θετικό πραγματικό.

Η Πρόταση 12.61 λέει:

Για κάθε θετικό πραγματικό x υπάρχει θετικός πραγματικός y ώστε $xy = 1$.

12.4 Οι πραγματικοί.

Εκτός από τους θετικούς πραγματικούς, δηλαδή τα στοιχεία του $\mathbf{R}_+$, δημιουργούμε ένα στοιχείο το οποίο ονομάζουμε **μηδέν** και συμβολίζουμε 0. Θεωρούμε τον 0 διαφορετικό από κάθε $x \in \mathbf{R}_+$. Επίσης, για κάθε στοιχείο $x \in \mathbf{R}_+$, δημιουργούμε ένα νέο στοιχείο το οποίο ονομάζουμε **μείον** x ή **αντίθετο** του x και συμβολίζουμε $-x$. Θεωρούμε ότι κάθε $-x$ $(x \in \mathbf{R}_+)$ είναι διαφορετικός από τον 0 καθώς και από κάθε $y \in \mathbf{R}_+$. Επίσης, θεωρούμε ότι, για κάθε δυο διαφορετικούς $x, y \in \mathbf{R}_+$, οι αντίστοιχοι $-x, -y$ είναι διαφορετικοί.

Οι $-x$ $(x \in \mathbf{R}_+)$ ονομάζονται **αρνητικοί πραγματικοί** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbf{R}_-$. Δηλαδή, $\mathbf{R}_- = \{-x : x \in \mathbf{R}_+\}$. Οι θετικοί πραγματικοί, το μηδέν και οι αρνητικοί πραγματικοί ονομάζονται **πραγματικοί** και συμβολίζουμε $\mathbf{R}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbf{R}_+$.

Οι $-r$ $(r \in \mathbf{Q}_+)$ ονομάζονται **αρνητικοί ρητοί** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbf{Q}_-$. Δηλαδή, $\mathbf{Q}_- = \{-r : r \in \mathbf{Q}_+\}$. Οι θετικοί ρητοί, το μηδέν και οι αρνητικοί ρητοί ονομάζονται **ρητοί** και συμβολίζουμε $\mathbf{Q}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}_+$.

Τέλος, οι $-n$ $(n \in \mathbf{Z}_+ = \mathbf{N})$ ονομάζονται **αρνητικοί ακέραιοι** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbf{Z}_-$. Δηλαδή, $\mathbf{Z}_- = \{-n : n \in \mathbf{Z}_+\}$. Οι θετικοί ακέραιοι, το μηδέν και οι αρνητικοί ακέραιοι ονομάζονται **ακέραιοι** και συμβολίζουμε $\mathbf{Z}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}_+$.

Α. Διάταξη.

Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ συμβολίζουμε $|x|$ και ονομάζουμε **απόλυτη τιμή** του x τον πραγματικό που ορίζεται με τον τύπο

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbf{R}_+\,, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \\ y, & \text{αν } x = -y,\ y \in \mathbf{R}_+\,. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι, αν ο x δεν είναι μηδέν, τότε ο $|x|$ είναι θετικός πραγματικός.

Έστω ότι $x, y \in \mathbf{R}$. Το νόημα του $x > y$ ή του ισοδύναμου $y < x$ είναι ήδη γνωστό στην περίπτωση που οι x, y είναι και οι δυο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δυο θετικοί. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $y < x$ αν (i) οι x, y είναι και οι δυο αρνητικοί και $|x| < |y|$ ή (ii) είναι ο x θετικός και ο y αρνητικός ή (iii) είναι ο x θετικός και $y = 0$ ή (iv) είναι $x = 0$ και ο y αρνητικός.

Η Πρόταση 12.71 είναι προφανής.

Πρόταση 12.71 *Έστω $x \in \mathbf{R}$. Ο x είναι θετικός αν και μόνο αν $x > 0$. Επίσης, ο x είναι αρνητικός αν και μόνο αν $x < 0$.*

Οι Προτάσεις 12.72 και 12.73, παρακάτω, αποδεικνύονται με απλή εφαρμογή των ορισμών διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς το αν οι πραγματικοί είναι θετικοί ή αρνητικοί ή μηδέν και με αναγωγή στην περίπτωση των θετικών πραγματικών. Θα αποφύγουμε να γράψουμε τις τελείως στοιχειώδεις αποδείξεις.

Πρόταση 12.72 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: $x = y$, $x > y$, $x < y$.*

Αν $x, y \in \mathbf{R}$, τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον y και συμβολίζουμε $x \geq y$ ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον x και συμβολίζουμε $y \leq x$ αν $x > y$ ή $x = y$ ή, ισοδύναμα, αν $y < x$ ή $y = x$.

Πρόταση 12.73 ***Μεταβατική ιδιότητα***. *Έστω $x, y, z \in \mathbf{R}$.*
(1) Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.
(2) Αν $x \leq y$ και $y < z$ ή αν $x < y$ και $y \leq z$, τότε $x < z$.
(3) Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.

Β. Πρόσθεση.

Έστω $x, y \in \mathbf{R}$. Έχει ήδη οριστεί το άθροισμα $x + y$ αν οι x, y είναι και οι δυο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δυο θετικοί. Ορίζουμε το **άθροισμα** των x, y και το συμβολίζουμε

$$x + y$$

να είναι (i) ο $-(|x| + |y|)$ αν $x < 0$, $y < 0$, (ii) ο $|x| - |y|$ αν $x > 0$, $y < 0$, $|x| > |y|$, (iii) ο $-(|y| - |x|)$ αν $x > 0$, $y < 0$, $|x| < |y|$, (iv) ο 0 αν $x > 0$, $y < 0$, $|x| = |y|$, (v) ο $|y| - |x|$ αν $x < 0$, $y > 0$, $|y| > |x|$, (vi) ο $-(|x| - |y|)$ αν $x < 0$, $y > 0$, $|y| < |x|$, (vii) ο 0 αν $x < 0$, $y > 0$, $|x| = |y|$, $(viii)$ ο x αν $y = 0$ και (ix) ο y αν $x = 0$.

Έτσι, η πράξη **πρόσθεση** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$.

Όλες οι επόμενες προτάσεις αποδεικνύονται με αναγωγή σε περιπτώσεις όπου όλες οι μεταβλητές έχουν θετικές τιμές. Παραλείπουμε τις βαρετές πράξεις – δεν προσφέρουν τίποτα ουσιαστικό.

Πρόταση 12.74 ***Αντιμεταθετική ιδιότητα***. *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $x + y = y + x$.*

Πρόταση 12.75 ***Προσεταιριστική ιδιότητα***. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$ είναι $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

Έστω $x \in \mathbf{R}$. Έχουμε ορίσει τον αντίθετο του x αν ο x είναι θετικός. Αν, τώρα, ο x δεν είναι θετικός, ορίζουμε τον **αντίθετο** του x και τον συμβολίζουμε

$$-x$$

να είναι (i) ο 0 αν $x = 0$ και (ii) ο $|x|$ αν $x < 0$.

Πρόταση 12.76 *Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ είναι $x > 0$ ή $x = 0$ ή $x < 0$ αν και μόνο αν, αντιστοίχως, $-x < 0$ ή $-x = 0$ ή $-x > 0$.*

Πρόταση 12.77 *Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ είναι $-(-x) = x$, $|-x| = |x|$ και $x+(-x) = 0$.*

Πρόταση 12.78 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $-(x + y) = -x + (-y)$.*

Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ ονομάζουμε **διαφορά** των x, y και συμβολίζουμε

$$x - y$$

τον $x + (-y)$. Έτσι, η πράξη **αφαίρεση** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$.

Πρόταση 12.79 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $-(x - y) = y - x$.*

Πρόταση 12.80 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $x > y$ αν και μόνο αν $x - y > 0$ αν και μόνο αν $y - x < 0$.*

Πρόταση 12.81 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $x > y$ αν και μόνο αν $-x < -y$. Επίσης, είναι $x = y$ αν και μόνο αν $-x = -y$.*

Πρόταση 12.82 *Έστω $x, y, z \in \mathbf{R}$. Είναι $x < y$ αν και μόνο αν $x + z < y + z$. Επίσης, είναι $x = y$ αν και μόνο αν $x + z = y + z$.*

Πρόταση 12.83 *Έστω $x, y, z, w \in \mathbf{R}$.*
(1) Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x + z < y + w$.
(2) Αν $x \leq y$ και $z < w$ ή αν $x < y$ και $z \leq w$, τότε $x + z < y + w$.
(3) Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $x + z \leq y + w$.

Πρόταση 12.84 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbf{R}$ ώστε $x + z = y$.*

Ο μοναδικός z στην Πρόταση 12.84 είναι ο $y + (-x) = y - x$.

Γ. Πολλαπλασιασμός.

Έστω $x, y \in \mathbf{R}$. Έχει ήδη οριστεί το γινόμενο xy αν οι x, y είναι και οι δυο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δυο θετικοί. Ορίζουμε το **γινόμενο** των x, y και το συμβολίζουμε

$$x \cdot y$$

ή, πιο απλά, xy να είναι (i) ο $|x||y|$ αν $x < 0$, $y < 0$, (ii) ο $-(|x||y|)$ αν $x < 0$, $y > 0$ ή $x > 0$, $y < 0$ και (iii) ο 0 αν $x = 0$ ή $y = 0$.

Έτσι, η πράξη **πολλαπλασιασμός** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$.

Πρόταση 12.85 *Έστω $x, y \in \mathbf{R}$. Είναι $xy = 0$ αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους x, y είναι μηδέν.*

Πρόταση 12.86 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $|xy| = |x||y|$.*

Πρόταση 12.87 ***Αντιμεταθετική ιδιότητα.*** *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $xy = yx$.*

Πρόταση 12.88 ***Προσεταιριστική ιδιότητα.*** *Για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$ είναι $(xy)z = x(yz)$.*

Πρόταση 12.89 *Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ είναι $x1 = x$.*

Πρόταση 12.90 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $(-x)y = x(-y) = -xy$, $(-x)(-y) = xy$.*

Πρόταση 12.91 ***Επιμεριστική ιδιότητα.*** *Για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$ είναι $x(y+z) = xy + xz$.*

Πρόταση 12.92 *Έστω $x, y, z \in \mathbf{R}$. Αν $z > 0$, τότε είναι $x > y$ αν και μόνο αν $xz > yz$. Αν $z < 0$, τότε είναι $x > y$ αν και μόνο αν $xz < yz$.*

Έστω $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$. Αν ο x είναι θετικός, έχουμε ήδη ορίσει τον αντίστροφό του. Τώρα, αν ο x είναι αρνητικός, συμβολίζουμε

$$x^{-1}$$

και ονομάζουμε **αντίστροφο** του x τον $-|x|^{-1}$.

Πρόταση 12.93 *Για κάθε $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ είναι $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.*

Πρόταση 12.94 *Έστω $x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$. Τότε υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbf{R}$ ώστε $xz = y$.*

Ο z που ικανοποιεί την $xz = y$ είναι, απλώς, ο $x^{-1}y$. Αυτός ο πραγματικός ονομάζεται **λόγος** των y, x και συμβολίζεται

$$\frac{y}{x}\,.$$

Έτσι, η πράξη **διαίρεση** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$.

Δ. Η ιδιότητα συνέχειας.

Θεώρημα 12.7 *Έστω μη κενά $A, B \subseteq \mathbf{R}$ ώστε $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Τότε υπάρχει $\xi \in \mathbf{R}$ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.*

Απόδειξη: Έστω ότι το A περιέχει τουλάχιστον έναν $a \in \mathbf{R}_+$. Τότε το $A_1 = A \cap \mathbf{R}_+$ είναι μη κενό και ισχύει $a \leq b$ για κάθε $a \in A_1$, $b \in B$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 12.6, υπάρχει $\xi \in \mathbf{R}_+$ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A_1$, $b \in B$. Άρα $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

Έστω ότι το B περιέχει τουλάχιστον έναν $b \in \mathbf{R}_-$. Θεωρούμε τα σύνολα $C = \{c : -c \in A\}$ και $D = \{d : -d \in B\}$. Τότε είναι $d \leq c$ για κάθε $d \in D$ και $c \in C$. Επίσης, το D περιέχει τουλάχιστον έναν $d \in \mathbf{R}_+$. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της πρώτης παραγράφου, υπάρχει $\eta \in \mathbf{R}_+$ ώστε $d \leq \eta \leq c$ για κάθε

$d \in D$ και $c \in C$. Ορίζουμε $\xi = -\eta$, οπότε είναι $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$.

Τέλος, έστω ότι το A δεν περιέχει κανέναν $a \in \mathbf{R}_+$ και το B δεν περιέχει κανέναν $b \in \mathbf{R}_-$. Τότε, όμως, είναι $a \leq 0 \leq b$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$. $\natural$

Ε. Οι βασικές ιδιότητες του $\mathbf{R}$.

Όλες οι ιδιότητες του $\mathbf{R}$ που παρουσιάζονται στο Θεώρημα 12.8 έχουν αποδειχθεί. Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζονται «βασικές» διότι με βάση αυτές μπορούν να αποδειχτούν όλες οι άλλες ιδιότητες του $\mathbf{R}$. Μάλιστα, είναι και οι ελάχιστες δυνατές, διότι καμιά τους δεν μπορεί να αποδειχτεί από τις υπόλοιπες. Μπορούν, λοιπόν, οι ιδιότητες αυτές να παίξουν τον ρόλο «αξιωμάτων» σε ένα πλαίσιο στο οποίο το σύνολο $\mathbf{R}$ θα θεωρηθεί δεδομένο, ακριβώς όπως τα αξιώματα του Peano είναι τα αξιώματα στο πλαίσιο στο οποίο το σύνολο $\mathbf{N}$ θεωρείται δεδομένο. Αυτό ακριβώς είναι τα αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

Θεώρημα 12.8 ***Α. Ιδιότητες πρόσθεσης.*** *Σε κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $x + y$ και ισχύει ότι:*
(i) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$,
(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$,
(iii) υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 0 ώστε $x + 0 = x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$,
(iv) για κάθε $x \in \mathbf{R}$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $-x$ ώστε $x + (-x) = 0$.
Β. Ιδιότητες πολλαπλασιασμού. *Σε κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε xy και ισχύει ότι:*
(i) $xy = yx$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$,
(ii) $(xy)z = x(yz)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$,
(iii) υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 1, διαφορετικό από τον 0, ώστε $x1 = x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$,
(iv) για κάθε $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε x^{-1} ώστε $xx^{-1} = 1$.
Γ. Επιμεριστική ιδιότητα. *$x(y + z) = xy + xz$ για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$.*
Δ. Ιδιότητες διάταξης. *Υπάρχει ένα υποσύνολο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $\mathbf{R}_+$ ώστε*
(i) $x + y \in \mathbf{R}_+$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}_+$,
(ii) $xy \in \mathbf{R}_+$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}_+$,
(iii) για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ακριβώς ένα από τα $x = 0$, $x \in \mathbf{R}_+$, $-x \in \mathbf{R}_+$ είναι σωστό.
Ε. Ιδιότητα συνέχειας. *Για κάθε δυο μη κενά υποσύνολα A, B του $\mathbf{R}$, για τα οποία ισχύει $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$, υπάρχει $\xi \in \mathbf{R}$ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.*

Επειδή το $\mathbf{R}$ έχει τις ιδιότητες πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού καθώς και την επιμεριστική ιδιότητα, χαρακτηρίζεται **σώμα**. Επειδή το $\mathbf{R}$ έχει και τις ιδιότητες διάταξης, χαρακτηρίζεται **διατεταγμένο σώμα**. Τέλος, επειδή το $\mathbf{R}$ έχει και την ιδιότητα συνέχειας, χαρακτηρίζεται **πλήρες διατεταγμένο σώμα**.

12.5 Εναλλακτικές μέθοδοι.

Στην υποενότητα 12.3 περιγράψαμε έναν τρόπο ορισμού των θετικών πραγματικών θεωρώντας γνωστούς τους θετικούς ρητούς (τους οποίους είχαμε ορίσει στην ενότητα 12.2 θεωρώντας γνωστούς τους φυσικούς από την ενότητα 12.1). Η μέθοδος που εφαρμόσαμε είναι η μέθοδος των **τομών Dedekind**.

Κάθε μέθοδος ορισμού των θετικών πραγματικών έχει τα εξής βασικά «συστατικά». Κατ΄ αρχάς ορίζονται τα «αντικείμενα» τα οποία χαρακτηρίζονται *θετικοί πραγματικοί*. Κατόπιν καθορίζεται μια **σχέση διάταξης** στο σύνολο των θετικών πραγματικών: καθορίζεται, δηλαδή, τι σημαίνει να είναι ένας θετικός πραγματικός *μεγαλύτερος* (ή *μικρότερος*) από έναν άλλον. Μετά ορίζεται η πράξη **πρόσθεση**: περιγράφεται διαδικασία σχηματισμού του *αθροίσματος* δυο θετικών πραγματικών. Τέλος, ορίζεται η πράξη **πολλαπλασιασμός**: περιγράφεται διαδικασία σχηματισμού του *γινομένου* δυο θετικών πραγματικών.

Αφού οριστεί η διάταξη και οι δυο πράξεις στο σύνολο των θετικών πραγματικών, απομένει να αποδειχτούν όλες οι γνωστές ιδιότητες: οι ιδιότητες πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, επιμερισμού, διάταξης και, κυρίως, η ιδιότητα συνέχειας.

Τέλος, από το σύνολο των θετικών πραγματικών ορίζεται το σύνολο των πραγματικών με τη διαδικασία της ενότητας 12.4.

Θα περιγράψουμε, τώρα, πολύ συνοπτικά, δυο εναλλακτικές μεθόδους ορισμού των θετικών πραγματικών θεωρώντας, πάντοτε, γνωστούς τους θετικούς ρητούς. Θα αποφύγουμε τις αποδείξεις, περιοριζόμενοι στην περιγραφή των εννοιών.

Α. Η μέθοδος με τις ακολουθίες Cauchy.

Μια ακολουθία (r_n) στο $\mathbf{Q}_+$ χαρακτηρίζεται **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\epsilon \in \mathbf{Q}_+$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε να είναι $|r_n - r_m| < \epsilon$ για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $n, m \geq n_0$.

Λέμε ότι δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbf{Q}_+$ είναι **ισοδύναμες** και γράφουμε $(r_n) \sim (s_n)$ αν $\lim_{n\to+\infty}(r_n - s_n) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon \in \mathbf{Q}_+$ υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε να είναι $|r_n - s_n| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση αυτή είναι *σχέση ισοδυναμίας* ανάμεσα στις ακολουθίες Cauchy στο $\mathbf{Q}_+$. Έτσι το σύνολο των ακολουθιών Cauchy στο $\mathbf{Q}_+$ διαμερίζεται σε *κλάσεις ισοδυναμίας*: δυο ακολουθίες Cauchy στο $\mathbf{Q}_+$ οι οποίες είναι ισοδύναμες ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας και δυο ακολουθίες Cauchy στο $\mathbf{Q}_+$ οι οποίες δεν είναι ισοδύναμες ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ισοδυναμίας θα την ονομάζουμε **θετικό πραγματικό** και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των θετικών πραγματικών, θα το συμβολίζουμε $\mathbf{R}_+$.

Έστω δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbf{Q}_+$. Λέμε ότι η (r_n) είναι **μεγαλύτερη από** την (s_n) ή, ισοδύναμα, ότι η (s_n) είναι **μικρότερη από** την (r_n) και συμβολίζουμε $(r_n) \succ (s_n)$ ή, ισοδύναμα, $(s_n) \prec (r_n)$ αν υπάρχουν $\delta \in \mathbf{Q}_+$ και $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε να είναι $r_n - s_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Αποδεικνύεται ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbf{Q}_+$ και $(r_n) \succ (s_n)$, $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(t_n) \succ (u_n)$. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος

(r_n) του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, $y < x$ αν είναι $(r_n) \succ (s_n)$ ή, ισοδύναμα, $(s_n) \prec (r_n)$.

Έστω δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbf{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $(r_n + s_n)$ στο $\mathbf{Q}_+$ είναι ακολουθία Cauchy. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbf{Q}_+$ και $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(r_n + s_n) \sim (t_n + u_n)$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (r_n) του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Ορίζουμε $x + y \in \mathbf{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $(r_n + s_n)$.

Τέλος, έστω δυο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbf{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $(r_n s_n)$ στο $\mathbf{Q}_+$ είναι ακολουθία Cauchy και, επίσης, ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbf{Q}_+$ και $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(r_n s_n) \sim (t_n u_n)$. Άρα μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (r_n) του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Ορίζουμε $xy \in \mathbf{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $(r_n s_n)$.

Αφού ορίσαμε τη σχέση διάταξης, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο $\mathbf{R}_+$, αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathbf{R}_+$ έχει όλες τις ιδιότητες οι οποίες περιγράφονται στην ενότητα 12.3, συμπεριλαμβανομένης της Ιδιότητας Συνέχειας.

Θα πρέπει να αναφέρουμε μια παραλλαγή αυτής της μεθόδου, όπου αντί για ακολουθίες Cauchy στο $\mathbf{Q}_+$ χρησιμοποιούνται αύξουσες, άνω φραγμένες ακολουθίες στο $\mathbf{Q}_+$.

Β. Η μέθοδος με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα.

Μια ακολουθία διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ θα λέμε ότι είναι **σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων** στο $\mathbf{Q}_+$ αν η (r_n) είναι αύξουσα στο $\mathbf{Q}_+$ και η (r_n') είναι φθίνουσα στο $\mathbf{Q}_+$ και $\lim_{n\to+\infty}(r_n' - r_n) = 0$.

Λέμε ότι δυο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbf{Q}_+$ είναι **ισοδύναμες** και γράφουμε $([r_n, r_n']) \sim ([s_n, s_n'])$ αν $\lim_{n\to+\infty}(r_n - s_n) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\lim_{n\to+\infty}(r_n' - s_n') = 0$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση αυτή είναι *σχέση ισοδυναμίας* ανάμεσα στις σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbf{Q}_+$. Έτσι το σύνολο των σημειακών ακολουθιών εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbf{Q}_+$ διαμερίζεται σε *κλάσεις ισοδυναμίας*. Κάθε τέτοια κλάση ισοδυναμίας θα την ονομάζουμε **θετικό πραγματικό** και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των θετικών πραγματικών, θα το συμβολίζουμε $\mathbf{R}_+$.

Έστω δυο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbf{Q}_+$. Λέμε ότι η $([r_n, r_n'])$ είναι **μεγαλύτερη από** την $([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, ότι η $([s_n, s_n'])$ είναι **μικρότερη από** την $([r_n, r_n'])$ και συμβολίζουμε $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, $([s_n, s_n']) \prec ([r_n, r_n'])$ αν υπάρχουν $\delta \in \mathbf{Q}_+$ και $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε να είναι $r_n - s_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. Αποδεικνύεται ότι, αν οι $([r_n, r_n'])$, $([s_n, s_n'])$, $([t_n, t_n'])$, $([u_n, u_n'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbf{Q}_+$ και $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$,

$([r_n, r_n']) \sim ([t_n, t_n'])$, $([s_n, s_n']) \sim ([u_n, u_n'])$, τότε $([t_n, t_n']) \succ ([u_n, u_n'])$. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, r_n'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, s_n'])$ του y. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, $y < x$ αν είναι $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, $([s_n, s_n']) \prec ([r_n, r_n'])$.

Έστω δυο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbf{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $([r_n + s_n, r_n' + s_n'])$ είναι σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbf{Q}_+$. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι $([r_n, r_n'])$, $([s_n, s_n'])$, $([t_n, t_n'])$, $([u_n, u_n'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbf{Q}_+$ και $([r_n, r_n']) \sim ([t_n, t_n'])$, $([s_n, s_n']) \sim ([u_n, u_n'])$, τότε $([r_n + s_n, r_n' + s_n']) \sim ([t_n + u_n, t_n' + u_n'])$. Μπορούμε, επομένως, να ορίσουμε τα εξής. Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, r_n'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, s_n'])$ του y. Ορίζουμε $x + y \in \mathbf{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $([r_n + s_n, r_n' + s_n'])$.

Τέλος, έστω σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbf{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $([r_n s_n, r_n' s_n'])$ είναι σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbf{Q}_+$. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι $([r_n, r_n'])$, $([s_n, s_n'])$, $([t_n, t_n'])$, $([u_n, u_n'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbf{Q}_+$ και $([r_n, r_n']) \sim ([t_n, t_n'])$, $([s_n, s_n']) \sim ([u_n, u_n'])$, τότε $([r_n s_n, r_n' s_n']) \sim ([t_n u_n, t_n' u_n'])$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbf{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, r_n'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, s_n'])$ του y. Ορίζουμε $xy \in \mathbf{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $([r_n s_n, r_n' s_n'])$.

Κατόπιν, μπορεί να αποδειχτεί ότι το σύνολο $\mathbf{R}_+$ έχει όλες τις ιδιότητες οι οποίες περιγράφονται στην ενότητα 12.3, συμπεριλαμβανομένης της Ιδιότητας Συνέχειας.

12.6 Η «αντίστροφη» θεμελίωση: από το R στο N.

A. Αξιώματα στο R.

Θεωρούμε δεδομένο ένα σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε $\mathbf{R}$ και του οποίου τα στοιχεία ονομάζουμε **πραγματικούς**. Το σύνολο $\mathbf{R}$ έχει τις εξής πρωταρχικές ιδιότητες, οι οποίες δεν αποδεικνύονται και γι αυτό ονομάζονται **αξιώματα**, και από τις οποίες αποδεικνύονται (σύμφωνα με τους στοιχειώδεις κανόνες της λογικής) όλες οι άλλες ιδιότητες του $\mathbf{R}$.

Α. Αξίωμα πρόσθεσης. Σε κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $x + y$ και ισχύει ότι:
(i) $x + y = y + x$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$,
(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$,
(iii) υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 0 ώστε $x + 0 = x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$,

(iv) για κάθε $x \in \mathbf{R}$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $-x$ ώστε $x + (-x) = 0$.

Β. Αξίωμα πολλαπλασιασμού. Σε κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε xy και ισχύει ότι:
(i) $xy = yx$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$,
(ii) $(xy)z = x(yz)$ για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$,
(iii) υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 1, διαφορετικό από τον 0, ώστε $x1 = x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$,
(iv) για κάθε $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε x^{-1} ώστε $xx^{-1} = 1$.

Γ. Αξίωμα επιμερισμού. $x(y + z) = xy + xz$ για κάθε $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Δ. Αξίωμα διάταξης. Υπάρχει ένα υποσύνολο του $\mathbf{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $\mathbf{R}_+$ ώστε
(i) $x + y \in \mathbf{R}_+$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}_+$,
(ii) $xy \in \mathbf{R}_+$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}_+$,
(iii) για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ακριβώς ένα από τα $x = 0$, $x \in \mathbf{R}_+$, $-x \in \mathbf{R}_+$ είναι σωστό.

Ε. Αξίωμα συνέχειας. Για κάθε δυο μη κενά υποσύνολα A, B του $\mathbf{R}$, για τα οποία ισχύει $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$, υπάρχει $\xi \in \mathbf{R}$ ώστε $a \leq \xi \leq b$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

Ο $x+y$ ονομάζεται **άθροισμα** των x, y και η πράξη η οποία σε κάθε x, y αντιστοιχίζει τον $x + y$ ονομάζεται **πρόσθεση** στο $\mathbf{R}$. Ο xy ονομάζεται **γινόμενο** των x, y και η πράξη η οποία σε κάθε x, y αντιστοιχίζει τον xy ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbf{R}$. Το στοιχείο 0 ονομάζεται **μηδέν** ή **ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης** και το στοιχείο 1 ονομάζεται **ένα** ή **μονάδα** ή **ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού**.

Από τα προηγούμενα, είναι $0 + x = x$ και $(-x) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Επίσης, $1x = x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $x^{-1}x = 1$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$.

Λόγω των αντιμεταθετικών και προσεταιριστικών ιδιοτήτων μπορούμε να παραλείπουμε παρενθέσεις κατά τη διαδοχική εκτέλεση προσθέσεων ή κατά τη διαδοχική εκτέλεση πολλαπλασιασμών καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης προσθέσεων ή τη σειρά εκτέλεσης πολλαπλασιασμών.

Στη συνέχεια θα δούμε πώς, από τα αξιώματα, αποδεικνύονται διάφορες γνωστές ιδιότητες του $\mathbf{R}$. Τις ιδιότητες αυτές έχουμε μάθει να τις χρησιμοποιούμε σε διάφορες πράξεις και ανισότητες αλγεβρικού τύπου και είναι όλες γνωστές από το γυμνάσιο και το λύκειο. *Τα αξιώματα τα οποία χρησιμοποιούνται για τις αποδείξεις των «αλγεβρικών» ιδιοτήτων είναι τα αξιώματα πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, επιμερισμού και διάταξης. Με τις συνέπειες του αξιώματος συνέχειας ασχοληθήκαμε στα κεφάλαια 1 - 11.*

Β. Αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbf{R}$.

Πρόταση 12.95 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbf{R}$ ώστε $z + x = y$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $z = y + (-x)$ και τότε $z + x = y + (-x) + x = y + 0 = y$.

Έστω $z \in \mathbf{R}$ ώστε $z + x = y$. Τότε $z = z + 0 = z + x + (-x) = y + (-x)$. $\natural$

Η λύση $z = y + (-x)$ της $z + x = y$ συμβολίζεται $y - x$ και ονομάζεται **διαφορά** των y, x. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ αντιστοιχίζει τον $y - x$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbf{R}$.

Πρόταση 12.96 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbf{R}$ ώστε $zx = y$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε $z = yx^{-1}$ και τότε $zx = yx^{-1}x = y1 = y$.
Έστω $z \in \mathbf{R}$ ώστε $zx = y$. Τότε $z = z1 = zxx^{-1} = yx^{-1}$. $\natural$

Η λύση $z = yx^{-1}$ της $zx = y$ συμβολίζεται $\frac{y}{x}$ και ονομάζεται **λόγος** των y, x. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ αντιστοιχίζει τον $\frac{y}{x}$ ονομάζεται **διαίρεση** στο $\mathbf{R}$.

Πρόταση 12.97 (1) *Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι μοναδικό.*
(2) *Το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι μοναδικό.*
(3) *Ο αντίθετος καθενός $x \in \mathbf{R}$ είναι μοναδικός.*
(4) *Ο αντίστροφος καθενός $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ είναι μοναδικός.*

Απόδειξη: (1) Έστω 0, $0'$ δυο ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης. Τότε $0 = 0 + 0' = 0'$.
(2) Έστω 1, $1'$ δυο ουδέτερα στοιχεία του πολλαπλασιασμού. Τότε $1 = 11' = 1'$.
(3) Έστω $x \in \mathbf{R}$ και y, y' δυο αντίθετοι του x. Τότε $y = y + 0 = y + x + y' = 0 + y' = y'$.
(4) Έστω $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ και y, y' δυο αντίστροφοι του x. Τότε $y = y1 = yxy' = 1y' = y'$. $\natural$

Πρόταση 12.98 (1) $-0 = 0$, $1^{-1} = 1$.
(2) *Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ είναι $-(-x) = x$.*
(3) *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $-(x + y) = -x - y$ και $-(x - y) = -x + y$.*
(4) *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $xy = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$ ή $y = 0$.*
(5) *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $(-x)y = x(-y) = -xy$ και $(-x)(-y) = xy$.*
(6) *Για κάθε $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ είναι $x^{-1} \neq 0$ και $(x^{-1})^{-1} = x$.*

Απόδειξη: (1) $-0 = (-0) + 0 = (-0) + 0 + 0 = 0 + 0 = 0$. Ομοίως, $1^{-1} = 1^{-1}1 = 1^{-1}11 = 11 = 1$.
(2) $-(-x) = (-(-x)) + 0 = (-(-x)) + (-x) + x = 0 + x = x$.
(3) $-(x + y) = (-(x + y)) + 0 = (-(x + y)) + 0 + 0 = (-(x + y)) + x + (-x) + y + (-y) = (-(x + y)) + (x + y) + (-x) + (-y) = 0 + (-x) + (-y) = -x - y$. Από αυτό, $-(x - y) = -(x + (-y)) = -x - (-y) = -x + y$.
(4) $0y + 0y = (0 + 0)y = 0y$. Άρα $0y = 0y + 0y + (-0y) = 0y + (-0y) = 0$. Ομοίως, $0x = 0$. Αντιστρόφως, έστω $xy = 0$. Αν $x \neq 0$, τότε $y = 1y = x^{-1}xy = x^{-1}0 = 0$.
(5) $(-x)y = (-x)y + xy + (-xy) = ((-x) + x)y + (-xy) = 0y + (-xy) = 0 + (-xy) = -xy$. Ομοίως, $x(-y) = -xy$. Τέλος, $(-x)(-y) = -x(-y) = -(-xy) = xy$.

(6) Έστω $x \neq 0$. Τότε $xx^{-1} = 1 \neq 0$, οπότε $x^{-1} \neq 0$. Επίσης, $(x^{-1})^{-1} = (x^{-1})^{-1}1 = (x^{-1})^{-1}x^{-1}x = 1x = x$. $\natural$

Αν $x \in \mathbf{R}_+$, ο x χαρακτηρίζεται **θετικός**. Αν $-x \in \mathbf{R}_+$, ο x χαρακτηρίζεται **αρνητικός**. Συμβολίζουμε $\mathbf{R}_-$ το σύνολο όλων των αρνητικών: $\mathbf{R}_- = \{x : -x \in \mathbf{R}_+\}$. Από το αξίωμα διάταξης συνεπάγεται ότι τα σύνολα $\mathbf{R}_-$, $\{0\}$ και $\mathbf{R}_+$ είναι ξένα ανά δύο – και, ειδικώτερα, ο 0 δεν είναι ούτε αρνητικός ούτε θετικός – και ότι $\mathbf{R} = \mathbf{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbf{R}_+$.

Πρόταση 12.99 (1) *Για κάθε $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ είναι $xx \in \mathbf{R}_+$.*
(2) *$1 \in \mathbf{R}_+$ και $-1 \in \mathbf{R}_-$.*

Απόδειξη: (1) Έστω $x \neq 0$. Αν $x \in \mathbf{R}_+$, τότε $xx \in \mathbf{R}_+$. Αν $x \in \mathbf{R}_-$, τότε $-x \in \mathbf{R}_+$, οπότε $xx = (-x)(-x) \in \mathbf{R}_+$. Επομένως, σε κάθε περίπτωση, είναι $xx \in \mathbf{R}_+$.
(2) Επειδή $1 \neq 0$, συνεπάγεται $1 = 11 \in \mathbf{R}_+$. Τώρα, επειδή $-(-1) = 1 \in \mathbf{R}_+$, είναι $-1 \in \mathbf{R}_-$. $\natural$

Έστω $x, y \in \mathbf{R}$. Λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και γράφουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, $y < x$ αν $x - y \in \mathbf{R}_+$ ή, ισοδύναμα, αν $y - x \in \mathbf{R}_-$.

Έστω $x, y \in \mathbf{R}$. Λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον x και γράφουμε $x \geq y$ ή, ισοδύναμα, $y \leq x$ αν $x > y$ ή $x = y$ ή, ισοδύναμα, αν $y < x$ ή $y = x$.

Πρόταση 12.100 *Έστω $x \in \mathbf{R}$. Ο x είναι θετικός αν και μόνο αν $x \in \mathbf{R}_+$ αν και μόνο αν $x > 0$. Επίσης, ο x είναι αρνητικός αν και μόνο αν $x \in \mathbf{R}_-$ αν και μόνο αν $x < 0$.*

Απόδειξη: Προφανής από τους ορισμούς. $\natural$

Πρόταση 12.101 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: $x = y$, $x > y$, $x < y$.*

Απόδειξη: Τα $x = y$, $x > y$, $x < y$ είναι ισοδύναμα, αντιστοίχως, με τα $x - y = 0$, $x - y \in \mathbf{R}_+$, $-(x - y) \in \mathbf{R}_+$. $\natural$

Πρόταση 12.102 ***Μεταβατική ιδιότητα***. *Έστω $x, y, z \in \mathbf{R}$.*
(1) *Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.*
(2) *Αν $x \leq y$ και $y < z$ ή αν $x < y$ και $y \leq z$, τότε $x < z$.*
(3) *Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.*

Απόδειξη: (1) Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $y - x \in \mathbf{R}_+$ και $z - y \in \mathbf{R}_+$, οπότε $z - x = (z - y) + (y - x) \in \mathbf{R}_+$ και, επομένως, $x < z$.
(2), (3) Προφανή από το (1). $\natural$

Πρόταση 12.103 *Έστω $x, y, z \in \mathbf{R}$. Είναι $x < y$ αν και μόνο αν $x + z < y + z$. Επίσης, είναι $x = y$ αν και μόνο αν $x + z = y + z$.*

Απόδειξη: Αν $x < y$, τότε $y - x \in \mathbf{R}_+$, οπότε $(y+z)-(x+z) = y-x \in \mathbf{R}_+$ και, επομένως, $x+z < y+z$. Από αυτό, αν $x+z < y+z$, τότε $x = x+z+(-z) < y+z+(-z) = y$.

Αν $x = y$, τότε, προφανώς, $x+z = y+z$. Από αυτό, αν $x+z = y+z$, τότε $x = x+z+(-z) = y+z+(-z) = y$. ♮

Πρόταση 12.104 *Έστω $x, y, z, w \in \mathbf{R}$.*
(1) Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x+z < y+w$.
(2) Αν $x \le y$ και $z < w$ ή αν $x < y$ και $z \le w$, τότε $x+z < y+w$.
(3) Αν $x \le y$ και $z \le w$, τότε $x+z \le y+w$.

Απόδειξη: (1) Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x+z < y+z < y+w$.
(2), (3) Προφανή από το (1). ♮

Πρόταση 12.105 *Έστω $x, y \in \mathbf{R}$. Αν $x, y > 0$ ή $x, y < 0$, τότε $xy > 0$. Αν $x > 0$, $y < 0$ ή $x < 0$, $y > 0$, τότε $xy < 0$.*

Απόδειξη: Αν $x, y > 0$, τότε $x, y \in \mathbf{R}_+$, οπότε $xy \in \mathbf{R}_+$ και, επομένως, $xy > 0$. Από αυτό, αν $x, y < 0$, τότε $-x, -y > 0$, οπότε $xy = (-x)(-y) > 0$. Τέλος, αν $x > 0$, $y < 0$, τότε $x > 0$, $-y > 0$, οπότε $-xy = x(-y) > 0$ και, επομένως, $xy < 0$. Ομοίως, αν $x < 0$, $y > 0$, τότε $xy < 0$. ♮

Πρόταση 12.106 *Αν $x > 0$, τότε $x^{-1} > 0$. Επίσης, αν $x < 0$, τότε $x^{-1} < 0$.*

Απόδειξη: Έστω $x > 0$. Αν $x^{-1} < 0$, τότε $1 = xx^{-1} < 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x^{-1} > 0$. Το δεύτερο μέρος είναι παρόμοιο. ♮

Πρόταση 12.107 *Έστω $x, y, z \in \mathbf{R}$. Αν $z > 0$, τότε είναι $x > y$ αν και μόνο αν $xz > yz$. Αν $z < 0$, τότε είναι $x > y$ αν και μόνο αν $xz < yz$.*

Απόδειξη: Έστω $z > 0$. Αν $x > y$, τότε $x - y > 0$, οπότε $xz - yz = (x-y)z > 0$ και, επομένως, $xz > yz$. Αντιστρόφως, αν $xz > yz$, τότε, επειδή $z^{-1} > 0$, είναι $x = xzz^{-1} > yzz^{-1} = y$.

Το δεύτερο μέρος είναι παρόμοιο. ♮

Πρόταση 12.108 *Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ είναι $x > y > 0$ ή $x < y < 0$ αν και μόνο αν, αντιστοίχως, $y^{-1} > x^{-1} > 0$ ή $y^{-1} < x^{-1} < 0$.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε την $y^{-1} - x^{-1} = (x-y)x^{-1}y^{-1}$. ♮

Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ορίζουμε την **απόλυτη τιμή** του x και την συμβολίζουμε $|x|$ ως τον $|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \\ -x, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$

Πρόταση 12.109 *Έστω $x, y \in \mathbf{R}$.*
(1) $|x| \ge 0$.
(2) $|x| > 0$ αν και μόνο αν $x \ne 0$. Επίσης, $|x| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.
(3) $|xy| = |x||y|$ και $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
(4) $||x| - |y|| \le |x \pm y| \le |x| + |y|$.

Απόδειξη: Τα (1), (2) είναι άμεσα από τον ορισμό της απόλυτης τιμής.
(3) Διακρίνουμε περιπτώσεις: (i) $x, y \geq 0$, (ii) $x, y < 0$, (iii) $x \geq 0$, $y < 0$ και (iv) $x < 0$ και $y \geq 0$.
(4) Αν $x, y \geq 0$, τότε $x + y \geq 0$, οπότε $|x + y| = x + y = |x| + |y|$. Αν $x, y < 0$, τότε $x + y < 0$, οπότε $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|$. Αν $x \geq 0$, $y < 0$ και $x + y \geq 0$, τότε $|x + y| = x + y = |x| - |y| \leq |x| + |y|$. Αν $x \geq 0$, $y < 0$ και $x + y < 0$, τότε $|x + y| = -(x + y) = -|x| + |y| \leq |x| + |y|$. Η περίπτωση $x < 0$, $y \geq 0$ είναι παρόμοια. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $|x + y| \leq |x| + |y|$. Επίσης, $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.

Τώρα, $|x| = |x+y+(-y)| \leq |x+y|+|-y| = |x+y|+|y|$, οπότε $|x|-|y| \leq |x+y|$. Άρα $|y|-|x| \leq |x+y|$. Άρα $||x|-|y|| \leq |x+y|$. Τέλος, $||x|-|y|| = ||x|-|-y|| \leq |x+(-y)| = |x-y|$. $\natural$

Γ. Φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί.

Ένα υποσύνολο A του $\mathbf{R}$ χαρακτηρίζεται **επαγωγικό** αν έχει τις ιδιότητες: (i) $1 \in A$ και (ii) αν $x \in A$, τότε $x + 1 \in A$.

Παραδείγματα: (1) Το $\mathbf{R}$ είναι επαγωγικό σύνολο διότι, προφανώς, έχει τις ιδιότητες (i), (ii).

(2) Το $A = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$ είναι επαγωγικό. Πράγματι, $1 \in A$ και, αν $x \in A$, τότε $x \geq 1$, οπότε $x + 1 \geq 1$ και, επομένως, $x + 1 \in A$.

(3) Το $A = \{x \in \mathbf{R} : x = 1 \text{ ή } x \geq 1 + 1\}$ είναι επαγωγικό. Πράγματι, $1 \in A$ και, αν $x \in A$, τότε $x \geq 1$, οπότε $x + 1 \geq 1 + 1$ και, επομένως, $x + 1 \in A$.

(4) Το $A = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1 + 1\}$ δεν είναι επαγωγικό, διότι $1 \notin A$.

(5) Το $A = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 1\}$ δεν είναι επαγωγικό. Το A έχει την ιδιότητα (i), διότι $1 \in A$. Όμως, δεν έχει την ιδιότητα (ii), διότι υπάρχει κάποιος $x \in A$ ώστε να μην ισχύει $x + 1 \in A$. Πράγματι, $1 \in A$ αλλά $1 + 1 > 1$, οπότε $1 + 1 \notin A$.

Ο $n \in \mathbf{R}$ χαρακτηρίζεται **φυσικός** αν ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο. Το σύνολο όλων των φυσικών συμβολίζεται $\mathbf{N}$. Δηλαδή

$$\mathbf{N} = \{n : n \text{ είναι φυσικός}\} = \{n : n \text{ ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο}\}.$$

Πρόταση 12.110 *Το $\mathbf{N}$ είναι επαγωγικό σύνολο και είναι υποσύνολο κάθε επαγωγικού συνόλου.*

Απόδειξη: $1 \in \mathbf{N}$, διότι ο 1 ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο. Κατόπιν, έστω $n \in \mathbf{N}$. Τότε ο n ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο, οπότε και ο $n+1$ ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο. Άρα $n + 1 \in \mathbf{N}$.

Άρα το $\mathbf{N}$ έχει τις ιδιότητες $(i), (ii)$ των επαγωγικών συνόλων, οπότε είναι επαγωγικό σύνολο. Τέλος, από τον ορισμό του $\mathbf{N}$ συνεπάγεται ότι είναι υποσύνολο κάθε επαγωγικού συνόλου. $\natural$

Η Πρόταση 12.110 αναδιατυπώνεται ως εξής: *το $\mathbf{N}$ είναι το μικρότερο επαγωγικό σύνολο.*

Πρόταση 12.111 *Για κάθε* $n \in \mathbf{N}$ *είναι* $n \geq 1$.

Απόδειξη: Έχουμε δει ότι το σύνολο $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$ είναι επαγωγικό. Επομένως, $\mathbf{N} \subseteq \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$. Άρα για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι $n \geq 1$. $\natural$

Πρόταση 12.112 *Για κάθε* $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 1$ *είναι* $n - 1 \in \mathbf{N}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbf{R} : x = 1 \text{ ή } x - 1 \in \mathbf{N}\}$.

Είναι προφανές ότι $1 \in A$.

Τώρα, έστω $x \in A$. Αν $x = 1$, τότε $x + 1 = 1 + 1$, οπότε $(x + 1) - 1 = 1 \in \mathbf{N}$ και, επομένως, $x + 1 \in A$. Αν $x \neq 1$, τότε $x - 1 \in \mathbf{N}$, οπότε $(x + 1) - 1 = x = (x - 1) + 1 \in \mathbf{N}$ και, επομένως, $x + 1 \in A$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, $x + 1 \in A$.

Άρα το A είναι επαγωγικό σύνολο, οπότε $\mathbf{N} \subseteq A$. Άρα για κάθε $n \in \mathbf{N}$ είναι $n \neq 1$ ή $n - 1 \in \mathbf{N}$. $\natural$

Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ο $n+1$ χαρακτηρίζεται **επόμενος** του n και για κάθε $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 1$ ο $n - 1$ χαρακτηρίζεται **προηγούμενος** του n. Προφανώς, ο 1 δεν έχει προηγούμενο στο $\mathbf{N}$.

Θεώρημα 12.9 ***Αρχή της Επαγωγής***. *Έστω* $A \subseteq \mathbf{N}$ *με τις ιδιότητες:* (i) $1 \in A$ *και* (ii) *αν* $x \in A$, *τότε* $x + 1 \in A$. *Τότε* $A = \mathbf{N}$.

Απόδειξη: Το A με τις ιδιότητες (i), (ii) είναι επαγωγικό σύνολο. Άρα $\mathbf{N} \subseteq A$. Επειδή $A \subseteq \mathbf{N}$, είναι $A = \mathbf{N}$. $\natural$

Η Αρχή της Επαγωγής παρουσιάζεται, συνήθως, στην εξής μορφή. Έστω $\Pi(n)$ μια πρόταση στην διατύπωση της οποίας περιλαμβάνεται μια μεταβλητή n η οποία παίρνει τιμές στο σύνολο $\mathbf{N}$ και έστω ότι *για κάθε τιμή του* n *στο* $\mathbf{N}$ *η αντίστοιχη πρόταση* $\Pi(n)$ *είναι είτε αληθής είτε ψευδής*. Υποθέτουμε ότι η $\Pi(n)$ έχει τις εξής δυο ιδιότητες: (i) *η* $\Pi(1)$ *είναι αληθής και* (ii) *αν η* $\Pi(n)$ *είναι αληθής, τότε και η* $\Pi(n + 1)$ *είναι αληθής*. Τότε ορίζουμε το **σύνολο αλήθειας** της $\Pi(n)$, δηλαδή το $A = \{n \in \mathbf{N} : \text{η } \Pi(n) \text{ είναι αληθής}\}$. Τότε η υπόθεσή μας «μεταφράζεται» ως εξής: (i) $1 \in A$ και (ii) αν $n \in A$, τότε $n + 1 \in A$. Άρα, σύμφωνα με την Αρχή της Επαγωγής, $A = \mathbf{N}$, δηλαδή το σύνολο αλήθειας της $\Pi(n)$ είναι το $\mathbf{N}$ ή, ισοδύναμα, η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbf{N}$.

Πρόταση 12.113 *Έστω* $n, m \in \mathbf{N}$. *Αν* $m > n$, *τότε* $m \geq n + 1$.

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ θεωρούμε την $\Pi(n)$: «αν $m \in \mathbf{N}$, $m > n$, τότε $m \geq n + 1$».

Η $\Pi(1)$ είναι η «αν $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$, τότε $m \geq 1 + 1$» και θα δούμε ότι είναι αληθής. Έστω $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$. Τότε $m - 1 \in \mathbf{N}$, οπότε $m - 1 \geq 1$ και, επομένως, $m \geq 1 + 1$. Άρα η $\Pi(1)$ είναι αληθής.

Έστω, τώρα, ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής. Δηλαδή, *υποθέτουμε* ότι αν $m \in \mathbf{N}$, $m > n$, τότε $m \geq n + 1$.

Η $\Pi(n + 1)$ είναι η «αν $m \in \mathbf{N}$, $m > n + 1$, τότε $m \geq (n + 1) + 1$» και θα δούμε ότι είναι αληθής. Έστω $m \in \mathbf{N}$, $m > n + 1$. Τότε $m \neq 1$, οπότε $m - 1 \in \mathbf{N}$. Επίσης, $m - 1 > n$. Βάσει της υπόθεσής μας (για την $\Pi(n)$), συνεπάγεται $m-1>n+1$ και, επομένως, $m>(n+1)+1$. Άρα η $\Pi(n+1)$ είναι αληθής.

Σύμφωνα με την Αρχή της Επαγωγής, η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$, $m>n$ είναι $m \geq n+1$. ♮

Η Πρόταση 12.113 λέει ότι: *για κάθε $n \in \mathbf{N}$ δεν υπάρχει κανένας φυσικός ανάμεσα στους n, $n+1$.*

Πρόταση 12.114 *Για κάθε $n, m \in \mathbf{N}$ είναι $n+m, nm \in \mathbf{N}$. Αν, επιπλέον, $n<m$, τότε είναι $m-n \in \mathbf{N}$.*

Απόδειξη: (1) Έστω $m \in \mathbf{N}$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ θεωρούμε την $\Pi(n)$: «$n+m \in \mathbf{N}$».

Η $\Pi(1)$ είναι η «$1+m \in \mathbf{N}$» και είναι αληθής διότι $m \in \mathbf{N}$.

Έστω ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής. Δηλαδή, *υποθέτουμε* ότι $n+m \in \mathbf{N}$.

Η $\Pi(n+1)$ είναι η «$(n+1)+m \in \mathbf{N}$». Επειδή υποθέσαμε ότι $n+m \in \mathbf{N}$, συνεπάγεται $(n+1)+m=(n+m)+1 \in \mathbf{N}$ και, επομένως, η $\Pi(n+1)$ είναι αληθής.

Άρα η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει ότι $n+m \in \mathbf{N}$.

(2) Έστω $m \in \mathbf{N}$. Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ θεωρούμε την $\Pi(n)$: «$nm \in \mathbf{N}$».

Η $\Pi(1)$ είναι η «$1m \in \mathbf{N}$» και είναι αληθής διότι $m \in \mathbf{N}$.

Έστω ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής. Δηλαδή, *υποθέτουμε* ότι $nm \in \mathbf{N}$.

Η $\Pi(n+1)$ είναι η «$(n+1)m \in \mathbf{N}$». Επειδή υποθέσαμε ότι $nm \in \mathbf{N}$, από το πρώτο μέρος (1) συνεπάγεται $(n+1)m=nm+n \in \mathbf{N}$ και, επομένως, η $\Pi(n+1)$ είναι αληθής.

Άρα η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει ότι $nm \in \mathbf{N}$.

(3) Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ θεωρούμε την $\Pi(n)$: «αν $m \in \mathbf{N}$, $m>n$, τότε $m-n \in \mathbf{N}$».

Η $\Pi(1)$ είναι η «αν $m \in \mathbf{N}$, $m>1$, τότε $m-1 \in \mathbf{N}$» και γνωρίζουμε ότι είναι αληθής.

Έστω, τώρα, ότι η $\Pi(n)$ είναι αληθής. Δηλαδή, *υποθέτουμε* ότι αν $m \in \mathbf{N}$, $m>n$, τότε $m-n \in \mathbf{N}$.

Η $\Pi(n+1)$ είναι η «αν $m \in \mathbf{N}$, $m>n+1$, τότε $m-(n+1) \in \mathbf{N}$» και θα δούμε ότι είναι αληθής. Έστω $m \in \mathbf{N}$, $m>n+1$. Τότε $m \neq 1$, οπότε $m-1 \in \mathbf{N}$. Επίσης, $m-1>n$. Βάσει της υπόθεσής μας (για την $\Pi(n)$), συνεπάγεται $(m-1)-n \in \mathbf{N}$ και, επομένως, $m-(n+1)=(m-1)-n \in \mathbf{N}$. Άρα η $\Pi(n+1)$ είναι αληθής.

Σύμφωνα με την Αρχή της Επαγωγής, η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbf{N}$, αν $m \in \mathbf{N}$, $m>n$ τότε $m-n \in \mathbf{N}$. ♮

Θεώρημα 12.10 ***Αρχή της Καλής Διάταξης***. *Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbf{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη: Έστω μη κενό $A \subseteq \mathbf{N}$.

Για κάθε $n \in \mathbf{N}$ θεωρούμε την $\Pi(n)$: «αν $m \in A$, τότε $m \geq n$».

Η $\Pi(1)$ είναι η «αν $m \in A$, τότε $m \geq 1$» και είναι αληθής διότι $A \subseteq \mathbf{N}$.

Επειδή το A δεν είναι κενό, υπάρχει $m_0 \in A$. Τότε η $\Pi(m_0+1)$ δεν είναι αληθής.

Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε η $\Pi(n_0)$ να είναι αληθής αλλά η $\Pi(n_0+1)$ να είναι ψευδής. Από το πρώτο συνεπάγεται ότι αν $m \in A$, τότε $m \geq n_0$. Από το δεύτερο συνεπάγεται ότι υπάρχει $m \in A$ ώστε $m < n_0 + 1$. Αυτός ο m πρέπει να είναι ο n_0. Δηλαδή, $n_0 \in A$ και αν $m \in A$, τότε $m \geq n_0$. Άρα ο n_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του A. $\natural$

Ο $n \in \mathbf{R}$ χαρακτηρίζεται **ακέραιος** αν ο n είναι φυσικός ή αν ο $-n$ είναι φυσικός ή αν $n = 0$. Συμβολίζουμε $\mathbf{Z}$ το σύνολο των ακεραίων.

Είναι σαφές ότι ο n είναι φυσικός αν και μόνο αν είναι θετικός ακέραιος.

Διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς το αν οι ακέραιοι που εμφανίζονται είναι θετικοί (δηλαδή, φυσικοί) ή αρνητικοί ή μηδέν, οι αποδείξεις των επόμενων δυο προτάσεων ανάγονται στις Προτάσεις 12.113 και 12.114. Θα αποφύγουμε τις αποδείξεις.

Πρόταση 12.115 *Έστω $n, m \in \mathbf{Z}$. Αν $m > n$, τότε $m \geq n + 1$.*

Πρόταση 12.116 *Για κάθε $n, m \in \mathbf{Z}$ είναι $n + m, n - m, nm \in \mathbf{Z}$.*

Ο $r \in \mathbf{R}$ χαρακτηρίζεται **ρητός** αν $x = \frac{m}{n}$, όπου $m, n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$. Το σύνολο των ρητών συμβολίζεται $\mathbf{Q}$. Κάθε $x \in \mathbf{R}$ ο οποίος δεν είναι ρητός χαρακτηρίζεται **άρρητος**.

Πρόταση 12.117 *Για κάθε $r, s \in \mathbf{Q}$ είναι $r + s, r - s, rs \in \mathbf{Q}$. Αν, επιπλέον, $s \neq 0$, τότε είναι $\frac{r}{s} \in \mathbf{Q}$.*

Απόδειξη: Αν $r = \frac{m}{n}$ και $s = \frac{k}{l}$, τότε $r + s = \frac{ml+kn}{nl}$, $r - s = \frac{ml-kn}{nl}$, $rs = \frac{mk}{nl}$ και $\frac{r}{s} = \frac{ml}{nk}$. $\natural$