

Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Β)

Διαγώνισμα Εξεταστικής Ιουνίου 2019

Διάρκεια 3 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.

Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.¹

Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (1.5 μονάδες) Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο \mathbb{R} :

$$f(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt, \quad g(x) = \int_0^x e^{t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(2) (2 μονάδες) (i) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Δείξτε ότι $\frac{[nf(x)]}{n} \rightarrow f(x)$ ομοιόμορφα \mathbb{R} .

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{[nx^2]}{n} dx$.

(iii) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$.

(3) (2 μονάδες) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_0^1 f(x) x^n dx = 0$ για $n = 0, 1, 2, \dots$

(i) Δείξτε ότι $\int_0^1 (f(x))^2 dx = 0$.

(ii) Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

(4) (2 μονάδες) (i) Δείξτε ότι η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ορίζει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί $f'(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, και υπολογίστε την τιμή $f^{(2019)}(0)$.

(5) (1.5 μονάδες) (i) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και A_1, \dots, A_k ανοιχτά υποσύνολα του X . Χρησιμοποιώντας τον ορισμό ανοιχτού συνόλου, δείξτε ότι το σύνολο $\bigcap_{i=1}^k A_i$ είναι ανοιχτό.

(ii) Δώστε παράδειγμα ανοιχτών υποσυνόλων A_1, A_2, \dots του \mathbb{R} (με τη συνηθισμένη μετρική) για τα οποία το σύνολο $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ δεν είναι ανοιχτό.

(6) (2 μονάδες) (i) Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f^2(x) + g^2(y) = 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f^2(x) + g^2(y) > 1\}.$$

Δείξτε ότι το A είναι κλειστό και το B ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 (με τη συνηθισμένη μετρική).

(ii) Εάν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) > 1$, δείξτε ότι το A είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^2 .

¹Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ'ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.