Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Β)

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2019
Διάρκεια 3 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.[1]
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2 μονάδες) (*i*) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \cos(x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(*ii*) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \cos(x^2)$ **δεν** είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(**2**) (2 μονάδες) (*i*) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{3} & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ δεν είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(*ii*) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \begin{cases} x & x \in \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$ είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και υπολογίστε το $\int_0^1 g(x)\,dx$.

(**3**) (1 μονάδα) Έστω $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{2018} |f(k+1) - f(k)| \leq \int_0^{2019} |f'(x)|\,dx.$$

(**4**) (2 μονάδες) Έστω $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με τύπο $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(*i*) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

(*ii*) Δείξτε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0.1, 1]$, όμως δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

(**5**) (2 μονάδες) (*i*) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ για $x \in (0,+\infty)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

(*ii*) Συγκλίνει η σειρά από το (*i*) ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$; Είναι η συνάρτηση f από το (*i*) φραγμένη στο $(0,+\infty)$;

(**6**) (2 μονάδες) (*i*) Εξετάστε (με σύντομη αιτιολόγηση) ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (με τη συνηθισμένη μετρική) είναι ανοιχτά, κλειστά, ή συμπαγή:

$$A = \mathbb{Q} \cap [0,1], \quad B = \{x \in \mathbb{R}\colon \cos(x^2) + \sin(x^2) < 1\}, \quad C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\big).$$

(*ii*) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία με $x_n \to^d x$ για κάποιο $x \in X$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι κλειστό. Είναι πάντα συμπαγές;

---

[1] Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση **αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής** επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο **αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα** του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.