

Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2020

Διάρκεια 1 ώρα και 45 λεπτά. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2 μονάδες) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \int_0^x [t] dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Εξετάστε εάν η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

(ii) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και εξετάστε εάν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

(2) (3 μονάδες) (i) Εξετάστε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^a), & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(ii) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_0^1 (f(x))^2 dx = 0$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Ισχύει το ίδιο εάν η f είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη;

(3) (2 μονάδες) (i) Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ ομοιόμορφα στο $(0, 1]$;

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \rightarrow e^x$ ομοιόμορφα σε **κάθε** φραγμένο υποδιάστημα $[a, b]$ του \mathbb{R} .

(iii) Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $p_n(x) \rightarrow e^x$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} ;

(4) (3 μονάδες) Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}, \quad x > 0.$$

(i) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$;

(ii) Είναι η f φραγμένη στο $(0, +\infty)$;

(iii) Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1]$; Στο $[1, +\infty)$;

(5) (2 μονάδες) (i) Εξετάστε εάν το σύνολο

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y \in \mathbb{Q}\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 (με τη συνηθισμένη μετρική).

(ii) Δείξτε ότι εάν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα A_n είναι κλειστά υποσύνολα του \mathbb{R} (με τη συνηθισμένη μετρική) και $A_n \subset [n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε και το $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι κλειστό σύνολο.