Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

10ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020

(**1**) (i) Δείξτε ότι $\overline{A} = [0,1]$, $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = [0,1]$, το A δεν είναι κλειστό ούτε ανοιχτό.

(ii) Δείξτε ότι $\overline{B} = [0,1]$, $B^\circ = B$, $\partial B = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, το B είναι ανοιχτό όχι όμως κλειστό.

(iii) Δείξτε ότι $\overline{C} = C$, $C^\circ = \bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+\frac{1}{n}) \cup \{2\}$, $\partial C = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{n, n+\frac{1}{n}\} \setminus \{2\}$, το C είναι κλειστό όχι όμως ανοιχτό.

(**2**) (i) Δείξτε ότι $\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x|^{2019} + |y|^{2019} \leq 1\}$, $A^\circ = A$, $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x|^{2019} + |y|^{2019} = 1\}$, το A είναι ανοιχτό όχι όμως κλειστό.

(ii) Δείξτε ότι $\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x|^{2019} + |y|^{2019} \leq 1\}$, $B^\circ = \emptyset$, $\partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x|^{2019} + |y|^{2019} \leq 1\}$, το B δεν είναι κλειστό ούτε ανοιχτό.

(iii) Δείξτε ότι $\overline{C} = \mathbb{R}^2$, $C^\circ = \emptyset$, $\partial C = \mathbb{R}^2$, το C δεν είναι κλειστό ούτε ανοιχτό. Για να δείξετε ότι $\overline{C} = \mathbb{R}^2$ χρησιμοποιήστε ακολουθίες της μορφής $(x_n, y_n + \frac{\sqrt{2}}{n})$ με $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ για να προσεγγίσετε οποιοδήποτε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(**3**) Έστω $x_n \in \ell_\infty(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $(x_n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $x_n \to^{d_\infty} x$. Αφού $x_n(k) \leq x_n(k{+}1)$ για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$, και η σύγκλιση στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$ συνεπάγεται σύγκλιση κατά συντεταγμένη, έχουμε $x(k) = \lim_{n\to\infty} x_n(k) \leq \lim_{n\to\infty} x_n(k+1) = x(k+1)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα η ακολουθία $x = (x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Άρα το σύνολο των αύξουσων φραγμένων ακολουθιών είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου $\ell_\infty(\mathbb{N})$

Το σύνολο των γνησίων αύξουσων φραγμένων ακολουθιών δεν είναι ανοιχτό υποσύνολο του χώρου $\ell_\infty(\mathbb{N})$, διότι σε κάθε r-περιοχή της ακολουθίας $\big(-\frac{1}{k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ έχουμε ακολουθίες που είναι τελικά 0 και επομένως όχι γνησίως αύξουσες.

(**4**) Έστω $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, και $x_n \to x$. Τότε η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n$. Επομένως, υπάρχει $k \in \{1, \ldots, n_0\}$ ώστε $x_n \in A_k$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$, και άρα υπάρχει υποακολουθία $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ ώστε $x_{n_m} \in A_k$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Αφού $x_{n_m} \to x$ και A_k κλειστό, έχουμε $x \in A_k$, και άρα $x \in A$. Επομένως το A είναι κλειστό.

(**5**) Για τη συνέχεια αρκεί να δείξουμε ότι $|f(x) - f(x')| \leq d(x,x')$ για κάθε $x, x' \in X$. Έστω $x, x' \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in A$ ώστε $d(x,y) \leq f(x) + \varepsilon$. Τότε $f(x') \leq d(x',y) \leq d(x,x') + d(x,y) \leq d(x,x') + f(x) + \varepsilon$. Επομένως $f(x') - f(x) \leq d(x,x') + \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, έχουμε $f(x') - f(x) \leq d(x,x')$. Παρόμοια, $f(x) - f(x') \leq d(x,x')$. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα έχουμε $|f(x) - f(x')| \leq d(x,x')$.

Τέλος παρατηρούμε ότι $f(x) = 0$ ανν υπάρχουν $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, με $d(x,x_n) \leq \frac{1}{n}$ το οποίο ισχύει αν και μόνο αν υπάρχουν $x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, με $x_n \to x$, δηλαδή ανν $x \in \overline{A}$.

(**6**) Έστω A κλειστό. Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = \{x \in X \colon f_A(x) < \frac{1}{n}\}$ όπου f_A η συνάρτηση της Άσκησης 5. Η f_A είναι συνεχής και $A_n = f^{-1}((-\infty, \frac{1}{n}))$, άρα το A_n είναι ανοιχτό υποσύνολο του X. Αφού το A είναι κλειστό εύκολα δείχνουμε ότι $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Έστω τώρα A ανοιχτό υποσύνολο του X. Τότε το A^c είναι κλειστό και από τα προηγούμενα υπάρχουν A_n, $n \in \mathbb{N}$, ανοιχτά υποσύνολα του X, ώστε $A^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Τότε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ και τα A_n^c είναι κλειστά υποσύνολα του X.

(**7**)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.
