Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020
Αναλυτικές Υποδείξεις.

(**1**) Για $a < -1$ δείξτε ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[0,1]$, άρα δεν είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Για $a \geq -1$ δείξτε ότι η f διαφέρει από μία συνεχή συνάρτηση στο $[0,1]$ το πολύ σε ένα σημείο, άρα είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(**2**) (i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\Big| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big|f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|\,dx.$$

Επίσης από την υπόθεσή μας έχουμε $\big|f(x) - f\big(\frac{k}{n}\big)\big| \leq L\big|x - \frac{k}{n}\big|$. Άρα το δεξί μέλος της προηγούμενης ανισότητας είναι μικρότερο ή ίσο από

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} L\Big|x - \frac{k}{n}\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{L}{n}\frac{1}{n} = \frac{L}{n}.$$

(ii) Χρησιμοποιήστε το (i) για $f(t) = t^p$ αφού πρώτα δείξετε ότι μπορείτε να πάρετε $L = p$.

(**3**) Έστω ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Τότε χρησιμοποιώντας την συνέχεια της f βρίσκουμε διάστημα $[c,d] \subset [a,b]$ και $m > 0$ ώστε $f(x) \geq m > 0$ για κάθε $x \in [c,d]$. Τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_c^d f(x)\,dx \geq m(d-c) > 0,$$

άτοπο από υπόθεση.

Για ολοκληρώσιμη f το συμπέρασμα δεν είναι σωστό, θεωρείστε πχ f η οποία είναι 0 εκτός από ένα σημείο.

(**4**) (i) Όχι. Πχ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, όμως $f^2 = 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(ii) Ναι. Έχουμε $m \leq g = e^f \leq M$ στο $[a,b]$ για κάποια $m, M > 0$. Η συνάρτηση $h(x) = \log x$ είναι συνεχής στο $[m,M]$, άρα από γνωστό θεώρημα η $h \circ g = f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(**5**) Έχουμε δει ότι η $f^2, g^2, fg, (f+tg)^2$, είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμες για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\int_a^b (f+tg)^2\,dx \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, άρα $\int_a^b f^2\,dx \cdot t^2 + 2\int_a^b f \cdot g\,dx \cdot t + \int_a^b g^2\,dx \geq 0$. Επομένως η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική, και η ζητούμενη ανισότητα προκύπτει άμεσα.

(**6**) (i) Έχουμε $x_n = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k}\,dx - \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x}\,dx$, οπότε

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k}\,dx - \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x}\,dx = \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k (\frac{1}{k} - \frac{1}{x})\,dx,$$

και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα.

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι η (x_n) είναι $Cauchy$. Από το (i) για $n > m$ έχουμε ότι

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})\,dx \le \sum_{k=m+1}^n (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}.$$

Από την ανισότητα αυτή προκύπτει εύκολα ότι η ακολουθία (x_n) είναι $Cauchy$.

(**7**) (i) Η f είναι φραγμένη άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [0,1]$. Έχουμε

$$\Big|\int_0^1 x^n f(x)\,dx\Big| \le \int_0^1 |x^n f(x)|\,dx \le M \int_0^1 x^n\,dx = \frac{M}{n+1}$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$. Εάν δεν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$ (γιατί δεν τον έχουμε αποδείξει ακόμη) τότε χρησιμοποιούμε ότι

$$\int_0^1 x^n\,dx = \int_0^a x^n\,dx + \int_a^1 x^n\,dx \le \int_0^a a^n\,dx + \int_a^1 1\,dx = a^{n+1} + (1-a) \to^{n\to\infty} 1 - a$$

το οποίο ισχύει για αυθαίρετο $a \in (0,1)$. Παίρνοντας $a \to 1^-$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n\,dx = 0$.

$(ii)^*$ Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.