Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020

(1) Δείξτε ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$$
συγκλίνει κατά σημείο στο $(0,+\infty)$. Συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$; Είναι η συνάρτηση που ορίζεται συνεχής στο $(0,+\infty)$; Παραγωγίσιμη; Φραγμένη;

(2) Δείξτε ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ σε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

(3) Υπολογίστε το άθροισμα
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}.$$

(4) Έστω $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $a > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 0$.

(5) Δείξτε ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
συγκλίνει κατά σημείο στο $(1,+\infty)$ σε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon (1,+\infty) \to \mathbb{R}$. Υπολογίστε την παράγωγο της f καθώς και τα όρια $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(6) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί $|f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε την συνάρτηση (δείξτε ότι η παρακάτω σειρά συγκλίνει απόλυτα)
$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Δείξτε ότι η συνάρτηση F είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο 1.

(Ορίζουμε $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f(x+k)$.)

(7)* Δείξτε ότι αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$.