
7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020
Αναλυτικές Υποδείξεις.

(**1**) Η κατά σημείο σύγκλιση προκύπτει έπειτα από σύγκριση με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Εάν είχαμε ομοιόμορφη σύγκλιση στο $(0,+\infty)$, τότε το όριο θα ήταν η συνάρτηση $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$. Οπότε θα είχαμε ότι $\lim_{n\to\infty}\|f(x)-S_n(x)\|_{(0,+\infty)}=0$ όπου $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2x^2}$. Όμως για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\|f(x)-S_n(x)\|_{(0,+\infty)}=\sup_{x\in(0,+\infty)}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2x^2}\Big)\geq\sup_{x\in(0,+\infty)}\Big(\frac{1}{1+(n+1)^2x^2}\Big)=1,$$

άρα $\|f(x)-S_n(x)\|_{(0,+\infty)}\not\to 0$. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$.

Από την άλλη, για κάθε $a>0$ έχουμε $\left\|\frac{1}{1+n^2x^2}\right\|_{[a,+\infty)}=\frac{1}{1+n^2a^2}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2a^2}<\infty$, άρα από το κριτήριο $Weierstrass$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Από γνωστό θεώρημα η οριακή συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$ για κάθε $a>0$, άρα είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

Για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ελέγχουμε με το κριτήριο $Weierstrass$ ότι για κάθε $a>0$ η σειρά των παραγώγων $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+n^2x^2})'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$ (πχ γιατί $\frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}\leq\frac{1}{a}\frac{2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}\leq\frac{1}{a}\frac{2}{(1+n^2a^2)}$ για $x\geq a$). Επιπλέον $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}<+\infty$. Οπότε εφαρμόζεται γνωστό θεώρημα το οποίο δίνει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ για κάθε $0<a<b<+\infty$ και άρα και στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}(f(x))\geq\sup_{x\in(0,+\infty)}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2x^2}\Big)=n.$$

Επομένως $\sup_{x\in(0,+\infty)}(f(x))=+\infty$ και η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο $(0,+\infty)$.

(**2**) Έχουμε $\left\|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right\|_{\mathbb{R}}=\frac{1}{n^3}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^3}<\infty$, άρα από το κριτήριο $Weierstrass$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ σε συνεχή συνάρτηση. Από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι

$$\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,dx}{n^3}=0.$$

Για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ελέγχουμε με το κριτήριο $Weierstrass$ ότι η σειρά των παραγώγων $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sin(nx)}{n^3})'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(0)}{n^3}=0<+\infty$. Οπότε εφαρμόζεται γνωστό θεώρημα το οποίο δίνει ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε φραγμενο διάστημα και άρα και σε όλο το $\mathbb{R}$.

(**3**) Ολοκληρώνοντας την ταυτότητα $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, η οποία ισχύει για $x \in [0,1)$, δείξαμε στο μάθημα ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x).$$

Εφαρμόζουμε τώρα παρόμοιο επιχείρημα με σημείο εκκίνησης την τελευταία ταυτότητα. Για $x \in [0,1)$ χρησιμοποιώντας το κριτήριο *Weierstrass* έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,x]$, άρα από γνωστό θεώρημα έχουμε

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Από την άλλη για $x \in [0,1)$ έχουμε

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\,dt = -\int_0^x \log(1-t)\,dt = (1-x)\log(1-x) + x.$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα παίρνουμε την ταυτότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -\int_0^x \log(1-t)\,dt = (1-x)\log(1-x) + x.$$

η οποία ισχύει για κάθε $x \in [0,1)$. Οπότε για $x = \frac{1}{2}$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = 1 - \log 2.$$

(**4**) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\left\|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(x)\right\|_{[a,+\infty)} \leq \varepsilon$. Από υπόθεση $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{n_0} f_n(x) = 0$, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για $x > M$ έχουμε $|\sum_{n=1}^{n_0} f_n(x)| \leq \varepsilon$. Οπότε για $x > M$ έχουμε

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\Big| \leq \Big|\sum_{n=1}^{n_0} f_n(x)\Big| + \Big\|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(x)\Big\|_{[a,+\infty)} \leq 2\varepsilon.$$

Επομένως, $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 0$.

(**5**) Η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (1,+\infty)$. Έστω $a > 1$. Έχουμε $\left\|\frac{1}{n^x}\right\|_{[a,+\infty)} = \frac{1}{n^a}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} < +\infty$, άρα από το κριτήριο *Weierstrass* η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Επιπλέον η σειρά των παραγώγων $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^x})' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Άρα από γνωστό θεώρημα η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ για κάθε $1 < a < b < +\infty$ και άρα και στο $(1,+\infty)$, και $f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^x}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\liminf_{x\to1+} f(x) \geq \liminf_{x\to1-} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι $\liminf_{x\to 1+} f(x) = +\infty$, άρα $\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[2, +\infty)$ και για κάθε $n \geq 2$ έχουμε $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 0$. Οπότε από την προηγούμενη άσκηση έχουμε $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 0$, άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 + \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1$.

(**6**) Έστω $a > 0$. Για $x \in [-a, a]$ και $n > a$ έχουμε

$$|f(x+n)| \leq \frac{1}{1+(x+n)^2} \leq \frac{1}{1+(n-a)^2}.$$

Άρα $\|f(x+n)\|_{[-a,a]} \leq \frac{1}{1+(n-a)^2}$ για $n > a$, οπότε $\sum_{n>a} \frac{1}{1+(n-a)^2} < +\infty$. Επομένως, από το κριτήριο $Weierstrass$ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f(x+n)$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο $[-a, a]$ σε συνεχή συνάρτηση στο $[-a, a]$. Αφού το a είναι αυθαίρετο, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f(x+n)$ συγκλίνει απόλυτα στο $\mathbb{R}$ σε συνεχή συνάρτηση. Το ίδιο ισχύει και για την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$ οπότε η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$ συγκλίνει (απόλυτα) σε συνεχή συνάρτηση $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Τέλος δείχνουμε ότι $F(x+1) = F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\Big|\sum_{k=-n}^{n} f(x+1+k) - \sum_{k=-n}^{n} f(x+k)\Big| = |-f(x-n)+f(x+n+1)| \leq \frac{1}{1+(x-n)^2} + \frac{1}{1+(x+n+1)^2},$$

άρα

$$F(x+1) - F(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=-n}^{n} f(x+1+k) - \sum_{k=-n}^{n} f(x+k) \Big) = 0.$$

(**7**)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.
