Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020

(1) Βρείτε το διάστημα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n^2\, 2^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}.$$

(2) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Δείξτε (χωρίς να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες τριγωνομετρικών συναρτήσεων) ότι

(i) $f'(x) = -g(x)$ και $g'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(3) Για $x \in (-1, 1)$ υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(4) Βρείτε το ανάπτυγμα *Taylor* της $f(x) = \log(1+x+x^2)$ στο διάστημα $(-1, 1)$ και υπολογίστε τις τιμές $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

(5) Βρείτε συναρτήσεις $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες έχουν ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά σε όλο το $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν $f(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(\sqrt{n}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(6) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι $f^{(n)}(0) = 0$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$

(ii) Εαν επιπλέον γνωρίσουμε ότι $|f^{(n)}(x)| \le 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $f \equiv 0$.

(7)* Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

(Θεωρούμε ότι $0^0 = 1$.)