Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020

(**1**) Θέτουμε $y = x^3$ και βρίσκουμε ότι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2\, 2^n}$ είναι το $[-2, 2]$. Επομένως το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n^2\, 2^n}$ είναι το $[-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$.

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει για $|x| < 1$ και αποκλίνει για $|x| > 1$. Για $x = \pm 1$ είναι προφανές ότι η σειρά δεν συγκλίνει. Επομένως το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1)$.

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει για $|x| < 1$ και αποκλίνει για $|x| > 1$. Για $x = \pm 1$ είναι προφανές ότι η σειρά συγκλίνει. Επομένως το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1]$.

(**2**) (i) Αρχικά δείξτε ότι και οι δύο σειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης $+\infty$. Επομένως οι παράγωγοι των f, g προκύπτουν παραγωγίζοντας τις σειρές όρο προς όρο και οι ζητούμενες σχέσεις προκύπτουν άμεσα.

(ii) Θέτουμε $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$, $x \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας το (i) παίρνουμε ότι

$$h' = 2ff' + 2gg' = -2fg + 2fg = 0.$$

Επίσης έχουμε $h(0) = 1$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $h(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**3**) Η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Για $x \in (-1, 1)$ θέτουμε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Από γνωστό θεώρημα έχουμε για $x \in (-1, 1)$ ότι

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Επίσης έχουμε $f(0) = 0$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dx = \arctan x$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(**4**) Αρχικά παρατηρούμε ότι $f(x) = \log(1 + x + x^2) = \log(\frac{1-x^3}{1-x}) = \log(1 - x^3) - \log(1 - x)$. Για $x \in (-1, 1)$ γνωρίζουμε ότι $\log(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Επομένως για $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

όπου $a_n = -\frac{2}{n}$ όταν το n είναι πολλαπλάσιο του 3 και $a_n = \frac{1}{n}$ αλλιώς.

Αφού $f^{(n)}(0) = n! a_n$, έχουμε $f(0) = 0$ και $f^{(n)}(0) = -2(n-1)!$ όταν το n είναι θετικό πολλαπλάσιο του 3 και $f^{(n)}(0) = (n-1)!$ αλλιώς.

(**5**) Η συνάρτηση $f(x) = \sin(2\pi x)$ έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί $f(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η συνάρτηση $g(x) = \sin(2\pi x^2)$ ικανοποιεί $g(\sqrt{n}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η g έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά στο $\mathbb{R}$ διότι από το ανάπτυγμα *Taylor* της $\sin x$ προκύπτει ότι

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n+1} x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**6**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) Από συνέχεια έχουμε ότι $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Το ότι $f'(0) = 0$ προκύπτει εφαρμόζοντας το θεώρημα *Rolle* στα διαστήματα $[0, \frac{1}{n}]$ παίρνουμε ότι υπάρχουν $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$ ώστε $f'(\xi_n) = 0$. Αφού $\xi_n \to 0$ από συνέχεια της f στο 0 παίρνουμε ότι $f'(0) = \lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = 0$.

Παρόμοια, δείξτε επαγωγικά ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακολουθία $(\xi_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \xi_{k,n} = 0$ και $f^{(k)}(\xi_{k,n}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς τότε $f^{(k)}(0) = \lim_{n\to\infty} f^{(k)}(\xi_{k,n}) = 0$.

(ii) Από την υπόθεσή μας παίρνουμε ότι για κάθε $a > 0$ έχουμε ότι

$$R_n = \sup_{x,\xi\in[-a,a]} \frac{|f^{(n)}(\xi)\, x^n|}{n!} \leq \frac{2^n a^n}{n!} \to 0.$$

Άρα το θεώρημα *Taylor* εφαρμόζεται και παίρνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$. Αφού $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, προκύπτει ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**7**)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.