Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020

---

(1) *(i)* Θα δείξουμε ότι το σύνολο A είναι κλειστό με την Ευκλείδια μετρική. Έστω $(x_n, y_n) \in A$, $n \in \mathbb{N}$, και $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, τότε $x_n \to x_0$ και $y_n \to y_0$. Αφού $x_n^{2019} + y_n^{2019} \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνοντας όρια έχουμε $x_0^{2019} + y_0^{2019} \leq 1$. Επομένως, $(x_0, y_0) \in A$.

Με την διακριτή μετρική όλα τα σύνολα είναι κλειστά, επομένως και το A.

(ii) Αρχικά βρίσκουμε την κλειστότητα του B με την Ευκλείδια μετρική. Έστω $(x_n, y_n) \in B$, $n \in \mathbb{N}$, και $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, τότε $x_n \to x_0$ και $y_n \to y_0$. Τα x_n, y_n παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, οπότε $x_0, y_0 \in C = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Επομένως $\overline{B} \subset C \times C$. Επίσης εύκολα δείχνουμε ότι κάθε στοιχείο του $C \times C$ είναι οριακό σημείο του B. Άρα $\overline{B} = C \times C$.

Με τη διακριτή μετρική τα μόνα οριακά σημεία ενός συνόλου είναι στοιχεία του συνόλου. Επομένως $\overline{B} = B$.

---

(2) Έστω $x_n \in \overline{A}$, $n \in \mathbb{N}$, και $x_n \to x_0$. Αφού το x_n είναι οριακό σημείο του A υπάρχει $y_n \in A$ ώστε $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$. Τότε $d(y_n, x_0) \leq d(x_n, y_n) + d(x_n, x_0) \to 0$, επομένως $y_n \to^d x_0$. Συμπεραίνουμε ότι το x_0 είναι οριακό σημείο του A, άρα $x_0 \in \overline{A}$.

Αφού το $\overline{A}$ περιέχει όλα τα οριακά του σημεία ταυτίζεται με την κλειστότητά του, δηλαδή $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

---

(3) Έχουμε $(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{k})^2 < 2(\frac{1}{(n+k)^2} + \frac{1}{k^2})$, επομένως από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{n+k} + \frac{1}{k})^2$ συγκλίνει. Άρα $x_n \in \ell_2(\mathbb{N})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $x_0 = (\frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$. Έχουμε

$$d_2(x_n, x_0)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$, αφού το τελευταίο άθροισμα είναι η ουρά της συγκλίνουσας σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Άρα $x_n \to^{d_2} x_0$.

---

(4) *(i)* Για $p = +\infty$ έχουμε $(\frac{1}{k^a})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ για κάθε $a > 0$. Έστω $p \in [1, +\infty)$. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{ap}} < +\infty$ αν και μόνο αν $a > \frac{1}{p}$. Επομένως, $(\frac{1}{k^a})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$ αν και μόνο αν $a > \frac{1}{p}$.

(ii) Έστω $(x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$ για κάποιο $p \in [1, +\infty)$. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < +\infty$, άρα $\lim_{k \to \infty} x(k) = 0$. Επομένως $|x(k)| \leq 1$ τελικά. Έστω $q = +\infty$. Τότε $(x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$. Έστω τώρα ότι $p < q < +\infty$. Αφού $|x(k)| \leq 1$ τελικά, έχουμε $|x(k)|^q = |x(k)|^p |x(k)|^{q-p} \leq |x(k)|^p$ τελικά, οπότε από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^q < +\infty$. Άρα $(x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_q(\mathbb{N})$.

Έστω $1 \leq p < q \leq +\infty$ και $\frac{1}{q} < a < \frac{1}{p}$. Τότε είδαμε στο ερώτημα *(i)* ότι η ακολουθία $(\frac{1}{k^a})_{k \in \mathbb{N}}$ ανήκει στον $\ell_q(\mathbb{N})$ αλλά δεν ανήκει στον $\ell_p(\mathbb{N})$.

(iii) Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $x_n = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$, όπου το $\frac{1}{n}$ εμφανίζεται στις n πρώτες συντεταγμένες, και $x_0 = (0, 0, \ldots)$. Τότε $x_n \in \ell_1(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, και $d_\infty(x_n, x_0) = \frac{1}{n} \to 0$, όμως $d_1(x_n, x_0) = 1 \not\to 0$.

(**5**) (i) Εύκολα δείχνουμε ότι η d είναι μετρική.

(ii) Έστω $x_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, και $k \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, k) \to 0$. Τότε $|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{k}| \to 0$. Επομένως, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{k}$, ή ισοδύναμα, $\lim_{n\to\infty} x_n = k$. Από αυτό προκύπτει εύκολα ότι $x_n = k$ τελικά. Άρα οι μόνες συγκλίνουσες ακολουθίες ως προς την μετρική d είναι οι τελικά σταθερές. Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ είναι κλειστά ως προς την μετρική d.

(**6**) (i) Έστω $x_n, x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Από τις δοσμένες ανισότητες προκύπτει ότι $d(x_n, x) \to 0$ αν και μόνο αν $d'(x_n, x) \to 0$. Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από αυτό.

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p \in [1, +\infty)$ η μετρική d_p είναι ισοδύναμη με την d_∞. Αρχικά παρατηρήστε ότι για $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα

$$\max_{k=1,\ldots,d} |a_k| \le \left(\sum_{k=1}^{d} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le d^{\frac{1}{p}} \max_{k=1,\ldots,d} |a_k|.$$

Από αυτό προκύπτει ότι $d_\infty(x, y) \le d_p(x, y) \le d^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$. Επομένως οι μετρικές d_p και d_∞ είναι ισοδύναμες.

(**7**)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.
