

## Απειροστικός Ι (Τμήμα Α)

### Διαγώνισμα Εξεταστικής Ιανουαρίου 2022

Διάρκεια 2 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά 1 ώρα.

Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.<sup>1</sup>

Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(1) (2.5 μονάδες) (i) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^{2021} + 2^{2021} + \dots + n^{2021}}{n^{2022}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}.$$

(ii) Έστω ότι η  $(z_n)$  ικανοποιεί  $z_1 = 1$  και  $z_{n+1} = z_n + \frac{1}{z_n^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Δείξτε ότι  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$ .

(2) (2.5 μονάδες) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^3}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{\log n}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+2}} \frac{1}{t^2 + 3} dt.$$

(3) (1.5 μονάδες) Έστω  $P$  πολυώνυμο βαθμού 2021 με αρνητικό μέγιστοβάθμιο συντελεστή. Δείξτε ότι η εξίσωση  $e^x = P(x)$  έχει τουλάχιστον μία και το πολύ 2022 λύσεις.

(4) (2 μονάδες) (i) Δείξτε ότι εάν  $1 < x \leq y$ , τότε

$$\frac{y-x}{2y\sqrt{\log y}} \leq \sqrt{\log y} - \sqrt{\log x} \leq \frac{y-x}{2x\sqrt{\log x}}.$$

(ii) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=3}^{\infty} (\sqrt{\log n} - \sqrt{\log(n-2)}).$$

(5) (3 μονάδες) (i) Υπολογίστε τα άοριστα ολοκληρώματα

$$\int \log(x+1) dx, \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx.$$

(ii) Δείξτε ότι

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x + \frac{x^3}{6}$$

για κάθε  $x \geq 0$  και εξετάστε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{x}} dx.$$

<sup>1</sup>Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ'ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.