

(1) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

(i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$ .

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^{10})}{(\sin x)^{10}}$ .

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{-1} + \log x)$ .

(2) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[ \frac{1}{x} \right]$ .

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} \right] e^{-\frac{1}{x}}$ .

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

(3) Εξετάστε αν τα παρακάτω όρια υπάρχουν:

(i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x^2)$ .

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}$ .

(iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\frac{1}{x}) \cdot (-1)^{[x]}$ .

(4) Υπολογίστε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$  εάν ισχύει

$$x + \sqrt{|x-1|} \leq f(x) \leq x + 2\sqrt{|x-1|}.$$

για κάθε  $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ .

(5) Έστω ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in (0, +\infty)$ . Υπολογίστε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  εάν γνωρίζετε ότι

$$x(f(x))^2 = xf(x^2) + 2$$

για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

(6)\* Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right).$$

(Πάρτε ως δεδομένο ότι η σειρά έχει θετικούς όρους.)