ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Α)

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2021

(1) *(i)* $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1+2/x}+\sqrt{1+1/x}}{\sqrt{1+1/x}+1} \to^{x\to+\infty} 1.$

(ii) $\frac{\sin(x^{10})}{(\sin x)^{10}} = \frac{\sin(x^{10})}{x^{10}} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{10} \to^{x\to 0} 1.$

(iii) $\lim_{x\to 0^+}(x^{-1}+\log x) =^{y=\frac{1}{x}} \lim_{y\to+\infty}(y-\log y) = \lim_{y\to+\infty} y(1-\frac{\log y}{y}) = +\infty.$

---

(2) *(i)* $1-x = x\left(\frac{1}{x}-1\right) \leq x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής το όριο είναι 1.

(ii) $\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{x}\right]e^{-\frac{1}{x}} =^{y=\frac{1}{x}} \lim_{y\to+\infty}[y]e^{-y} = 0$, αφού $[y]e^{-y} \leq \frac{y}{e^y} \to^{y\to+\infty} 0$.

(iii) $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x^2}} =^{y=\frac{1}{x}} \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y^2}$. Το τελευταίο όριο είναι $+\infty$ από το κριτήριο σύγκρισης αφού $\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \to e > 2$ και άρα $\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y^2} \geq 2^y$ για μεγάλα $y \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x^2}} =^{y=-\frac{1}{x}} \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{y^2}$. Το τελευταίο όριο είναι 0 από το κριτήριο σύγκρισης αφού $\left(1-\frac{1}{y}\right)^y \to e^{-1} < \frac{1}{2}$ και άρα $\left(1-\frac{1}{y}\right)^{y^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^y$ για μεγάλα $y \in \mathbb{R}$.

---

(3) *(i)* Δεν υπάρχει, πάρτε $x_n = \sqrt{2\pi n}$, $y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$.

(ii) Δεν υπάρχει, πάρτε $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $y_n = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$.

(iii) $\left|\sin(\frac{1}{x})\cdot(-1)^{[x]}\right| \leq \left|\sin(\frac{1}{x})\right| \to^{x\to+\infty} 0$, άρα το όριο είναι 0.

---

(4) Το κριτήριο παρεμβολής δίνει ότι $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

Επίσης $\frac{f(x)}{x} \geq 1 + \frac{\sqrt{|x-1|}}{x} \to^{x\to 0+} +\infty$, άρα το κριτήριο σύγκρισης δίνει $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = +\infty$.

---

(5) Έχουμε $(f(x))^2 = f(x^2) + \frac{2}{x}$. Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x^2) =^{y=x^2} \lim_{y\to+\infty} f(y) = L$, παίρνοντας όρια έχουμε $L^2 = L$ και αφού από υπόθεση $L > 0$ παίρνουμε $L = 1$.

---

(6)* **1η λύση:** Θα δείξουμε ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$. Αφού $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 0$, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = +\infty$. Θεωρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση και κάνουμε χρήση του κανόνα *l'Hospital*. Μετά από λίγες πράξεις αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x+1}+\log(x+1)-\log x}{-\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Κάνουμε χρήση του κανόνα *l'Hospital* άλλη μία φορά και παίρνουμε το ζητούμενο.

2η λύση: Αφού η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο e, έχουμε ότι $e > \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)^n$. Οπότε για $a_n = 1+\frac{1}{n} > 1$, $b_n = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2} > 1$, έχουμε

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq b_n^n - a_n^n = (b_n - a_n)(b_n^{n-1} + b_n^{n-2}a_n + \cdots + a_n^{n-1}) \geq \frac{1}{4n^2} \cdot n = \frac{1}{4n}.$$

Οπότε η σειρά αποκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης. (Εναλλακτικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το διωνυμικό ανάπτυγμα για να δείξετε την τελευταία ανισότητα.)
