ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Α)

8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2021

(**1**) (*i*) Δείξτε ότι η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$ έχει μοναδική λύση.

(*ii*) Γενικότερα, δείξτε ότι εαν $0 < a < b < c$, τότε η εξίσωση $a^x + b^x = c^x$ έχει μοναδική λύση.

(**2**) Έστω $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x+\sqrt{x}) - f(x)\big) = 0$.

(**3**) Έστω p πολυώνυμο βαθμού n. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^x = p(x)$ έχει το πολύ $n+1$ λύσεις.

(**4**) (*i*) Δείξτε ότι για κάθε $a > 1$ και $0 < x < y$ ισχύει ότι

$$ax^{a-1}(y-x) < y^a - x^a < ay^{a-1}(y-x).$$

(*ii*) Δείξτε ότι για κάθε $x, y > 0$ ισχύει ότι

$$(x+y)^{x+y} \leq 2^{x+y}\, x^x\, y^y.$$

(**5**) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

(*i*) $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \cos(\frac{1}{n})\big)$.

(*ii*) $\sum_{n=1}^{\infty} \big(e^{\frac{1}{n}} - 1\big)$.

(*ii*) $\sum_{n=1}^{\infty} \big(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\big)$.

(**6**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη ώστε $f\big(\frac{1}{n}\big) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(*i*) Δείξτε ότι $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

(*ii*) Δείξτε ότι $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(*iii*)* Εαν επιπλέον γνωρίσουμε ότι $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $f \equiv 0$.

(**7**)* Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 1$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f\big(\frac{a}{\sqrt{x}}\big)\Big)^x = e^{\frac{a^2}{2}}.$$
