ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι (Τμήμα Α)

8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2021

(1) (i) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$ είναι γνησίως φθίνουσα, $f(2) = 0$.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x - 1$ είναι γνησίως φθίνουσα και παρατηρήστε ότι $f(0) = 1$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

---

(2) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στο διάστημα $[x, x+\sqrt{x}]$. Παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_x \in (x, x+\sqrt{x})$ ώστε $|f(x+\sqrt{x}) - f(x)| = |f'(\xi_x)\sqrt{x}| \leq \frac{\sqrt{x}}{\xi_x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ καθώς $x \to +\infty$.

---

(3) Έστω ότι η εξίσωση $e^x = p(x)$ έχει τουλάχιστον $n+2$ λύσεις. Εφαρμόζοντας θεώρημα *Rolle* για την συνάρτηση $f(x) = e^x - p(x)$ παίρνουμε ότι η εξίσωση $e^x = p'(x)$ έχει τουλάχιστον $n+1$ λύσεις, και συνεχίζοντας έτσι ότι η εξίσωση $e^x = p^{(n+1)}(x) = 0$ έχει λύση. Άτοπο.

---

(4) (i) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την $f(x) = x^a$ στο διάστημα $[x, y]$. Παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_{x,y} \in (x, y)$ ώστε $y^a - x^a = a\,\xi_{x,y}^{a-1}(y-x)$. Χρησιμοποιώντας ότι $x < \xi_{x,y} < y$ και $a > 1$ έχουμε $x^{a-1} < \xi_{x,y}^{a-1} < y^{a-1}$ και παίρνουμε τις δύο ανισότητες.

(ii) Διαιρούμε με 2^{x+y} και παίρνουμε λογαρίθμους. Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε την ανισότητα $(x+y)\log\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq x\log x + y\log y$. Αυτό προκύπτει άμεσα από την ανισότητα *Jensen* για την κοίλη συνάρτηση $f(x) = x\log x$ στο $(0, +\infty)$.

---

(5) Όλες οι σειρές έχουν μη αρνητικούς όρους. Κάνοντας χρήση *l'Hospital* έχουμε:

(i) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$. Οπότε η σειρά συγκλίνει.

(ii) $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$. Οπότε η σειρά αποκλίνει.

(iii) $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}$, άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$. Οπότε η σειρά συγκλίνει.

---

(6) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(i) Από συνέχεια έχουμε ότι $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Το ότι $f'(0) = 0$ προκύπτει εύκολα από τον ορισμό. Ακόμη καλύτερα: Εφαρμόζοντας *Rolle* στα διαστήματα $[0, \frac{1}{n}]$ παίρνουμε ότι υπάρχουν $\xi_n \in (0, \frac{1}{n})$ ώστε $f'(\xi_n) = 0$. Αφού $\xi_n \to 0$ από συνέχεια της f στο 0 παίρνουμε ότι $f'(0) = \lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = 0$. Παρόμοια για την δεύτερη παράγωγο.

(ii) Επαγωγικά για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακολουθία $(\xi_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \xi_{k,n} = 0$ και $f^{(k)}(\xi_{k,n}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς τότε $f^{(k)}(0) = \lim_{n\to\infty} f^{(k)}(\xi_{k,n}) = 0$.

$(iii)^*$ Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αφού $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφαρμόζοντας τον τύπο $Taylor-Lagrange$ με κέντρο το $a = 0$ παίρνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_{x,n} \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_{x,n})x^n}{n!}$. Αφού από υπόθεση $|f^{(n)}(\xi_{x,n})| \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, παίρνοντας $n \to \infty$ έχουμε $f(x) = 0$.

(7)* Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} x\log\left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right) = \frac{a^2}{2}$. Αυτό μπορεί να δειχθεί εύκολα κάνοντας χρήση των υποθέσεων μας και του κανόνα $l'Hospital$ δύο φορές.