ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τελικό Διαγώνισμα-Χειμερινό Εξάμηνο 2015-2016
Διάρκεια 3 ώρες
Καλή επιτυχία!

(**1**) (2 μονάδες) (*i*) Δείξτε ότι εάν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 < +\infty$.

(*ii*) Δείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| = +\infty$.

(*iii*) Δείξτε ότι εαν $f \in C^2(\mathbb{T})$ τότε $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| < +\infty$.

(**2**) (2 μονάδες) Έστω $f, g \in C(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, g(nt)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\, dt$$

(**3**) (2 μονάδες) (*i*) Δείξτε ότι **δεν** υπάρχει $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ώστε $f * g = g$ για κάθε συνεχή $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

(*ii*) Δείξτε ότι υπάρχουν $f_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ώστε $\lim_{k\to+\infty} f_k * g = g$ για κάθε συνεχή $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

(**4**) (2 μονάδες) Είναι γνωστό ότι εάν $g(x) = (1-|x|)\,\mathbf{1}_{|x|\le 1}$ τότε $\hat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2$.

(*i*) Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx = \frac{2\pi}{3}.$$

(*ii*) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi x))^2}.$$

(**5**) (3 μονάδες) (**i**) Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(x_{n+m} - x_n)$ είναι ισοκατανεμημένη $\bmod 1$. Δείξτε ότι η (x_n) είναι ισοκατανεμημένη $\bmod 1$.

(**ii**) Εάν α άρρητος δείξτε ότι οι ακολουθίες $(n^2\alpha)$ και $(n^2\alpha + \log n)$ είναι ισοκατανεμημένες mod 1.

(**iii**) Εάν α άρρητος δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $[n^2\alpha] \equiv 0 \pmod{2016}$. Επίσης, δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $[n^2\alpha] \equiv 1821 \pmod{2016}$.

Ορολογία: $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx$, $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\, dx$, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ εάν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα και υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \le C/(1+x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{T})$ εάν η $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική. Η ακολουθία (x_n) είναι ισοκατανεμημένη $\bmod 1$ εάν η $(\{x_n\})$ είναι ισοκατανεμημένη στο $[0,1)$.