ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

Τελικό-Εαρινό Εξάμηνο 2016
Διάρκεια: 5 ώρες
Καλή Επιτυχία!

(**1**) (2 Μονάδες) (*i*) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

(*ii*) Εστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ και $f(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

(**2**) (1.5 Μονάδες) Έστω ότι η συνάρτηση $f\colon \overline{D} \to \overline{D}$ είναι ολόμορφη στο D και συνεχής στο $\overline{D}$. Εάν η f μηδενίζεται στα $a_1, \ldots, a_\ell \in D$ με τάξη $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N}$ αντίστοιχα, δείξτε ότι

$$|f(z)| \leq \prod_{j=1}^{\ell} \left| \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}\, z} \right|^{k_j} \qquad \text{για κάθε } \ z \in \overline{D}.$$

Επίσης, εάν έχουμε ισότητα για κάποιο $z \in D$ με $z \neq a_1, \ldots, a_\ell$, βρείτε τύπο για την f.

(**3**) (2 Μονάδες) (*i*) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, μη πολυωνυμική συναρτήση, και $\Omega_M := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > M\}$. Δείξτε ότι το σύνολο $f(\Omega_M)$ είναι ανοιχτό και πυκνό στο $\mathbb{C}$.

(*ii*) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $1-1$ συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι γραμμική.

(**4**) (2 Μονάδες) Για $k \in \mathbb{N}$ και $a, b \in D$ ορίζουμε $\mathcal{F}_{a,b} := \{f\colon D \to D \text{ ολόμορφη}, \ f(a) = b\}$, και

$$M_{k,a,b} := \sup\{|f^{(k)}(a)|, f \in \mathcal{F}_{a,b}\}.$$

(*i*) Δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a, b \in D$ το sup λαμβάνεται (δηλαδή είναι max).

(*ii*) Δείξτε ότι $M_{1,a,b} = \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$.

(**5**) (2 Μονάδες) (*i*) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, περιττή συνάρτηση, με τάξη μεγέθους το πολύ 1, η οποία μηδενίζεται στα ακέραια πολλαπλάσια του π με τάξη 1 και πουθενά αλλού. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = c \sin z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

(*ii*) Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n^2}} = 0$$

έχει άπειρες λύσεις.

(**6**) (1.5 Μονάδες) Έχουμε δει ότι για $Re(s) > 1$ η ζήτα συνάρτηση ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\zeta(s) - \frac{s}{s-1} = -s \int_1^{\infty} \{t\}\, t^{-s-1} dt.$$

Δείξτε ότι το δεξί μέλος ορίζει συνάρτηση ολόμορφη στο δεξί ημιεπίπεδο $\{Re(s) > 0\}$. Συμπεράνετε ότι η ζ μπορεί να επεκταθεί σε ολόμορφη συνάρτηση στο $\{Re(s) > 0\} \setminus \{1\}$.
