## ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

---

**5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2016**
**Παράδοση: Τετάρτη 20 Απριλίου.**

---

(**1**) Έστω $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $z_0 \in \Omega$ μηδενικό τάξης $m \in \mathbb{N}$ της $f$. Δείξτε ότι υπάρχει $r > 0$ και ολόμορφη ένα προς ένα συνάρτηση $g\colon D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = (g(z))^m$ για κάθε $z \in D(z_0, r)$. Συμπεράνετε ότι η $f$ είναι $m$ προς 1 σε περιοχή του $z_0$.

---

(**2**) Έστω $C = \{\gamma(t)\colon t \in [a, b]\}$ κλειστή καμπύλη. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z \mapsto n(\gamma, z)$ είναι σταθερή στις συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{C} \setminus C$ και ότι είναι 0 στην μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus C$.

---

(**3**) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $f$ συνάρτηση συνεχής στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο και ολόμορφη στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο. Υποθέτουμε ότι $|f(z)| < 1$ για $|z| = 1$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(z) = z^n$ έχει ακριβώς $n$ λύσεις στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο.

---

(**4**) Έστω $m \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι για κάθε αρκετά μεγάλο $n \in \mathbb{N}$, η εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = \alpha$$

δεν έχει καμία λύση στον δίσκο $D(0, m)$ εάν $\alpha = 0$ και ότι έχει $2\left[\frac{m}{2\pi}\right] + 1$ λύσεις εάν $\alpha = 1$.

---

(**5**) Έστω $f$ μερόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ ώστε $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = +\infty$. Δείξτε ότι η $f$ είναι ρητή συνάρτηση.

---

(**6**) (*i*) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση η οποία παίρνει κάθε τιμή $w \in \mathbb{C}$ το πολύ $n$ φορές. Δείξτε ότι η $f$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n$.

(*ii*) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Δείξτε ότι η $f$ παίρνει κάποια τιμή $w \in \mathbb{C}$ άπειρες φορές.

---