ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

Πρόοδος-Εαρινό Εξάμηνο 2016
Διάρκεια: 2.5 ώρες
Καλή Επιτυχία!

(**1**) (1.5 Μονάδες) Έστω $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις ώστε $f(z)\,g(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ή $g(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

(**2**) (1.5 Μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συναρτήση. Εάν η $Re(f)$ είναι φραγμένη, δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(**3**) (2 Μονάδες) Έστω f, g ολόμορφες και όχι ταυτοτικά 0 συναρτήσεις σε περιοχή του $z_0 \in \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Δείξτε ότι τα όρια $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ και $\lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$ υπάρχουν (πιθανώς ∞) και ότι

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

(**4**) (2 Μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Δείξτε ότι εάν $0 < r < s$, τότε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{|\zeta|=s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \Big)$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $r < |z| < s$.

(**5**) (2 Μονάδες) (i) Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε περιοχή του $z_0 \in \mathbb{C}$ και g συνάρτηση με πόλο τάξης 1 στο $z_0 \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι

$$Res_{z_0}(fg) = f(z_0)\cdot Res_{z_0}(g).$$

(ii) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{e^z - 1}\,dz.$$

(**6**) (2 Μονάδες) Έστω $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις ώστε $|f(z)| \le |g(z)|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = cg(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Όλοι οι κύκλοι θεωρούνται θετικά (αριστερόστροφα) προσανατολισμένοι.