

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2013

Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Παρασκευή 20 Δεκεμβρίου.

(1) (2 μονάδες) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) δυναμικό σύστημα και $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός T είναι *weak mixing* (ή *strong mixing*) αν και μόνο αν ο T^k είναι *weak mixing* (ή *strong mixing*).

(2) (2 μονάδες) Έστω (X, \mathcal{X}, μ, T) *weak mixing* δυναμικό σύστημα. Δείξτε ότι για κάθε $f \in L^2(\mu)$ έχουμε

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T^{n^2} f \xrightarrow{L^2(\mu)} \int f d\mu.$$

Υπόδειξη: σ_f ή vdC .

(3) (2 μονάδες) Δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα (X, \mathcal{B}, μ, T) είναι *weak mixing* αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία θετικών ακεραίων (n_k) με θετική πυκνότητα, και κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$, έχουμε $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} T^{-n_k} A) = 1$.

(4) (2 μονάδες) Θεωρούμε τα δυναμικά συστήματα $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, m_{\mathbb{T}}, T_i)$ όπου $T_1 x = 2x \pmod{1}$, $T_2 x = 2x + \sqrt{2} \pmod{1}$, $T_3 x = 3x \pmod{1}$. Και τα τρία συστήματα είναι *weak mixing* (δείξτε πχ ότι το δεύτερο είναι). Εξετάστε ποια είναι ισόμορφα.

(5) (3 μονάδες) Δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα (X, \mathcal{B}, μ, T) είναι *weak mixing* αν και μόνο αν για όλα τα σύνολα $A, B, C \in \mathcal{B}$ με θετικό μέτρο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(A \cap T^{-n} B \cap T^{-2n} C) > 0.$$
